**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
АВТОНОМНОЙ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ**

**РЕСПУБЛИКАНСКОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ
ЗАВЕДЕНИЕ
КРЫМСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

**Кафедра теоретической и прикладной информатики**

# Избранные главы современного естествознания

## *(Элементы вариационного исчисления и математической физики)*

Материалы лекций
для магистрантов специальности 8.080201 "Информатика"

Симферополь — 2007

**ББК 22.161.8+22.311**
**И32**

**Рекомендовано к опубликованию кафедрой теоретической и прикладной информатики РВУЗ "Крымский инженерно-педагогический университет"**
**Протокол № 2 от 13 сентября 2007 г.**

**Составитель: д.ф.-м.н., профессор Н.Д. Копачевский**

**Рецензенты:**

**Чехов В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики Таврического национального университета им. В.И. Вернадского**
**Закора Д.А. – к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского**

Методическое пособие разработано на основе материалов лекций по одноименному курсу, читаемому автором магистрантам специальности 8.080201 – "Информатика". В методическом пособии изложены базовые теоретические положения вариационного исчисления, а также классические задачи математической физики, исследуемые с их помощью. Теоретические положения иллюстрируются множеством примеров, обеспечивающих необходимый уровень усвоения представленного материала.

Пособие может использоваться студентами старших курсов и магистрантами как для аудиторных занятий, так и для самостоятельного изучения.

**И32 Избранные главы современного естествознания (Элементы вариационного исчисления и математической физики) / Сост. Н.Д. Копачевский. – Симферополь: НИЦ КИПУ, 2007. – 74 с.**

**И32 Обрані глави сучасного природознавства (Елементи варіаційного числення та математичної фізики) / Уклад. М.Д. Копачевський. – Сімферополь: НІЦ КІПУ,2007.–74 с.**

# Содержание


**Предисловие** **5**

**I Классические задачи вариационного исчисления** **6**

**1 Постановка задач вариационного исчисления** **6**
- 1.1 История вопроса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
- 1.2 Задача о брахистохроне . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
- 1.3 Задача Дидо . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
- 1.4 Задача о форме равновесия мыльной плёнки . . . . . . 10

**2 Необходимое условие экстремума** **11**
- 2.1 Функционалы. Функциональные пространства . . . . . 12
- 2.2 Непрерывность функционала . . . . . . . . . . . . . . . 14
- 2.3 Линейные функционалы. Вариация функционала . . . 16
- 2.4 Необходимое условие экстремума . . . . . . . . . . . . . 19

**3 Простейшая задача вариационного исчисления** **20**
- 3.1 Основная лемма вариационного исчисления . . . . . . . 20
- 3.2 Уравнение Эйлера . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
- 3.3 Примеры . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
- 3.4 Задача о форме равновесия мыльной пленки . . . . . . 24

**4 Задачи на условный экстремум** **26**
- 4.1 Простейшая изопериметрическая задача . . . . . . . . . 26
- 4.2 Принцип взаимности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
- 4.3 Решение задачи Дидо . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

**5 Некоторые более сложные задачи. Вариационные принципы механики** **30**
- 5.1 Функционалы с производными высшего порядка . . . . 30
- 5.2 Функционалы от нескольких искомых функций . . . . 32
- 5.3 Функционалы от функций нескольких переменных . . 33
- 5.4 Вариационные принципы механики . . . . . . . . . . . . 36

**II Классические задачи математической физики 38**

**6 Гиперболические уравнения. Поперечные колебания струны 38**
6.1 Постановка задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
6.2 Свободные колебания бесконечной струны. Метод Даламбера . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
6.3 Колебания конечной струны. Метод Фурье . . . . . . . 42

**7 Малые поперечные колебания мембраны 46**
7.1 Формулировка начально-краевой задачи . . . . . . . . . 47
7.2 Колебания прямоугольной мембраны . . . . . . . . . . . 48
7.3 Колебания круглой мембраны . . . . . . . . . . . . . . . 52

**8 Уравнение теплопроводности 55**
8.1 Постановка начально-краевой задачи . . . . . . . . . . . 55
8.2 Распространение тепла в стержне при постоянной температуре на концах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
8.3 Распространение тепла в стержне при разных условиях на концах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**9 Краевые и спектральные задачи 63**
9.1 Основные типы краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
9.2 Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
9.3 Классические спектральные задачи для оператора Лапласа . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
9.4 Двумерная смешанная задача в прямоугольной области 68
9.5 Двумерная неклассическая задача Стеклова . . . . . . 69

**Список литературы 72**

# Предисловие

Этот небольшой специальный курс лекций (общий объём 18 час.) предназначен для магистрантов, специализирующихся по теоретической и прикладной информатике. Здесь в качестве избранных глав естествознания предлагаются такие важные разделы, как элементы вариационного исчисления и задач математической физики.

В первой части курса даётся краткая историческая справка, связанная с возникновением задач вариационного исчисления, а также формулируются знаменитая задача о брахистохроне, задача Дидо и другие. Далее формулируется простейшая задача вариационного исчисления, даётся необходимое условие экстремума. Рассматриваются также задачи на условный экстремум и некоторые более сложные проблемы. Наконец, на примере одномерной задачи поясняются вариационные принципы механики.

Во второй части курса слушатели знакомятся с классическими задачами математической физики на примере линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Это задачи о малых поперечных колебаниях струны, мембраны, а также для уравнения теплопроводности. Даётся понятие также о краевых и спектральных задачах математической физики. Слушатели знакомятся с методом бегущих волн (метод Даламбера) и методом разделения переменных (методом Фурье). Приводятся примеры классических и неклассических спектральных задач.

В конце курса предполагается зачёт по изученному материалу.

# Часть I
# Классические задачи вариационного исчисления

В этой части курса рассматриваются простейшие задачи вариационного исчисления, выводится необходимое условие экстремума. Формулируются задачи на условный экстремум, рассматриваются некоторые классические задачи. Приводятся также случаи более сложных задач, формулируются вариационные принципы механики.

## 1 Постановка задач вариационного исчисления

### 1.1 История вопроса

Первые математические построения, которые превратили вариационное исчисление в самостоятельную область математики, относятся к середине 18 века и принадлежат Эйлеру и Лагранжу. В создании вариационного исчисления приняли активное участие Лежандр и многие другие выдающиеся математики: братья Бернулли, Пуассон, Вейерштрасс, Остроградский, Гамильтон, Якоби.

Работы Гамильтона и Якоби внесли также значительную ясность и в так называемые вариационные принципы механики, имеющие глубокое идейное значение. Эти принципы, с которыми можно познакомиться в данном курсе лекций, дают пути к единообразной трактовке различных физических и прикладных задач, а также дают общие подходы к их исследованию. Вариационные методы решения задач оказываются одними из наиболее эффективных в качественном и количественном отношениях.

По своей сути вариационное исчисление непосредственно примыкает к элементарной теории экстремумов, а по своему влиянию на современное развитие математики стоит на одном из первых мест. Так, развитие вариационного исчисления и теории интегральных уравнений привело к созданию в начале 20 века и дальнейшему развитию такой науки, как функциональный анализ.

В вариационном исчислении имеют дело с функционалами, точнее говоря, с интегральными функционалами. Здесь "аргументом" функционала является функция, т.е. точка в функциональном пространстве, а областью значений функционала — число, т.е. элемент

Рис. 1: Задача о брахистохроне

из $\mathbb{R}$. Решить задачу вариационного исчисления — это значит отыскать функцию, придающую при тех или иных условиях стационарное (минимальное или максиамльное) значение функционалу.

Подробнее о предмете вариационного исчисления сейчас будет пояснено на примерах.

## 1.2 Задача о брахистохроне

В конце 17 века П.Бернулли поставил задачу: какова должна быть плоская кривая, чтобы материальная точка, двигаясь без трения под действием силы тяжести, скатывалась из точки $A$ в точку $B$ за кратчайшее время? Эта кривая, дающая оптимальное решение, называется `брахистохроной` (см. рис. 1).

Перейдём к вариационной постановке задачи. Пусть уравнение кривой описывается функцией $y = y(x)$. Пусть в некоторый момент времени $t$ движущаяся точка $M(x, y)$ находится на расстоянии $y$ от оси $Ox$. Тогда её скорость

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}, \tag{1.1}$$

где $g > 0$ — ускорение силы тяжести.

Действительно, так как в начальный момент времени точка неподвижна, то в текущий момент $t$ кинетическая энергия точки равна изменению её потенциальной энергии, т.е.

$$\frac{m}{2}v^2 = mgy,$$

где $m > 0$ — масса точки. Отсюда и следует формула (1.1).

Заметим теперь, что пройденный путь $s(t)$ материальной точки равен

$$s(t) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx,$$

а

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Из этих соотношений и из (1.1) получаем, что

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx}{\sqrt{y(x)}},$$

откуда следует, что полное время $T$ скатывания точки равно

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}}dx. \tag{1.2}$$

Так как материальная точка должна находиться в начале координат при $t = 0$ и в точке $B$ при $t = T$, то должны также выполняться соотношения

$$y(0) = 0, \quad y(a) = b. \tag{1.3}$$

Итак, возникла задача о нахождении минимума интегрального функционала (1.2) при дополнительных условиях (1.3). Сейчас не будем уточнять, какому классу функций должна принадлежать искомая кривая $y = y(x)$. Отметим только, что она является "аргументом" интегрального функционала $T = T\{y\} \in \mathbb{R}$.

## 1.3 Задача Дидо

В качестве второго примера возьмём другую задачу вариационного исчисления, относящуюся к задачам на условный экстремум. Эта древняя задача называется `задачей Дидо` и связана со следующей легендой. Дидо, царица одного из государств Древней Греции, преследуемая царём соседнего государства, бежала в Северную Африку

Рис. 2: Задача Дидо

и попросила у местного населения участок земли, который можно охватить шкурой вола. Получив согласие на эту ничтожную просьбу, она на глазах у изумлённых зрителей разрезала шкуру вола на тонкие ремешки и, связав их друг с другом, охватила полученной нитью изрядный по тем временам участок. В дальнейшем она на этом участке основала город Карфаген.

Перейдём к математической формулировке задачи. Будем считать, что длина $L$ нити задана, а концы нити расположены в заданных точках $A$ и $B$ прямолинейного берега моря (см. рис. 2).

Тогда задача сводится к нахождению максимума функционала

$$S = \int_a^b y(x)dx \tag{1.4}$$

при дополнительном условии

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \tag{1.5}$$

и заданных краевых условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{1.6}$$

Рис. 3: Задача о форме равновесия мыльной плёнки

Сформулированная задача (1.4) – (1.6) — это типичная задача на условный экстремум: требуется найти (в определённом классе функций $y = y(x)$) максимальное значение функционала (1.4) при дополнительном условии (1.5) и краевых условиях (1.6).

## 1.4 Задача о форме равновесия мыльной плёнки

Эта задача, на первый взгляд кажущаяся не имеющей никакого практического применения, на самом деле весьма важна и является частным случаем проблемы определения конфигурации жидкого топлива в баке космической ракеты в условиях, близких к невесомости. Данная наука (гидромеханика невесомости) особенно активно развивалась во второй половине 20 века, в том числе и автором этого курса лекций.

Рассмотрим, однако, простейшую проблему, т.е. задачу о форме равновесия мыльной плёнки. Будем считать, что мыльная плёнка натянута на два колечка одинакового радиуса $R$, находящихся на расстоянии $2b$ друг от друга (см. рис. 3).

Как следует из теории поверхностного натяжения, плёнка между кольцами располагается таким образом, чтобы её площадь была минимальной. Естественно предположить, что плёнка имеет форму поверхности вращения, а уравнение сечения этой поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения, есть кривая $y = y(x)$. Тогда элемент $dS$ площади поверхности вращения, как доказывается в курсе математического анализа, равен

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Поэтому

$$S = S\{y\} = 2\pi \int_{-b}^{b} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx. \qquad (1.7)$$

Кроме того, кривая $y = y(x)$ должна проходить через точки $M_1(-b, R)$ и $M_2(b, R)$, т.е.

$$y(-b) = R, \quad y(b) = R. \qquad (1.8)$$

Таким образом, возникает задача о нахождении кривой $y = y(x)$, придающей минимальное значение функционалу (1.7) при краевых условиях (1.8).

# 2 Необходимое условие экстремума

Все вышеприведенные задачи — это задачи на экстремум, т.е. на минимум или максимум. Для функций нескольких переменных $u(x_1, \ldots, x_m)$, которые изучались в курсе математического анализа, необходимым условием экстремума было условие

$$du := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Здесь экстремум достигается в некоторых точках $x = (x_1, \ldots, x_m)$ из $\mathbb{R}^m$. Однако в задачах вариационного исчисления в качестве искомой является функция $y = y(x)$ (одной или нескольких переменных), которую можно задать, например, её коэффициентами Фурье,

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad -\pi < x < \pi,$$

т.е. счётным множеством чисел. Отсюда видно, что любую функцию можно считать элементом бесконечномерного пространства (почему?).

Итак, вариационное исчисление изучает экстремумы в задачах с бесконечным числом степеней свободы.

## 2.1 Функционалы. Функциональные пространства

Перейдём к уточнению понятия функционала.

**Определение 2.1.** *Закон, по которому каждой функции из некоторого класса $X$ ставится в соответствие число, называется функционалом.*

Приведём несколько конкретных примеров функционалов.

**Пример 2.1.**

$$I\{y\} := \int_0^1 y^2(x)dx.$$

*Вычислите $I\{y\}$ при $y = x$ и $y = x^2$.*

**Пример 2.2.**

$$J\{y\} := \int_2^4 (xy(x) + y'(x))\, dx.$$

*Докажите, что*

$$J\{Cy\} = CJ\{y\}, \quad C = const. \tag{2.1}$$

*Убедитесь также, что*

$$J\{y_1 + y_2\} = J\{y_1\} + J\{y_2\}. \tag{2.2}$$

*Следствием формул (2.1) и (2.2) является свойство*

$$J\{C_1y_1 + C_2y_2\} = C_1J\{y_1\} + C_2J\{y_2\},$$

*которое называют* **свойством линейности** *(аддитивности и однородности) функционала $J\{y\}$.*

**Пример 2.3.**

$$\Phi\{y\} := y(1).$$

*Это пример функционала, который является линейным, но не является интегральным.*

**Пример 2.4.**

$$F\{u\} := \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) d\Omega, \quad u = u(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\nabla u := \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}, \quad |\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2.$$

*Это пример функционала, зависящего от функции двух переменных.*

Скажем несколько слов о функциональных пространствах и об элементах этих пространств, входящих в область определения $X$ функционала. Как правило, $X$ представляет собой линейное пространство, состоящее из функций, над которыми линейные действия выполняются по естественным правилам: если $f_1$ и $f_2$ из $X$, то $C_1 f_1 + C_2 f_2 \in X$. Такие пространства называются функциональными пространствами.

