МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальный курс лекций
для студентов специальностей
"Математика" и "Прикладная математика"

Симферополь, 2008

ББК 22.311
К65
УДК 517.[958+983+984]

Рекомендовано к печати научно-методической комиссией факультета математики и информатики ТНУ (протокол № 2 от 12.11.2008 г.)

Рецензент :

Закора Д.А. – к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д. ***Операторные методы математической физики*:** Специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА", 2008. – 142 с. – На русском языке.

В учебном пособии рассматриваются краевые и спектральные задачи математической физики и их операторные аналоги в гильбертовом пространстве. Приводится обобщенное решение операторного уравнения в энергетическом пространстве и вычислительный процесс Ритца для него. Подробно излагаются спектральная теория положительно определенных операторов и ее приложения в задачах механики и гидродинамики.

Примеры и упражнения, представленные в учебном пособии, позволяют рекомендовать его как для аудиторных занятий, так и самостоятельного изучения

Для студентов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики и прикладной математики.

Оглавление

Введение

Предисловие

Настоящий курс лекций предназначен для студентов шестого – седьмого семестров обучения по специальностям классическая и прикладная математика. Его следует изучать после прохождения курса функционального анализа, а также после знакомства с элементами вариационного исчисления.

Основная идея, которая систематически проводится в курсе, состоит в том, что неоднородной краевой задаче математической физики ставится в соответствие оператор этой задачи, который действует в выбранном гильбертовом пространстве. Обычно этот оператор оказывается неограниченным самосопряженным оператором, обладающий свойством положительной определенности либо полуограниченности.

Предварительные пояснения

Многие задачи математической физики, теории упругости, гидродинамики и другие приводят к изучению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных при соответствующих граничных условиях. Если дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции, а краевые условия линейные и однородные, то к таким задачам можно применить единый подход, основанный на введении и изучении свойств так называемого оператора краевой задачи. Получающиеся операторы обладают свойствами линейности (т.е. аддитивности и однородности), однако оказываются неограниченными в выбранном гильбертовом пространстве и потому их задают не на всем пространстве $\mathcal{H}$, а лишь на некотором плотном в $\mathcal{H}$ множестве.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 0.0.1. *Задача о равновесии плоской пластинки.*

Пусть в ненагруженном состоянии плоская пластинка занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и имеет границу $S = \partial\Omega$, а на концах жестко защемлена. При действии поперечной нагрузки $f = f(x_1, x_2)$ возникает задача об отыскании поперечного прогиба $u = u(x_1, x_2)$ под действием силы f. Эта задача приводит к неоднородному уравнению Софи-Жермен

$$\Delta_2^2 u = f \quad (\text{в } \Omega), \qquad \Delta_2 := \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \tag{0.1}$$

и граничным условиям жесткого защемления пластинки

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \tag{0.2}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

Как будет выяснено ниже, к этой задаче можно применить методы функционального анализа, а также вариационный подход, позволяющий разыскивать ее обобщенное решение как точку минимума квадратичного функционала

$$F(u) := \int_\Omega (|\Delta_2 u|^2 - 2fu)\, d\Omega. \tag{0.3}$$

При этом будет указан алгоритм приближенного решения задачи (0.1), (0.2). □

Пример 0.0.2. *Колебания тяжелой жидкости в сосуде.*

Пусть идеальная несжимаемая жидкость частично заполняет произвольный сосуд и в состоянии покоя при действии силы тяжести с ускорением $\vec{g}$ занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Твердую стенку сосуда обозначим через S, а покоящуюся свободную поверхность жидкости, перпендикулярную вектору $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, через Γ. Оказывается, что задача об определении частот ω собственных колебаний жидкости может быть приведена к спектральной задаче

$$\Delta_3 \Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{ на } S\ ), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \lambda \Phi \quad (\text{ на } \Gamma\ ), \tag{0.4}$$

где $\lambda = \omega^2/g$, а $\Delta_3 := \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ – трехмерный оператор Лапласа.

Общий операторный метод, с которым мы познакомимся в данном курсе, позволит привести задачу (0.4) к виду $Au = \lambda u$, изучить свойства решений этой задачи и установить, что собственные значения λ оператора A можно найти, рассматривая последовательные минимумы функционала

$$F(\Phi) := \int_\Omega |\operatorname{grad}\Phi|^2\, d\Omega \Big/ \int_\Gamma |\Phi|^2\, d\Gamma \qquad (0.5)$$

или максимумы обратного отношения.

Глава 1

Обобщенное решение операторного уравнения

1.1 Краевая задача и ее оператор

1.1.1 Одномерные краевые задачи

Остановимся сначала на наиболее простом случае, когда рассматриваемая краевая задача одномерна. Пусть изучается неоднородная задача для уравнения

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \tag{1.1}$$

с однородными краевыми условиями Дирихле:

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{1.2}$$

Считаем, что здесь функции $p = p(x) \in C^1([a,b])$ и $q = q(x) \in C([a,b])$ – это заданные переменные коэффициенты дифференциального выражения, стоящего в левой части (1.1), а $f(x)$ – заданная функция, правая часть уравнения. Требуется найти функцию $u(x)$ как решение задачи (1.1), (1.2).

Для изучения этой задачи применяются методы теории линейных неограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Выберем в качестве основного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ вещественное пространство $L_2(a,b)$ функций $\{u(x)\}$, для которых скалярное произведение определено по закону

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x)\,dx, \tag{1.3}$$

а норма функции равна

$$||u||^2 := \int_a^b |u(x)|^2 \; dx, \tag{1.4}$$

где справа стоит интеграл Лебега.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{D}\,(A) \subset \mathcal{H}$, для элементов $u(x)$ которого выполнены свойства

$$\mathcal{D}\,(A) := \{u(x) \in \mathcal{H} : -(p(x)u')' + q(x)u \in C[a, b] \subset \mathcal{H}, \tag{1.5}$$

$$a < x < b, \qquad u(a) = u(b) = 0\},$$

и будем трактовать задачу (1.1)–(1.2) как уравнение вида

$$Au = f, \qquad f \in \mathcal{H}, \tag{1.6}$$

рассматриваемое в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Здесь в левой части стоит результат применения к элементу $u(x)$ из $\mathcal{D}\,(A)$ оператора A, действующего в $\mathcal{H}$ по закону

$$(Au)(x) := -(p(x)u')' + q(x)u. \tag{1.7}$$

Таким образом, краевая задача (1.1)–(1.2) заменяется операторным уравнением (1.6) в пространстве $\mathcal{H}$. Если оператор A имеет в $\mathcal{H}$ ограниченный обратный, то решение задачи (1.6) имеет вид $u = A^{-1}f$.

Рассмотрим простейший пример задачи вида (1.1)–(1.2).

Пример 1.1.1. Пусть в (1.1), (1.2) будет

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv 1, \quad a = 0, \quad b = 1. \tag{1.8}$$

Тогда речь идет о задаче

$$Au := -u'' + u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{1.9}$$

Здесь $\mathcal{H} = L_2(0,1)$, а $f(x)$ считается элементом из $\mathcal{H}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) := \{u(x) \in L_2(0,1) : u'' \in C([0,1]) \subset L_2(0,1), \\ u(0) = u(1) = 0\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В данном примере множество $\mathcal{D}(A)$ состоит из функций $u(x)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,1]$ и имеющих непрерывные вторые производные, т.е. функции $u'(x)$ непрерывно дифференцируемы, а сами функции $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Множество таких функций плотно в $\mathcal{H}$, т.е. замыкание $\mathcal{D}(A)$ по норме $\mathcal{H}$ дает все пространство $\mathcal{H}$:

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}. \qquad \square \tag{1.11}$$

Напомним, что нормой оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется величина

$$\|A\| := \sup_{0 \neq u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}} \left(\|Au\| / \|u\| \right). \tag{1.12}$$

Упражнение 1.1.1. Проверить, что оператор A из примера 1.1.1 неограничен, т.е. его норма равна $+\infty$.

Указание. Найти, чему равен предел отношения $\|Au_n\|/\|u_n\|$ на элементах последовательности

$$u_n(x) := \sin(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

принадлежащих области определения оператора A. $\square$

Этот пример показывает, что операторы, возникающие в задачах математической физики, являются неограниченными в $\mathcal{H}$ операторами и потому естественной их областью определения является не все пространство $\mathcal{H}$, а лишь некоторое плотное в $\mathcal{H}$ множество $\mathcal{D}(A)$.

Совокупность линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, далее будем обозначать через $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

1.1.2 Многомерные краевые задачи

В качестве другого примера рассмотрим *задачу Неймана для уравнения Пуассона.*

Пример 1.1.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – область в m-мерном ($m \geqslant 2$) пространстве, $\partial\Omega$ – ее граница. Рассмотрим задачу

$$-\Delta u + u = f \text{ (в } \Omega\text{)}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega\text{)}. \tag{1.14}$$

Здесь $f = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega$, – заданная в Ω функция, $u = u(x)$ – искомая функция, а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. $\square$

Выберем в качестве $\mathcal{H}$ вещественное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) := \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\,d\Omega, \quad d\Omega = dx_1 \dots dx_m, \tag{1.15}$$

и нормой

$$||u||^2 := \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\, d\Omega, \tag{1.16}$$

где интеграл снова понимается в смысле Лебега. Будем считать, что на множестве

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\,(A) := \{u(x) \in L_2(\Omega) :\ -\Delta u \in C(\Omega) \subset L_2(\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0\,(\ \text{на}\ \ \partial\Omega\,)\}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

которое является плотным в $\mathcal{H}$, определен оператор A по закону

$$Au := -\Delta u + u. \tag{1.18}$$

Тогда задачу (1.14) можно трактовать при любом $f \in \mathcal{H}$ как операторное уравнение вида

$$Au = f, \quad f \in \mathcal{H} = L_2(\Omega). \tag{1.19}$$

Упражнение 1.1.2. Убедиться, что операторы, введенные в примерах 1.1.1 и 1.1.2, обладают свойствами линейности, т.е.

$$\begin{aligned} A(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Au_1 + c_2Au_2, \\ u_1, u_2 \in \mathcal{D}\,(A)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square \end{aligned} \tag{1.20}$$

Упражнение 1.1.3. Проверить, что для оператора Лапласа $\Delta := \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ при произвольных $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(x_1, x_2, x_3)$, имеющих непрерывные вторые частные производные, справедливы первая и вторая формулы Грина:

$$-\int\limits_{\Omega} (\Delta u)v\,d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\,d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS, \tag{1.21}$$

$$\int\limits_{\Omega} [(\Delta u)v - u(\Delta v)]\, d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}v - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\, dS, \tag{1.22}$$

где $\nabla u = \operatorname{grad} u = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\vec{e}_k$ – операция вычисления градиента. $\square$

Упражнение 1.1.4. На примере области $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^2$ убедиться, что оператор A задачи (1.14) из примера 1.1.2 неограничен.

Указание. Проверить, что для последовательности функций

$$u_{kj}(x_1, x_2) = \cos(kx_1)\cos(jx_2) \tag{1.23}$$

супремум отношения (1.12) равен $+\infty$. $\square$

Упражнение 1.1.5. Проверить, опираясь на формулу Грина (1.22),что для задачи (0.1), (0.2) о равновесии плоской пластинки на множестве четырежды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, т.е. на $C^4(\overline{\Omega})$, справедлива первая формула Грина для бигармонического оператора Δ_2^2:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \left(\Delta_2^2 u\right) v\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left(\Delta_2 u\right)\left(\Delta_2 v\right)\, d\Omega + \\ + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \Delta_2 u}{\partial n} v - \Delta_2 u \frac{\partial v}{\partial n}\right)\, dS. \qquad \square\end{aligned} \tag{1.24}$$

1.2 Положительно определенные операторы

1.2.1 Симметричные и положительно определенные операторы

Везде далее в этой части пособия будем предполагать, что оператор A краевой задачи действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и имеет область определения $\mathcal{D}(A)$, плотную в $\mathcal{H}$. Напомним, что *множество $M \subset \mathcal{H}$ называется плотным в $\mathcal{H}$, если для любого $u_0 \in \mathcal{H}$ и $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такой элемент $u_\varepsilon \in M$, что $||u_0 - u_\varepsilon|| < \varepsilon$.*

Далее считаем также, что $\mathcal{D}(A)$ есть *линейное множество* (линеал), а оператор A, определенный на $\mathcal{D}(A)$, линеен, т.е. *аддитивен и однороден.*

Определение 1.2.1. *Оператор A называется симметричным, если*

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall\ u, v \in \mathcal{D}(A)\,. \qquad \square \tag{1.25}$$

Определение 1.2.2. *Симметричный оператор A называется неотрицательным $(A \geqslant\ 0)$, если*

$$(Au, u) \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\,. \qquad \square \tag{1.26}$$

Определение 1.2.3. *Симметричный оператор A называется положительным $(A > 0)$, если*

$$(Au, u) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\,, \quad u \neq 0. \qquad \square \tag{1.27}$$

Определение 1.2.4. *Симметричный оператор A называется положительно определенным $(A \gg 0)$, если существует $c \neq 0$ такое, что*

$$(Au, u) \geqslant c^2\,(u, u) \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\,, \quad u \neq 0. \qquad \square \tag{1.28}$$

Замечание 1.2.1. Из свойства положительной определенности следует свойство положительности, а из него – неотрицательности. Обратные утверждения неверны. $\square$

Определение 1.2.5. *Симметричный оператор A называется ограниченным снизу ($A \geqslant\ \gamma I$), если*

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}\ :\ (Au, u) \geqslant \gamma\,(u, u) \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\,. \qquad \square \tag{1.29}$$

1.2.2 Примеры

Рассмотрим в виде упражнений некоторые примеры.

Упражнение 1.2.1. Показать, что в задаче (1.9), т.е.

$$Au := -u'' + u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{1.30}$$

оператор A: а)симметричен; б)неотрицателен; в)положителен; г)положительно определен. $\square$

Упражнение 1.2.2. Показать, что в задаче

$$Au := -\Delta u = f \ (\text{ в } \Omega\ ), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\,), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3, \tag{1.31}$$

оператор A обладает свойствами: а)симметрии; б)неотрицательности, но не обладает свойством положительности.

Лемма 1.2.1 (неравенство Пуанкаре)**.** *Пусть* $u(x) \in C^1([0,1])$ *и* $u(0) = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$2\int\limits_0^1 |u(x)|^2 \ dx \leqslant \int\limits_0^1 |u'(x)|^2 \ dx. \tag{1.32}$$

Доказательство. Так как

$$u(x) = u(0) + \int\limits_0^x u'(t) \ dt = \int\limits_0^x u'(t)\, dt,$$

то

$$u^2(x) = \left(\int\limits_0^x u'(t)\, dt\right)^2 \leqslant \int\limits_0^x 1^2\, dt \int\limits_0^x |u'(t)|^2\, dt \leqslant x\int\limits_0^1 |u'(t)|^2\, dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 |u(x)|^2 \ dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u'(t)|^2 \ dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |u'(x)|^2 \ dx.$$

При выводе было использовано неравенство Коши-Буняковского

$$\left|\int\limits_0^x u'(t)dt\right| \leqslant \left(\int\limits_0^x 1^2\, dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_0^x |u'(t)|^2 \ dt\right)^{1/2}$$

применительно к пространству $L_2(0,x)$. $\square$

Упражнение 1.2.3. Для функции $u(x)$ из $C^1([a,b])$, $u(a) = 0$, доказать неравенство Пуанкаре для отрезка $[a,b]$:

$$\int\limits_a^b |u(x)|^2 \ dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int\limits_a^b |u'(x)|^2 \ dx. \quad \square \tag{1.33}$$

Упражнение 1.2.4. Показать, что в задаче (1.1), (1.2)

$$\begin{gathered}Au := -(p(x)u')' + q(x)u = f(x),\ a < x < b,\ u(a) = u(b) = 0,\\ p(x) \in C^1[a,b],\ q(x) \in C[a,b],\ 0 < p_0 \leqslant p(x),\ 0 \leqslant q_0 \leqslant q(x),\end{gathered} \tag{1.34}$$

оператор A (его называют *оператором Штурма-Лиувилля*) положительно определен.

Решение упражнения 1.2.4. После интегрирования по частям и учета краевых условий имеем

$$(Au,u) = \int\limits_a^b [(-p(x)u')' + q(x)u]\, u\, dx = \int\limits_a^b \left[p(x)|u'|^2 + q(x)|u|^2\right]\, dx \geqslant$$

$$\geqslant p_0 \int\limits_a^b |u'|^2\, dx + q_0 \int\limits_a^b |u|^2\, dx.$$

Отсюда и из (1.33) следует, что оператор A обладает свойством положительной определенности

$$\begin{gathered}(Au,u) = \int\limits_a^b \left[p(x)|u'|^2 + q(x)|u|^2\right]\, dx \geqslant\\ \geqslant \left(\frac{2p_0}{(b-a)^2} + q_0\right) \int\limits_a^b |u(x)|^2\, dx,\end{gathered} \tag{1.35}$$

обобщающим неравенство Пуанкаре (1.33). □

Упражнение 1.2.5. Показать, что в задаче

$$Au := -\left(p(x)u'\right)' + q(x)u = f,$$

$$a < x < b, \quad p(x) \geqslant p_0 > 0,\ q(x) \geqslant q_0 > 0,$$

$$u'(a) - \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0,$$

оператор A положительно определен. □

Упражнение 1.2.6. Показать, что в задаче о равновесии плоской пластинки

$$Au := \Delta_2^2 u = f \quad (\text{ в } \ \Omega\ ), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = u = 0 \quad (\text{ на } \ \partial\Omega\ ), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

оператор A симметричен на множестве функций из $C^4\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющих условиям жесткого защемления пластинки, а также обладает свойствами $A \geqslant 0$, $A > 0$.