**Определение 2.2.** *Подмножество $X' \subset X$ называется* ***линейным многообразием*** *пространства $X$, если для любых точек $y_1$ и $y_2$ из $X'$ все точки вида $y_1 + t(y_2 - y_1)$, $-\infty < t < \infty$, также принадлежат $X'$.*

В простейших задачах вариационного исчисления в качестве областей определения выступают линейные многообразия, обусловленные требованием выполнения краевых условий.

Функциональные пространства обычно являются нормированными. Это означает, что для любого элемента (т.е. функции) $f$ из $X$ введено понятие нормы $\|f\|$, обобщающее понятие длины. Норма удовлетворяет следующим известным требованиям (аксиомам нормы):

1°. $\|f\| \geqslant 0, \quad \|f\| = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0;$

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall f \in X;$

3°. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in X$ (неравенство треугольника).

Приведём некоторые примеры функциональных (линейных нормированных) пространств.

1°. Пространство $C([a,b])$ функций, заданных и непрерывных на конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$, с нормой

$$\|f\|_{C([a,b])} := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Эта норма отвечает равномерному уклонению функций друг от друга:

$$\|f_1 - f_2\|_{C([a,b])} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

2°. Пространство $C^1([a,b])$ функций, заданных и непрерывных при $a \leqslant x \leqslant b$ вместе со своей производной, с нормой

$$\|f\|_{C^1([a,b])} := \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| + \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| = \|f\|_{C([a,b])} + \|f'\|_{C([a,b])}.$$

Аналогично вводятся пространства $C^n([a,b])$ при $n = 2, 3, \ldots$.

3°. Пространство $L_2([a,b])$ (это гильбертово пространство) функций, заданных при $a < x < b$ (и не обязательно непрерывных), для которых норма

$$\|f\|_{L_2([a,b])} := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

принимает конечное значение. Это — пространство квадратично суммируемых функций.

Как хорошо известно, вышеперечисленные пространства 1° – 3° являются **полными линейными нормированными пространствами**. Такие пространства называются **банаховыми пространствами** по имени выдающегося польского математика Стефана Банаха (1892 – 1945).

Заметим, что

$$C^1([a,b]) \subset C([a,b]) \subset L_2([a,b]).$$

Отметим ещё, что одна и та же функция, рассматриваемая как элемент разных пространств, имеет разные нормы в них. Например,

$$\|x^2\|_{L_2([0,1])} = \left(\int_0^1 (x^2)^2 dx\right)^{1/2} = 1/\sqrt{5}, \quad \|x^2\|_{C([0,1])} = 1,$$

$$\|x^{-1}\|_{L_2([0,1])} = \left(\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx\right)^{1/2} = \infty, \quad x^{-1} \notin L_2([0,1]).$$

## 2.2 Непрерывность функционала

Рассмотрим произвольный функционал $I\{y\} : X \to \mathbb{R}$, предполагая, что $X$ — банахово пространство.

Напомним ещё раз, что в $X$ расстояние $\rho(x,y)$ между элементами $x$ и $y$ из $X$ определяется по закону

$$\rho(x,y) := \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

**Определение 2.3.** *Функционал $I\{y\}$ называется* **непрерывным** *в точке $y_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что*

$$|I\{y\} - I\{y_0\}| < \varepsilon \quad (\rho(y, y_0) = \|y - y_0\|_X < \delta).$$

Нетрудно видеть, что смысл определения непрерывности тот же, что и для функций одной или нескольких переменных. Далее, так как в определении непрерывности участвует норма пространства $X$, т.е. области определения $\mathcal{D}(I)$ функционала $I\{y\}$, то непрерывность функционала зависит от того нормированного пространства, на котором он считается заданным. В частности, один и тот же функционал может быть непрерывным на одном нормированном пространстве и разрывен на другом.

Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 2.5.** *Пусть*

$$I\{y\} := \int_a^b g(x)y(x)dx, \quad g(x) \in L_2([a,b]).$$

*Здесь $g(x)$ — фиксированная функция, а $y(x)$ — произвольная функция из $L_2([a,b])$.*

Данный функционал $I\{y\}$ линеен (проверьте !) и непрерывен. В самом деле, по неравенству Коши–Буняковского-Шварца, т.е. неравенству

$$\left| \int_a^b g(x)y(x)dx \right|^2 \leqslant \int_a^b |y(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

имеем

$$|I\{y_1\} - I\{y_2\}| = \left| \int_a^b g(x)\left(y_1(x) - y_2(x)\right)dx \right| \leqslant \|g\|_{L_2([a,b])} \cdot \|y_1 - y_2\|_{L_2([a,b])},$$

и потому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) := \varepsilon / \|g\|_{L_2([a,b])}$.

**Пример 2.6.** *Рассмотрим функционал*

$$I\{y\} := \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx, \quad \mathcal{D}(I) = X = C^1([a,b]).$$

*Убедимся, что он непрерывен в этом пространстве.*

Действительно,

$$|I\{y_1\} - I\{y_2\}| = \Big| \int_a^b \left(\sqrt{1+(y_1'(x))^2} - \sqrt{1+(y_2'(x))^2}\right) dx \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \frac{|y_1'(x)+y_2'(x)| \cdot |y_1'(x)-y_2'(x)|}{\left(\sqrt{1+(y_1'(x))^2}+\sqrt{1+(y_2'(x))^2}\right)} dx \leqslant \int_a^b |y_1'(x)-y_2'(x)| dx \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x)-y_2'(x)| \leqslant (b-a)\|y_1-y_2\|_{C^1([a,b])}.$$

Теперь для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/(b-a)$.

Оказывается, этот функционал, являясь непрерывным в $C^1([a,b])$, не является непрерывным в $C([a,b])$. Поясним это свойство лишь на том частном случае, когда $y_2'(x) = \alpha = \text{const}$, а $y_1(x)$ — пилообразная ломанная линия, у которой $|y_1'(x)| = c$ (там, где производная существует), причём $c$ много больше $\alpha$, а

$$\|y_1 - y_2\|_{C([a,b])} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |y_1(x) - y_2(x)| < \delta.$$

Тогда

$$I\{y_1\} - I\{y_2\} = \int_a^b \left(\sqrt{1+c^2} - \sqrt{1+\alpha^2}\right) dx =$$

$$= \frac{c^2-\alpha^2}{\sqrt{1+c^2}+\sqrt{1+\alpha^2}}(b-a) \sim c(b-a) \ (c\to\infty),$$

и потому эту разность можно подбором $c$ сделать как угодно большой при как угодно малом $\delta > 0$. Это и означает, что свойства непрерывности в пространстве $C([a,b])$ у $I\{y\}$ нет.

## 2.3 Линейные функционалы. Вариация функционала

Пусть $X$ — линейное нормированное пространство.

**Определение 2.4.** *Функционал $I\{y\}$ с областью определения $\mathcal{D}(I) = X$ называется* ***линейным*** *в $X$, если:*

*1°. Он аддитивен и однороден, т.е.*

$$I\{C_1y_1 + C_2y_2\} = C_1 I\{y_1\} + C_2 I\{y_2\};$$

*2°. $I\{y\}$ — непрерывен в $X$.*

Примеры линейных функционалов уже встречались ранее (см. примеры 2.2 (в $C^1([2,4])$), 2.3 (в $C([0,1])$), 2.5 (в $L_2([a,b])$); докажите, в частности, свойства непрерывности функционалов из примеров 2.2 и 2.3).

На основе понятия линейного функционала строится понятие вариации произвольного функционала. Вариация функционала — одно из центральных понятий в вариационном исчислении. Оно играет ту же роль, что и понятие дифференциала для функции одной или нескольких переменных.

Вариация функционала есть главная линейная часть его приращения. Перейдём к точным формулировкам.

Пусть задан функционал $I\{y\} : X \to \mathbb{R}$. Приращением, или **вариацией** (изменением) аргумента $\bar{y} \in X$ называется разность между двумя элементами из $X$:

$$\delta y := y - \bar{y}.$$

Если, например, $X = C^1([a,b])$, то

$$\delta y(x) := y(x) - \bar{y}(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$
$$\|\delta y\|_{C^1([a,b])} = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x) - \bar{y}(x)| + \max_{a\leqslant x\leqslant b}|y'(x) - \bar{y}'(x)|.$$

Часто вариации элементов из $X$ считаются малыми (как дифференциалы независимого переменного) в смысле нормы пространства $X$. В рассмотренном только что примере малость вариации $\delta y(x)$ означает близость функций $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ и их производных $y'(x)$ и $\bar{y}'(x)$ на всём отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть при аргументе $\bar{y} \in X$ функционал $I\{y\}$ имеет значение $I\{\bar{y}\}$. Тогда приращение функционала, отвечающее переходу от $\bar{y} \in X$ к произвольному $y \in X$, вычисляется по формуле

$$\Delta I = I\{y\} - I\{\bar{y}\} = I\{\bar{y} + \delta y\} - I\{\bar{y}\}.$$

**Определение 2.5.** *Говорят, что функционал $I\{y\}$ имеет в точке $\bar{y} \in X$ вариацию $\delta I\{\bar{y}, \delta y\}$, если его приращение $\Delta I$ в данной точке функционального пространства можно представить в виде*

$$\Delta I = \delta I + \alpha(\|\delta y\|), \tag{2.3}$$

*где $\alpha \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, а $\delta I$ — линейный функционал относительно $\delta y$.*

Из формулы (2.3) видно, что $\delta I\{\bar{y}, \delta y\}$ есть **главная и притом линейная** часть приращения функционала.

Приведём некоторые примеры.

**Пример 2.7.** *Пусть* $X = L_2([a, b])$,

$$I\{y\} := \int_a^b y^2(x)dx.$$

*Тогда*

$$\Delta I = \int_a^b \left(y^2(x) - \bar{y}^2(x)\right) dx = \int_a^b \left[(\bar{y}(x) + \delta y(x))^2 - \bar{y}^2(x)\right] dx =$$

$$= 2\int_a^b \bar{y}(x)\delta y(x)dx + \int_a^b |\delta y(x)|^2 dx = 2\int_a^b \bar{y}(x)\delta y(x)dx + \|\delta y\|^2_{L_2([a,b])}.$$

*Если здесь взять* $\alpha = \|\delta y\|^2_{L_2([a,b])}$*, то* $\alpha \to 0$ *при* $\|\delta y\|_{L_2([a,b])} \to 0$*, и по определению получаем, что*

$$\delta \int_a^b y^2(x)dx = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx.$$

**Пример 2.8.** *Пусть* $X = C^1([0, 1])$,

$$I\{y\} := \int_a^b \left(y^2(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\right) dx.$$

*Тогда, используя формулу Тейлора, имеем*

$$\Delta I = \int_0^1 \left\{(\bar{y} + \delta y)^2 \sqrt{1 + [\bar{y}' + (\delta y)']^2} - \bar{y}^2(x)\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}\right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{\left[2\bar{y}\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}\delta y + \bar{y}^2 \cdot \frac{2\bar{y}'}{2\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}}\delta y'\right] + \tilde{\alpha}\delta y + \tilde{\beta}\delta y'\right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{2\bar{y}\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}\delta y + \frac{\bar{y}^2\bar{y}'}{\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}}\delta y'\right\} dx + \int_0^1 \left(\tilde{\alpha}\delta y + \tilde{\beta}\delta y'\right) dx.$$

*Так как* $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \to 0$ *при* $y' - \bar{y}' \to 0, y - \bar{y} \to 0$*, то главная линейная часть приращения функционала* $I\{y\}$ *есть*

$$\delta I\{y, \delta y\} = \int_0^1 \left[2y\sqrt{1 + (y')^2}\delta y + \frac{y^2 y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\delta y'\right] dx.$$

**Пример 2.9** (наиболее общий)**.** *Пусть* $X = C^1([a,b])$,

$$I\{y\} := \int_a^b F(x,y,y')dx.$$

*Тогда, рассуждая, как в предыдущем примере, и используя формулу Тейлора, получаем*

$$\delta I\{y,\delta y\} = \int_a^b \left[F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')\delta y'\right] dx. \tag{2.4}$$

**Замечание 2.1.** *Можно проверить, что вариация функционала* $I\{y\}$ *вычисляется по формуле*

$$\delta I\{\bar{y},\delta y\} = \frac{d}{d\varepsilon} I\{\bar{y} + \varepsilon\delta y\}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{2.5}$$

*и приводит, конечно же, к результату* (2.4) *(проделайте это!).*

## 2.4 Необходимое условие экстремума

Это условие совершенно аналогично необходимому условию экстремума фунции одной или нескольких переменных.

**Теорема 2.1.** *Для того, чтобы функционал* $I\{y\} : X \to \mathbb{R}$ *при* $y = \bar{y}$ *достигал экстремума, необходимо, чтобы его вариация обращалась в нуль при* $y = \bar{y}$ *т.е.*

$$\delta I\{\bar{y},\delta y\} = 0. \tag{2.6}$$

*Доказательство.* Рассмотрим для определённости случай минимума. Если $I\{y\}$ при $y = \bar{y}$ достигает минимума, то

$$\Delta I = I\{\bar{y} + \delta y\} - I\{\bar{y}\} \geqslant 0$$

для всех $\delta y$, для которых $\|\delta y\|$ достаточно мала. Однако по определению вариации

$$\Delta I = \delta I\{\bar{y},\delta y\} + \alpha(\|\delta y\|), \quad \alpha \to 0 \quad (\|\delta y\| \to 0)\,. \tag{2.7}$$

Если $\delta I\{\bar{y},\delta y\} \neq 0$, то при достаточно малых (по норме) $\delta y$ знак выражения справа определяется знаком первого (главного) члена. Но $\delta I$ — линейный функционал и потому

$$\delta I\{\bar{y},(-\delta y)\} = -\delta I\{\bar{y},\delta y\}.$$

Значит, при $\delta I \neq 0$ выражение (2.7) может быть как положительным, так и отрицательным при сколь угодно малом $\|\delta y\|$. Тогда минимум $I\{y\}$ в точке $y = \bar{y}$ невозможен. Поэтому, $\delta I\{\bar{y},\delta y\} = 0$. □

**Замечание 2.2.** *Условие (2.6) вытекает также формально из выражения (2.5) для вариации функционала: если $I\{\bar{y}+\varepsilon\delta y\}$ имеет экстремум при $\varepsilon = 0$, то по теореме Ферма*

$$\frac{d}{d\varepsilon} I\{\bar{y}+\varepsilon\delta y\}\Big|_{\varepsilon=0} = \delta I\{\bar{y}, \delta y\} = 0. \qquad (2.8)$$

# 3 Простейшая задача вариационного исчисления

Изучение конкретных задач вариационного исчисления начнем с так называемой простейшей задачи.

## 3.1 Основная лемма вариационного исчисления

Пусть $F = F(x, y, z)$ — функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно.

Простейшая задача ставится следующим образом: среди всех функций $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям закрепления на концах

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \qquad (3.1)$$

найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$I\{y\} := \int_a^b F(x, y, y')dx. \qquad (3.2)$$

Здесь, очевидно,

$$X = \mathcal{D}(I) = \left\{y(x) \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\right\}. \qquad (3.3)$$

Согласно теореме 2.1 решение $y = y(x)$ задачи (3.1) – (3.3) должно удовлетворять условию

$$\delta I\{y, \delta y\} = 0,$$

т.е. (см. пример 2.9) должно выполняться соотношение

$$\int_a^b \left[F'_y(x, y, y')\delta y + F'_{y'}(x, y, y')\delta y'\right] dx = 0 \qquad (3.4)$$

для любого $\delta y$, которое, в силу условий (3.1), принадлежит множеству

$$\left\{\delta y(x) \in C^1([a,b]) : \ \delta y(a) = 0, \ \delta y(b) = 0\right\}. \qquad (3.5)$$

Опираясь на эти факты, можно будет далее получить дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять экстремаль функционала $I\{y\}$. Однако предварительно рассмотрим вспомогательное утверждение

**Лемма 3.1** (основная лемма вариационного исчисления)**.** *Пусть* $f(x) \in C([a,b])$ *и выполнено условие*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0, \quad \forall h(x) \in C([a,b]), \ h(a) = h(b) = 0.$$

*Тогда* $f(x) \equiv 0$.

*Доказательство.* Предположим, напротив, что $f(x)$ положительна в некоторой внутренней точке $x_0 \in (a,b)$, т.е. $f(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ найдется малая окрестность $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ точки $x_0$, где $f(x) > 0$. Выберем $h(x)$ так, чтобы $h(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$ и $h(x) \equiv 0$ вне этого интервала (например, можно положить $h(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^2$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$). Тогда

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)h(x)dx > 0,$$

так как подинтегральная функция положительна. Возникло противоречие, поскольку этот интеграл по условию должен быть равен нулю.

Случай $f(x_0) < 0$ рассматривается аналогично, и лемма доказана. □

## 3.2 Уравнение Эйлера

Вернемся к задаче (3.1) – (3.3) и соотношениям (3.4), (3.5). Постараемся привести рассмотрение проблемы к ситуации, когда можно воспользоваться леммой 3.1.

С этой целью применим интегрирование по частям во втором слагаемом из (3.4), предполагая, что $y = y(x)$ уже известна, а $\delta y(x)$ удовлетворяет условиям (3.5). Имеем

$$\int_a^b F'_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'(x)dx = \int_a^b F'_{y'}(x, y(x), y'(x))(\delta y)'_x dx =$$

$$= \left(F'_{y'}(x,y(x),y'(x))\delta y\right)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b \left[\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x))\right]\delta y(x)dx =$$
$$= -\int_a^b \left[\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x))\right]\delta y(x)dx.$$

Здесь при выводе также учтено, что $\delta y'(x) = (\delta y(x))'$, т.е. производная от разности функций равна разности производных от этих функций.

С учетом (3.2) соотношение (3.4) теперь приобретает вид

$$\int_a^b \left\{F'_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x))\right\}\delta y(x)dx = 0. \qquad (3.6)$$

Так как $F(x,y,z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по своим аргументам, то в фигурных скобках стоит непрерывная функция, поскольку $y(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой. Далее, в силу (3.5) функция $\delta y(x)$ удовлетворяет условиям, которые были наложены на $h(x)$ в лемме 3.1. Поэтому по лемме 3.1 из (3.6) получаем условие

$$\frac{\delta I}{\delta y} := F'_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x)) = 0. \qquad (3.7)$$

Левая часть этого соотношения называется **вариационной производной** функционала

$$I\{y\} = \int_a^b F(x,y,y')dx,$$

при этом предполагается, что функция $y = y(x)$ подставлена в $F$ и вычисляется полная производная по $x$, т.е.

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y') := \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x)) =$$
$$= F''_{y'x}(x,y(x),y'(x)) + F''_{y'y}(x,y(x),y'(x))\cdot y'(x) +$$
$$+ F''_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\cdot y''(x).$$

Итак, доказан следующий результат.

**Теорема 3.1.** *Для того, чтобы функционал $I\{y\}$ достигал на данной функции $y = y(x)$ экстремума, **необходимо**, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению (3.7), которое называют **уравнением Эйлера**.*

**Определение 3.1.** *Интегральные кривые, т.е. решения уравнения Эйлера, называют экстремалями функционала $I\{y\}$.*

## 3.3 Примеры

Рассмотрим некоторые примеры, связанные с нахождением экстремалей простейшей вариационной задачи.

**Пример 3.1.** *Пусть рассматривается задача об экстремуме функционала*

$$I\{y\} := \int_1^2 \left[(y'(x))^2 - 2xy(x)\right] dx$$

*при условиях*

$$y(1) = 0, \quad y(2) = -1.$$

*Тогда*

$$F(x, y, y') := (y')^2 - 2xy, \quad F'_y = -2x, \quad F'_{y'} = 2y',$$

*и уравнение Эйлера приводит к дифференциональному уравнению*

$$-2x - \frac{d}{dx}(2y'(x)) = 0 \ \Rightarrow \ y'' + x = 0.$$

*Поэтому*

$$y(x) = C_1 x + C_2 - \frac{x^3}{6},$$

*а с учетом краевых условий окончательно получаем*

$$C_1 = \frac{1}{6}, \ C_2 = 0 \ \Rightarrow \ y(x) = \frac{x}{6}(1 - x^2).$$

**Пример 3.2.** *Среди кривых, соединяющих точки $A(1,3)$ и $B(2,5)$, найти ту, на которой может достигаться экстремум функционала*

$$I\{y\} := \int_1^2 y'(1 + x^2 y')dx.$$

*Здесь*

$$F(x, y, y') := y' + x^2 (y')^2$$

*не зависит от y и потому уравнение Эйлера (3.7) упрощается:*

$$\frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = 0 \ \Rightarrow \ F'_{y'}(x, y, y') = C_1.$$

*Значит, в рассматриваемом случае*

$$1 + 2x^2 y' = C_1 \ \Rightarrow \ y'(x) = \frac{C_1 - 1}{2x^2} \ \Rightarrow \ y(x) = \frac{\tilde{C_1}}{x} + C_2.$$

*Удовлетворяя граничным условиям $y(1) = 3,\ y(2) = 5,$ получаем*

$$\tilde{C}_1 + C_2 = 3,\ \frac{\tilde{C}_1}{2} + C_2 = 5 \ \Rightarrow\ \tilde{C}_1 = -4,\ C_2 = 7 \ \Rightarrow\ y(x) = 7 - 4/x.$$

## 3.4 Задача о форме равновесия мыльной пленки

Вернемся к задаче о нахождении минимума функционала площади поверхности вращения

$$S\{y\} := 2\pi \int_{-b}^{b} y\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

при дополнительных условиях

$$y(-b) = R, \quad y(b) = R.$$

Здесь подинтегральная функция

$$F(x, y, y') = F(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2} \tag{3.8}$$

не зависит явно от $x$. Можно проверить, что тогда уравнение Эйлера (3.7) имеет первый интеграл вида

$$F(y, y') - y'F'_{y'}(y, y') = C_1. \tag{3.9}$$

В самом деле

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left(F(y, y') - y'F'_{y'}(y, y')\right) = \\ = F'_y \cdot y' + F'_{y'} \cdot y'' - y''F'_{y'} - y'F''_{y'y} \cdot y' - y'F''_{y'y'} \cdot y'' = \\ = y'\left(F'_y - F''_{y'y} \cdot y' - F''_{y'y'} \cdot y''\right) = 0,\end{gathered}$$

так как уравнение Эйлера даёт

$$F'_y - F''_{y'y} \cdot y' - F''_{y'y'} \cdot y'' = 0.$$

Из формул (3.8) и (3.9) получаем

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y}{y\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

Проще всего это уравнение интегрируется подстановкой $y = \operatorname{sh} t$. Тогда из уравнения имеем $y = C_1 \operatorname{ch} t$; следовательно

$$dx = \frac{dy}{y'} = C_1\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t}dt \ \Rightarrow\ x = C_1 t + C_2.$$

Рис. 4: Исследование уравнения

Исключая $t$, получаем семейство цепных линий (катеноидов)

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}.$$

Из соображений симметрии (четность функции $y(x)$) ясно, что $C_2 = 0$. Тогда граничное условие $y(b) = R$ даёт соотношение

$$R = C_1 \operatorname{ch} \frac{b}{C_1}.$$

Введя обозначение $\alpha = b/C_1$, приходим к уравнению

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{R}{b} \alpha.$$

Его легко исследовать графически (см. рис. 4). Ясно, что уравнение может иметь два, одно (критический случай), либо ни одного решения (прямые I, II и III соответственно).

Если формально получается, что уравнение для нахождения $C_1$, т.е. $\alpha$, не имеет решения, это значит, что таких решений нет в классе функций $C^1([a, b])$. Оказывается, что в этом случае пленка покрывает лишь два кольца и не соединяет их, что соответствует минимуму поверхностной энергии при таких параметрах задачи.

# 4 Задачи на условный экстремум

Здесь будут рассматриваться вариационные задачи, когда имеются дополнительные интегральные связи для сравниваемых функций. В первой лекции уже встречалась задача такого вида — это задача Дидо.

## 4.1 Простейшая изопериметрическая задача

Математическим обобщением задачи Дидо является следующая проблема: найти кривую $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, такую, на которой функционал

$$I\{y\} := \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{4.1}$$

достигает экстремума в классе функций из $C^1([a, b])$, для которых выполнено дополнительное условие

$$K\{y\} := \int_a^b G(x, y, y')dx = l, \tag{4.2}$$

называемое условем изопериметричности (с заданной константой $l$), а также краевые условия

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{4.3}$$

Задачу (4.1) – (4.3) называют `простейшей изопериметрической задачей`.

Прежде чем сформулировать основной результат рассмотрения задачи на условный экстремум (4.1) – (4.3), напомним, что в курсе математического анализа такие задачи для функций нескольких переменных изучались. Именно, если необходимо найти точку (или точки) экстремума функции $u = u(x_1, \dots, x_m)$ при дополнительном условии

$$v(x_1, \dots, x_m) = l, \tag{4.4}$$

то нужно составить функцию

$$w := u(x_1, \dots, x_m) + \lambda v(x_1, \dots, x_m),$$

где $\lambda$ — так называемый множитель Лагранжа, и вместо задачи на условный экстремум для функции $u(x_1, \dots, x_m)$ рассмотреть задачу на безусловный экстремум функции $w(x_1, \ldots, x_m)$. Тогда возникает условие

$$dw := \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx_k = 0,$$

приводящее к $m$ уравнениям (ещё одним уравнением является связь (4.4)). Таким образом, для нахождения $m+1$ чисел $x_1, \ldots, x_m$ и $\lambda$ имеем $m+1$ уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0, \ k = 1, \ldots, m, \quad v(x_1, \ldots, x_m) = l.$$

Аналогичная, хотя и несколько более сложная ситуация имеет место и в простейшей вариационной задаче на условный экстремум. Здесь будет сформулирован лишь основной результат, а доказательство можно найти в любом учебнике по вариационному исчислению.

**Теорема 4.1.** *Пусть в задаче* (4.1) – (4.3) *функции* $F(x, y, y')$ *и* $G(x, y, y')$ *дважды непрерывно дифференцируемы по своим переменным. Если кривая* $y = \bar{y}(x)$ *дает экстремум функционалу* (4.1) *при условиях* (4.2) – (4.3) *и если она не является экстремалью функционала* $K\{y\}$, *то существует такая константа* $\lambda$, *называемая множителем Лагранжа, что эта кривая* $y = \bar{y}(x)$ *является экстремалью функционала*

$$\begin{gathered} I_*\{y\} := I\{y\} + \lambda K\{y\} = \int_a^b H(x, y, y') dx, \\ H(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'). \end{gathered} \tag{4.5}$$

**Определение 4.1.** *Кривая* $y = \bar{y}(x)$, *соединяющая две заданные точки, для которой* $\delta I = 0$ *при условии, что* $\delta K = 0$, *называется* ***условной экстремалью***.

**Замечание 4.1.** *Условие* $\delta K = 0$ *возникает в силу свойства изопериметричности (см.* (4.2)*), а условие* $\delta I = 0$ *есть необходимое условие экстремума функционала* $I\{y\}$.

**Замечание 4.2.** *Из теоремы 4.1 следует, что условная экстремаль* $y = \bar{y}(x)$ *должна удовлетворять уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial I_*}{\partial y} := H'_y - \frac{d}{dx} H'_{y'} = 0, \tag{4.6}$$

*где $H = F + \lambda G$, а также условию изопериметричности* (4.2)*. Общее решение уравнения* (4.6)*, т.е. обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, зависит от двух произвольных постоянных и от $\lambda$:*

$$y = y(x, C_1, C_2, \lambda).$$

*Для нахождения $C_1, C_2$ и $\lambda$ нужно воспользоваться краевыми условиями* (4.3) *и условием* (4.2)*, т.е. тремя соотношениями.*

## 4.2 Принцип взаимности

Приведенные выше рассмотрения показывают, что изопериметрическая задача вариационного исчисления сводится (с помощью множителя Лагранжа $\lambda$) к простейшей задаче вариационного исчисления с подинтегральной функцией

$$H = F + \lambda G. \tag{4.7}$$

Заметим теперь простое обстоятельство: от умножения этой функции $H$ на произвольную ненулевую константу семейство условных экстремалей, т.е. решений уравнения (4.6), не изменится. Поэтому можно записать $H$ в более симметричной форме:

$$H = \lambda_1 F + \lambda_2 G, \tag{4.8}$$

где $\lambda_1, \lambda_2$ — некоторые постоянные. Однако в такой записи уже не ясно, ищется ли экстремум первого интегрального функционала при фиксированном втором либо наоборот. Отсюда приходим к следующему выводу.