Указание. Воспользоваться первой формулой Грина для бигармонического оператора Δ_2^2 (см. (1.24)). $\square$

Упражнение 1.2.7. Показать, что в задаче об определении формы равновесия однородного упругого стержня, жестко защемленного на одном конце, свободного на втором конце и подвергающемся действию поперечной силы $f(x)$, т.е. в задаче

$$Au(x) := u^{(4)} = f, \quad a < x < b,\ u(a) = u'(a) = 0,\ u''(b) = u'''(b) = 0,$$

оператор A положительно определен в $L_2(a, b)$.

Указание. Воспользоваться обобщенным неравенством Пуанкаре (1.33) для $u''(x)$ и $u'(x)$. $\square$

1.2.3 Неравенство Фридрихса

Многомерным аналогом неравенства Пуанкаре является неравенство Фридрихса, которое сейчас будет установлено.

Лемма 1.2.2. *Пусть $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, является непрерывно дифференцируемой функцией в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$ и обращается в нуль на $\partial\Omega$, т.е. $u(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Тогда имеет место неравенство Фридрихса:*

$$\int\limits_{\Omega} \left|\nabla_m u\right|^2\, d\Omega := \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2 d\Omega \geqslant c^2 \int\limits_{\Omega} |u|^2\, d\Omega \tag{1.36}$$

с некоторой константой $c > 0$, $\nabla_m u := \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\vec{e_k}$.

Доказательство. Поместим область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ в m–мерный куб K с ребром a, т.е. считаем, что

$$\Omega \subset K := \left\{x \in \mathbb{R}^m : 0 < x_i < a,\ i = \overline{1, m}\right\}.$$

Продолжим функцию $u(x)$ нулем на $K \backslash \Omega$; продолженная функция $\widetilde{u}(x)$ в силу равенства $\widetilde{u}(x) \equiv 0$ на ∂K окажется кусочно гладкой в K.

Имеем

$$\widetilde{u}(x_1,\dots,x_m)=\int_0^{x_1}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi_1}(\xi_1,x_2,\dots,x_m)\,d\xi_1,$$

и по неравенству Коши-Буняковского (см. лемму 1.2.1)

$$|\widetilde{u}(x)|^2\leqslant\int_0^{x_1}1^2\,d\xi_1\int_0^{x_1}\left|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi_1}\right|^2\,d\xi_1\leqslant x_1\int_0^{a}\left|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi_1}\right|^2\,d\xi_1.$$

Интегрируя это неравенство по K, т.е. вычисляя интеграл

$$\int\limits_0^a\dots\int\limits_0^a\dots\,dx_1\dots dx_m,$$

получим, что

$$\int\limits_K|\widetilde{u}(x)|^2\,dK\leqslant\frac{a^2}{2}\int\limits_K\left|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_1}\right|^2\,dK\leqslant\frac{a^2}{2}\int\limits_K\sum_{k=1}^m\left|\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_k}\right|^2\,dK=$$
$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_K|\nabla_m\widetilde{u}|^2\,dK.$$

Так как здесь справа и слева интегралы по $K\backslash\Omega$ дают нуль, то окончательно получаем (после замены $\widetilde{u}\longmapsto u$) неравенство (1.36)

$$\int\limits_\Omega|\nabla_m u|^2\,d\Omega\geqslant\frac{2}{a^2}\int\limits_\Omega|u(x)|^2\,d\Omega$$

с постоянной $c=\sqrt{2}/a$. $\square$

Замечание 1.2.2. Неравенство Фридрихса распространяется и на функции $u(x)$, у которых

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega),\quad u(x)=0\ (\text{ на }\partial\Omega\,).\qquad\square$$

Упражнение 1.2.8. Опираясь на неравенство Фридрихса (1.36), доказать, что оператор A задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$Au:=-\Delta u=f\quad\big(\text{в }\Omega\subset\mathbb{R}^3\big),\quad u=0\quad\big(\text{ на }\partial\Omega\,\big),$$

заданный на множестве $\mathcal{D}\,(A)=C_0^2(\overline{\Omega})$, положительно определен в $L_2(\Omega)$. $\square$

Упражнение 1.2.9. Проверить,что оператор A задачи Неймана

$$Au := -\Delta u + u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega),$$

определенный на

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u(x) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega) \right\},$$

является положительно определенным в $L_2(\Omega)$. $\square$

1.3 Энергетическое пространство положительно определенного оператора

Здесь вводится фундаментальное понятие энергетического пространства, которое является математическим обобщением многих ситуаций, встречающихся в задачах физики, механики, гидродинамики и др.

1.3.1 Функционал энергии

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ на множестве $\mathcal{D}(A)$, плотном в $\mathcal{H}$, задан положительно определенный оператор A, и рассматривается уравнение

$$Au = f, \tag{1.37}$$

где f – произвольный элемент из $\mathcal{H}$.

Рассмотрим некоторые простые свойства решений уравнения (1.37). Свяжем с (1.37) квадратичный функционал

$$F(u) := (Au, u) - 2(f, u), \tag{1.38}$$

называемый *функционалом энергии* и определенный на элементах $u \in \mathcal{D}(A)$. Во многих задачах функционал (1.38) пропорционален (равен удвоенной) потенциальной энергии изучаемой системы при действии на нее внешней нагрузки f.

Теорема 1.3.1. (о единственности решения операторного уравнения) *Если $A > 0$ (тем более если $A \gg 0$), то уравнение* (1.37) *может иметь не более одного решения u_0 из $\mathcal{D}(A)$ при любом $f \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения: $Au_1 = f,\ Au_2 = f,\ u_i \in \mathcal{D}(A),\ i = 1, 2$. Тогда

$$Au_2 - Au_1 = A(u_2 - u_1) = 0,\ (A(u_2 - u_1), u_2 - u_1) = 0,$$

и так как $A > 0$, то $u_2 - u_1 = 0$, т.е. $u_2 = u_1$. □

Теорема 1.3.2. (о минимуме функционала энергии) *Пусть* $A > 0$ *(*$A \gg 0$*) и уравнение* (1.37) *имеет (единственное) решение* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$*. Тогда функционал энергии* $F(u)$ *принимает на* $u = u_0$ *минимальное значение в* $\mathcal{D}(A)$*. Обратно, если минимум функционала энергии* $F(u)$ *достигается на некотором элементе* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$*, то этот элемент является решением уравнения* $Au = f$*.*

Доказательство. 1) Если $Au_0 = f$, то в силу симметрии оператора A и свойств скалярного произведения в вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ из формулы (1.38) имеем

$$\begin{aligned} F(u) = {} & (Au, u) - 2(Au_0, u) = \\ & = (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) + [(Au_0, u_0) - (Au_0, u_0)] = \\ & = (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0) \geqslant -(Au_0, u_0) = F(u_0). \end{aligned}$$

2) Пусть $F(u)$ принимает минимальное значение на элементе $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$F(u_0 + tv) \geqslant F(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

Имеем

$$F(u_0 + tv) = (A(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(f, u_0 + tv) = ... =$$

$$= (Au_0, u_0) + t^2 (Av, v) + 2t(Au_0, v) - 2(f, u_0) - 2t(f, v).$$

Этот квадратный относительно t трехчлен должен иметь минимум при $t = 0$, т.е.

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\,|_{t=0} = 2(Au_0 - f, v) = 0,\ \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

Так как v – произвольный элемент из плотного в $\mathcal{H}$ множества $\mathcal{D}(A)$, то отсюда следует, что $Au_0 - f = 0$, т.е. $Au_0 = f$.

В самом деле, если $(\varphi, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(A)$, то в силу плотности $\mathcal{D}(A)$ в $\mathcal{H}$ найдется последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathcal{D}(A)$ такая, что $v_n \longrightarrow \varphi \quad (n \longrightarrow \infty)$. Тогда из соотношений $(\varphi, v_n) = 0$ при $n \longrightarrow \infty$ получаем

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (\varphi, v_n) = (\varphi, \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n) = (\varphi, \varphi) = 0$$

и потому $\varphi = 0$. $\square$

Основной вывод, который можно сделать из теоремы 1.3.2, состоит в том, что *задачу о нахождении решения* $u = u_0 \in \mathcal{D}(A)$ *уравнения* (1.37) *можно заменить равносильной ей задачей о нахождении точки минимума* $u = u_0 \in \mathcal{D}(A)$ *функционала энергии* $F(u)$.

Однако существенным и принципиальным является следующий факт: *функционал* $F(u)$ *может не иметь минимума на* $\mathcal{D}(A)$ *и потому теорема 1.3.2 имеет условный характер.* В связи с этим обстоятельством поступают следующим образом. Оказывается, функционал энергии можно расширить с $\mathcal{D}(A)$ на более широкое множество из $\mathcal{H}$ так, чтобы на этом множестве функционал $F(u)$ обязательно имел минимум в некоторой точке u_0. Тогда этот элемент u_0, возможно не принадлежащий $\mathcal{D}(A)$, называют обобщенным решением уравнения (1.37).

1.3.2 Энергетическое пространство положительно определенного оператора

Напомним, что рассматривается на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}(A)$ оператор A, обладающий свойством положительной определенности:

$$(Au, u) \geqslant c^2 (u, u), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\,. \tag{1.39}$$

Определим на $\mathcal{D}(A)$ новое скалярное произведение

$$(u, v)_A := (Au, v)\,, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A)\,. \tag{1.40}$$

Упражнение 1.3.1. Проверить, что (1.40) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения в вещественном гильбертовом пространстве:

1^0. $(u, v)_A = (v, u)_A$;
2^0. $(c_1 u_1 + c_2 u_2, v)_A = c_1 (u_1, v)_A + c_2 (u_2, v)_A$;
3^0. $(u, u)_A \geqslant 0$;
4^0. $(u, u)_A = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ в $\mathcal{D}(A)$. $\square$

Пример 1.3.1. Пусть в $L_2(0,1)$ на

$$\mathcal{D}\,(A) := \{u(x) : u'' \in C([0,1]),\ u(0) = u(1) = 0\}$$

задан оператор $Au = -u''$. Тогда

$$(u,v)_A = \int\limits_0^1 (-u'')v\ dx = \ldots = \int\limits_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

Нетрудно видеть, что здесь правая часть имеет смысл не только на элементах $u(x)$ и $v(x)$ из $\mathcal{D}\,(A)$, а и на более широком множестве функций, содержащих $\mathcal{D}\,(A)$; именно, для этих функций достаточно, чтобы $u'(x)$ и $v'(x)$ принадлежали $L_2(0,1)$ и выполнялись граничные условия $u(0) = u(1) = 0,\ v(0) = v(1) = 0$. □

Введем по скалярному произведению (1.40) на $\mathcal{D}\,(A)$ энергетическую норму

$$\|u\|_A = [(u,u)_A]^{1/2}\,. \tag{1.41}$$

Тогда $\mathcal{D}\,(A)$ станет *предгильбертовым* пространством, возможно, неполным. Пополним $\mathcal{D}\,(A)$ по энергетической норме (1.41), т.е. присоединим к $\mathcal{D}\,(A)$ те элементы, для которых новая норма конечна. В разобранном выше примере это были *абсолютно непрерывные функции* $u(x)$ из $\mathcal{H}$, т.е. такие функции $u(x)$, у которых $u'(x) \in L_2(0,1)$. Заметим, что множество таких функций плотно в $\mathcal{H} = L_2(0,1)$.

Обозначим пополненное по норме (1.41) множество элементов из $\mathcal{D}\,(A)$ через $\mathcal{H}_A$ и назовем его *энергетическим пространством* оператора A. Очевидно, по построению $\mathcal{D}\,(A) \subset \mathcal{H}_A$. Покажем теперь, что для $A \gg 0$ будет $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$.

Теорема 1.3.3. *Энергетическое пространство $\mathcal{H}_A$ положительно определенного оператора A ограниченно вкладывается в исходное пространство $\mathcal{H}$. Это означает, что: а) каждому элементу $u \in \mathcal{H}_A$ приводится в соответствие один и только один элемент $u' \in \mathcal{H}$, а линейной комбинации элементов из $\mathcal{H}_A$ – соответствующая линейная комбинация элементов из $\mathcal{H}$; б) разным элементам из $\mathcal{H}_A$ приводятся в соответствие разные элементы из $\mathcal{H}$.*

Доказательство. 1) Если $u \in \mathcal{D}\,(A) \subset \mathcal{H}$, то поставим ему в соответствие этот же элемент $u' = u \in \mathcal{H}$.

2) Если $u \in \mathcal{H}_A$ и $u \notin \mathcal{D}\,(A)$, то по определению $\mathcal{H}_A$ существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\,,\ u_k \in \mathcal{D}\,(A)$, такая что $\|u - u_k\|_A \to 0$ $(k \to$

∞). Отсюда получаем, что $\|u_k - u_m\|_A \to 0$ $(k, m \to \infty)$, а из свойства положительной определенности имеем

$$\|u_k - u_m\| \leqslant \frac{1}{c} \|u_k - u_m\|_A \to 0 \ (k, m \to \infty),$$

т.е. последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в полном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому существует $u' = \lim\limits_{k\to\infty} u_k \in \mathcal{H}$.

Поставим u' в соответствие исходному элементу $u \in \mathcal{H}_A$.

Легко проверяется, что соответствие $\mathcal{H}_A \ni u \longmapsto u' \in \mathcal{H}$ линейно.

3) Покажем, что обратное соответствие $u' \longmapsto u$ также линейно, т.е. различным элементам из $\mathcal{H}_A$ отвечают различные элементы из $\mathcal{H}$. Пусть, напротив, элементам u^1 и u^2 из $\mathcal{H}_A$ отвечает один и тот же элемент $u' \in \mathcal{H}$. Тогда разности $u = u^1 - u^2$ отвечает нулевой элемент пространства $\mathcal{H}$. Докажем тогда, что $u = 0$ (в $\mathcal{H}_A$).

Пусть $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ (в $\mathcal{H}_A$), $u_k \in \mathcal{D}(A)$; по построению $u_k \to 0$ (в $\mathcal{H}$). Поэтому для любого $f \in \mathcal{H}$ будет $(f, u_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Положим $f = A\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(A)$. Тогда $(A\varphi, u_k) = (\varphi, u_k)_A \to 0$ $(k \to \infty)$. Так как $u_k \to u$ (в $\mathcal{H}_A$), то имеем $(\varphi, u)_A = 0$ $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(A))$. Поскольку $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}_A$, то отсюда следует, что $u = 0$ в $\mathcal{H}_A$ (см. конец доказательства теоремы 1.3.2). $\square$

Упражнение 1.3.2. Доказать, что для элементов из $\mathcal{H}_A$ справедливо соотношение

$$\|u\|_A^2 \geqslant c^2 \|u\|^2 . \tag{1.42}$$

Указание. Осуществляя предельный переход $u_k \to u$ (в $\mathcal{H}_A$, а потому и в $\mathcal{H}$), воспользоваться неравенством

$$\big|\|u_k\|_A - \|u\|_A\big| \leqslant \|u_k - u\|_A \to 0 \quad (k \to \infty). \quad \square$$

Таким образом, согласно теореме 1.3.3, можно далее считать, что $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$. Условимся под символом $\mathcal{H}_A \subset_{\to} \mathcal{H}$ понимать не только включение $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$, свойство $\overline{\mathcal{H}_A} = \mathcal{H}$, но и неравенство для норм

$$\|u\| \leqslant c^{-1} \|u\|_A , \quad \forall u \in \mathcal{H}_A, \tag{1.43}$$

вытекающее из (1.42) и характеризующее ограниченность оператора вложения любого элемента $u \in \mathcal{H}_A$ в пространство $\mathcal{H}$.

1.3.3 Главные и естественные краевые условия

Сейчас на примерах будет показано, что для операторов, определяемых одним и тем же дифференциальным выражением и различными краевыми условиями, их энергетические пространства $\mathcal{H}_A$ могут быть различными. В одних случаях для элементов из $\mathcal{H}_A$ сохраняются те же краевые условия, которые имели место для элементов из $\mathcal{D}\,(A)$, и такие краевые условия называются *главными*, в других случаях для элементов из $\mathcal{H}_A$ краевые условия снимаются вовсе. Их называют *естественными* краевыми условиями.

Пример 1.3.2. Вернемся еще раз к задаче

$$Au := -u'' = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

$$\mathcal{D}\,(A) := \left\{u(x) \in C^2([0,1]) : \quad u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

Здесь квадрат нормы в энергетическом пространстве

$$(u,u)_A = \int\limits_0^1 \left|u'(x)\right|^2 \, dx$$

конечен для любых *абсолютно непрерывных функций* $u(x)$. Кроме того, указанные функции должны удовлетворять некоторым граничным условиям. Найдем эти условия.

По определению $\mathcal{H}_A$ как замыкания $\mathcal{D}\,(A)$ в энергетической норме для любой $u(x) \in \mathcal{H}_A$ найдется такая последовательность функций $u_k(x) \in \mathcal{D}\,(A)$, что

$$\|u_j - u_k\|_A^2 = \int\limits_0^1 \left|u_j'(x) - u_k'(x)\right|^2 \, dx \to 0 \ (j,k \to \infty).$$

Но отсюда следует, что последовательность $\{u_k'\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_2(0,1)$ и потому в силу полноты этого пространства имеет предел, который обозначим $v(x) \in L_2(0,1)$.

Для любого k имеем

$$u_k(x) = u_k(0) + \int\limits_0^x u_k'(t)\,dt = \int\limits_0^x u_k'(t)\,dt.$$

Переходя в этом тождестве к пределу при $k \to \infty$ и учитывая, что при $u_k \to u$ (в $\mathcal{H}_A$) будет также $u_k \to u$ (в $\mathcal{H}$), будем иметь

$$u(x) = \int_0^x v(t)\,dt, \quad u(0) = 0,\ u'(x) = v(x) \in L_2(0,1).$$

Проверим еще, что $u(1) = 0$. Это свойство следует из соотношения

$$\int_x^1 u_k'(t)\,dt = u_k(1) - u_k(x) = -u_k(x)$$

после перехода к пределу при $k \to \infty$.

Таким образом, в рассматриваемом примере в $\mathcal{H}_A$ входят абсолютно непрерывные функции, обращающиеся в нуль на концах:

$$\mathcal{H}_A = \{u(x) \in L_2(0,1) : u'(x) \in L_2(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\}.$$

Это множество гораздо шире, чем исходное множество $\mathcal{D}(A)$, хотя граничные условия Дирихле для элементов из $\mathcal{H}_A$ такие же, как и для элементов из $\mathcal{D}(A)$, т.е. сохраняются при расширении $\mathcal{D}(A)$ до $\mathcal{H}_A$.
$\square$

Пример 1.3.3. Рассмотрим теперь то же уравнение с так называемыми краевыми условиями третьего рода (условиями Ньютона):

$$Au := -u'' = f,\ 0 < x < 1,\ u'(0) - \alpha u(0) = 0,\ u'(1) + \beta u(1) = 0,$$

причем считаем, что $\alpha > 0,\ \beta \geqslant 0$. Если $u(x)$ из

$$\mathcal{D}(A) := \left\{u(x) \in C^2([0,1]) : \quad u'(0) - \alpha u(0) = 0,\ u'(1) + \beta u(1) = 0\right\},$$

то

$$(Au, u) = (u, u)_A = \int_0^1 |u'(x)|^2\,dx + \alpha\,|u(0)|^2 + \beta\,|u(1)|^2 \geqslant 0,$$

и при $\alpha > 0$ легко проверяется, что $A > 0$.

Рассмотрим, каким свойствам удовлетворяют элементы из $\mathcal{H}_A$ в этом случае. Если $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $\mathcal{H}_A$ последовательность, элементы которой принадлежат $\mathcal{D}(A)$, то имеем

$$\|u_k - u_j\|_A^2 = \int_0^1 \left|u_k'(x) - u_j'(x)\right|^2\,dx +$$

$$+\alpha\left|u_k(0)-u_j(0)\right|^2+\beta\left|u_k(1)-u_j(1)\right|^2\to 0\ (k,j\to\infty).$$

Отсюда в силу полноты $L_2(0,1)$ следует, что

$$u_k'(x)\to v(x)\in L_2(0,1),\ \ u_k(0)\to c\in\mathbb{R}\ (k\to\infty).$$

Тогда, переходя в соотношении

$$u_k(x)=u_k(0)+\int\limits_0^x u'(t)\,dt$$

к пределу при $k\to\infty$, получаем, что предельный элемент

$$u(x)=c+\int\limits_0^x v(t)\,dt,\qquad v(x)\in L_2(0,1),$$

т.е. $u(x)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Таким образом, в данном примере

$$\mathcal{H}_A=\left\{u(x)\in L_2(0,1):u'(x)\in L_2(0,1)\right\},$$

и граничные условия, которым удовлетворяли элементы из $\mathcal{D}\,(A)$, для элементов из $\mathcal{H}_A$ (получающихся при предельном переходе в процессе образования $\mathcal{H}_A$) уже могут не выполняться. $\Box$

Заметим в заключение этого параграфа, что по самому своему определению $\mathcal{D}\,(A)$ плотно в $\mathcal{H}_A$ (в энергетической норме), кроме того, $\mathcal{D}\,(A)$ плотно в $\mathcal{H}$ по условию. Поэтому имеют место включения

$$\mathcal{D}\,(A)\subset\mathcal{H}_A\subset\mathcal{H}$$

и свойства

$$\overline{\mathcal{D}\,(A)}=\overline{\mathcal{H}_A}=\mathcal{H},$$

где замыкание берется по норме пространства $\mathcal{H}$.

Замечание 1.3.1. Отметим еще без доказательства, что в многомерных задачах для оператора Лапласа краевое условие Дирихле является *главным*, а условия Неймана или Ньютона (т.е. второе и третье краевые условия) – *естественные*: для элементов из $\mathcal{H}_A$ они, вообще говоря, не выполнены.

1.4 Обобщенное решение операторного уравнения

Как было выяснено в предыдущем параграфе, задача о решении операторного уравнения

$$Au = f, \qquad f \in \mathcal{H}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}, \tag{1.44}$$

равносильна задаче о нахождении элемента $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, на котором функционал энергии

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u), \quad u \in \mathcal{D}(A), \tag{1.45}$$

принимает минимальное значение. Однако такого элемента $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ может и не найтись. В этом случае, как оказывается, минимум достигается на более широком множестве, чем $\mathcal{D}(A)$, именно, на $\mathcal{H}_A \supset \mathcal{D}(A)$.

1.4.1 Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве

Снова считаем, что $A \gg 0$ и наряду с $\mathcal{H}$ введено энергетическое пространство $\mathcal{H}_A \subset_{\rightarrow} \mathcal{H}$; полагаем также, что $f \in \mathcal{H}$.

Для элементов $u \in \mathcal{D}(A)$ функционал энергии можно записать в виде

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u). \tag{1.46}$$

Покажем, что *функционал $F(u)$ можно расширить с $\mathcal{D}(A)$ на все $\mathcal{H}_A$*. Действительно, первое слагаемое в (1.46) имеет смысл для любых $u \in \mathcal{H}_A$. Убедимся, что и второе слагаемое можно записать в виде скалярного произведения элементов из $\mathcal{H}_A$. Это можно сделать с использованием леммы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Лемма 1.4.1. (Рисс) *Пусть E – произвольное гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_E$. Тогда любой линейный ограниченный функционал $l(u)$, действующий в E, единственным образом может быть представлен в виде скалярного произведения в E, т.е. существует единственный элемент $u_0 \in E$ такой, что*

$$l(u) = (u, u_0)_E \qquad \square. \tag{1.47}$$

Лемма 1.4.2. *Выражение (f, u) при $f \in \mathcal{H}$, $u \in \mathcal{H}_A$, является линейным ограниченным функционалом в $\mathcal{H}_A$.*

Доказательство леммы просто: в силу неравенства $\|u\| \leqslant c^{-1}\|u\|_A$ для элементов u из $\mathcal{H}_A$ имеем

$$|(f,u)| \leqslant \|f\|\,\|u\| \leqslant c^{-1}\|f\|\,\|u\|_A\,. \quad \square$$

Из леммы 1.4.2 и леммы Рисса 1.4.1 следует, что в $\mathcal{H}_A$ существует такой единственный элемент u_0, что

$$(f,u) = (u_0,u)_A, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_A, \tag{1.48}$$

и теперь формулой

$$F(u) = (u,u)_A - 2(u_0,u)_A, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_A, \tag{1.49}$$

можно расширить функционал энергии с $\mathcal{D}(A)$ на $\mathcal{H}_A \supset \mathcal{D}(A)$.

Теорема 1.4.1. *В энергетическом пространстве $\mathcal{H}_A$ существует один и только один элемент, на котором функционал энергии* (1.49) *достигает минимума; этот элемент определен соотношением* (1.48)*.*

Доказательство следует из таких простых преобразований:

$$\begin{aligned} F(u) &= (u,u)_A - 2(u_0,u)_A + (u_0,u_0)_A - (u_0,u_0)_A = \\ &= (u-u_0,u-u_0)_A - (u_0,u_0)_A \geqslant -(u_0,u_0)_A = F(u_0). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Очевидно, функционал $F(u)$ ограничен снизу в $\mathcal{H}_A$ и его минимум достигается при $u = u_0 \in \mathcal{H}_A$. $\square$

Определение 1.4.1. *Назовем элемент $u_0 \in \mathcal{H}_A$, реализующий минимум функционала энергии (1.49), обобщенным решением уравнения $Au = f$.* $\square$

Замечание 1.4.1. Если окажется, что $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, то u_0 будет обычным решением уравнения $Au = f$. Действительно, в этом случае при любом $v \in \mathcal{H}_A$ имеем согласно (1.48):

$$(u_0,v)_A - (f,v) = (Au_0 - f, v) = 0,$$

и так как $\mathcal{H}_A$ плотно в $\mathcal{H}$, то из последнего соотношения следует, что $Au_0 = f$. $\square$

1.4.2 Примеры

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие теорему 1.4.1.

Пример 1.4.1. В задаче

$$Au := -u'' = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{1.51}$$

функционал $F(u)$ можно записать как в виде

$$F(u) = \int\limits_0^1 (-u'')u\,dx - 2\int\limits_0^1 f(x)u(x)\,dx,$$

так и в виде

$$F(u) = \int\limits_0^1 |u'(x)|^2\,dx - 2\int\limits_0^1 f(x)u(x)\,dx.$$

Здесь первая форма имеет смысл при $u \in \mathcal{D}(A)$, где

$$\mathcal{D}(A) = \left\{u(x) \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\right\},$$

а вторая – на более широком множестве

$$\mathcal{H}_A = \{u(x) \in L_2(0,1) : u' \in L_2(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\}.$$

По теореме 1.4.1 получаем, что задача (1.51) имеет единственное обобщенное решение $u_0 \in \mathcal{H}_A$ при любом $f(x) \in L_2(0,1)$.

Более подробное рассмотрение показывает, что на самом деле решение $u_0 = u_0(x)$ обладает свойством $u_0''(x) \in L_2(0,1)$. Такое решение задачи (1.51) называется решением *почти всюду.* $\square$

Пример 1.4.2. Рассмотрим в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ краевую задачу

$$\begin{gathered} Au := -\Delta u + u = f(x) \ (\text{ в } \Omega\ ), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\ ), \\ \mathcal{D}(A) := \left\{u \in C^2(\overline{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\ )\right\}. \end{gathered} \tag{1.52}$$

Здесь

$$\mathcal{H} = L_2(\Omega),$$

$$\mathcal{H}_A := \left\{u(x) \in L_2(\Omega) : \quad \|u\|_A^2 = \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u|^2\right]\,d\Omega < \infty\right\} \subset\!\!\!\to \mathcal{H},$$

$$(f,u) := \int_\Omega f(x)u(x)\,d\Omega.$$

По теореме 1.4.1 задача (1.52) имеет при любой $f(x) \in L_2(\Omega)$ единственное обобщенное решение $u_0(x)$, для которого конечна энергетическая норма

$$\|u_0\|_A^2 = \int\limits_\Omega \left[|\nabla u_0|^2 + |u_0|^2\right]\,d\Omega$$

и при любой $v(x) \in \mathcal{H}_A$ справедливо тождество

$$\int\limits_\Omega (\nabla u_0 \cdot \nabla v + u_0 \cdot v)\ \ d\Omega = \int\limits_\Omega f(x)v(x)\,d\Omega.\ \square \qquad (1.53)$$

Заметим, что если $u_0(x)$ имеет вторые частные производные из $L_2(\Omega)$, а граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая и имеет почти в каждой точке $\partial\Omega$ (в смысле меры $\partial\Omega$) нормаль $\vec{n}$, то из первой формулы Грина для оператора Лапласа, справедливой и в этом случае, имеем из (1.53)

$$\int\limits_\Omega (-\Delta u_0 + u_0 - f)\,v\,d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n} v\,dS = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}_A.$$

Отсюда можно установить обычными средствами вариационного исчисления, что

$$-\Delta u_0 + u_0 = f \quad (\text{в } L_2(\Omega)\,), \qquad \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega\,). \qquad (1.54)$$

Это и есть решение почти всюду в трехмерном случае. $\square$

Упражнение 1.4.1. Доказать свойства (1.54). $\square$

1.4.3 Представление обобщенного решения в виде ряда

В предыдущих рассуждениях всегда предполагалось, что основное пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, т.е. в нем существует счетное плотное множество.

Теорема 1.4.2. *Для того, чтобы энергетическое пространство $\mathcal{H}_A$ было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы сепарабельным было исходное пространство $\mathcal{H}$.*

Доказательство этой теоремы будет проведено позже, в следующем параграфе. □

Так как в силу сепарабельности $\mathcal{H}$ таковым по теореме 1.4.2 будет и $\mathcal{H}_A$, то в нем существует ортонормированный базис $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. такие элементы, для которых

$$(v_k, v_j)_A = \delta_{kj}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N},$$

а любой элемент из $\mathcal{H}_A$ представляется в виде ряда Фурье по базису $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 1.4.3. *В ортонормированном базисе $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $\mathcal{H}_A$ обобщенное решение $u_0 \in \mathcal{H}_A$ уравнения $Au = f$ имеет вид*

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k) v_k, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{1.55}$$

Доказательство следует из того, что коэффициенты Фурье элемента u_0 в силу тождества (см. (1.48))

$$(u_0, v)_A = (f, v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_A,$$

равны

$$(u_0, v_k)_A = (f, v_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Упражнение 1.4.2. В задаче об определении формы равновесия закрепленной мембраны

$$Au := -\Delta u := -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = f(x, y),$$

$$(x, y) \in \Pi := (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0,$$

представить решение $u(x, y)$ в виде ряда по ортонормированному в $\mathcal{H}_A$ базису

$$v_{kj}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{b^2 k^2 + a^2 j^2}} \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b}, \quad k, j = 1, 2, \ldots.$$

Вычислить коэффициенты Фурье решения $u = u_0(x, y)$, если $f(x, y) \equiv 1$.

Ответ: при произвольной $f = f(x,y) \in L_2(\Pi)$ имеем

$$\widehat{f}_{kj} := (f, v_{kj})_{L_2(\Pi)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{ab}{b^2k^2 + a^2j^2}} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy\ f(x,y) \sin\frac{\pi kx}{a} \sin\frac{\pi jy}{b},$$

а при $f(x,y) \equiv 1$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{kj} :=&(f, v_{kj})_{L_2(\Pi)} = \ldots = \\ =&\frac{2(ab)^{3/2}}{\pi^3 kj(b^2k^2 + a^2j^2)^{1/2}}\left[1 - (-1)^k\right]\left[1 - (-1)^j\right],\end{aligned}$$

$$u_0(x,y) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4} \sum_{k,j=1,3,5,\ldots} \frac{1}{kj(b^2k^2 + a^2j^2)} \sin\frac{\pi kx}{a} \sin\frac{\pi jy}{b}. \qquad \square$$

1.5 Расширение положительно определенного оператора

Как сейчас будет установлено, положительно определенный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и заданный на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}(A)$, всегда может быть расширен до самосопряженного оператора $\widetilde{A}$, у которого константа положительной определенности остается такой же, как и у оператора A.

1.5.1 Определения

Введем некоторые определения, относящиеся к плотно заданным (т.е. к заданным на плотном в $\mathcal{H}$ множестве) операторам.

Определение 1.5.1. *Расширением линейного оператора A называется любой линейный оператор A_1, для которого $\mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}(A)$ и $A_1u = Au$ для $u \in \mathcal{D}(A)$. Обозначение: $A \subset A_1$.* $\square$

Определение 1.5.2. *Сужением $A\,|_{\mathcal{D}}$ линейного оператора A на линейное множество $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(A)$ называется такой оператор A_2, что $\mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}$ и $A_2u = Au$ при $u \in \mathcal{D}$.* $\square$

Определение 1.5.3. *Линейный оператор A называется замкнутым, если из того, что $u_k \to u_0$ и $Au_k \to v_0$, следует, что $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ и $Au_0 = v_0$.* $\square$

Замечание 1.5.1. Если оператор A не замкнут, то возникает вопрос о том, имеет ли он замкнутые расширения. Это возможно, очевидно, в том случае, когда две *любые* последовательности $\{u'_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ и $\{u''_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$, имеющие один и тот же предел u_0 из $\mathcal{H}$, обладают тем свойством, что $\lim\limits_{k\to\infty} Au'_k = \lim\limits_{k\to\infty} Au''_k =: v_0 \in \mathcal{H}$; тогда элемент u_0 можно включить в область определения расширения $\overline{A}$ оператора A; полагают по определению $\overline{A}u_0 = v_0 (= \lim\limits_{k\to\infty} Au'_k = \lim\limits_{k\to\infty} Au''_k)$.

Такое расширение $\overline{A}$ оператора A называется *замыканием оператора A и является минимальным замкнутым расширением.* $\square$

Другое, равносильное определение замкнутого оператора A, вводится следующим образом. Назовем совокупность пар элементов $\mathcal{G}(A) := \{(u; Au)\}$, $u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, *графиком оператора* A. График $\mathcal{G}(A)$ оператора A принадлежит ортогональной сумме $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} =: \mathcal{H}^2$ гильбертовых пространств с квадратом нормы

$$\|(u; v)\|^2_{\mathcal{H}^2} := \|u\|^2 + \|v\|^2$$

и является там линейным множеством (линеалом). Оператор A, очевидно, замкнут тогда и только тогда, когда его график $\mathcal{G}(A)$ — замкнутое множество в $\mathcal{H}^2$. Это последнее свойство и можно принять в качестве другого определения замкнутости оператора A.

Нетрудно убедиться также в справедливости следующих утверждений.

1^0. Если оператор A замкнут, а $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. B ограничен, то оператор $A + B$, заданный на $\mathcal{D}(A)$, также замкнут.

2^0. Если замкнутый оператор определен на всем пространстве $\mathcal{H}$, т.е. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, то он ограничен: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

3^0. Если оператор A замкнут и существует обратный оператор A^{-1}, то A^{-1} также замкнут.

Для элементов из $\mathcal{D}(A)$ вводят скалярное произведение по закону

$$(u, v)_{\mathcal{G}(A)} := (Au, Av) + (u, v), \qquad u, v \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}.$$

Если A замкнут, то оказывается, что $\mathcal{D}(A)$ — гильбертово пространство относительно этого скалярного произведения, т.е. оно полное по норме, порожденной им. Сходимость в этом пространстве называют *сходимостью в смысле графика* оператора A.