**Теорема 4.2** (принцип взаимности)**.** *Кроме исключительных случаев $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, семейство экстремалей будет одно и то же, будем ли мы искать экстремум интеграла $I\{y\}$ при условии, что интеграл $K\{y\}$ сохраняет постоянное значение, или будем искать экстремум интеграла $K\{y\}$ при условии, что интеграл $I\{y\}$ сохраняет постоянное значение.*

**Замечание 4.3.** *В исключительных случаях при $\lambda_2 = 0$ в* (4.8) *получаем задачу на безусловный экстремум для функционала $I\{y\}$, а при $\lambda_1 = 0$ приходим к задаче на безусловный экстремум для функционала $K\{y\}$.*

## 4.3 Решение задачи Дидо

Возвращаясь к задаче Дидо, сформулированной в пункте 1.3, рассмотрим задачу о нахождении максимального значения функционала

$$I\{y\} = \int_a^b y(x)dx$$

при дополнительных условиях

$$\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = l > b-a, \quad y(a)=0, \quad y(b)=0. \tag{4.9}$$

Здесь $F := y,\ G := \sqrt{1+(y'(x))^2}$ и потому

$$H := y + \lambda\sqrt{1+(y'(x))^2}.$$

Так как $H$ не зависит явно от $x$, то так же, как и в задаче о форме равновесия мыльной плёнки, можно сразу вместо уравнения Эйлера воспользоваться его первым интегралом вида (3.9). В рассматриваемом случае это даёт соотношение

$$H(y,y') - y'H'_{y'}(y,y') = C_1.$$

Поэтому

$$y + \lambda\sqrt{1+(y'(x))^2} - y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = C_1.$$

Отсюда следует, что

$$y + \frac{\lambda}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} = C_1.$$

Решим это уравнение относительно $y'$, имеем

$$\frac{\lambda^2}{1+(y'(x))^2} = (y-C_1)^2 \ \Rightarrow\ \frac{\lambda^2}{(y-C_1)^2} = 1+(y'(x))^2 \ \Rightarrow$$
$$y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{(y-C_1)^2} - 1} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2-(y-C_1)^2}}{y-C_1}.$$

Поэтому

$$\pm\frac{(y-C_1)dy}{\sqrt{\lambda^2-(y-C_1)^2}} = dx \ \Rightarrow\ \pm\sqrt{\lambda^2-(y-C_1)^2} = x - C_2.$$

Окончательно получаем, что

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,$$

т.е. условная экстремаль в задаче Дидо — это `дуга окружности`. Ее параметры $C_1, C_2$ и $\lambda$ нужно выбрать так, чтобы выполнялись три условия (4.9).

# 5 Некоторые более сложные задачи. Вариационные принципы механики

До сих пор рассматривались простейшие вариационные задачи, которые отвечали случаю, когда разыскивалась одна функция одной переменной, т.е. $y = \bar{y}(x),\ a \leqslant x \leqslant b$, причём интегральный функционал зависит от искомой функции и её первой производной. Ниже кратко будут рассмотрены более сложные проблемы, когда интегральный функционал содержит несколько искомых функций либо зависит от производных искомых функций порядка выше первого. Наконец, будут приведены вариационные задачи, где искомой является функция нескольких переменных.

## 5.1 Функционалы с производными высшего порядка

Рассмотрим сначала случай, когда подинтегральная функция содержит производные до второго порядка, и соответствующую вариационную задачу с закреплёнными концами:

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y', y'')dx, \tag{5.1}$$

$$y(a) = y_a,\ y'(a) = y'_a, \quad y(b) = y_b,\ y'(b) = y'_b. \tag{5.2}$$

В этой задаче необходимо взять четыре условия закрепления, т.е в два раза больше, чем порядок старшей производной в функционале $I\{y\}$.

Вычисляя вариацию функционала (5.1) аналогично тому, как это было сделано ранее, убеждаемся, что выражение для $\delta I\{y, \delta y\}$ содержит дополнительное слагаемое, именно, в отличие от примера 2.8, здесь имеем

(5.3)

$$\delta I\{y, \delta y\} = \tag{5.4}$$
$$= \int_a^b \left[F'_y(x, y, y', y'')\delta y + F'_{y'}(x, y, y', y'')\delta y' + F'_{y''}(x, y, y', y'')\delta y''\right] dx.$$

Отметим теперь, что в качестве области определения $\mathcal{D}(I) = X$ функционала $I\{y\}$ нужно выбрать такие функции из $C^2([a, b])$, которые удовлетворяют краевым условиям (5.2). Тогда, очевидно, приращения $\delta y(x)$ должны удовлетворять краевым условиям

$$\delta y(a) = \delta y'(a) = 0, \quad \delta y(b) = \delta y'(b) = 0. \tag{5.5}$$

Применим к функционалу (5.3) приём интегрирования по частям, причём для второго слагаемого, как и раньше, один раз, а для третьего — два раза. При этом учтём условия (5.5). Тогда необходимое условие экстремума приводит к соотношению

$$\delta I\{y, \delta y\} = \int_a^b \left[F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}\right] \delta y dx = 0. \tag{5.6}$$

Здесь предполагается, что функция $F(x, y, y', y'')$ имеет непрерывные производные по своим аргументам вплоть до четвёртого порядка. Тогда выражение в скобках (5.6) — непрерывная функция, если искомая функция $y = y(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема, и по основной лемме вариационного исчисления из (5.6) получаем, что $y = y(x)$ должна быть решением уравнения

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 0, \tag{5.7}$$

которое называют `уравнением Эйлера-Пуассона`.

Уравнение Эйлера-Пуассона представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, его общее решение содержит четыре произвольных постоянных, которые находятся из четырёх краевых условий (5.2).

**Пример 5.1.** *Как доказано в теории упругости, состояние равновесия изогнутой балки с защемлёнными концами есть экстремаль функционала*

$$I\{y\} = \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{2}\mu(y'')^2 + \rho g y\right] dx,$$
$$y(-l) = y'(-l) = y(l) = y'(l) = 0,$$

*где $\mu, \rho$ и $g$ — положительные физические константы.*

*Здесь уравнение Эйлера-Пуассона принимает вид*

$$\rho g + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{2}\mu 2y''\right) = 0 \ \Rightarrow\ y^{(4)} = -\rho g/\mu = const.$$

*С учётом граничных условий отсюда приходим к ответу (проверьте):*

$$y(x) = -\frac{\rho g}{24\mu}(l^2 - x^2)^2.$$

Если $I\{y\}$ содержит производные от искомой функции вплоть до $k$-того порядка, т.е.

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(k)})dx, \tag{5.8}$$

а условия закрепления на концах имеют вид

$$y(a) = y_a,\ \dots,\ y^{(k)}(a) = y_a^{(k)}, \quad y(b) = y_b,\ \dots,\ y^{(k)}(b) = y_b^{(k)}, \tag{5.9}$$

то экстремаль задачи (5.8) – (5.9) удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} - \ldots + (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}F'_{y^{(k)}} = 0.$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2k$ и поэтому его общее решение содержит $2k$ произвольных постоянных, которые находятся из $2k$ краевых условий (5.9).

## 5.2 Функционалы от нескольких искомых функций

Будем сначала считать, что интегральный функционал зависит от двух искомых функций и имеет вид

$$I\{y_1, y_2\} = \int_a^b F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx. \tag{5.10}$$

Требуется найти экстремальное значение функционала (5.10) при условиях закрепления на концах:

$$y_i(a) = y_{ia},\ y_i(b) = y_{ib}, \quad i = 1, 2.$$

Если варьировать лишь одну функцию, например, лишь $y_1(x)$, получим `частную вариацию`

$$\delta I\{y_1, y_2; \delta y_1\} = \int_a^b \left( F'_{y_1} \delta y_1 + F'_{y'_1} \delta y'_1 \right) dx.$$

Аналогично выражается вариация по $y_2(x)$,

$$\delta I\{y_1, y_2; \delta y_2\} = \int_a^b \left( F'_{y_2} \delta y_2 + F'_{y'_2} \delta y'_2 \right) dx,$$

а полная вариация функционала $I\{y_1, y_2\}$ есть сумма частных вариаций (полный дифференциал есть сумма частных дифференциалов!):

$$\delta I\{y_1, y_2; \delta y_1, \delta y_2\} = \int_a^b \sum_{j=1}^{2} \left( F'_{y_j} \delta y_j + F'_{y'_j} \delta y'_j \right) dx.$$

Здесь на концах для $\delta y_j(x)$ выполнены нулевые граничные условия. Поэтому, применив интегрирование по частям и используя эти условия, получим из необходимого условия экстремума $\delta I = 0$, что

$$\int_a^b \left[ \sum_{j=1}^{2} \left( F'_{y_j} - \frac{d}{dx} F'_{y'_j} \right) \delta y_j(x) \right] dx = 0.$$

Отсюда следует, в силу независимости $\delta y_1(x)$ и $\delta y_2(x)$, что в точке экстремума функционала (5.10) `частные вариационные производные` должны равняться нулю:

$$\frac{\delta I}{\delta y_j} := F'_{y_j} - \frac{d}{dx} F'_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{5.11}$$

Аналогично рассматриваются функционалы от большего числа функций, а также функционалы, зависящие от нескольких функций и выражающиеся через производные более высокого порядка.

## 5.3 Функционалы от функций нескольких переменных

Рассмотрим для определённости случай, когда аргументом функционала является функция двух переменных $z = z(x, y)$, заданная в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Функционал $I\{z\}$, содержащий саму функцию и ее первые частные производные

$$p := \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x, \quad q := \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y,$$

имеет вид

$$I\{z\} := \iint_\Omega F(x, y, z, z'_x, z'_y)dxdy.$$

Для простейшей вариационной задачи на контуре $\Gamma := \partial\Omega$ следует задать краевое условие Дирихле

$$z|_\Gamma = \varphi \quad ((x, y) \in \Gamma)\,,$$

где функция $\varphi = \varphi(x, y)$ — известна.

Здесь, очевидно, в качестве области определения $\mathcal{D}(I) = X$ функционала $I\{z\}$ следует взять множество

$$\mathcal{D}(I) := \left\{z(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}) :\ z(x, y) = \varphi(x, y),\ (x, y) \in \Gamma\right\},$$

где $C^1(\overline{\Omega})$ — множество непрерывно дифференцируемых функций в замыкании области $\Omega$.

Если $\bar{z}(x, y)$ — решение вариационной задачи, а $z(x, y)$ — любая другая функция из $\mathcal{D}(I)$, то

$$\delta z = z(x, y) - \bar{z}(x, y), \quad \delta z = 0 \text{ (на } \Gamma).$$

При вычислении вариации функционала $I\{z\}$ воспользуемся общей формулой (см. (2.5))

$$\delta I\{z, \delta z\} = \left(\frac{d}{d\varepsilon} I\{z + \varepsilon\delta z\}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left\{\frac{d}{d\varepsilon}\left[\iint_\Omega F(x, y, z + \varepsilon\delta z, z'_x + \varepsilon\delta z'_x, z'_y + \varepsilon\delta z'_y)dxdy\right]\right\}\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \iint_\Omega \left(F'_z\delta z + F'_p\delta z'_x + F'_q\delta z'_y\right)dxdy. \tag{5.12}$$

**Теорема 5.1.** *Пусть $F = F(x, y, z, p, q)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по всем своим аргументам. Если $z(x, y) \in \mathcal{D}(I)$ даёт экстремум функционалу $I\{z\}$, то она является решением уравнения*

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x}F'_p - \frac{\partial}{\partial y}F'_q = 0, \tag{5.13}$$

*называемым* ***уравнением Эйлера-Остроградского.***

*Доказательство.* Воспользуемся соотношениями

$$\delta z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\delta z, \quad \delta z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\delta z,$$

запишем второе и третье слагаемое (5.12) в виде повторного интеграла и осуществим интегрирование по частям во внутреннем интеграле. Например,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega F'_p \delta z'_x dxdy &= \int dy \int F'_p \left(\frac{\partial}{\partial x}\delta z\right) dx = \\ &= \int dy \left\{ \left(F'_p \delta z\right)\big|_\Gamma - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} F'_p\right) \delta z dx \right\} = \\ &= -\iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} F'_p\right) \delta z dxdy \quad (\delta z = 0 \text{ на } \Gamma).\end{aligned}$$

Аналогично для последнего слагаемого в (5.12) имеем

$$\iint_\Omega F'_q \delta z'_y dxdy = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial y} F'_q\right) \delta z dxdy.$$

Поэтому, приравнивая нулю правую часть (5.12), т.е. вариацию функционала $I\{z\}$, и учитывая приведенные формулы, будем иметь

$$\iint_\Omega \left(F'_z - \frac{\partial}{\partial x}F'_p - \frac{\partial}{\partial y}F'_q\right) \delta z dxdy = 0, \tag{5.14}$$

$$\forall \delta z \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \delta z = 0 \ (\text{на } \Gamma = \partial\Omega).$$

Теперь можно воспользоваться основной леммой вариационного исчисления для функций уже не одной, а нескольких переменных. Так как $\delta z$ произвольна, непрерывна и обращается в нуль на $\Gamma$, то соотношение (5.14) возможно тогда и только тогда, когда выражение в скобках в (5.14) равно нулю, т.е. выполнено уравнение Эйлера-Остроградского (5.13). □

Рассмотрим пример на применение этой теоремы.