Напомним, что функция $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, называется *финитной* функцией, если она бесконечно дифференцируема и обращается в нуль в пограничной полосе, т.е. в малой окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω.

Пример 1.5.1. На множестве $\mathcal{D}(A)$ *финитных* на отрезке $[0,1]$ функций рассмотрим оператор A, действующий по закону $Au := -u''$. Такой оператор, очевидно, симметричен на $\mathcal{D}(A)$ (проверьте!), причем $\mathcal{D}(A)$ является плотным в $\mathcal{H} = L_2(0,1)$ множеством.

Пусть теперь на

$$\mathcal{D}(\overline{A}) := \{u(x) \in L_2(0,1) : u'' \in L_2(0,1),\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$$

действует оператор $\overline{A}$ по тому же закону $\overline{A}u := -u''$. Так как $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\overline{A})$ и $\overline{A}u = Au$ для $u \in \mathcal{D}(A)$, то $A \subset \overline{A}$.

Можно проверить, что оператор $\overline{A}$ симметричен на $\mathcal{D}(\overline{A}) \subset L_2(0,1)$ и является замыканием оператора A. Таким образом, в этом примере $\overline{A}$ – замкнутое симметричное расширение оператора A. $\square$

Упражнение 1.5.1. Проверить свойство замкнутости оператора $\overline{A}$.

Решение. Пусть $u_k \in \mathcal{D}(\overline{A})$, $u_k \to u_0$ (в $L_2(0,1)$) и $\overline{A}u_k := -u_k'' \to v_0$ (в $L_2(0,1)$). Тогда имеем

$$u_k'(x) = u_k'(0) + \int_0^x u_k''(t)\,dt = \int_0^x u_k''(t)\,dt,$$

$$u_k(x) = u_k(0) + \int_0^x u_k'(t)\,dt = \int_0^x u_k'(t)\,dt.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $k \to \infty$, получим, что

$$u_0'(x) = -\int_0^x v_0(t)\,dt, \qquad u_0(x) = \int_0^x u_0'(t)\,dt,$$

и потому (из первого равенства) $u_0'' \in L_2(0,1)$, $u_0(0) = u_0'(0) = 0$. Аналогично проверяется, что $u_0(1) = u_0'(1) = 0$; тогда $u_0(x) \in \mathcal{D}\left(\overline{A}\right)$ и $\overline{A}u_0 := -u_0'' = v_0$, т.е. $\overline{A}$ – замкнут. $\square$

Пример 1.5.2. На множестве $\mathcal{D}(A)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ функций задан оператор A по закону $Au := -\Delta u + u$. Очевидно, его расширением является оператор $\widetilde{A}$, для которого

$$\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right) := \{u(x) \in L_2(\Omega) : \Delta u \in L_2(\Omega),\ u = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega)\},$$

$$\widetilde{A}u := -\Delta u + u. \qquad \square$$

1.5.2 Сопряженный и самосопряженный операторы

Пусть оператор A определен на линеале $\mathcal{D}(A)$, плотном в $\mathcal{H}$. Если $u \in \mathcal{D}(A)$, $v \in \mathcal{H}$, то можно составить скалярное произведение (Au, v). Существуют такие элементы v из $\mathcal{H}$, для которых при любом $u \in \mathcal{D}(A)$ будет

$$(Au, v) = (u, v_*), \tag{1.56}$$

где v_* – некоторый элемент из $\mathcal{H}$. Тогда выражение (Au, v) при этих v является линейным ограниченным в $\mathcal{H}$ функционалом $l(u)$ от $u \in \mathcal{D}(A)$:

$$l(u) := (u, v_*), \quad \|l\| = \|v_*\| < \infty.$$

Лемма 1.5.1. *Если для некоторого $v \in \mathcal{H}$ представление (1.56) возможно, то в этом представлении по элементу v элемент v_* определяется единственным образом.*

Доказательство. Если бы при некотором $v \in H$ и любом $u \in \mathcal{D}(A)$ выполнялись равенства

$$(Au, v) = (u, v_{1*}),\ (Au, v) = (u, v_{2*}),$$

то после вычитания левых и правых частей для $v_* = v_{2*} - v_{1*}$ получается соотношение

$$(u, v_*) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Так как $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}$, то это равенство возможно лишь в случае, когда $v_* = 0$. □

Из леммы 1.5.1 следует, что соответствие $v \mapsto v_*$ однозначно.

Упражнение 1.5.2. Проверить, что указанное соответствие $v \mapsto v_*$ обладает свойством линейности. □

Заметим теперь, что множество элементов $\{v\} \subset \mathcal{H}$, для которых справедливо соотношение (1.56) при любом $u \in \mathcal{D}(A)$, не является пустым множеством. Ему принадлежит, например, элемент $v = 0$; кроме того, согласно утверждению упражнения 1.5.2, это множество $\{v\}$ является линеалом в $\mathcal{H}$.

Определим на указанном линеале $\mathcal{D}(A^*)$ оператор A^*, действующий по закону

$$A^* v := v_*, \quad v \in \mathcal{D}(A^*), \tag{1.57}$$

и назовем A^* оператором, сопряженным с оператором A. Тогда из (1.56) и (1.57) получаем

$$(Au, v) = (u, A^* v), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),\ v \in \mathcal{D}(A^*). \tag{1.58}$$

Замечание 1.5.2. Из предыдущих рассуждений следует, что для существования оператора A^* необходимо и достаточно, чтобы линеал $\mathcal{D}(A)$ был плотен в $\mathcal{H}$. $\square$

Теорема 1.5.1. *Оператор A^*, сопряженный к плотно заданному оператору A, всегда замкнут, т.е. $\overline{A^*} = A^*$.*

Доказательство. Пусть $v_k \in \mathcal{D}(A^*)$ и $v_k \to v_0$, $A^* v_k \to v_{0*}$. По определению 1.5.3 сопряженного оператора при любом $u \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$(Au, v_k) = (u, A^* v_k),$$

и после перехода к пределу при $k \to \infty$ получим (здесь используется свойство непрерывности скалярного произведения)

$$(Au, v_0) = (u, v_{0*}),$$

откуда в силу (1.57) и (1.58) находим, что $v_0 \in \mathcal{D}(A^*)$ и $A^* v_0 = v_{0*}$. $\square$

Теорема 1.5.2. *Плотно заданный симметричный оператор A допускает замкнутые расширения.*

Доказательство. Для симметричного оператора A с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ имеем

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \ \forall v \in \mathcal{D}(A). \tag{1.59}$$

Сравнение этого соотношения с (1.58) показывает, что элементы $v \in \mathcal{D}(A)$ принадлежат также $\mathcal{D}(A^*)$ и $A^* v = Av$. Таким образом, оператор A^* является расширением оператора A ($A \subset A^*$). Так как A^* – замкнутый оператор, то оператор A допускает замкнутые расширения, одним из которых является оператор A^*. При этом в силу включений

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H}$$

область определения $\mathcal{D}(A^*)$ оператора A^* плотна в $\mathcal{H}$. $\square$

Пример 1.5.3. Пусть, как и в примере 1.5.1, оператор A определен на плотном в $\mathcal{H} = L_2(0,1)$ множестве $\mathcal{D}(A)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций выражением $Au := -u''$. Интегрируя по частям выражение

$$(Au, v) = \int_0^1 (-u'')v\,dx = (-u'v)\,\big|_0^1 + (v'u)\,\big|_0^1 + \int_0^1 u(-v'')\,dx$$

с использованием свойства финитности функции $u \in \mathcal{D}(A)$ получаем, что

$$(Au, v) = (u, v_*), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

где $v_* := A^* v \in L_2(0,1)$, если $v''(x) \in L_2(0,1)$.

Таким образом, в данном примере сопряженный оператор A^* определен выражением

$$A^* v := -v''(x)$$

на множестве

$$\mathcal{D}(A^*) := \{v(x) \in L_2(0,1) : v''(x) \in L_2(0,1)\},$$

плотном в $L_2(0,1)$. Можно проверить, используя прием интегрирования по частям, что замкнутый оператор A^* уже не обладает свойством симметрии на $\mathcal{D}(A^*)$. $\square$

Определение 1.5.4. *Симметричный оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, т.е. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ и*

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*). \qquad \square \tag{1.60}$$

Так как оператор A^* всегда замкнут, то *самосопряженный оператор замкнут.* Для доказательства самосопряженности симметричного оператора A достаточно установить следующее: если некоторый элемент $v \in \mathcal{D}(A^*)$, то $v \in \mathcal{D}(A)$. Обратное включение очевидно, т.к. A^* является расширением симметричного оператора A и потому $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$.

Пример 1.5.4. Пусть $Au := -u''(x)$, $0 < x < 1$,

$$\mathcal{D}(A) := \{u(x) \in L_2(0,1) : u''(x) \in L_2(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\}.$$

С использованием формулы интегрирования по частям непосредственно проверяется, что $A = A^*$, т.е. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ и $A^* v = Av$ для всех $v \in \mathcal{D}(A^*)$. $\square$

Сейчас будет установлен один критерий самосопряженности положительно определенного оператора A. Предварительно докажем существование и ограниченность обратного оператора A^{-1}.

Лемма 1.5.2. *Всякий положительно определенный оператор A имеет ограниченный обратный, причем если $(Au, u) \geqslant c^2(u, u)$, то $\left\|A^{-1}\right\| \leqslant c^{-2}$.*

Доказательство. Пусть $Au = 0$; тогда $\|u\|^2 \leqslant c^{-2}(Au, u) = 0$ и поэтому $u = 0$; значит, существует обратный оператор A^{-1}. Далее, при любом $u \in \mathcal{D}(A)$

$$\|u\|^2 \leqslant c^{-2}(Au, u) \leqslant c^{-2}\|Au\| \cdot \|u\|,$$

и если $Au = v$, то $u = A^{-1}v$ и из предыдущего неравенства

$$\left\|A^{-1}v\right\| \leqslant c^{-2} \|v\|. \qquad \square \tag{1.61}$$

Теорема 1.5.3. *(критерий самосопряженности). Положительно определенный оператор A является самосопряженным тогда и только тогда, когда область его значений $\mathcal{R}(A)$ есть все пространство: $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$.*

Доказательство. 1^0. *Достаточность.* Пусть $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$ и $A \gg 0$. Возьмем любые элементы $u \in \mathcal{D}(A)$ и $v \in \mathcal{D}(A^*)$. Тогда

$$(Au, v) = (u, A^*v) =: (u, v_*).$$

Так как $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$, то $v_* = Aw$, $w \in \mathcal{D}(A)$, и потому

$$(Au, v) = (u, Aw) = (Au, w), \quad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Снова используя свойство $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$, получаем, что $\mathcal{D}(A^*) \ni v = w \in \mathcal{D}(A)$ и $A^*v = v_* = Aw = Av$, т.е. $A = A^*$.

2^0. *Необходимость.* Пусть теперь $A \gg 0$ и $A = A^*$. Тогда A – замкнутый оператор. Рассмотрим произвольную последовательность $\{Au_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальную в $\mathcal{R}(A)$. Из полноты пространства $\mathcal{H}$ следует, что $Au_k \to v_0 \in \mathcal{H}$, причем в силу ограниченности A^{-1} получаем, что $u_k = A^{-1}(Au_k) \to A^{-1}v_0 =: u_0$. Тогда из свойства замкнутости оператора $A = A^*$ следует, что $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ и $Au_0 = v_0$, т.е. $v_0 \in \mathcal{R}(A)$. Значит, $\mathcal{R}(A)$ образует замкнутое в $\mathcal{H}$ подпространство. Покажем, что ортогональное к нему подпространство тривиально, т.е. состоит из нулевого элемента. Действительно, пусть $v \perp \mathcal{R}(A)$, т.е.

$$(Au, v) = 0 = (u, 0), \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Это значит, что $v \in \mathcal{D}(A^*)$ и $A^*v = Av = 0$ (использована самосопряженность A), откуда в силу существования и ограниченности A^{-1} следует, что $v = 0$. $\square$

Таким образом, согласно доказанной теореме, *для установления факта самосопряженности положительно определенного оператора A достаточно проверить, что $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$.*

1.5.3 Расширение положительно определенного оператора с сохранением нижней грани

Так как $A \subset A^*$ и A^* может потерять свойство симметрии, которое имелось у оператора A, возникает естественный вопрос: имеются ли у оператора A *замкнутые симметричные расширения* $\widetilde{A}$ такие, чтобы уравнение

$$\widetilde{A}u = f \tag{1.62}$$

имело решение $u \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ при любом $f \in \mathcal{H}$. Покажем, что ответ на этот вопрос положителен.

Пусть $A \gg 0$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$, и снова рассматривается уравнение

$$Au = f, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{1.63}$$

Введем элемент $u_0 \in \mathcal{H}_A$, являющийся обобщенным решением уравнения (1.63); этот элемент реализует минимум функционала энергии:

$$F(u) = (u,u)_A - 2(f,u), \quad u \in \mathcal{H}_A. \tag{1.64}$$

Так как элемент u_0 единственным образом определяется через элемент $f \in \mathcal{H}$ согласно тождеству (см. (1.48))

$$(u_0,u)_A = (f,u), \quad \forall u \in \mathcal{H}_A, \tag{1.65}$$

то можно считать, что

$$u_0 = Gf, \tag{1.66}$$

где $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_A$ – оператор, определенный на всем $\mathcal{H}$ и действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_A$, причем $\overline{\mathcal{H}_A} = \mathcal{H}$.

Лемма 1.5.3. *G – симметричный и ограниченный в $\mathcal{H}$ оператор.*

Доказательство. Из формул (1.65) и (1.66) следует, что

$$(Gf,u)_A = (f,u), \quad \forall u \in \mathcal{H}_A, \ \forall f \in \mathcal{H}. \tag{1.67}$$

Взяв произвольный элемент $g \in \mathcal{H}$, положим $u = Gg \in \mathcal{H}_A$; имеем

$$(Gf,Gg)_A = (f,Gg) = (g,Gf), \quad \forall f,g \in \mathcal{H}, \tag{1.68}$$

откуда следует свойство симметричности оператора G (в $\mathcal{H}$).

Далее, полагая в формуле (1.67) $u = Gf$, получим

$$(Gf,f) = \|Gf\|_A^2 \geqslant c^2 \|Gf\|^2,$$

откуда имеем

$$\|Gf\|^2 \leqslant c^{-2}(Gf,f) \leqslant c^{-2}\,\|Gf\|\cdot\|f\|\,,$$

и потому

$$\|Gf\| \leqslant c^{-2}\,\|f\|\,, \quad \forall f\in\mathcal{H}.$$

Отсюда следует ограниченность оператора G и оценка для нормы:

$$\|G\| \leqslant c^{-2}. \qquad \square$$

Лемма 1.5.4. *Существует оператор, обратный к оператору G.*

Доказательство. Докажем, что уравнение $Gf=0$ имеет единственное решение $f=0$. При $Gf=0$ из формулы (1.67) имеем $(f,u)=0$, $\forall u\in\mathcal{H}_A$. Так как $\mathcal{H}_A$ плотно в $\mathcal{H}$, отсюда следует, что $f=0$. □

Обозначим $G^{-1}=:\widetilde{A}$; тогда

$$\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)=\mathcal{R}\,(G)\subset\mathcal{H}_A, \quad \mathcal{R}\left(\widetilde{A}\right)=\mathcal{D}(G)=\mathcal{H}.$$

Теорема 1.5.4. *Оператор $\widetilde{A}$ есть положительно определенное расширение оператора A $\left(A\subset\widetilde{A}\right)$. При этом точные нижние грани отношений*

$$\frac{(Au,u)}{(u,u)}\ \ (u\in\mathcal{D}\,(A))\,, \quad \frac{\left(\widetilde{A}u,u\right)}{(u,u)}\ \ \left(u\in\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)\right),$$

равны между собой, а уравнение $\widetilde{A}u=f$ имеет единственное решение при любом $f\in\mathcal{H}$.

Доказательство. 1^0. Покажем сначала, что $A\subset\widetilde{A}$. Пусть u_0 – произвольный элемент из $\mathcal{D}\,(A)$. Положим $f=Au_0$. По теореме 1.3.2 элемент u_0 реализует минимум функционала

$$F(u)=(Au,u)-2(f,u).$$

Тогда $u_0=Gf\in\mathcal{R}(G)=\mathcal{D}(\widetilde{A})$ и $\widetilde{A}u_0=G^{-1}u_0=f=Au_0$ $\forall u_0\in\mathcal{D}\,(A)$. Отсюда следует, что $\mathcal{D}\,(A)\subset\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$; попутно установлено, что $\widetilde{A}u_0=Au_0$, $\forall u_0\in\mathcal{D}\,(A)$, т.е. окончательно имеем $A\subset\widetilde{A}$.