**Пример 5.2** (Задача Дирихле для уравнения Пуассона)**.** *Пусть*

$$I\{z\} = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2zf(x,y)\right] dxdy,$$

$$z \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u = \varphi \ (\text{на } \Gamma = \partial\Omega).$$

*Тогда*

$$F = F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 2zf(x, y),$$

*и уравнение Эйлера-Остроградского принимает вид*

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x}F'_p - \frac{\partial}{\partial y}F'_q = -2f - \frac{\partial}{\partial x}(2p) - \frac{\partial}{\partial y}(2q) \ \Rightarrow$$

$$-\Delta z := -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = f(x, y),$$
$$(x, y) \in \Omega, \quad z = \varphi(x, y), \ (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega.$$

*Возникло уравнение Пуассона при краевых условиях Дирихле.*

## 5.4 Вариационные принципы механики

Эти принципы широко используются при исследовании и приближённом решении многих задач механики систем с конечным или бесконечным числом степеней свободы, т.е. для сплошных сред.

Поясним сказанное на простом примере, который приводит к принципу Гамильтона-Остроградского. Пусть материальная точка массы $m$ может двигаться вдоль оси $Oy$, причём в процессе движения на эту точку действует направленная по оси $Oy$ сила $f(y,t)$. Тогда движение точки, как известно, определяется вторым законом Ньютона

$$m\ddot{y} = f(y, t), \tag{5.15}$$

где точка сверху означает производную по времени $t$.

Покажем, что $y(t)$ является экстремалью некоторого интегрального функционала. Введём функции

$$U(y, t) := -\int_{y_0}^{y} f(s, t)ds, \quad T := \frac{m}{2}(\dot{y})^2.$$

Они означают соответственно потенциальную энергию рассматриваемого силового поля $f(y,t)$ и кинетическую энергию материальной точки. В новых обозначениях уравнение (5.15) можно переписать в виде

$$-U'_y - \frac{d}{dt}T'_{\dot{y}} = 0. \tag{5.16}$$

Заметим теперь, что $U$ не зависит от $\dot{y}$, а $T$ — от $y$, и введём функцию

$$L(t, y, \dot{y}) := T - U, \tag{5.17}$$

называемую **функцией Лагранжа** для рассматриваемой одномерной механической системы. Тогда уравнение (5.16) можно переписать в виде

$$L'_y - \frac{d}{dt} L'_{\dot{y}} = 0.$$

Отсюда следует, что $y = y(t)$ является экстремалью простейшей вариационной задачи

$$I\{y\} := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, \dot{y}) dt, \quad y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1. \tag{5.18}$$

Интеграл $I\{y\}$ называют в механике **действием**.

Сформулируем общий принцип для систем с любым числом степеней свободы, частным случаем которого является задача (5.18).

**Теорема 5.2** (принцип Гамильтона-Остроградского, или принцип стационарного действия)**.** *Если заданы начальное и конечное состояния системы (т.е. моменты времени и положения точек системы в эти моменты), то из всех возможных законов движения системы на самом деле реализуется такой, для которого* ***действие принимает стационарное значение****.*

Частным случаем теоремы 5.2 является такое утверждение.

**Теорема 5.3** (принцип минимума потенциальной энергии)**.** *В состоянии равновесия, т.е. при отсутствии движения, потенциальная энергия системы принимает стационарное, а в устойчивом случае — минимальное значение.*

Заметим в заключение, что в механике сплошных сред и в технике применяются и многие другие вариационные принципы. Например, в электростатике действует **принцип Томсона** (принцип наименьшей энергии электростатического поля), в теории упругости и, в частности, в теории балок — **принцип Кастилиано** (принцип минимума работы деформации).

# Часть II
# Классические задачи математической физики

В этой части курса даётся элементарное введение в проблемы математической физики на основе рассмотрения простейших задач для гиперболических уравнений (колебания струны и мембраны), параболических уравнений (уравнение теплопроводности) и эллиптических уравнений (краевые и спектральные задачи для оператора Лапласа).

## 6 Гиперболические уравнения. Поперечные колебания струны

Уравнения математической физики — это уравнения в частных производных. Ниже будут рассматриваться лишь линейные дифференциальные уравнения второго порядка, отвечающие хорошо изученным процессам, происходящим в сплошных средах.

### 6.1 Постановка задачи

Будем считать, что струна натянута с силой $P$ между точками $x = 0$ и $x = l$ оси $Ox$, причём на струну действует поперечная сила с плотностью $\hat{f}(x,t)$. Отметим, что струной считается идеализированная одномерная среда, работающая только на растяжение, но не на изгиб, т.е. не сопротивляющаяся изгибу.

Будем считать, что сила натяжения $P$ в процессе колебаний не меняется (это оправдано для колебаний с малой амплитудой), и что каждая точка $x$ струны при колебаниях смещается перпендикулярно оси $Ox$. Обозначим смещение (ординату) этой точки в момент $t$ через $u(x,t)$. Эта функция и определяет закон колебаний, а ее график в фиксированный момент времени представляет собой форму струны в этот момент.

Если перевести струну в некоторый момент $t$ из состояния $u(x,t)$ в состояние равновесия $u \equiv 0$, то будет произведена работа

$$U = P\left(\int_0^l \sqrt{1 + (u'_x)^2}dx - l\right) - \int_0^l \hat{f}(x,t)udx. \tag{6.1}$$

Здесь первое слагаемое характеризует изменение упругой энергии натянутой струны за счёт её удлинения, а второе — собственно работа силы $\hat{f}(x,t)$ на перемещении $u(x,t)$. Выражение (6.1) и следует принять за потенциальную энергию смещённой от состояния равновесия системы. Так как струна мало отклоняется от состояния равновесия $u \equiv 0$, то $\sqrt{1+(u'_x)^2} \approx 1 + (u'_x)^2/2$ и поэтому

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2}P(u'_x)^2 - \hat{f}u\right] dx. \tag{6.2}$$

Кинетическая энергия струны равна

$$T = \int_0^l \frac{(u'_t)^2(\rho dx)}{2} = \frac{\rho}{2}\int_0^l (u'_t)^2 dx, \tag{6.3}$$

где $\rho > 0$ — линейная плотность струны. По выражениям (6.2) и (6.3) составим функцию Лагранжа (см. пункт 5.4) данной механической системы, т.е.

$$L = T - U = \int_0^l \left[\frac{1}{2}\rho(u'_t)^2 - \frac{1}{2}P(u'_x)^2 + \hat{f}u\right] dx,$$

а по ней — функционал действия

$$I\{u\} := \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{\int_0^l \left[\frac{1}{2}\rho(u'_t)^2 - \frac{1}{2}P(u'_x)^2 + \hat{f}u\right] dx\right\}. \tag{6.4}$$

Воспользуемся теперь принципом стационарности действия (теорема 5.2) и получим уравнение Эйлера-Остроградского для функционала (6.4). Имеем

$$\hat{f} - \frac{\partial}{\partial x}(-P(u'_x)) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho(u'_t)) = 0. \tag{6.5}$$

Введя обозначения

$$a := (P/\rho)^{1/2}, \quad f(x,t) := \rho^{-1}\hat{f}(x,t),$$

приходим из (6.5) к уравнению малых колебаний струны

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \tag{6.6}$$

которое называют одномерным `волновым уравнением`.

Так как концы струны закреплены, то следует к (6.6) добавить граничные условия

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{6.7}$$

а для нахождения однозначного решения $u(x,t)$ задачи о колебаниях струны — начальные условия

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u'_t(x,0) = u^1(x). \tag{6.8}$$

Итак, соотношения (6.6) – (6.8) дают полную постановку начально-краевой задачи о малых поперечных колебаниях струны.

## 6.2 Свободные колебания бесконечной струны. Метод Даламбера

Рассмотрим сначала более простую задачу. Будем считать, что струна бесконечна, $-\infty < x < \infty$, а её колебания свободные, т.е. внешняя сила равна нулю. Тогда будем иметь проблему

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ -\infty < x < \infty, \\ u(x,0) = u^0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x). \end{gathered} \tag{6.9}$$

Эту задачу можно исследовать методом Даламбера, или `методом бегущих волн`. Формальное преобразование задачи Коши (6.9) к более простому виду получается следующим образом. Введём новые независимые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

тогда

$$u'_x = u'_\xi \cdot 1 + u'_\eta \cdot 1, \quad u'_t = u'_\xi \cdot (-a) + u'_\eta \cdot a = a(u'_\eta - u'_\xi).$$

Далее,

$$u''_{xx} = (u'_\xi + u'_\eta)'_\xi + (u'_\xi + u'_\eta)'_\eta = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{tt} = a^2 \left[ (u'_\eta - u'_\xi)'_\eta - (u'_\eta - u'_\xi)'_\xi \right] = a^2 (u''_{\eta\eta} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\xi}).$$

Из этих формул и из уравнения (6.9) получаем в новых переменных уравнение

$$u''_{\xi\eta} = 0, \tag{6.10}$$

которое легко проинтегрировать. В самом деле, из (6.10) следует, что $u'_\xi$ — произвольная функция $\xi$, а тогда

$$u(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at),$$

где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — произвольные функции своих переменных.

Эти функции следует подобрать так, чтобы удовлетворить начальным условиям (6.9). Это даёт соотношения

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = u^0(x),$$
$$u'_t(x, 0) = -a\varphi'_1(x) + a\varphi'_2(x) = u^1(x).$$

Из второго равенства после интегрирования от 0 до $x$ получим

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \frac{1}{a}\int_0^x u^1(s)ds.$$

Окончательный ответ приобретает вид (проверьте !)

$$u(x, t) = \frac{u^0(x - at) + u^0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u^1(s)ds. \qquad (6.11)$$

Эта формула называется `решением Даламбера` задачи Коши для уравнения колебаний свободной струны.

Рассмотрим частные случаи решения. Будем сначала считать, что начальные скорости точек струны равны нулю, т.е. $u^1(x) \equiv 0$, и струна колеблется лишь в результате её начального отклонения. Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u^0(x - at) + \frac{1}{2}u^0(x + at) =: u_+(x, t) + u_-(x, t).$$

Видно, что решение состоит из двух слагаемых, которые представляют из себя бегущие волны. Первая волна движется вправо со скоростью $a$ (прямая волна), а вторая — влево со скоростью $a$ (обратная волна). Если, например, функция $u^0(x)$ равна нулю вне некоторого промежутка $(-b, b)$ и является чётной по $x$, то движение струны происходит так, что половина профиля, т.е. $1/2u^0(x)$, из начального положения движется вправо как единое целое, а вторая половина движется так же влево.

Пусть теперь начальные отклонения точек струны равны нулю, $u^0 \equiv 0$, и движение обусловлено лишь начальными скоростями $u^1(x)$.

Такие решения называют **волнами импульса** и имеют вид, следующий из (6.11):

$$u(x,t) = F(x+at) - F(x-at), \quad F(x) := \frac{1}{2a}\int_0^x u^1(s)ds.$$

Здесь снова имеем прямую и обратную волны, описываемые соответственно функциями $-F(x-at)$ и $F(x+at)$.

Предоставляем возможность самостоятельно разобраться, как ведёт себя профиль струны с течением времени в тех или иных частных случаях функции $u^1(x)$.

Таким образом, при наличии начального отклонения ($u^0(x) \not\equiv 0$) и начальной скорости ($u^1(x) \not\equiv 0$) решение (6.11) задачи о свободных колебаниях струны представляет собой сумму прямой и обратной волн, распространяющихся вправо и влево соответственно со скоростью $a = (P/\rho)^{1/2} > 0$.

## 6.3 Колебания конечной струны. Метод Фурье

Рассмотрим теперь задачу о свободных колебаниях струны, закреплённой на обоих концах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{6.12}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x). \tag{6.13}$$

При изучении этой задачи применяют **метод разделения переменных**, или **метод Фурье**. Этот метод является наиболее общим методом решения уравнений математической физики и основан на следующем соображении. При фиксированном $t$ решение $u(x,t)$ можно разложить в ряд Фурье по функциям, ортогональным и полным на отрезке $(0,l)$. Например, можно считать, что

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{\pi k x}{l}, \tag{6.14}$$

причём коэффициенты Фурье $c_k(t)$ зависят, конечно же, от $t$. Здесь отдельное слагаемое функционального ряда представляет собой произведение функции, зависящей от $t$, на функцию, зависящую от $x$. Именно это соображение положено в основу метода разделения переменных.

Опишем подробнее процедуру реализации метода разделения переменных для уравнения (6.12). Будем искать `частные решения` уравнения (6.12), удовлетворяющие краевым условиям на концах, в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{6.15}$$

Тогда из уравнения (6.12) будем иметь

$$XT'' = a^2 X'' T, \tag{6.16}$$

где штрихом обозначены производные по своим аргументам для $X(x)$ и $T(t)$. Так как $T(t) \not\equiv 0, X(x) \not\equiv 0$, то из (6.16) получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{6.17}$$

Чтобы функция $u(x,t) = X(x)T(t)$ была решением уравнения (6.12), равенство (6.17) должно выполняться при всех значениях $x$ и $t$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$. Однако, левая часть этого равенства зависит лишь от $t$, а правая — лишь от $x$. Поэтому, если зафиксировать $t$ и менять $x$, то левая, а потому и правая часть должна сохранять постоянное значение. Аналогична ситуация и при фиксированном $x$. Поэтому обе части (6.17) не зависят ни от $x$, ни от $t$ и потому сохраняют постоянное значение:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = \mathrm{const}.$$

Отсюда следует, что функции $T(t)$ и $X(x)$ должны быть решениями следующих `обыкновенных` дифференциальных уравнений:

$$X''(x) - cX(x) = 0,\ 0 < x < l, \quad T''(t) - ca^2T(t) = 0,\ t \geqslant 0. \tag{6.18}$$

Используя краевые условия (6.12) и форму решения (6.15), приходим к соотношениям

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0.$$

Так как $T(t) \not\equiv 0$ (почему?), то для $X(x)$ возникают краевые условия

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Итак, функция $X(x)$ должна определяться из следующей краевой задачи:

$$X''(x) - cX(x) = 0,\ 0 < x < l, \quad X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{6.19}$$

Можно проверить (проделайте это!), что эта задача при $c > 0$ и при $c = 0$ имеет лишь нулевые решения, поэтому $c = -\lambda^2 < 0,\ \lambda > 0$. Тогда

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x, \quad X(0) = C_2 = 0,\ X(l) = C_1 \sin \lambda l = 0.$$

Так как $C_1 \neq 0$ (почему ?), то $\sin \lambda l = 0$, т.е.

$$\lambda = \lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ l = 1, 2, \ldots, \quad c = c_k = -\lambda_k^2.$$

Окончательно имеем

$$X(x) = X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

(Так как решения однородной задачи (6.19) находятся с точностью до произвольного ненулевого множителя, то этот множитель можно положить равным 1.)