2^0. Докажем теперь, что $\widetilde{A}$ – симметричный оператор. Пусть $u\in\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$, $v\in\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ и $g=\widetilde{A}u\in\mathcal{H}$, $f=\widetilde{A}v\in\mathcal{H}$; тогда из соотношения

$$(Gf,g)=(f,Gg)\,, \quad G=\widetilde{A}^{-1},$$

имеем
$$\left(v, \widetilde{A}u\right) = \left(\widetilde{A}v, u\right), \quad \forall v, u \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right). \tag{1.69}$$

3^0. Покажем, что для оператора $\widetilde{A}$ имеет место неравенство положительной определенности
$$\left(\widetilde{A}u, u\right) \geqslant c^2(u,u), \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right), \tag{1.70}$$

где c^2 – точная нижняя грань отношения $(Au,u)/(u,u))$, – является также точной нижней гранью отношения $\left(\widetilde{A}u, u\right)/(u,u))$. Действительно, так как $A \subset \widetilde{A}$, то множество значений отношения $\left(\widetilde{A}u, u\right)/(u,u)$ шире, чем множество значений отношения $(Au,u)/(u,u)$, и тогда
$$\inf_{0\neq u\in\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)} \frac{\left(\widetilde{A}u, u\right)}{(u,u)} \leqslant \inf_{0\neq u\in\mathcal{D}(A)} \frac{(Au,u)}{(u,u)} =: c^2 > 0.$$

Однако для $u = Gf \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right) \subset \mathcal{H}_A$ из тождества (1.67)
$$(f,u) = (Gf,u)_A$$

имеем $\widetilde{A}u = f$ и потому
$$\left(\widetilde{A}u, u\right) = (u,u)_A \geqslant c^2 \|u\|^2,$$

откуда
$$\inf_{0\neq u\in\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)} \frac{\left(\widetilde{A}u, u\right)}{(u,u)} \geqslant c^2.$$

4^0. Разрешимость уравнения $\widetilde{A}u = f$ при любом $f \in \mathcal{H}$ есть лишь иная формулировка отмеченного выше факта о том, что $\mathcal{R}\left(\widetilde{A}\right) = \mathcal{D}(G) = \mathcal{H}$. Действительно, если $f \in \mathcal{H}$, то $f \in \mathcal{R}\left(\widetilde{A}\right)$ и, значит, существует такой элемент $u_0 \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$, что $\widetilde{A}u_0 = f$. Единственность решения есть следствие свойства $\widetilde{A} \gg 0$. □

Замечание 1.5.3. Для любого элемента $u \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ и любого элемента $v \in \mathcal{H}_A$ имеет место тождество
$$\left(\widetilde{A}u, v\right) = (u,v)_A. \qquad \square \tag{1.71}$$

Действительно, если $u \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ и $f = \widetilde{A}u$, то из соотношения

$$(f, v) = (u, v)_A, \quad \forall v \in \mathcal{H}_A,$$

следует соотношение (1.71). Одновременно получаем, что обычное решение из $\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ уравнения $\widetilde{A}u = f$ есть обобщенное решение уравнения $Au = f$.

Определение 1.5.5. *Построенное выше расширение $\widetilde{A}$ оператора A называется его расширением по Фридрихсу.* $\square$

Отметим еще раз, что так как здесь $\mathcal{R}\left(\widetilde{A}\right) = \mathcal{D}(G) = \mathcal{H}$, то *расширение по Фридрихсу оператора A является его самосопряженным расширением.* Таким образом, итогом рассмотрения этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1.5.5. *Положительно определенный оператор A можно расширить (по Фридрихсу) до самосопряженного положительно определенного оператора $\widetilde{A}$ с той же точной нижней гранью.* $\square$

Далее нам понадобится следующий факт.

Лемма 1.5.5 (вспомогательная). *Элемент $u_0 \in \mathcal{H}$ принадлежит энергетическому пространству $\mathcal{H}_A$ оператора $A \gg 0$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ такая, что*

$$\|u_k - u_j\|_A \to 0 \quad (k, j \to \infty), \quad \|u_k - u_0\| \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{1.72}$$

Доказательство. 1^0. *Необходимость.* Пусть $u_0 \in \mathcal{H}_A$. Докажем, что выполнены свойства (1.72). Так как $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}_A$, то существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ такая, что $\|u_k - u_0\|_A \to 0$ $(k \to \infty)$. Эта сходящаяся последовательность, очевидно, фундаментальна в $\mathcal{H}_A$ и потому $\|u_k - u_j\|_A \to 0$ $(k, j \to \infty)$. Далее, соотношение $\|u_k - u_0\| \to 0$ $(k \to \infty)$ следует из свойства $A \gg 0$, т.е. из неравенства $\|u_k - u_0\| \leqslant c^{-1}\|u_k - u_0\|_A$.

2^0. *Достаточность.* Если выполнены условия (1.72), то последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ фундаментальна в $\mathcal{H}_A$ и потому имеет предел $\widetilde{u}_0 \in \mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$. Тогда снова имеем свойство $\|u_k - \widetilde{u}_0\| \to 0 \quad (k \to \infty)$. Отсюда из второго условия (1.72) имеем $u_0 = \widetilde{u}_0 \in \mathcal{H}_A$. $\square$

Теорема 1.5.6. *Энергетические пространства $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_{\widetilde{A}}$ оператора $A \gg 0$ и его расширения $\widetilde{A}$ (по Фридрихсу) совпадают.*

Доказательство. 1^0. ($\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$) Покажем, что любой элемент u_0 из $\mathcal{H}_A$ принадлежит $\mathcal{H}_{\widetilde{A}}$ и его нормы в обоих пространствах одинаковы.

а) Если $u_0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_A$, то (в силу свойства $A \subset \widetilde{A}$) $u_0 \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right) \subset \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$, при этом

$$\|u_0\|_A^2 = (Au_0, u_0) = (\widetilde{A}u_0, u_0) = \|u_0\|_{\widetilde{A}}^2 . \tag{1.73}$$

б) Пусть теперь $u_0 \in \mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$ и $u_0 \notin \mathcal{D}(A)$. Тогда по определению $\mathcal{H}_A$ существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in \mathcal{D}(A)$, такая, что $u_k \to u_0$ в $\mathcal{H}_A$ (тогда $u_k - u_0 \to 0$ в $\mathcal{H}$), $\|u_k - u_j\|_A \to 0$. Но, если u_k, u_j из $\mathcal{D}(A)$, то u_k, u_j из $\mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ и

$$\begin{gathered}\|u_k - u_j\|_A^2 = (A(u_k - u_j), u_k - u_j) = \\ = \left(\widetilde{A}(u_k - u_j), u_k - u_j\right) = \|u_k - u_j\|_{\widetilde{A}}^2 \to 0.\end{gathered} \tag{1.74}$$

Отсюда и из $u_k \to u_0$ (в $\mathcal{H}$) согласно вспомогательной лемме 1.5.5 получаем, что предельный элемент $u_0 \in \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$, при этом $\|u_k - u_0\|_{\widetilde{A}} \to 0$ ($k \to \infty$). Имеем: $\|u_k - u_0\|_A \to 0$ (по выбору u_k), $\|u_k - u_0\|_{\widetilde{A}} \to 0$ ($k \to \infty$), откуда получаем

$$\|u_0\|_A = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_A = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{\widetilde{A}} = \|u_0\|_{\widetilde{A}} .$$

2^0. ($\mathcal{H}_{\widetilde{A}} \subset \mathcal{H}_A$) Убедимся теперь, что из соотношения $u_0 \in \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$ вытекает соотношение $u_0 \in \mathcal{H}_A$ и равенство энергетических норм. Если $u_0 \in \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$, то существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right) \subset \mathcal{H}_A$, для которой $\|u_k - u_0\|_{\widetilde{A}} \to 0 \quad (k \to \infty)$. Отсюда получаем, что по вспомогательной лемме 1.5.5

$$\|u_k - u_0\| \to 0 \quad (k \to \infty), \quad ||u_k - u_m||_{\widetilde{A}} \to 0 \quad (k, m \to \infty).$$

Так как $u_k \in \mathcal{H}_A$, то по первой части доказательства этой теоремы $u_k \in \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$. Значит $u_k - u_m \in \mathcal{H}_A$ и одновременно $\mathcal{H}_{\widetilde{A}}$. Поэтому согласно формуле (1.73) (при $u_0 = u_k - u_m$) имеем совпадение энергетических норм:

$$\|u_k - u_m\|_A = \|u_k - u_m\|_{\widetilde{A}} \to 0.$$

Тогда вместе с соотношением $u_k \to u_0$ (в $\mathcal{H}$) по вспомогательной лемме 1.5.5 имеем $u_0 \in \mathcal{H}_A$ и совпадение норм (как и в п.1^0).

Теорема доказана. $\square$

В заключение этого параграфа докажем сформулированную ранее теорему 1.4.2 о сепарабельности энергетического пространства $\mathcal{H}_A$.

Доказательство теоремы 1.4.2.

1^0. Если энергетическое пространство $\mathcal{H}_A$ для $A \gg 0$ сепарабельно, то в нем существует счетное плотное множество $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем, что оно плотно в исходном пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $u_0 \in \mathcal{H}$ – произвольный элемент. Так как $\mathcal{H}_A$ плотно в $\mathcal{H}$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u_* \in \mathcal{H}_A$, такой, что $\|u_0 - u_*\| < \varepsilon/2$. Далее, из свойства плотности множества $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}_A$ следует, что найдется такой номер $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\|u_* - \psi_{k_0}\|_A < \varepsilon c/2$, где $c > 0$ – постоянная положительной определенности для A. Тогда

$$\|u_0 - \psi_{k_0}\| \leqslant \|u_0 - u_*\| + \|u_* - \psi_{k_0}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u_0 - u_*\| + \|u_* - \psi_{k_0}\|_A c^{-1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2^0. Если пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно и потому в нем имеется полная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, то по ней можно построить последовательность обобщенных решений $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_A$ уравнений $Au_k = f_k$.

Покажем, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $\mathcal{H}_A$. В самом деле, обозначим

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k u_k, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} a_k f_k.$$

Используя соотношения $(u_k, \eta)_A = (f_k, \eta), \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_A$, оценим для $u \in \mathcal{D}(A)$ величину

$$\|u - S_n\|_A^2 = (u - S_n, u - S_n)_A = (Au, u - S_n) - \sum_{k=1}^{n} a_k (u_k, u - S_n)_A =$$

$$= (Au, u - S_n) - \sum_{k=1}^{n} a_k (f_k, u - S_n) = (Au - T_n, u - S_n) \leqslant$$

$$\leqslant \|Au - T_n\| \cdot \|u - S_n\| \leqslant \|Au - T_n\| \cdot c^{-1} \|u - S_n\|_A .$$

Тогда

$$\|u - S_n\|_A \leqslant c^{-1} \|Au - T_n\| .$$

Так как $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система в $\mathcal{H}$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такие рациональные коэффициенты $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, что $\|Au - T_n\| < \varepsilon c$, и свойство полноты системы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ по отношению к $\mathcal{D}(A)$ доказано, так как в предыдущих рассуждениях $u \in \mathcal{D}(A)$ – произвольный элемент.

Если теперь $u = u_0 \in \mathcal{H}_A$ и $u_0 \notin \mathcal{D}(A)$, то можно аппроксимировать в норме $\mathcal{H}_A$ элемент u_0 близким ему элементом $u_* \in \mathcal{D}(A)$, а этот последний, как выше, с помощью линейных комбинаций $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$ с рациональными коэффициентами a_k. Это и есть искомое счетное и плотное в $\mathcal{H}_A$ множество. $\square$

1.6 Метод Ритца приближенного решения операторного уравнения

Сейчас будет обсужден простой метод построения приближенных решений уравнения $Au = f$, основанный на переходе к конечномерным подпространствам из $\mathcal{H}_A$.

1.6.1 Минимизирующая последовательность и ее сходимость

Вернемся к рассмотрению квадратичного функционала энергии

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in \mathcal{H}_A, \tag{1.75}$$

определенного на элементах энергетического пространства $\mathcal{H}_A$. Точка $u_0 \in \mathcal{H}_A$, на которой реализуется минимум этого функционала, дает обобщенное решение исходного уравнения

$$Au = f, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{1.76}$$

Возникает естественный вопрос: как построить приближенно обобщенное решение u_0 задачи (1.76)?

Определение 1.6.1. *Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_A$ называется минимизирующей для функционала энергии $F(u)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \min_{u\in H_A} F(u) = F(u_0) = -\|u_0\|_A^2 . \qquad \square \tag{1.77}$$

Теорема 1.6.1. *При $A \gg 0$ всякая последовательность, минимизирующая для функционала энергии, сходится по энергетической норме к обобщенному решению u_0 задачи (1.76).*

Доказательство. Из формул (1.50) и (1.77) и из условия теоремы имеем

$$F(u_n) = \|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \to - \|u_0\|_A^2 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому

$$\|u_n - u_0\|_A^2 \to 0 \quad (n \to \infty), \quad \|u_n - u_0\| \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

Эта простая теорема лежит в основе многих приближенных методов нахождения обобщенного решения u_0.

1.6.2 Процесс Ритца

Основная идея решения задачи (1.76) состоит в аппроксимации решения u_0 линейными комбинациями так называемых *координатных элементов.*

Определение 1.6.2. *Выберем последовательность элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:*

1) $\varphi_k \in \mathcal{H}_A$, $k \in \mathbb{N}$; 2) при любом n элементы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ линейно независимы; 3) последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $\mathcal{H}_A$.

Назовем, следуя Ритцу, элементы φ_k – координатными, а всю систему $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – координатной системой. $\square$

Метод Ритца состоит в том, что минимум функционала $F(u)$ ищется не на всем $\mathcal{H}_A$, а на его *конечномерных подпространствах $\mathcal{H}_A^{(n)}$, натянутых на элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$*; затем осуществляется предельный переход при $n \to \infty$.

Представим приближенное решение задачи о минимуме функционала (1.75) в виде

$$u = u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \in \mathcal{H}_A^{(n)}, \tag{1.78}$$

где φ_k – координатные элементы и a_k – постоянные, подлежащие определению. Подставим $u^{(n)}$ вместо u в функционал $F(u)$; это превратит функционал энергии в функцию n независимых переменных $a_1, \ldots a_n$:

$$\begin{aligned} F(u^{(n)}) &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right)_A - 2 \left(f, \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right) = \\ &= \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j (\varphi_k, \varphi_j)_A - 2 \sum_{j=1}^{n} a_j (f, \varphi_j). \end{aligned} \tag{1.79}$$

Выберем теперь a_k так, чтобы $F(u^{(n)})$ приняла минимальное значение. Это приведет, как сейчас будет видно, к системе из n линейных алгебраических уравнений с неизвестными a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В точке минимума функционала $F(u^{(n)}) =: \Phi(a_1, \ldots, a_n)$ имеем

$$\frac{\partial F(u^{(n)})}{\partial a_j} = \frac{\partial \Phi(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.80}$$

и эти условия дают соотношения

$$\frac{\partial F(u^{(n)})}{\partial a_j} = 2\sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_j)_A a_k - 2(f, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, приходим к *системе Ритца*:

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_j)_A a_k = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.81}$$

Если координатные элементы $\varphi_k \in \mathcal{D}(A)$, то элементы матрицы Ритца в (1.81) можно вычислить по формулам

$$(\varphi_k, \varphi_j)_A = (A\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_j, \varphi_k)_A, \quad k, j = 1, \ldots, n. \tag{1.82}$$

Видно, что матрица Ритца обладает свойством симметрии. Более того, ее определитель

$$\det\left((\varphi_j, \varphi_k)_A\right)_{k,j=1}^{n} \tag{1.83}$$

есть определитель Грама линейно независимых элементов $\varphi_k \in \mathcal{H}_A$, $k = \overline{1, n}$, и потому отличен от нуля. Отсюда следует, что система уравнений Ритца (1.81) всегда разрешима, если $A \gg 0$. Найдя коэффициенты $a_k = a_k^{(n)}$ и подставив их в (1.78), получим элемент $u^{(n)}$, который будем называть приближенным по Ритцу решением уравнения (1.76).

Наиболее просто система (1.81) выглядит в том случае, когда элементы $\varphi_k = v_k$ ортонормированы в $\mathcal{H}_A$, т.е.

$$(v_k, v_j)_A = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \ldots, n. \tag{1.84}$$

Тогда решение системы уравнений (1.81) таково

$$a_j = (f, v_j), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.85}$$

а приближенное решение

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (f, v_k) v_k \to u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k) v_k \quad (k \to \infty) \tag{1.86}$$

представляет собой отрезок ряда Фурье для $u_0 \in \mathcal{H}_A$ по ортонормированной в $\mathcal{H}_A$ системе $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ (см. теорему 1.4.3). В этом случае, очевидно,

$$\left\| u_0 - u^{(n)} \right\|_A \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{1.87}$$

т.е. приближенное по Ритцу решение сходится к искомому обобщенному решению $u_0 \in \mathcal{H}_A$.

1.6.3 Теорема о сходимости процесса Ритца

Покажем теперь, что и в общей ситуации свойство (1.87) имеет место.

Теорема 1.6.2. *Для положительно определенного оператора A приближенные по Ритцу решения $u^{(n)}$ при $n \to \infty$ сходятся к точному обобщенному решению u_0 как в $\mathcal{H}_A$, так и в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Последовательность $u^{(n)}$ приближенных по Ритцу решений $u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ не изменится, если координатные элементы φ_k в представлении (1.78) подвергнуть линейному невырожденному преобразованию с треугольной матрицей. Так будет, в частности, если осуществить известный процесс Шмидта ортогонализации последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathcal{H}_A$.

Именно, поступим следующим образом. Заменим элементы φ_k новыми элементами v_j по формулам

$$v_1 = b_{11}\varphi_1, \quad v_2 = b_{21}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2, \dots, \quad v_j = \sum_{k=1}^{j} b_{jk}\varphi_k, \tag{1.88}$$

в которых все постоянные $b_{kk} \neq 0$ (треугольное преобразование невырождено!). Тогда

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{j} b_{jk}\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \sum_{j=k}^{n} \alpha_j b_{jk}, \end{aligned} \tag{1.89}$$

т.е.

$$a_k = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j b_{jk}. \tag{1.90}$$

Так как элементы φ_k линейно независимы, то элементы v_j можно выбрать ортонормированными в $\mathcal{H}_A$, и тогда

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{k=1}^{n} (f, v_k) v_k \to u_0 \;\; (\text{ в } \;\mathcal{H}_A, \; n \to \infty) .$$

Здесь последний переход $\sum_{k=1}^{\infty}(f, v_k)v_k \to u_0$ (в $\mathcal{H}_A$) уже установлен ранее (см. (1.87)). Заметим в заключение, что из сходимости $u^{(n)} \to u_0$ в $\mathcal{H}_A$ следует сходимость $u^{(n)} \to u_0$ в $\mathcal{H}$ (почему?). $\square$

Замечание 1.6.1. Если система Ритца (1.81) для данного n уже построена и по тем или иным причинам желательно получить менее точное приближение, не содержащее некоторых координатных функций, то коэффициенты a_k, соответствующие этому менее точному приближению, найдутся из системы, которая получается из системы (1.81) *усечением*, т.е. вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих отброшенным координатным функциям. $\square$

Замечание 1.6.2. Требование полноты координатной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathcal{H}_A$ не вполне необходимо. Достаточно лишь потребовать, чтобы эта система была полна в классе обобщенных решений. Например, если известно, что искомая функция четная относительно какой-либо из независимых переменных, то можно брать в качестве координатных функций только четные относительно этой переменной, и достаточно, чтобы выбранная система координатных функций была полна в классе четных (по этой переменной) функций из $\mathcal{H}_A$. $\square$

1.6.4 Примеры

Здесь будут рассмотрены примеры применения метода Ритца для одномерных и многомерных краевых задач.

Пример 1.6.1. В задаче

$$Au := -u'' + u = f(x), \; -1 < x < 1, \; u(-1) = u(1) = 0,$$

$$\mathcal{D}\,(A) := \{u(x) \in L_2(-1,1) : u''(x) \in L_2(-1,1), \; u(-1) = u(1) = 0\} ,$$

при четной $f(x)$ решение $u(x)$, очевидно, также будет четной функцией. Поэтому в качестве координатных функций в методе Ритца достаточно взять функции $\varphi_k(x)$ вида

$$\varphi_k(x) = x^{2(k-1)}(1 - x^2), \; k = 1, 2, ...;$$

они удовлетворяют краевым условиям и образуют полную систему функций в классе четных функций из энергетического пространства $\mathcal{H}_A$ с квадратом нормы

$$(u,u)_A := \int\limits_{-1}^{1} \Big[|u'(x)|^2 + |u(x)|^2 \Big]\, dx, \quad u(-1) = u(1) = 0. \qquad \square$$

Упражнение 1.6.1. Выписать систему Ритца (1.81) в рассматриваемом случае. $\square$

Пример 1.6.2. Рассмотрим в прямоугольнике $\Pi := (0,a) \times (0,b)$ смешанную краевую задачу для уравнения

$$Au := -\Delta u + u = f(x,y), \ (x,y) \in \Pi,$$

$$\mathcal{D}(A) := \{u(x,y) \in L_2(\Pi) : \quad \Delta u \in L_2(\Pi), \ u(0,y) = u(a,y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0\}.$$

Здесь в качестве координатных функций можно выбрать функции

$$\varphi_{kj}(x,y) = \sin\frac{\pi k x}{a}\cos\frac{\pi j y}{b}, \quad k = 1,2,\ldots, \ j = 0,1,\ldots,$$

представляющие собой произведение ортогональных соответственно в $L_2(0,a)$ и $L_2(0,b)$ полных систем функций $\left\{\sin\frac{\pi k x}{a}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{\cos\frac{\pi j y}{b}\right\}_{j=0}^{\infty}$, удовлетворяющих краевым условиям рассматриваемой задачи. $\square$

Упражнение 1.6.2. Получить выражение для энергетического скалярного произведения в $\mathcal{H}_A$ и выписать систему Ритца в рассматриваемом случае. $\square$

Замечание 1.6.3. В рассмотренном втором примере в качестве системы координатных функций взята система собственных функций оператора A; если в задаче выбрать такую систему затруднительно, то можно просто взять совокупность многочленов от двух переменных, причем необходимо удовлетворить требованию главных краевых условий. Например, можно взять систему

$$\varphi_{kj}(x,y) = x(x-a)P_{kj}(x,y), \quad k,j = 0,1,2,\ldots,$$

где $P_{kj}(x,y) := x^k y^j$; эти функции образуют полную линейно независимую систему и в $\mathcal{H} = L_2(\Pi)$, и в $\mathcal{H}_A$. $\square$

Вопрос о выборе координатной системы функций является достаточно сложной и весьма ответственной задачей; он требует серьезного изучения и рассмотрения многих типичных ситуаций.

Глава 2

Спектральная теория положительно определенных операторов

2.1 Задача на собственные значения

Пусть A – линейный неограниченный положительно определенный оператор, действующий в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и заданный на плотной в $\mathcal{H}$ области определения $\mathcal{D}(A)$. Многие задачи математической физики, связанные с проблемами колебаний гидродинамических и других систем, в общем виде могут быть сформулированы как задачи о нахождении нетривиальных решений уравнения

$$Au = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

2.1.1 Определения

Напомним некоторые известные из курса функционального анализа определения, связанные с задачей (2.1).

Определение 2.1.1. *Если при $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем $\mathcal{H}$, то говорят, что λ – регулярная точка оператора A и пишут $\lambda \in \rho(A)$.* $\square$

Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек оператора A открыто, его называют резольвентным множеством оператора A, а $R_\lambda(A)$ – резольвентой для A.

Определение 2.1.2. *Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.* $\square$

Спектр оператора – замкнутое множество.

Определение 2.1.3. *Точки $\lambda_0 \in \sigma(A)$, в которых оператор $R_{\lambda_0}(A) := (A - \lambda_0 I)^{-1}$ не существует, называют собственными значениями оператора A.* $\square$

В этом случае ядро $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$, т.е. существует ненулевой элемент $u_0 \in \mathcal{H}$ такой, что $Au_0 = \lambda_0 u_0$. Этот элемент u_0 называют *собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению $\lambda = \lambda_0$.*

Определение 2.1.4. *Совокупность всех собственных элементов оператора A, отвечающих данному собственному значению λ_0, образует собственное подпространство $Z_{\lambda_0} = Ker(A - \lambda_0 I)$ оператора A; размерность $\dim Z_{\lambda_0}$ этого собственного подпространства называется собственной кратностью собственного значения λ_0. Совокупность всех изолированных конечнократных собственных значений оператора A называют дискретным спектром оператора A и обозначают $\sigma_d(A)$, а совокупность всех собственных значений называют собственным (точечным) спектром оператора A ($\sigma_p(A)$).* $\square$

Замечание 2.1.1. Для произвольного линейного (аддитивного и однородного) оператора A, заданного на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}(A)$, в спектре $\sigma(A)$ оператора A выделяют также непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ и остаточный спектр $\sigma_r(A)$, и весь спектр $\sigma(A)$ разбивается, таким образом, на непересекающиеся множества:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A). \tag{2.2}$$

Если оператор A самосопряжен в $\mathcal{H}$, то у него остаточный спектр отсутствует: $\sigma_r(A) = \emptyset$. $\square$

2.1.2 Свойства собственных значений и собственных элементов самосопряженного оператора

При рассмотрении спектральных задач вида (2.1) естественно пользоваться положениями теории комплексных, а не вещественных гильбертовых пространств. Как известно, в таких пространствах $\mathcal{H}$ скалярное произведение при перестановке порядка сомножителей меняется на комплексно сопряженное выражение:

$$(u, v) = \overline{(v, u)}. \tag{2.3}$$

Например, в $L_2(\Omega)$ скалярное произведение вводится для комплекснозначных функций $u(x) = u_1(x) + iu_2(x),\ x \in \Omega$, и $v(x) = v_1(x) + iv_2(x)$ по закону

$$(u, v) := \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, d\Omega; \tag{2.4}$$

оно, очевидно, обладает свойством (2.3).

Свойства решений задачи (2.1) при $A \gg 0$ сформулируем в виде утверждений, которые предложим доказать самостоятельно.

Упражнение 2.1.1. Доказать, что собственные значения λ симметричного оператора A вещественны. □

Упражнение 2.1.2. Если оператор A положительно определен, т.е. $(Au, u) \geqslant c^2(u.u)$ при $u \in \mathcal{D}(A)$, то для всех его собственных значений λ выполнено неравенство $\lambda \geqslant c^2$. □

Упражнение 2.1.3. Собственные элементы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. □

Упражнение 2.1.4. В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ симметричный оператор A может иметь не более чем счетное множество собственных значений. □

Замечание 2.1.2. Если одному собственному значению отвечает несколько линейно независимых собственных элементов, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации Шмидта. После этого все собственные элементы можно нормировать в $\mathcal{H}$. Отсюда следует такой важный вывод: собственные элементы $\{u_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ симметричного оператора A образуют ортонормированную систему, при этом

$$(u_k(A), u_j(A)) = \delta_{kj},\ (u_k(A), u_j(A))_A = \lambda_k \delta_{kj}, \tag{2.5}$$

а в последовательности $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ собственных значений оператора A любое собственное значение $\lambda_j(A)$ повторяется столько раз, какова его кратность. □

Упражнение 2.1.5. Пусть $u_k(A) \in \mathcal{H}_A$ $(k = 1, 2, ...)$ – совокупность собственных элементов оператора $A \gg 0$, образующих ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Показать, что в этом случае обобщенное решение $u_0 \in \mathcal{H}_A$ задачи $Au = f$ при $f \in \mathcal{H}$ представимо в виде ряда

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1}(A)(f, u_k)u_k, \tag{2.6}$$

где $\lambda_k(A)$ – собственные значения оператора A. $\square$

2.1.3 Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора

Для положительно определенного оператора A по аналогии с понятием обобщенного решения операторного уравнения $Au = f$ вводится понятие обобщенного собственного элемента оператора A и обобщенного собственного значения.

Если $Au = \lambda u =: f$, $0 \neq u \in \mathcal{D}(A)$, то при любом $v \in \mathcal{H}_A$:

$$(u, v)_A = \lambda(u, v) \tag{2.7}$$

Определение 2.1.5. *Элемент $u \in \mathcal{H}_A$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ назовем обобщенным собственным элементом и обобщенным собственным значением оператора $A \gg 0$, если они удовлетворяют тождеству (2.7) при любом $v \in \mathcal{H}_A$.* $\square$

Замечание 2.1.3. Обобщенный собственный элемент $u = u_0$, отвечающий обобщенному собственному значению λ_0, не всегда является обычным собственным элементом. Так будет, если $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Действительно в этом случае из (2.7) имеем

$$(u_0, v)_A - \lambda_0(u_0, v) = (Au_0 - \lambda_0 u_0, v) = 0$$

для всех элементов v из плотного в $\mathcal{H}$ множества $\mathcal{H}_A$. Поэтому $Au_0 = \lambda_0 u_0$, т.е. u_0 – обычный собственный элемент, а λ_0 – обычное собственное значение. $\square$

Теорема 2.1.1. *Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и элемент $u_0 \in \mathcal{H}_A$ тогда и только тогда являются обобщенными собственным значением и собственным элементом положительно определенного оператора A, когда они являются обычными собственным значением и собственным элементом расширения $\widetilde{A}$ оператора A по Фридрихсу.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть λ_0 и $u_0 \in \mathcal{H}_A$ – обобщенное собственное значение и обобщенный собственный элемент оператора A; тогда

$$(u_0, v)_A = \lambda_0(u_0, v) =: (f, v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_A.$$

Отсюда получаем, что элемент $u_0 \in \mathcal{H}_A$ реализует минимум функционала

$$F(u) := (u, u)_A - 2(f, u), \quad \forall u \in \mathcal{H}_A.$$

Но тогда по предыдущему $u_0 \in \mathcal{D}\left(\widetilde{A}\right)$ и $\widetilde{A}u_0 = f = \lambda_0 u_0$, т.е. λ_0 и u_0 – собственное значение и собственный элемент оператора $\widetilde{A}$.

2) *Достаточность.* Если $\widetilde{A}u_0 = \lambda_0 u_0$, то при любом $v \in \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{\widetilde{A}}$ имеем

$$(u_0, v)_{\widetilde{A}} = \lambda_0(u_0, v);$$

однако $(u_0, v)_{\widetilde{A}} = (u_0, v)_A$ для $\forall u_0, v \in \mathcal{H}_A$, и потому λ_0 и u_0 – обобщенные собственное значение и обобщенный собственный элемент оператора A. $\square$

Замечание 2.1.4. Так как оператор $\widetilde{A} \supset A$ симметричен и положительно определен в $\mathcal{H}$, то свойства собственных значений и собственных элементов оператора $\widetilde{A}$ – те же, что сформулированы в упражнениях 2.1.1-2.1.4. В дальнейшем слово *обобщенные* для краткости просто будем опускать, имея в виду, что при необходимости используются собственные элементы не оператора A, а его расширения по Фридрихсу $\widetilde{A}$. $\square$

2.2 Вариационная формулировка задачи о собственном спектре

Здесь будут приведены вариационные принципы и теоремы о нахождении первого и последующих собственных значений и собственных элементов оператора A. Так как собственный спектр положительно определенного оператора A вещественный (и положительный), а собственные элементы можно выбирать "вещественными то можно снова считать, что $\mathcal{H}$ – вещественное гильбертово пространство.

2.2.1 Вариационный принцип для первого собственного значения

Если $u \in \mathcal{D}(A)$ – собственный элемент оператора A, отвечающий собственному значению λ, то

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)} = \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} \geqslant \inf_{0 \neq u \in H_A} \left(\frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} \right) =: d \geqslant c^2 \tag{2.8}$$

Теорема 2.2.1. *Если существует элемент $u_1 \in \mathcal{H}_A$, на котором достигается нижняя грань d отношения (2.8), то число $\lambda_1 = d$ есть наименьшее обобщенное собственное значение оператора A, а u_1 – отвечающий этому значению обобщенный собственный элемент.*

Доказательство. Если нижняя грань (2.8) достигается на u_1, то это означает, что (при нормировке $\|u_1\| = 1$)

$$u_1 \in H_A, \quad \|u_1\|_A^2 = d =: \lambda_1. \tag{2.9}$$

Возьмем произвольный элемент $v \in \mathcal{H}_A$, $t \in \mathbb{R}$, и составим отношение

$$\frac{\|u_1 + tv\|_A^2}{\|u_1 + tv\|^2} =: \varphi(t). \tag{2.10}$$

Так как функция $\varphi(t)$ достигает минимума при $t = 0$, то $\varphi'(0) = 0$, т.е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{(u_1, u_1)_A + 2t(u_1, v)_A + t^2(v, v)_A}{(u_1, u_1) + 2t(u_1, v) + t^2(v, v)} \right) \Big|_{t=0} = 0.$$

Тогда

$$2(u_1, v)_A(u_1, u_1) - 2(u_1, v)(u_1, u_1)_A = 0,$$

т.е., с учетом (2.9),

$$(u_1, v)_A = \lambda_1(u_1, v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_A. \tag{2.11}$$

Это равенство показывает, что λ_1 и $u_1 \in \mathcal{H}_A$ – обобщенные собственное значение и собственный элемент оператора A.

То, что $\lambda_1 = d$ – наименьшее из возможных собственных значений оператора A, вытекает из (2.8). $\square$

2.2.2 Вариационный принцип для последующих собственных значений

Допустим, что наименьшее собственное значение $\lambda_1 = d$ и соответствующий собственный элемент $u_1 \in H_A$ уже найдены. Как найти следующее собственное значение $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$ и собственный элемент u_2? Из предыдущего ясно, что λ_2 нужно искать среди значений отношения Рэлея

$$\frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2}$$

на элементах u, ортогональных к u_1 (в $\mathcal{H}$ и в $\mathcal{H}_A$).

Обозначим через $\mathcal{H}^{(1)}$ подпространство пространства $\mathcal{H}$, ортогональное к элементу $u_1 \neq 0$, а через $\mathcal{H}_A^{(1)}$ – подпространство, ортогональное к u_1 в $\mathcal{H}_A$.

Упражнение 2.2.1. Доказать, что $\mathcal{H}_A^{(1)} = \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$.

Решение. 1) Если $u \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$, то

$$(u_1, u)_A = \lambda_1(u_1, u) = 0,$$

так как по условию $(u_1, u) = 0$ для $\forall u \in \mathcal{H}^{(1)}$. Значит, $u \in \mathcal{H}_A^{(1)}$.

2) Если $(u_1, u)_A = 0$ для $\forall u \in \mathcal{H}_A^{(1)}$, то

$$(u_1, u) = \lambda_1^{-1}(u_1, u)_A = 0,$$

т.е. $u \in \mathcal{H}^{(1)}$ и $u \in \mathcal{H}_A$. $\square$

Если известны попарно ортогональные собственные элементы $u_1, \ldots, u_n$, то можно ввести подпространства $\mathcal{H}^{(n)}$ и $\mathcal{H}_A^{(n)}$ пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_A$, соответственно, ортогональные (каждое в своем скалярном произведении) к $u_1, \ldots, u_n$. Аналогично упражнению 2.2.1 устанавливается, что

$$\mathcal{H}_A^{(n)} = \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}^{(n)}. \tag{2.12}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть для оператора $A \gg 0$ известны n первых собственных значений $0 < c^2 \leqslant d = \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и соответствующих им попарно ортогональных (как в $\mathcal{H}$, так и в $\mathcal{H}_A$) собственных элементов $u_1, \ldots, u_n$. Пусть*

$$\lambda_{n+1} := \inf_{u \in H_A^{(n)}} \|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1. \tag{2.13}$$

Если эта нижняя грань достигается на некотором элементе u_{n+1}, то λ_{n+1} – собственное значение оператора A, непосредственно следующее за λ_n, а элемент u_{n+1} есть собственный элемент оператора A, отвечающий числу λ_{n+1}.

Доказательство. Проведем те же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 2.2.1. Вместо (2.11) здесь придем к тождеству

$$(u_{n+1}, v)_A = \lambda_{n+1}(u_{n+1}, v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_A^{(n)}. \tag{2.14}$$

Если $w \in \mathcal{H}_A$ – произвольный элемент, а $\|u_k\| = 1,\ k = 1, \ldots, n$, то элемент

$$v = w - \sum_{k=1}^{n} (w, u_k) u_k \in \mathcal{H}_A^{(n)}$$

(проверьте!)