Как видно из приведенных построений, функции $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ представляют собой полную ортогональную на промежутке $(0, l)$ систему функций, а формальное применение метода разделения переменных даёт затем вид (6.14) для решения задачи (6.12) – (6.13).

Вернёмся теперь к уравнению для $T(t)$. Из (6.18) при $c = -\lambda_k^2 = -\pi^2 k^2 / l^2,\ k = 1, 2, \ldots$, имеем задачу

$$T''(t) + \frac{a^2 \pi^2 k^2}{l^2} T(t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда

$$T(t) = T_k(t) = A_k \cos \frac{\pi a k}{l} t + B_k \sin \frac{\pi a k}{l} t,$$

где коэффициенты $A_k$ и $B_k$ — пока произвольны.

Отсюда следует, что функции вида

$$u = u_k(x, t) = \left( A_k \cos \frac{\pi a k}{l} t + B_k \sin \frac{\pi a k}{l} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

являются решениями уравнения (6.12). Поэтому и сумма таких функций, т.е. функциональный ряд вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi a k}{l} t + B_k \sin \frac{\pi a k}{l} t \right) \sin \frac{\pi k x}{l}, \tag{6.20}$$

также является **формальным решением** этого уравнения. Осталось использовать лишь начальные условия (6.13). Как выясняется, это позволит однозначно определить коэффициенты $A_k$ и $B_k$ в (6.20).

При $t = 0$ из (6.20) имеем

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l} = u^0(x). \tag{6.21}$$

С другой стороны, разлагая $u^0(x)$ в ряд Фурье, получим

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u^0(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx. \tag{6.22}$$

Отсюда и из (6.21) следует, что $A_k = a_k,\ k = 1, 2, \ldots$.

Далее, формально дифференцируя ряд (6.20) по $t$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi a k}{l} B_k \sin\frac{\pi k x}{l} = u^1(x). \tag{6.23}$$

Разлагая $u^1(x)$ в ряд Фурье, получаем

$$u^1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l u^1(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx. \tag{6.24}$$

Поэтому

$$\frac{\pi a k}{l} B_k = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и окончательное формальное решение задачи (6.12) – (6.13) приобретает вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi a k}{l}t + b_k \frac{l}{\pi a k}\sin\frac{\pi a k}{l}t\right)\sin\frac{\pi k x}{l},$$

где $a_k$ и $b_k$ — коэффициенты Фурье функций $u^0(x)$ и $u^1(x)$ соответственно, вычисляемые по формулам (6.22) и (6.24).

Это решение, как видно, представляет собой сумму так называемых `стоячих волн`

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{\pi a k}{l}t + b_k \frac{l}{\pi a k}\sin\frac{\pi a k}{l}t\right)\sin\frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

или **гармонических колебаний** с частотами

$$\omega_k = \frac{\pi a k}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6.25}$$

Амплитуды (формы) колебаний зависят от $x$ и описываются функциями $\sin\frac{\pi k x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$. Решения такого вида и есть стоячие волны. Различают первый (основной) тон колебаний с частотой $\omega_1 = \pi a/l$, и **обертоны**, отвечающие случаям $k = 2, 3, \ldots$. Эти частоты выражаются формулами

$$\omega_k = \frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{P}{\rho}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $P$ — натяжение, а $\rho$ — плотность струны.

Можно убедиться, осуществляя построения, аналогичные проведенным выше, что полная задача (6.6) – (6.8) о вынужденных колебаниях струны имеет решение вида

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi a k}{l} t + b_k \frac{l}{\pi a k}\sin\frac{\pi a k}{l} t\right)\sin\frac{\pi k x}{l} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{l}{\pi a k}\sin\frac{\pi k x}{l}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{\pi a k(t-s)}{l} ds, \\ f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k x}{l} dx. \end{gathered}$$

Здесь второе слагаемое описывает вынужденные колебания струны при действии поперечной силы $f(x,t)$ и отвечает нулевым начальным условиям (6.13). Предоставляем возможность проверить эти факты самостоятельно.

# 7 Малые поперечные колебания мембраны

Метод разделения переменных, примененный в предыдущей задаче, используется также и при изучении малых поперечных колебаний мембраны, закреплённой по ее границе. Такая мембрана является математической моделью барабана.

## 7.1 Формулировка начально-краевой задачи

Принципиальная формулировка этой задачи такая же, как и для колебаний струны. Под мембраной понимают упругую материальную поверхность, плоскую в состоянии покоя. Потенциальная энергия мембраны пропорциональна изменению площади её поверхности, причём множитель пропорциональности $P$ также называют `натяжением`.

Пусть мембрана в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим через $u = u(x, y, t)$ перпендикулярное к плоскости $Oxy$ в момент $t$ смещение точки $(x, y)$ мембраны и будем считать, что это смещение достаточно мало вместе с производными $u'_x$ и $u'_y$. Тогда выражение для площади мембраны

$$\iint_\Omega \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}dxdy$$

можно взять приближённым, опираясь на формулу

$$\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}[(u'_x)^2 + (u'_y)^2],$$

а в качестве потенциальной энергии мембраны взять величину

$$U = P \iint_\Omega \left(\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} - 1\right) dxdy-$$
$$- \iint_\Omega u\hat{f}(x, y, t)dxdy \approx \iint_\Omega \left\{\frac{1}{2}P[(u'_x)^2 + (u'_y)^2] - u\hat{f}\right\} dxdy,$$

где $\hat{f} = \hat{f}(x, y, t)$ — плотность внешней вертикальной поперечной силы.

Введём еще кинетическую энергию мембраны

$$T = \iint_\Omega \frac{1}{2}(u'_t)^2(\rho dxdy) = \frac{1}{2}\rho \iint_\Omega (u'_t)^2 dxdy,$$

где $\rho > 0$ — поверхностная плотность мембраны. Составим теперь функцию Лагранжа

$$L = T - U = \iint_\Omega \left\{\frac{1}{2}\left[\rho(u'_t)^2 - P(u'_x)^2 - P(u'_y)^2\right] + \hat{f}u\right\} dxdy,$$

и, наконец, функционал действия

$$
\begin{aligned}
I\{u\} := \int_{t_0}^{t_1} L dt = \\
= \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \rho (u_t')^2 - P(u_x')^2 - P(u_y')^2 \right] + \hat{f} u \right\} dxdy.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Воспользуемся затем принципом стационарности действия (принципом Гамильтона-Остроградского) и выпишем уравнение Эйлера-Остроградского для функционала (7.1). Имеем

$$
\hat{f} - \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t') + \frac{\partial}{\partial x}(P u_x') + \frac{\partial}{\partial y}(P u_y') = 0.
$$

Отсюда приходим к уравнению

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} =& a^2 \Delta u + f(x,y,t), \quad \Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\
& a^2 = P/\rho, \quad f(x,y,t) := \hat{f}(x,y,t)/\rho,
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

которое, как и в задаче о колебаниях струны, называется **волновым уравнением**, а оператор $\Delta$ — это дифференциальный оператор Лапласа (двумерный, по переменным $x$ и $y$).

Выпишем теперь начальные и граничные условия рассматриваемой задачи. Будем считать, что на контуре $\Gamma := \partial\Omega$, т.е. на границе области $\Omega$, мембрана закреплена. Тогда

$$
u(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{7.3}
$$

В начальный мемент $t = 0$ зададим начальное отклонение мембраны и её вертикальные скорости:

$$
u(x,y,0) = u^0(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u^1(x,y), \quad (x,y) \in \Omega. \tag{7.4}
$$

Таким образом, полная постановка задачи о малых поперечных колебаниях закреплённой мембраны состоит в решении уравнения (7.2) при краевом условии Дирихле (7.3) и начальных условиях (7.4).

## 7.2 Колебания прямоугольной мембраны

Пусть мембрана в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0,\ x = l,\ y = 0,\ y = h$. Тогда задача о свободных колебаниях мембраны сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < h, \tag{7.5}$$

с краевыми условиями

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=h} = 0, \tag{7.6}$$

а также начальными условиями

$$\begin{gathered} u(x,y,0) = u^0(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u^1(x,y), \\ 0 < x < l, \ 0 < y < h. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Поставленную задачу будем решать методом разделения переменных. Будем искать частные решения уравнения (7.5), удовлетворяющие краевым условиям (7.6), в виде произведения трёх функций, каждая из которых зависит лишь от одного аргумента:

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Подстановка решения такого вида в уравнение (7.5) даёт соотношение

$$XYT'' = a^2 \left( X''YT + XY''T \right),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{7.8}$$

Разделение переменных в краевых условиях (7.6) приводит к требованиям (проверьте!)

$$X(0) = 0, \ X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \ Y(h) = 0.$$

Из (7.8) получаем, что каждая дробь должна быть постоянной (почему?), и тогда для функций $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ возникают три задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \ 0 < x < l, \quad X(0) = 0, \ X(l) = 0; \tag{7.9}$$

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \ 0 < y < h, \quad Y(0) = 0, \ Y(h) = 0; \tag{7.10}$$

$$T''(t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2)T(t) = 0. \tag{7.11}$$

Здесь уже учтены знаки возникающих констант, отвечающие случаям, когда задачи (7.9) и (7.10) имеют ненулевые (нетривиальные) решения.

Задача (7.9) уже возникала при изучении колебаний конечной струны (см. (6.19)), и её решения имеют вид

$$\lambda = \lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad X(x) = X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Аналогично для задачи (7.10) имеем

$$\mu = \mu_p = \frac{\pi p}{h}, \quad Y(y) = Y_p(y) = \sin\frac{\pi p y}{h}, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из (7.11) получаем, что

$$\begin{aligned} T(t) = T_{kp}(t) &= A_{kp}\cos(\omega_{kp}t) + B_{kp}\sin(\omega_{kp}t),\\ \omega_{kp}^2 &:= \pi^2 a^2 (k^2/l^2 + p^2/h^2), \quad k, p = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Здесь числа $\omega_{kp}$ — это частоты собственных колебаний прямоугольной мембраны, а соответствующее решение $u = u_{kp}(x, y, t)$ имеет вид

$$u_{kp}(x, t) = (A_{kp}\cos(\omega_{kp}t) + B_{kp}\sin(\omega_{kp}t))\sin\frac{\pi k x}{l}\sin\frac{\pi p y}{h}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7.12}$$

Функции (7.12) описывают **стоячие волны** для прямоугольной мембраны. Наименьшая собственная частота колебаний мембраны (основной тон) отвечает случаю $k = p = 1$. Остальные частоты (обертоны) получаются при других значениях $k$ и $p$.

Предоставляем возможность самостоятельно, на основе формулы (7.12), разобраться, как выглядит основная форма колебаний мембраны и другие формы, отвечающие обертонам. В частности, интересно проследить, где находятся **пучности** (т.е. точки, наиболее отклоняющиеся от положения равновесия) и **узловые линии** — т.е. те линии, на которых точки мембраны не отклоняются.

Найдя частные решения вида (7.12), составим теперь формальное общее решение задачи (7.5) – (7.7), просуммировав функции (7.12) по $k$ и $p$; имеем

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}(A_{kp}\cos(\omega_{kp}t) + B_{kp}\sin(\omega_{kp}t))\sin\frac{\pi k x}{l}\sin\frac{\pi p y}{h}. \tag{7.13}$$

Здесь возникают **двойные ряды Фурье**. Неизвестные до сих пор коэффициенты $A_{kp}$ и $B_{kp}$ можно найти, используя начальные условия (7.7) и тот факт, что набор функций

$$\left\{\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi py}{h}\right\}, \quad k,p=1,2,\dots$$

является полной ортогональной системой функций в прямоугольнике $0<x<l,\ 0<y<h$, так как системы функций

$$\left\{\sin\frac{\pi kx}{l}\right\},\ k=1,2,\dots,\quad \left\{\sin\frac{\pi py}{h}\right\},\ p=1,2,\dots,$$

образуют полные ортогональные системы на промежутках $(0,l)$ и $(0,h)$ соответственно. Можно проверить, что имеют место формулы

$$\int_0^l dx\int_0^h dy\left(\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi\tilde{k}x}{l}\sin\frac{\pi py}{h}\sin\frac{\pi\tilde{p}y}{h}\right)=\frac{lh}{4}\delta_{k\tilde{k}}\delta_{p\tilde{p}},$$

где $\delta_{k\tilde{k}}$ и $\delta_{p\tilde{p}}$ — соответствующие символы Кронекера.

В частности, начальные функции (7.7) можно разложить в двойные ряды Фурье:

$$\begin{gathered} u^0(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}a_{kp}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi py}{h}, \\ a_{kp}=\frac{4}{lh}\int_0^l\int_0^h u^0(x,y)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi py}{h}dxdy, \end{gathered} \tag{7.14}$$

$$\begin{gathered} u^1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}b_{kp}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi py}{h}, \\ b_{kp}=\frac{4}{lh}\int_0^l\int_0^h u^1(x,y)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi py}{h}dxdy. \end{gathered} \tag{7.15}$$

Тогда использование этих формул и начальных условий (7.7) для решения (7.13) приводит к связям

$$A_{kp}=a_{kp},\quad \omega_{kp}B_{kp}=b_{kp},\quad k,p=1,2,\dots,$$

и окончательное формальное решение задачи принимает вид

$$u(x,t) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\Big(a_{kp}\cos(\omega_{kp}t) + \omega_{kp}^{-1}b_{kp}\sin(\omega_{kp}t)\Big)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi py}{h}, \tag{7.16}$$

где $\omega_{kp}$ — собственные частоты колебаний мембраны, а $a_{kp}$ и $b_{kp}$ — коэффициенты Фурье (7.14), (7.15) начальных функций задачи.

Отметим без доказательства, что решение (7.16) задачи будет достаточно гладким, например, дважды непрерывно дифференцируемым по своим переменным, если начальные функции $u^0(x,y)$ и $u^1(x,y)$ будут достаточно гладкими. Заметим ещё, что задача (7.5) – (7.7) имеет единственное формальное решение (7.16), так как коэффициенты этого двойного ряда Фурье находятся однозначно.

## 7.3 Колебания круглой мембраны

Рассмотрим теперь ту же задачу о свободных колебаниях закреплённой мембраны, однако будем считать, что мембрана имеет не прямоугольную, а круглую форму, т.е. имеет вид барабана.