Подставив такой v в (2.14) и учитывая, что $(u_{n+1}, u_k)_A = (u_{n+1}, u_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, имеем

$$(u_{n+1}, w)_A = \lambda_{n+1} (u_{n+1}, w), \quad \forall w \in \mathcal{H}_A.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Замечание 2.2.1. Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 имеют условный характер; из них следует, что задачу на собственные значения для оператора A можно заменить равносильной ей вариационной задачей о нахождении последовательных минимумов отношения Рэлея $||u||_A^2/||u||^2$ в подпространствах $\mathcal{H}_A^{(n)}$ либо задачей (2.13). При этом предполагается, что соответствующие нижние грани достигаются на некоторых элементах из $\mathcal{H}_A$. □

2.2.3 Минимизирующая последовательность для - наименьшего собственного значения

Здесь будет приведено достаточное условие того, что существует элемент $u_1 \in \mathcal{H}_A$, на котором реализуется нижняя грань функционала Рэлея и потому существуют (по теореме 2.2.1) обобщенный собственный элемент и наименьшее обобщенное собственное значение оператора A.

Теорема 2.2.3. *Пусть $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_A$ – минимизирующая последовательность для функционала $\|w\|_A^2$, рассматриваемого на элементах $w \in \mathcal{H}_A$ с $\|w\| = 1$. Если из этой последовательности можно выделить сходящуюся в $\mathcal{H}$ подпоследовательность $v_k := w_{n_k}$, то*

$\lambda_1 = d = \inf\limits_{0 \neq u \in H_A} \|w\|_A^2$ $(\|w\| = 1)$ *есть наименьшее собственное значение оператора* A, *а предел (в* $\mathcal{H}$*)* $u_1 := \lim\limits_{k\to\infty} w_{n_k}$ *выделенной подпоследовательности* w_{n_k} *есть соответствующий (обобщенный) собственный элемент.*

Доказательство. а) Введем сходящуюся в $\mathcal{H}$ подпоследовательность $v_k = w_{n_k}$, которая, очевидно, также будет минимизирующей для функционала $\|w\|_A^2$. Тогда элементы v_k обладают следующими свойствами:

1) $v_k \in \mathcal{H}_A$; 2) $\|v_k\| = 1$; 3) $\lim\limits_{k\to\infty} ||v_k||_A^2 = d = \lambda_1$; 4) существует элемент $u_1 \in \mathcal{H}$ такой, что $\|v_k - u_1\| \to 0$ $(k \to \infty)$. Наша цель – доказать, что $u_1 \in \mathcal{H}_A$ и что $\|u_1\|_A^2 = \lambda_1$.

б) Пусть $t \in \mathbb{R}$ – произвольное число и $\eta_k \in \mathcal{H}_A$ – произвольный элемент. Для $v_k + t\eta_k$ имеем

$$\frac{\|v_k + t\eta_k\|_A^2}{\|v_k + t\eta_k\|^2} \geqslant \inf_{0 \neq u \in \mathcal{H}_A} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} = d = \lambda_1.$$

Тогда

$$(v_k + t\eta_k, v_k + t\eta_k)_A - \lambda_1(v_k + t\eta_k, v_k + t\eta_k) =$$
$$= t^2 \left\{\|\eta_k\|_A^2 - \lambda_1 \|\eta_k\|^2\right\} + 2t\left\{(v_k, \eta_k)_A - \lambda_1(v_k, \eta_k)\right\} +$$
$$+ \left\{\|v_k\|_A^2 - \lambda_1 \|v_k\|^2\right\} \geqslant 0.$$

Поскольку квадратный относительно t трехчлен неотрицателен, то его дискриминант неположителен и потому

$$|(v_k, \eta_k)_A - \lambda_1(v_k, \eta_k)| \leqslant \sqrt{\|\eta_k\|_A^2 - \lambda_1 \|\eta_k\|^2}\sqrt{\|v_k\|_A^2 - \lambda_1}$$

$(\|v_k\| = 1)$. Отсюда

$$|(v_k, \eta_k)_A - \lambda_1(v_k, \eta_k)| \leqslant \|\eta_k\|_A \sqrt{\|v_k\|_A^2 - \lambda_1}. \tag{2.15}$$

в) До сих пор элементы $\eta_k \in \mathcal{H}_A$ были произвольны. Потребуем теперь, чтобы они были *ограничены в совокупности*, т.е.

$$\|\eta_k\|_A \leqslant C, \quad \forall k \in N. \tag{2.16}$$

Тогда из неравенства (2.15) имеем

$$|(v_k, \eta_k)_A - \lambda_1(v_k, \eta_k)| \leqslant C\sqrt{\|v_k\|_A^2 - \lambda_1}. \tag{2.17}$$

Здесь правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому стремится к нулю и левая часть и притом *равномерно относительно выбора элементов* η_k*, удовлетворяющих условиям* (2.16).

г) Выберем в качестве η_k элементы

$$\eta_k = v_k - v_m,$$

где номер m произволен, а $k \to \infty$. Так как последовательность $\|v_k\|_A^2 \to \lambda_1$ и потому ограничена, т.е. $\|v_k\|_A \leqslant M$, то $\|\eta_k\|_A \leqslant 2M =: C$. Тогда из неравенства (2.17) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} [(v_k, v_k - v_m)_A - \lambda_1(v_k, v_k - v_m)] = 0,$$

причем *стремление к нулю равномерное относительно* $m \in \mathbb{N}$. Но тогда можно перейти к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\lim_{k,m\to\infty} [(v_k, v_k - v_m)_A - \lambda_1(v_k, v_k - v_m)] = 0.$$

д) Так как здесь номера k и m равноправны, то

$$\lim_{k,m\to\infty} [(v_m, v_k - v_m)_A - \lambda_1(v_m, v_k - v_m)] = 0.$$

Вычитая из первого соотношения второе, имеем

$$\lim_{k,m\to\infty} \left[\|v_k - v_m\|_A^2 - \lambda_1\|v_k - v_m\|^2\right] = 0.$$

е) Поскольку по условию имеем $\|v_k - v_m\| \to 0$ $(k, m \to \infty)$, то отсюда получаем, что *последовательность* v_k *фундаментальна и в* $\mathcal{H}_A$, поэтому, если $v_k \to u_1$ (в $\mathcal{H}$), то $v_k \to u_1 \in \mathcal{H}_A$ (вспомним лемму 1.5.5). Значит,

$$\|u_1\|_A^2 = \lim_{k\to\infty} \|v_k\|_A^2 = d = \lambda_1, \ \|u_1\| = \lim_{k\to\infty} \|v_k\| = 1.$$

Итак, существует элемент $u_1 \in \mathcal{H}_A$ такой, что на нем достигается нижняя грань функционала $\|u\|_A^2$ при условии $\|u\| = 1$. По теореме 2.2.1 получаем, что $d = \lambda_1$ есть наименьшее собственное значение, а u_1 – соответствующий собственный элемент оператора A. $\square$

2.3 Основные теоремы о спектре

В этом параграфе будет сформулирован и доказан признак, позволяющий установить дискретность спектра в основной задаче

$$Au = \lambda u, \quad A \gg 0, \quad u \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}. \tag{2.18}$$

2.3.1 Определение дискретного спектра

Допустим, что построены первые n собственных значений оператора A, т.е. числа $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, а также отвечающие им ортонормированные в $\mathcal{H}$ собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^n$. Рассмотрим функционал

$$\Phi_n(u) := \|u\|_A^2, \quad u \in \mathcal{H}_A^{(n)}, \quad \|u\| = 1. \tag{2.19}$$

Обозначим

$$\lambda_{n+1} = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{H}_A^{(n)}} \|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1. \tag{2.20}$$

Если для функционала (2.19) построена минимизирующая последовательность и из нее выделена подпоследовательность, сходящаяся в $\mathcal{H}$, то, как и в предыдущей теореме 2.2.3, доказывается, что λ_{n+1} есть $n+1$–ое собственное значение, а предел u_{n+1} выделенной подпоследовательности – это $n+1$–й собственный элемент задачи (2.18).

Таким образом, рассматривая задачи (2.19) в пространствах $\mathcal{H}_A^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, можно находить числа λ_n и собственные элементы u_n.

Определение 2.3.1. *Будем говорить, что оператор $A \gg 0$ имеет дискретный спектр $\sigma_d(A) = \sigma(A)$, если:*

1^0. *Оператор A имеет бесконечную последовательность собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, каждое из которых не более чем конечнократно, а $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Обычно число λ_k в последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ повторяется столько раз, какова его кратность, и тогда имеем*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty \quad (k \to \infty). \tag{2.21}$$

2^0. *Последовательность собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, полна в $\mathcal{H}$.*

2.3.2 Теорема о дискретности спектра

В данном пункте будет установлен основной результат этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть для $A \gg 0$ выполнено условие компактности вложения*

$$\mathcal{H}_A \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to \mathcal{H}, \tag{2.22}$$

т.е. всякое множество, ограниченное в $\mathcal{H}_A$, компактно в $\mathcal{H}$ (оператор вложения компактен, или вполне непрерывен). Тогда обобщенный спектр этого оператора дискретен.

Доказательство теоремы проведем по этапам.

1^0. Рассмотрим число

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in \mathcal{H}_A} \|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1,$$

и построим для него минимизирующую последовательность $\left\{ v_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\infty}$. Это значит, что $v_j^{(1)} \in \mathcal{H}_A$, $\left\| v_j^{(1)} \right\| = 1$, $\left\| v_j^{(1)} \right\|_A^2 \to \lambda_1$ $(j \to \infty)$. В силу последнего условия имеем $\left\| v_j^{(1)} \right\|_A^2 \leqslant C$ $(j \in \mathbb{N})$, т.е. минимизирующая последовательность ограничена в $\mathcal{H}_A$. Тогда по условию (2.22) она компактна в $\mathcal{H}$ и поэтому из нее можно выделить сходящуюся в $\mathcal{H}$ подпоследовательность $\left\{ v_{j_k}^{(1)} \right\}_{k=1}^{\infty}$. По теореме 2.2.3 получаем, что предел $u_1 \in \mathcal{H}_A$ этой подпоследовательности есть обобщенный собственный элемент, отвечающий наименьшему собственному значению λ_1 задачи (2.18).

2^0. Аналогичным образом строим обобщенные собственные элементы $u_2, \ldots, u_n$, опираясь на соответствующие задачи (2.20) в пространствах $\mathcal{H}_A^{(1)}, \ldots, \mathcal{H}_A^{(n-1)}$. Этот процесс никогда не оборвется, так как по предположению пространство $\mathcal{H}$ и плотное в нем пространство $\mathcal{H}_A$ бесконечномерны.

Итак, получены собственные значения

$$0 < c^2 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots,$$

а также отвечающие им собственные элементы

$$u_1, \ldots, u_k, \ldots,$$

которые ортогональны в $\mathcal{H}$ и в $\mathcal{H}_A$ и нормированы в $\mathcal{H}$.

3^0. Докажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty.$$

Допустим противное. Тогда монотонная последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена: $\lambda_k \leqslant M < \infty$. В этом случае $\|u_k\|_A = \sqrt{\lambda_k} \leqslant \sqrt{M} < \infty$, т.е. совокупность собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{H}_A$ и по условию теоремы компактна в $\mathcal{H}$. Однако для ортонормированной в $\mathcal{H}$ последовательности это невозможно: нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность в силу соотношения $\|u_k - u_j\|^2 = 2$ $(\forall k, j,\ k \neq j)$.

4^0. Покажем, что система $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ полна (и ортогональна) в $\mathcal{H}_A$. Допустим противное и рассмотрим $\mathcal{H}_A^{(\infty)}$ – подпространство $\mathcal{H}_A$, ортогональное всем собственным элементам $\{u_k\}_{k=1}^\infty$. Это подпространство по предположению должно содержать отличные от нуля элементы. Обозначим $\lambda_\infty = \inf \|u\|_A^2$, $0 \neq u \in \mathcal{H}_A^{(\infty)}$, $\|u\| = 1$. Тогда по предыдущему λ_∞ – собственное значение оператора A. Сравним λ_∞ с λ_n; имеем

$$\lambda_\infty \geqslant \lambda_n, \quad \text{так как} \quad \mathcal{H}_A^{(\infty)} \subset \mathcal{H}_A^{(n)}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots .$$

Однако $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, поэтому $\lambda_\infty \geqslant \infty$, что нелепо, так как

$$\lambda_\infty = \inf \|u\|_A^2 < \infty, \ \|u\| = 1, \ u \in \mathcal{H}_A^{(\infty)} \neq \{0\}\,.$$

Полученное противоречие доказывает полноту системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ в $\mathcal{H}_A$.

5^0. Докажем, что эта система полна в $\mathcal{H}$. Если $u_0 \in \mathcal{H}_A$, то согласно 4^0 для $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая линейная комбинация $\sum_{k=1}^N a_k u_k$, что

$$\left\| u_0 - \sum_{k=1}^N a_k u_k \right\|_A < \varepsilon c,$$

где $c > 0$ – константа положительной определенности для $A \gg 0$. Отсюда имеем

$$\left\| u_0 - \sum_{k=1}^N a_k u_k \right\| \leqslant c^{-1} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^N a_k u_k \right\|_A < \varepsilon.$$

Таким образом, система $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ полна для совокупности элементов $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$.

Если теперь $\widetilde{u_0} \in \mathcal{H}$ – произвольный элемент, то для $\forall \varepsilon > 0$ найдется (в силу плотности $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}$) элемент $u_0 \in \mathcal{H}_A$ такой, что выполнено свойство

$$\|\widetilde{u_0} - u_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

и, кроме того,

$$\left\| u_0 - \sum_{k=1}^N a_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Тогда

$$\left\| \widetilde{u_0} - \sum_{k=1}^N a_k u_k \right\| \leqslant \|\widetilde{u_0} - u_0\| + \left\| u_0 - \sum_{k=1}^N a_k u_k \right\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана полностью. $\square$

Замечание 2.3.1. По ходу доказательства теоремы было установлено также (см. п. 3^0), что в последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ число λ_k не может повторятся счетное число раз, т.е. каждое собственное значение λ_k конечнократно. $\square$

Упражнение 2.3.1. Докажите сформулированное в замечании 2.3.1 утверждение. $\square$

2.3.3 Представление положительно определенного - оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов

Пусть $A \gg 0$, $\mathcal{H}_A \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to \mathcal{H}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – дискретный спектр оператора A, а $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный в $\mathcal{H}$ базис из его собственных элементов (являющийся также и ортогональным базисом в $\mathcal{H}_A$).

Возьмем любой $u \in \mathcal{D}(A)$ и разложим его по базису $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$; имеем: $u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)u_k$. Так как $Au_k = \lambda_k u_k$, то формально получим

$$Au = A\left(\sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)u_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u, u_k)u_k. \tag{2.23}$$

Обоснование этой формулы простое: если $u \in \mathcal{D}(A)$, то

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty}(Au, u_k)\,u_k = \sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)_A\,u_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,(u, u_k)\,u_k;$$

здесь было использовано основное тождество для обобщенных собственных элементов.

Так как ряд справа в (2.23) должен сходиться (поскольку при $u \in \mathcal{D}(A)$ будет $Au \in \mathcal{H}$), то отсюда следует *описание* $\mathcal{D}(A)$:

$$\mathcal{D}(A) := \left\{u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)\,u_k \in \mathcal{H} : \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\,|(u, u_k)|^2 < \infty\right\}. \tag{2.24}$$

Аналогичным образом можно описать $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$. Если $u \in \mathcal{H}_A$, $u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)\,u_k$, то

$$(u, u)_A = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)\,u_k, \sum_{j=1}^{\infty}(u, u_j)\,u_j\right)_A =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{\infty} (u,u_k)\,(u,u_j)\,(u_k,u_j)_A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left|(u,u_k)\right|^2 < \infty;$$

справедливо и обратное утверждение. Поэтому

$$\mathcal{H}_A = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} (u,u_k)\,u_k \in \mathcal{H} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left|(u,u_k)\right|^2 < \infty \right\}. \qquad (2.25)$$

Введем теперь понятие дробных степеней оператора $A \gg 0$, который будем считать расширенным (по Фридрихсу) до самосопряженного. Положим по определению, что для $u = \sum_{k=1}^{\infty} (u,u_k)\,u_k$ при $\alpha \geqslant 0$ оператор A^{α} действует по закону

$$A^{\alpha} u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha}\,(u,u_k)\,u_k. \qquad (2.26)$$

Как ясно из предыдущего, $A^1 = A,\ A^0 = I$ и

$$\mathcal{D}(A^{\alpha}) := \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} (u,u_k)\,u_k : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \left|(u,u_k)\right|^2 < \infty \right\}. \qquad (2.27)$$

Сравнивая (2.27) с (2.25), получаем, что

$$\mathcal{H}_A = \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{H}, \qquad (2.28)$$

и потому $\mathcal{D}(A^{1/2})$ плотно в $\mathcal{H}$. Аналогично можно установить, что $\mathcal{D}(A^{\alpha})$ плотно в $\mathcal{H}$ при любых $\alpha \geqslant 0$.