В этом случае в задаче удобно перейти к полярной системе координат, связанной с декартовой системой формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r < \infty.$$

Подсчёт показывает (проверьте это!), что тогда

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Поэтому задача о свободных колебаниях круговой закреплённой мембраны радиуса $R$ выглядит следующим образом: нужно найти функцию $u = u(r,\varphi,t)$ из уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r < R, \tag{7.17}$$

при краевом условии

$$u(R,\varphi,t) = 0 \tag{7.18}$$

и начальных условиях

$$u(r,\varphi,0) = u^0(r,\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\varphi,0) = u^1(r,\varphi). \tag{7.19}$$

Задача (7.17) – (7.19), как и предыдущие, допускает разделение переменных, однако здесь возникают специальные функции математической физики, которые называются **функциями Бесселя**.

Будем искать частные решения уравнения (7.17) в виде

$$u(r,\varphi,t) = U(r)F(\varphi)T(t)$$

и подставим это решение в (7.17). Это даёт соотношение

$$UFT'' = a^2\left(U''FT + \frac{1}{r}U'FT + \frac{1}{r^2}UF''T\right).$$

Отсюда получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{U''(r) + \frac{1}{r}U'(r)}{U(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}.$$

Так как слева стоит функция, зависящая от $t$, а справа функция, зависящая от $r$ и $\varphi$, то обе части равны константе, которая, как выясняется, должна быть отрицательной:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda^2 = \frac{U''(r) + r^{-1}U'(r)}{U(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}.$$

Тогда

$$T''(t) + a^2\lambda^2T(t) = 0, \tag{7.20}$$

$$\frac{r^2U''(r) + rU'(r)}{U(r)} + \lambda^2r^2 = -\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}.$$

Здесь снова левая часть зависит от $r$, а правая от $\varphi$, поэтому обе они равны константе, которая должна быть положительной. Обозначая её через $\mu^2$, приходим наряду с (7.20) к ещё двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$F''(\varphi) + \mu^2F(\varphi) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{7.21}$$

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)U(r) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad U(R) = 0. \tag{7.22}$$

В (7.22) уже учтено, что граничное условие (7.18) переходит в условие $u(R) = 0$.

Таким образом, для определения функций $T(t)$, $F(\varphi)$ и $U(r)$ возникли задачи (7.20) – (7.22).

Задача (7.21) может быть легко решена, необходимо только учесть, что функция $F(\varphi)$ должна быть периодической по $\varphi$ с периодом $2\pi$. Тогда

$$F(\varphi) = F_m(\varphi) = F_{m1}\cos m\varphi + F_{m2}\sin m\varphi,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mu = \mu_m = m.$$

При $m = 0$ получаем $F_0(\varphi) = \mathrm{const}$, и этот случай отвечает осесимметричным колебаниям мембраны.

Рассмотрим теперь задачу (7.22). Осуществим в ней замену неизвестной переменной по формуле

$$\lambda r = x.$$

Тогда она перейдёт в задачу

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0, \quad y(\lambda R) = 0, \tag{7.23}$$

где

$$y(x) := U(\frac{x}{\lambda}).$$

Уравнение (7.23) есть стандартное уравнение Бесселя. Оно при любом $m = 0, 1, 2, \ldots$ имеет решение, которое ограничено в нуле и осциллирует (т.е. меняет знак) вдоль оси $Ox$. Амплитуда такого решения асимптотически уменьшается. Свойства функций Бесселя, т.е. решений уравнения (7.23), описаны во многих монографиях, поэтому здесь на этих свойствах подробно не останавливаемся.

Итак, решение уравнения (7.23) есть

$$y(x) = J_m(x) = J_m(\lambda r),$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя $m$-го порядка. Граничное условие (7.23) при $r = R$ даёт соотношение

$$J_m(\lambda R) = 0.$$

Введём числа $\alpha_{mp}$ — нули функции $J_m(x)$, $p = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\lambda = \lambda_{mp} = \alpha_{mp}/R, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \; p = 1, 2, \ldots.$$

Окончательно получаем

$$U(r) = U_{mp}(r) = J_m(\alpha_{mp} r/R), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \; p = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из (7.20) приходим к выводу, что частные решения уравнения свободных колебаний мембраны имеют вид

$$u_{mp}(r,\varphi,t) = \\ = (A_{mp}\cos(a\lambda_{mp}t) + B_{mp}\sin(a\lambda_{mp}t))J_m(\alpha_{mp}r/R)\left\{\begin{array}{l}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right. . \tag{7.24}$$

При $m = 0$ получаем собственные осесимметричные колебания мембраны

$$u_{0p}(r,t) = (A_{0p}\cos(a\lambda_{0p}t) + B_{0p}\sin(a\lambda_{0p}t))\,J_0(\alpha_{0p}r/R), \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Из решений (7.24) можно составить двойной ряд Фурье и получить формальное решение задачи (7.17) – (7.19). При этом нужно использовать начальные условия (7.19) и, в частности, разложения функций $u^0(r,\varphi)$ и $u^1(r,\varphi)$ в двойные ряды Фурье с использованием функций Бесселя. На этом вопросе здесь подробно не будем останавливаться.

# 8 Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности относится к классическим задачам параболического типа. Здесь будут рассмотрены задачи лишь в одномерном (по пространственной переменной) случае. Снова используется метод разделения переменных, позволяющий получить решение в виде суммы функционального ряда.

## 8.1 Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим металлический стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована, т.е. через неё не происходит теплообмена с окружающей средой. Если этот стержень неравномерно нагрет, то благодаря теплопроводности в нём будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым.

Пусть $u(x,t)$ — температура в стержне в точке $x$ в момент времени $t$. Для вывода дифференциального уравнения теплопроводности воспользуемся следующими фактами.

1°. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на $\Delta u$, равно

$$\Delta Q_1 = c\rho V \Delta u,$$

где $V$ — объём тела, $\rho > 0$ — его плотность, а $c > 0$ — удельная теплоёмкость.

2°. Количество тепла, протекающее через поперечное сечение стержня за момент $\Delta t$, равно

$$\Delta Q_2 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t,$$

где $S$ — площадь поперечного сечения, а $k > 0$ — коэффициент теплопроводности. Здесь знак минус в формуле учитывает, что при $\partial u/\partial x > 0$ тепловой поток идёт не в положительном (т.е. в сторону возрастания $x$), а в отрицательном направлении.

Выделим участок стержня между сечениями с координатами $x$ и $x + \Delta x$ и составим для этого участка уравнение теплового баланса. Количество тепла, появившегося в рассматриваемом участке, очевидно, равно

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Delta t + kS\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)\Delta t \simeq$$
$$\simeq kS\Delta t\left\{-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Delta x\right\} = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Delta x\Delta t.$$

Это количество тепла пойдёт на разогрев стержня, и так как $V = S\Delta x$, а $\Delta u \simeq \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$, то оно равно

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

Отсюда приходим к соотношению

$$kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t = c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta t.$$

После введения обозначения

$$a^2 = k/(c\rho)$$

окончательно получаем уравнение теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.1}$$

где $a^2$ называют `коэффициентом температуропроводности`.

Если внутри стержня имеются тепловые источники, то вместо (8.1) возникает неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $f(x,t)$ характеризует плотность тепловых источников.

Перейдём теперь к рассмотрению краевых и начальных условий. Будем считать, что стержень имеет длину $l$, $0 < x < l$. Самый простой случай краевых условий — это тот, когда концы стержня поддерживаются при постоянной температуре. Тогда имеем условия

$$u(0,t) = v^0, \quad u(l,t) = v^1, \tag{8.2}$$

где $v^0$ и $v^1$ — заданные числа.

Возможны, однако, и более общие краевые условия, когда на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона, учитывающего, что поток тепла через единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды. Это приводит, как выясняется, к краевым условиям:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h_0\left(u(0,t) - \tilde{u}_0\right), \quad -k\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = h_l\left(u(l,t) - \tilde{u}_l\right), \tag{8.3}$$

где $k, h_0, h_l$ — положительные константы, а $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_l$ — константы. В частности, при $h_0 = h_l = 0$, когда коэффициенты теплообмена равны нулю, имеем условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0. \tag{8.4}$$

Что касается начальных условий, то при $t = 0$ должна быть задана начальная температура в стержне, т.е.

$$u(x,0) = u^0(x), \quad 0 < x < l. \tag{8.5}$$

Таким образом, начально-краевая задача о распространении тепла в однородном стержне состоит в решении уравнения (8.1) при краевых условиях (8.2) (либо (8.3), (8.4) или их комбинаций) и начальном условии (8.5).

## 8.2 Распространение тепла в стержне при постоянной температуре на концах

Формулировка этой задачи только что была приведена. Её особенностью является то обстоятельство, что краевые условия (8.2) являются неоднородными и потому нельзя непосредственно применять метод разделения переменных.

Чтобы преодолеть эту (несложную) проблему, будем искать решение задачи (8.1), (8.2), (8.5) в виде

$$u(x,t) = w(x,t) + w_0(x), \quad w_0(x) = c_0 + c_1 x, \tag{8.6}$$

и подберём константы $c_0$ и $c_1$ так, чтобы для новой искомой функции $w(x,t)$ краевые условия на концах были однородными. Подсчёт показывает, что нужно взять $c_0 = v^0$, $c_1 = (v^1 - v^0)/l$, и тогда линейная функция

$$w_0(x) = v^0 + (v^1 - v^0)x/l$$

удовлетворяет условиям (8.2). Поэтому для $w(x,t)$ имеем

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0. \tag{8.7}$$

Физический смысл функции $w_0(x)$ состоит в том, что она даёт распределение температуры в стержне для **стационарной задачи**, когда $u(x,t)$ зависит лишь от $x$ и не зависит от $t$.

Переформулируем теперь задачу для новой искомой функции $w(x,t)$. Так как в силу (8.6)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

то для $w(x,t)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{8.8}$$

краевые условия (8.7) и начальное условие

$$w(x,0) = u^0(x) - w_0(x) =: \tilde{u}^0(x). \tag{8.9}$$

Задачу (8.7) – (8.9) можно решить методом разделения переменных. Будем считать, что частные решения уравнения (8.8) имеют вид

$$w(x,t) = X(x)T(t).$$

Тогда из (8.8) имеем

$$XT' = a^2 X'' T,$$

и потому

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где константа $\lambda$ ещё не определена.

Для определения $T(t)$ и $X(x)$ возникают две задачи:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{8.10}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ 0 < x < l, \quad X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{8.11}$$

Решения второй задачи, как уже неоднократно встречалось выше, имеют вид

$$\lambda = \lambda_k = \pi k/l,\ k = 1, 2, \ldots, \quad X(x) = X_k(x) = \sin(\pi k x/l).$$

Решения первой задачи при $\lambda = \lambda_k$ имеют вид

$$T(t) = T_k(t) = A_k e^{-a^2\pi^2 k^2 t/l^2}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и потому набор частных решений данной задачи таков:

$$w(x,t) = w_k(x,t) = A_k e^{-a^2\pi^2 k^2 t/l^2} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Соответственно общее формальное решение выражется формулой

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2\pi^2 k^2 t/l^2} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right).$$

Для того, чтобы найти постоянные $A_k$, воспользуемся начальным условием (8.9). Имеем,

$$w(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) = \tilde{u}^0(x).$$

Отсюда следует, что константы $A_k$ — это коэффициенты разложения функции $\tilde{u}^0(x) = u^0(x) - w_0(x)$ в ряд Фурье по полной ортогональной системе функций $\{\sin(\pi k x/l)\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{u}^0(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и решение задачи найдено полностью. Так как $A_k$ определены однозначно, то исходная задача имеет единственное решение

$$u(x,t) = v^0 + (v^1 - v^0)\frac{x}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2\pi^2k^2t/l^2}\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot \\ \cdot\int_0^l [u^0(\xi) - (v^0 + (v^1 - v^0)\xi/l)]\sin\frac{\pi k\xi}{l}d\xi. \tag{8.12}$$

Здесь сумма функционального ряда с возрастанием $t$ быстро стремится к нулю, так как $\exp(-\pi^2k^2a^2t/l^2) \to 0$ при всех $k = 1, 2, \dots,$ и потому решение $u(x,t)$ выходит на стационарный режим

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = w_0(x) = v^0 + (v^1 - v^0)x/l.$$

Отдельные слагаемые в сумме (8.12) называют `тепловыми волнами`.

Отметим, что при $t > 0$ решение (8.12) является как угодно гладким по своим переменным; это свойство характерно для уравнений параболического типа, к которому относится уравнение теплопроводности.

## 8.3 Распространение тепла в стержне при разных условиях на концах

Рассмотрим теперь задачу о распределении температуры в свободном конечном однородном стержне в случае, когда на его концах заданы разные краевые условия. Для определённости будем считать, что на левом конце теплопоток равен нулю, т.е. этот конец теплоизолирован, а на правом конце поддерживается постоянная и притом нулевая температура. Тогда, учитывая условие (8.4) на левом конце и условие (8.2) на правом, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{8.13}$$

Повторяя предыдущие преобразования, связанные с применением метода разделения переменных для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.14}$$

т.е. разыскивая его решения в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

приходим к выводу, что для $T(t)$ должно снова выполняться уравнение (8.10), а для $X(x)$ возникает краевая задача, отличная от (8.11):

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ 0 < x < l, \quad X'(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{8.15}$$

Рассмотрим её подробнее.

Общее решение уравнения (8.15) имеет вид

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x.$$

Используя левое граничное условие, имеем

$$X'(0) = \lambda C_1 = 0.$$

Так как $\lambda \neq 0$ (иначе задача (8.15) имеет нулевое решение), то $C_1 = 0$, т.е. $X(x) = C_2 \cos \lambda x$. Второе краевое условие даёт

$$C_2 \cos \lambda l = 0.$$

Так как здесь $C_2 \neq 0$ (почему?), то $\cos \lambda l = 0$ и поэтому (проверьте!)

$$\lambda = \lambda_k = \frac{2k+1}{2l}\pi, \quad X(x) = X_k(x) = \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Значит, частное решение таково:

$$u_k(x,t) = A_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

а общее решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}} \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right).$$

Для нахождения коэффициентов $A_k$ воспользуемся начальным условием

$$u(x,0) = u^0(x). \tag{8.16}$$

Тогда придём к соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right) = u^0(x), \quad 0 < x < l. \tag{8.17}$$

Используем теперь тот факт, что система функций

$$\left\{\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$$

является ортогональной системой на промежутке $(0, l)$ и притом полной системой. Для этих функций выполнены следующие формулы ортогональности (проверьте!)

$$\int_0^l \cos\left(\frac{(2k+1)}{2l}\pi x\right)\cos\left(\frac{(2m+1)}{2l}\pi x\right)dx = \frac{l}{2}\delta_{km}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты $A_k$, как видно из (8.17), равны

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l u^0(x)\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и потому формальное решение задачи (8.13), (8.14), (8.16) находится однозначно и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 a^2 t}{4l^2}}\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi x\right)\int_0^l u^0(\xi)\cos\left(\frac{2k+1}{2l}\pi\xi\right)d\xi. \tag{8.18}$$

Видно, что решение имеет нулевой предел при $t \to +\infty$. Это не удивительно, так как в силу второго условия (8.13) равновесное распределение температуры должно быть тождественно нулевым.

В заключение этого параграфа отметим, что здесь рассматривались задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Уравнение теплопроводности в двумерном либо трёхмерном случае выглядит аналогично: в двумерном

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

а в трёхмерном — то же уравнение с

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

На границе области $\Omega$, в которой изучается процесс теплопроводности, ставится какое-либо из краевых условий Дирихле, Неймана или Ньютона, а в начальный момент времени $t = 0$ следует задать начальное распределение температуры.

Решение соответствующих задач для уравнения теплопроводности в некоторых областях $\Omega$ из $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ можно получить, как и выше, методом разделения переменных, представляя решение в виде кратных рядов Фурье.

# 9 Краевые и спектральные задачи

Здесь будут рассмотрены краевые и спектральные задачи для так называемых эллиптических уравнений. Простейшим примером таких задач являются задачи для уравнения Пуассона и Лапласа.

## 9.1 Основные типы краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона

Пусть $\Omega$ — область в двумерном, трёхмерном либо $m$-мерном пространстве. `Уравнением Пуассона` называется уравнение вида

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \tag{9.1}$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

соответственно в двумерном, трёхмерном и $m$-мерном пространстве. Частным случаем уравнения Пуассона является `уравнение Лапласа`, когда в (9.1) $f \equiv 0$, т.е.

$$\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{9.2}$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются `гармоническими`.

При исследовании краевых задач для эллиптических уравнений, в частности, для уравнения Лапласа либо Пуассона, необходимо также учитывать `краевые условия`. Различают три типа классических краевых условий.

1°. Условие Дирихле:

$$u = g \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{9.3}$$

2°. Условие Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = g \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \tag{9.4}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области $\Omega$, а $\nabla$ — оператор градиента (оператор "набла"),

$$\nabla u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \vec{e}_k,$$

и $\vec{e}_k$ — орт оси $Ox_k$ в $m$-мерном пространстве. Выражение $\partial u/\partial n$ называют `производной по внешней нормали`.

3°. Условие Ньютона:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = g \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \tag{9.5}$$

где $a = a(x) \geqslant 0$ — заданная на $\Gamma$ неотрицательная функция.

Задача (9.1), (9.3) назывется задачей Дирихле для уравнения Пуассона, соответственно (9.1), (9.4) есть задача Неймана, а (9.1), (9.5) — задача Ньютона для уравнения Пуассона. Аналогично определяются задачи для уравнения Лапласа (9.2).

## 9.2 Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга

Рассмотрим для определённости в двумерном случае задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области $\Omega$, являющейся кругом радиуса $R$. Введя полярные координаты $(r, \varphi)$ с началом в центре круга и используя выражение для оператора Лапласа в полярной системе координат, придём к следующей задаче:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r < R, \tag{9.6}$$

$$u(R, \varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{9.7}$$

К этой задаче, как и в предыдущих, можно применить метод разделения переменных (метод Фурье). Будем разыскивать частные решения уравнения Лапласа (9.6) в виде

$$u(r, \varphi) = U(r)\Phi(\varphi). \tag{9.8}$$

Тогда подстановка в уравнение (9.6) приводит к соотношению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\Phi(\varphi) = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot U(r),$$

а потому

$$\frac{r}{U(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \lambda = \mu^2, \tag{9.9}$$

где $\lambda$, как сейчас будет ясно, должна быть неотрицательной константой и потому обозначена через $\mu^2$.

Из (9.9) получаем два обыкновенных уравнения

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{\mu^2}{r^2}U(r) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \tag{9.10}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Так как $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической по $\varphi$, то

$$\mu = m = 0, 1, 2, \ldots,$$

и тогда

$$\Phi = \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Уравнение (9.10) при $\mu = m$ есть уравнение Эйлера, его частные решения имеют вид $r^\alpha$ с некоторым $\alpha$, и тогда ясно, что должно быть

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - m^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \pm m.$$

Решения вида $r^{-m}$, $m > 0$, необходимо отбросить, так как они неограничены в нуле. Поэтому

$$U = U_m(r) = r^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Итак, частные решения вида (9.8) выражаются формулами

$$u_m(r,\varphi) = r^m\left(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

а общее решение принимает вид

$$u(r,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m\left(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right), \tag{9.11}$$

где $A_m$ и $B_m$ — пока неопределённые константы.

Их можно найти, используя граничное (краевое) условие Дирихле (9.7). Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} R^m \left(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right) = g(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Разлагая $g(\varphi)$ в ряд Фурье, получим

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right),. \tag{9.12}$$

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi,$$
$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi.$$

Поэтому

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_m R^m = a_m, \quad B_m R^m = b_m,$$

и окончательно решение задачи (9.6), (9.7) принимает вид

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \left(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right),$$

где $a_m$ и $b_m$ — коэффициенты Фурье заданной функции $g(\varphi)$ (см. (9.12)).

Можно доказать, что это решение представимо также в форме

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) g(\eta)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \eta) + r^2} d\eta, \tag{9.13}$$

которую называют `интегралом Пуассона`.

## 9.3 Классические спектральные задачи для оператора Лапласа

Такие задачи возникают, когда в уравнении теплопроводности либо в волновом уравнении отделяют переменную $t$, т.е. время. Пусть, например, рассматривается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U, \tag{9.14}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа (в двумерном, трёхмерном либо $m$-мерном случае). Будем разыскивать решения уравнения (9.14) в виде

$$U(t, x) = T(t)u(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Отсюда и из (9.14) имеем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta u}{u} = -\lambda,$$

где $\lambda$ — некоторая константа.

Для функции $u(x_1, \ldots, x_m)$ возникает задача

$$-\Delta u = \lambda u, \tag{9.15}$$

рассматриваемая в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Эту задачу называют **спектральной задачей** для оператора Лапласа $\Delta$, а число $\lambda$ — **спектральным параметром**. Соответственно ненулевое решение $u = u(x)$ уравнения (9.15) называют **собственной функцией** оператора Лапласа.

Как и для краевых задач (см. п. 9.1), здесь используют три типа краевых условий вида $1^\circ$ – $3^\circ$, которые теперь должны быть **однородными**. Это следующие условия:

$1^\circ$. Условие Дирихле:

$$u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{9.16}$$

$2^\circ$. Условие Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{9.17}$$

$3^\circ$. Условие Ньютона:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \quad a = a(x) \geqslant 0. \tag{9.18}$$

Соответственно этим условиям различают спектральные задачи Дирихле, Неймана либо Ньютона для оператора Лапласа. Это задачи (9.15), (9.16), а также (9.15), (9.17) и (9.15), (9.18).

В математической физике рассматривают и смешанные задачи, когда условие одного из вышеперечисленных типов ставится на одной части границы $\partial\Omega$, а условие другого типа — на другой её части.

Оказывается, рассматриваемые задачи в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеют ненулевое решение не при любых значениях $\lambda$, а лишь для последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Как доказывается, при этом совокупность собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образует полную ортогональную систему (в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$).

## 9.4 Двумерная смешанная задача в прямоугольной области

Рассмотрим в качестве примера прямоугольную область

$$\Omega := \{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < h\} \tag{9.19}$$

и в этой области — спектральную задачу

$$-\Delta u := -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda u \tag{9.20}$$

с краевыми условиями

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, h) = 0. \tag{9.21}$$

Здесь, очевидно, на боковых стенках области ставится условие Дирихле, а на нижнем и верхнем основаниях — условие Неймана.

Для исследования задачи (9.19) – (9.21) снова применим метод разделения переменных. Представим частное решение уравнения (9.20) в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Тогда придём к соотношению

$$-\left(X''Y + XY''\right) = \lambda XY,$$

откуда возникают две вспомогательные спектральные задачи (проверьте!):

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \ 0 < x < \pi, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{9.22}$$

$$Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0, \ 0 < y < h, \quad Y'(0) = Y'(h) = 0, \tag{9.23}$$

и связь параметров

$$\lambda = \mu^2 + \nu^2.$$

Задача (9.22), очевидно, имеет решения

$$X = X_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а задача (9.23) — решения вида (проверьте!)

$$Y = Y_p(y) = \cos \frac{\pi p y}{h}, \quad p = 0, 1, 2, \dots.$$

Отсюда следует, что решения задачи (9.19) – (9.21) имеют вид

$$u = u_{kp}(x, y) = \sin(kx) \cos\left(\frac{\pi p y}{h}\right), \quad \lambda = \lambda_{kp} = k^2 + \frac{\pi^2 p^2}{h^2}, \quad (9.24)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots. \quad (9.25)$$

Видно, что все собственные значения $\lambda_{pk}$ положительны и при возрастании одного или двух индексов стремятся к бесконечности. Кроме того, так как функции $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ образуют полную ортогональную систему на промежутке $(0, \pi)$, а функции $\left\{\cos\left(\frac{\pi p y}{h}\right)\right\}_{p=0}^{\infty}$ — полную ортогональную систему на промежутке $(0, h)$, то функции $\{u_{kp}(x, y)\}_{k=1,\ p=0}^{\infty}$ образуют полную ортогональную систему функций в пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega = (0, \pi) \times (0, h)$.

## 9.5 Двумерная неклассическая задача Стеклова

Эта задача возникает в проблеме колебаний жидкого топлива в баке космической ракеты на активном участке её движения вдоль траектории.

Особенностью (неклассичностью) этой задачи является то обстоятельство, что здесь спектральный параметр $\lambda$ входит не в уравнение, а в краевое условие. Эту задачу называют `задачей Стеклова`.

Сформулируем постановку задачи в двумерном случае для области $\Omega$ вида (9.19), т.е. для $\Omega = (0, \pi) \times (0, h)$. Искомая функция $u = u(x, y)$ должна быть гармонической, т.е.

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (9.26)$$

на боковых стенках и на нижнем основании должно выполняться условие Неймана, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad (9.27)$$

а на верхней крышке — условие, содержащее спектральный параметр:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,h) = \lambda u(x,h). \tag{9.28}$$

Физический смысл параметра $\lambda$ — это квадрат частоты собственных колебаний жидкого топлива в баке космической ракеты, а решение $u(x,y)$ — это форма колебаний жидкости, отвечающая числу $\lambda$. Отметим ещё, что требуется также учесть дополнительное условие сохранения объёма жидкости при колебаниях, которое имеет вид

$$\int_0^\pi u(x,h)dx = 0. \tag{9.29}$$

Задачу (9.26) – (9.29) снова будем решать методом разделения переменных:

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Тогда из (9.26) имеем

$$X''Y + XY'' = 0,$$

и потому

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\mu^2.$$

Для функций $X(x)$ и $Y(y)$ возникают две задачи (проверьте, исходя из краевых условий (9.27) – (9.29)):

$$\begin{gathered} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0,\ 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \quad \int_0^\pi X(x)dx = 0, \end{gathered} \tag{9.30}$$

$$\begin{gathered} Y''(y) - \mu^2 Y(y) = 0,\ 0 < y < h, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(h) = \lambda Y(h). \end{gathered} \tag{9.31}$$

Решения задачи (9.30), с учётом интегрального условия (9.29), имеют вид

$$X = X_k(x) = \cos kx, \quad \mu = \mu_k = k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

а потому решения задачи (9.31) таковы:

$$Y = Y_k(y) = \operatorname{ch}(ky), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9.32}$$

Здесь уже учтено краевое условие в нуле.

Подставляя функции (9.32) в последнее условие (9.31), получим

$$k \operatorname{sh}(kh) = \lambda \operatorname{ch}(kh),$$

откуда следует, что собственные значения и собственные функции равны

$$\lambda = \lambda_k = k \operatorname{th}(kh), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$u = u_k(x, y) = \cos kx \operatorname{ch} ky. \tag{9.33}$$

Здесь снова, как и в предыдущих случаях, совокупность собственных значений (квадратов частот собственных колебаний) образует последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. При этом собственные функции (9.33) обладают тем свойством, что их следы на верхней крышке, т.е. функции

$$\{\cos kx \operatorname{ch} kh\}_{k=1}^{\infty},$$

в объединении с функцией $u_0(x) \equiv 1$, образуют полную ортогональную систему на промежутке $(0, \pi)$.

# Список литературы


[1] Л.Э. Эльсгольц. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* –М.: Наука, 1969. – 424 с.

[2] А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.* –М.: Наука, 1980. – 288 с.

[3] А.Д. Мышкис. *Математика для втузов. Специальные курсы.* – М.: Наука, 1971. – 632 с.

[4] М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселёв. *Вариационное исчисление (задачи и упражнения). — Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов.* –М.: Наука, 1973. – 192 с.

[5] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики.* – М.: ГИТТЛ, 1953. – 680 с.

[6] В.И. Левин. *Методы математической физики.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 244 с.

[7] И.Г. Араманович, В.И. Левин. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1969. – 288 с.

**Навчально-методичне видання**

**Копачевський М.Д.**

**ОБРАНІ ГЛАВИ СУЧАСНОГО ПРИРОДОЗНАВСТВА**
*(Елементи варіаційного числення та математичної фізики)*
**Методичний посібник**

**(російською мовою)**

*Верстка Войтицкий В.І.*
*Редактура та коректура Газієв Е.Л.*

---

Підписано до друку 11.09.2007р. Формат 60*84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Обл.-вид. друк. арк. 3,2. Об'єм 4,5 друк. арк.
Тираж 100 прим.

Надруковано
95015, м. Сімферополь, вул. Севастопольська, пров. Учбовий, 8