Закон (2.26) распространяется и на значения $\alpha < 0$. В этом случае, очевидно, $\mathcal{D}(A^{\alpha})$ совпадает со всем $\mathcal{H}$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \left|(u,u_k)\right|^2 < \infty \quad \forall u = \sum_{k=1}^{\infty} (u,u_k)\,u_k \in \mathcal{H},$$

поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \left|(u,u_k)\right|^2 < \infty$ и при $\alpha < 0$ числа $\lambda_k^{2\alpha} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Замечание 2.3.2. По дробным степеням A^{α} оператора $A \gg 0$ с дискретным спектром строится шкала гильбертовых пространств $\mathcal{H}^{\alpha} := \mathcal{D}(A^{\alpha/2})$, обладающая рядом замечательных свойств; такие шкалы при $-\infty < \alpha < \infty$ применяются при исследовании многих задач математической физики. □

Упражнение 2.3.2. Убедиться, что имеют место свойства

$$A^{\alpha+\beta} u = A^{\alpha}(A^{\beta} u) = A^{\beta}(A^{\alpha} u),\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

и установить, для каких элементов u эти свойства справедливы. □

2.3.4 Снова о задачах с дискретным спектром

Покажем, что свойство дискретности спектра оператора $A \gg 0$ связано с одним важным свойством обратного оператора A^{-1}.

Теорема 2.3.2. *Если оператор $A \gg 0$ имеет дискретный спектр т.е. $\sigma(A) = \sigma_d(A)$, то обратный оператор компактен: $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.*

Доказательство основано на том, что оператор A^{-1} можно представить в виде суммы конечномерного оператора и оператора, как угодно малого по норме.

Если $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная в $\mathcal{H}$ система собственных элементов оператора A, отвечающая дискретному спектру $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$, то

$$A^{-1}u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A^{-1}u, u_k\right) u_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(u, A^{-1}u_k\right) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \left(u, u_k\right) u_k =$$

$$= G_1 u + G_2 u := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-1} \left(u, u_k\right) u_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \left(u, u_k\right) u_k.$$

Здесь G_1 – конечномерный (N–мерный) оператор, а G_2 можно сделать подбором N как угодно малым по норме. Действительно,

$$\|G_2 u\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \left|(u, u_k)\right|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|(u, u_k)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left|(u, u_k)\right|^2 = \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \|u\|^2,$$

откуда получаем, что

$$\|G_2\| \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}},$$

и если N достаточно велико, то $1/\lambda_{N+1} < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. □

Теорема 2.3.3. *Если оператор $A \gg 0$ имеет дискретный спектр, то $\mathcal{H}_A \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to \mathcal{H}$.*

Доказательство. Если некоторое множество $\{u\} \subset \mathcal{H}_A = \mathcal{D}(A^{1/2})$ ограничено в $\mathcal{H}_A$, т.е.

$$\|u\|_A^2 = \left\| A^{1/2} u \right\|^2 \leqslant C$$

для любого элемента из этого множества, то это множество, элементы которого представимы в виде

$$u = A^{-1/2}(A^{1/2}u),$$

компактно в $\mathcal{H}$. Действительно, оно получается применением к ограниченному в $\mathcal{H}$ множеству элементов $\left\{A^{1/2}u\right\}$ оператора $A^{-1/2}$, который компактен в $\mathcal{H}$ вместе с оператором A^{-1}. $\square$

Упражнение 2.3.3. Доказать, что для оператора $A \gg 0$ с дискретным спектром оператор $A^{-\alpha}$ при любом $\alpha > 0$ компактен.

Указание. См. доказательство теоремы 2.3.2. $\square$

Теорема 2.3.4. *Пусть оператор A самосопряжен и положительно определен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1^0. *Оператор A имеет дискретный спектр, т.е.* $\sigma(A) = \sigma_d(A)$.
2^0. *Обратный оператор* $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.
3^0. $\mathcal{H}_A \subset_{\to}\subset_{\to} \mathcal{H}$.

Доказательство. Импликация $3^0 \Rightarrow 1^0$ доказана в теореме 2.3.1, импликация $1^0 \Rightarrow 2^0$ – в теореме 2.3.2, а импликация $1^0 \Rightarrow 3^0$ – в теореме 2.3.3. Осталось доказать лишь импликацию $2^0 \Rightarrow 1^0$. Однако этот факт непосредственно следует из известной из курса функционального анализа теоремы Гильберта–Шмидта: если оператор A^{-1} положителен и компактен, то система его собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ полна и ортогональна в $\mathcal{H}$, а собственные значения $\{\mu_k(A^{-1})\}_{k=1}^\infty$ конечнократны и положительны,

$$\mu_1(A^{-1}) \geqslant \mu_2(A^{-1}) \geqslant \ldots \geqslant \mu_k(A^{-1}) \geqslant \ldots, \quad \mu_k(A^{-1}) \to 0 \ (k \to \infty).$$

Поскольку $\mu_k(A^{-1}) = \lambda_k^{-1}(A)$, то собственные значения $\lambda_k(A)$ оператора A также конечнократны и положительны, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(A) = +\infty$. Так как собственные элементы у операторов A и A^{-1} совпадают, то в итоге приходим к выводу, что оператор A имеет дискретный спектр: $\sigma(A) = \sigma_d(A)$. $\square$

Отметим в заключение этого параграфа, что свойство $\mathcal{H}_A \subset_{\to}\subset_{\to} \mathcal{H}$ является типичным в классических задачах математической физики, рассматриваемых в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 1$. В следующем параграфе будут приведены простые достаточные условия, называемые теоремами вложения, которые позволяют установить свойство $\mathcal{H}_A \subset\!\to\subset\!\to \mathcal{H}$ и вместе с ним свойство дискретности спектра оператора A.

2.4 Теоремы вложения

Здесь будет рассмотрен вспомогательный материал, позволяющий в тех или иных типичных ситуациях устанавливать свойство $\mathcal{H}_A \subset\!\to\subset\!\to \mathcal{H}$. Предварительно рассмотрим некоторые общие вопросы, относящиеся к определению вложения, компактного вложения и метрики в пространствах, называемых пространствами Соболева.

2.4.1 Одномерные теоремы вложения

Как было видно из предыдущего, свойство компактного вложения

$$\mathcal{H}_A \subset\!\to\subset\!\to \mathcal{H}$$

играет фундаментальную роль в задачах с дискретным спектром.

Напомним определения ограниченного и компактного вложения одного пространство в другое.

Определение 2.4.1. *Будем говорить, что гильбертово (банахово) пространство F ограниченно вложено в гильбертово (банахово) пространство E и обозначать этот факт $F \subset\!\to E$, если F плотно в E и существует такая константа $a > 0$, что для любого $u \in F$ выполнено*

$$\|Vu\|_E = \|u\|_E \leqslant a \, \|u\|_F \ , \tag{2.29}$$

где V – так называемый оператор вложения. □

Если в качестве E взять пространство $\mathcal{H}$, а в качестве F – энергетическое пространство $\mathcal{H}_A$, то в силу неравенства

$$\|u\| \leqslant c^{-1} \, \|u\|_A \, , \quad \forall u \in H_A, \tag{2.30}$$

получаем, что $\mathcal{H}_A \subset\!\to \mathcal{H}$ с константой $d = c^{-1}$, где $c > 0$ – константа положительной определенности для оператора A. Слева в (2.29) либо пишут, либо не пишут в явной форме оператор вложения V, т.е. оператор сопоставления элемента $u \in F$ его же как элемента $E \, (V : F \to E)$; как следует из (2.29), $\|V\| \leqslant a$.

Определение 2.4.2. *Говорят, что F компактно вложено в E и пишут $F \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to E$, если F ограниченно вложено в E и оператор вложения $V : F \to E$ компактен, т.е. вполне непрерывен из F в E.* $\square$

Свойства компактности вложения одного пространства в другое изучает целое направление в современной теории уравнений в частных производных, называемое *теоремами вложения*. Здесь будут приведены лишь некоторые из этих теорем, и притом без доказательства.

а) Начнем с простого примера – банаховых (не гильбертовых) пространств $E = C([a, b])$ и $F = C^1([a, b])$. Так как

$$\begin{aligned} \|u\|_{C([a,b])} := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)|,\ \|u\|_{C^1([a,b])} := \\ := ||u||_{C([a,b])} + \|u'\|_{C([a,b])}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

и множество $C^1([a, b])$ непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a, b]$, плотно в множестве непрерывных функций, то $C^1([a, b]) \subset\!\!\to C([a, b])$ с константой вложения $d = 1$. Далее, по формуле Ньютона-Лейбница получаем, что $\forall u \in C^1([a, b])$:

$$u(x) = u(a) + \int\limits_a^x u'(t)\, dt =: Vu,\ x \in [a, b]. \tag{2.32}$$

Отсюда видно, что оператор вложения V, сопоставляющий функции $u \in C^1([a, b])$ ее же как элемент $C([a, b])$, является компактным: он равен сумме одномерного оператора V_1, $V_1 u := u(a)$, и интегрального оператора Вольтерра с единичным ядром, действующего на $u'(x)$:

$$(V_2 u)\,(x) := \int\limits_a^x 1 \cdot u'(t)\, dt. \tag{2.33}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |V_1 u(x)| = |u(a)| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |u(x)| \leqslant \\ \leqslant \max_{x \in [a,b]} |u(x)| + \max_{x \in [a,b]} |u'(x)| = \|u(x)\|_{C^1([a,b])}. \end{aligned}$$

Поэтому оператор $V_1 : C^1([a, b]) \to \mathbb{R}$ ограничен и $\|V_1\| \leq 1$. Так как $\mathbb{R}$ – одномерное подпространство, то V_1 – компактный оператор. Далее,

$$\|V_2 u(x)\|_{C([a,b])} = \| \int\limits_a^x u'(t)\, dt \|_{C([a,b])}, \quad V_2 = W_1 \cdot W_2.$$

Здесь $W_2 u(x) := u'(x)$, $W_2 : C^1([a,b]) \to C([a,b])$ – ограниченный оператор, так как $\|W_2 u(x)\| = \|u'(x)\|_{C([a,b])} = \max\limits_{x\in[a,b]} |u'(x)| \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} |u(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |u'(x)| = \|u(x)\|_{C^1([a,b])}$ и потому $\|W_2\| \leq 1$. Далее, $W_1\varphi := \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$ – интегральный оператор типа Вольтерра и потому W_1 – компактный оператор.

Если $u(t) \in C^1([a,b])$, то $u'(t) \in C([a,b])$ и потому оператор V_2 есть компактный оператор из $C^1([a,b])$ в $C([a,b])$. Поэтому и $V = V_1 + V_2$ компактен из $C^1([a,b])$ в $C([a,b])$.

Упражнение 2.4.1. Проверьте, что оператор вложения $V : C^k([a,b]) \to C^m([a,b])$ является компактным при любом $m < k$. $\Box$

б) Рассмотренные примеры относятся, однако, к случаю банахова, а не гильбертова пространства. Гильбертовым аналогом пространства $C[a,b]$ является пространство $L_2(a,b) \supset C([a,b])$ со скалярным произведением и нормой

$$(u,v)_{L_2(a,b)} := \int\limits_a^b u(x)v(x)\,dx, \quad ||u||_{L_2(a,b)} := (u,u)^{1/2}. \tag{2.34}$$

Введем пространство $H^1(a,b) = W_2^1(a,b) \supset C^1([a,b])$ абсолютно непрерывных функций, т.е. таких функций $u(x)$, $x \in [a,b]$, которые представимы по формуле Ньютона-Лейбница (2.32), где теперь $u'(x) \in L_2(a,b)$, а интеграл понимается в смысле Лебега. Здесь

$$\begin{gathered}(u,v)_{W_2^1(a,b)} := \int\limits_a^b \left[u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\right]\,dx,\\ \|u\|^2_{W_2^1(a,b)} = (u,u)_{W_2^1(a,b)}.\end{gathered} \tag{2.35}$$

Множество $W_2^1(a,b)$ плотно в $C([a,b])$, а $C([a,b])$ плотно в $L_2(a,b)$, поэтому $W_2^1(a,b) \subset_{\to} L_2(a,b)$ с константой $d = 1$ (см. (2.35)). Из представления (2.32) снова получаем, что оператор вложения $V : W_2^1(a,b) \to L_2(a,b)$ компактен.

Упражнение 2.4.2. Введем пространство $\overset{0}{W_2^1}(a,b)$ функций $u \in W_2^1(a,b) :\ u(a) = u(b) = 0$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{\overset{0}{W_2^1}(a,b)} := \int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx. \tag{2.36}$$

Показать, что

$$\overset{0}{W_2^1}(a,b) \subset\to L_2(a,b).$$

Указание. Использовать одномерный аналог неравенства Фридрихса, т.е. неравенство Пуанкаре, а также свойство плотности в $L_2(a,b)$ множества финитных функций и представление (2.33) для элементов из $\overset{0}{W_2^1}(a,b)$. □

Аналогично пространству $W_2^1(a,b)$ вводится пространство $W_2^l(a,b)$ при любом $l \in \mathbb{N}$. Здесь скалярное произведение

$$(u,v)_{W_2^l(a,b)} := \int_a^b \sum_{k=0}^{l} u^{(k)}(x)v^{(k)}(x)\,dx. \tag{2.37}$$

Очевидно, $W_2^l(a,b)$ состоит из функций $u(x) \in L_2(a,b)$ у которых все производные до порядка l включительно принадлежат $L_2(a,b)$.

Пространства $W_2^l(a,b)$ называются пространствами С. Л. Соболева – по имени выдающегося советского математика и академика, разработавшего теорию теорем вложения.

Теорема 2.4.1. *При любых целых $k > m$, $m \geqslant 0$, имеет место вложение*

$$W_2^k(a,b) \subset\to\subset\to W_2^m(a,b).$$

Этот факт примем здесь без доказательства. □

2.4.2 Многомерные теоремы вложения

Будем теперь считать, что функции $u(x)$, $x = (x_1,\dots,x_m)$, заданы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, и рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega, \quad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := (u,u)_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь интегрирование ведется по m–мерной области Ω, а m–кратный интеграл понимается в смысле Лебега.

Введем пространство $W_2^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^1(\Omega)} := \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + u(x)v(x)]\,d\Omega, \quad \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} := (u,u)_{W_2^1(\Omega)}.$$

Упражнение 2.4.3. Доказать, что $W_2^1(\Omega) \subset_{\rightarrow} L_2(\Omega)$.

Указание. Для доказательства плотности $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ воспользоваться тем, что множество финитных функций плотно в $L_2(\Omega)$. $\square$

Упражнение 2.4.4. Опираясь на неравенство Фридрихса, доказать, что

$$\overset{0}{W_2^1}(\Omega) \subset_{\rightarrow} L_2(\Omega),$$

где

$$\overset{0}{W_2^1}(\Omega) := \{u(x) \in W_2^1(\Omega) : \ u(x) = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\,)\}$$

– пространство функций $u(x)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\overset{0}{W_2^1}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, d\Omega.$$

В таком пространстве квадрат нормы выражается в виде *интеграла Дирихле*:

$$||u||^2_{\overset{0}{W_2^1}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega \ (= ||u||^2_A),$$

он равен энергетическому скалярному произведению для некоторого положительно определенного оператора A. Найдите закон, которым определяется оператор A, и множество $\mathcal{D}\,(A) \subset L_2(\Omega)$. $\square$

Рассмотрим еще пространство $W_2^l(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^l(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \mathcal{D}^\alpha u \cdot \mathcal{D}^\alpha v \right) d\Omega, \tag{2.38}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m, \ \alpha_k$ – неотрицательные целые числа,

$$\mathcal{D}^\alpha u := \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}_m^{\alpha_m} u, \quad \mathcal{D}_j u := \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Здесь для $u(x) \in W_2^l(\Omega)$ суммируются с квадратом по области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ не только сама функция, но и все ее частные производные до порядка l включительно. Например, при $l = 2$ имеем:

$$||u||^2_{W_2^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left[|u(x)|^2 + |\nabla u|^2 + \sum_{k,j=1}^{m} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right|^2 \right] d\Omega.$$

Определение 2.4.3. *Если частные производные $u(x)$ суммируются с квадратом по Ω, то эти производные для данной $u(x)$ называют обобщенными.* $\square$

В приложениях большую роль играют следующие две теоремы С. Л. Соболева.

Теорема 2.4.2. *Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, имеющей кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$ с ненулевыми внутренними и внешними углами, имеет место вложение*

$$W_2^1(\Omega) \subset\!\to\subset\!\to L_2(\Omega).$$

Теорема 2.4.3. *Для произвольной области Ω с кусочно-гладкой $\partial\Omega$ имеет место свойство: оператор следа γ компактен, т.е.*

$$\gamma : W_2^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega), \ \gamma \in \mathfrak{S}_\infty. \qquad \square$$

Здесь оператор следа $\gamma : W_2^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ определен по закону

$$\gamma u := u(x)|_{\partial\Omega},$$

т.е. для любой функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ он сопоставляет $u(x)$ ее след на $\partial\Omega$.

Доказательства этих теорем здесь не приводятся. $\square$

Замечание 2.4.1. Аналогом вышеприведенных теорем являются также следующие факты при целых $k > m \geqslant 0$:

$$W_2^k(\Omega) \subset\!\to\subset\!\to W_2^m(\Omega), \ \gamma : W_2^k(\Omega) \to W_2^m(\partial\Omega), \quad \gamma \in \mathfrak{S}_\infty. \qquad \square$$

2.4.3 Эквивалентные нормы в пространствах Соболева

В задачах математической физики часто встречается ситуация, когда энергетическая норма не совпадает, но эквивалентна норме одного из соболевских пространств. Это обстоятельство позволяет с использованием теорем вложения Соболева устанавливать факт дискретности спектра основного оператора задачи.

Определение 2.4.4. *Говорят, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в банаховом пространстве E эквивалентны, если существуют $0 < c_1 \leqslant c_2$ такие, что при любом $u \in E$*

$$c_1\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant c_2\|u\|_2. \qquad \square$$

Нормы, которые были введены выше для пространств $W_2^l(\Omega)$, называют *стандартными нормами.* Можно, однако, ввести достаточно много эквивалентных норм. Приведем один общий результат такого рода.

Теорема 2.4.4. *Пусть $l(u)$ – линейный ограниченный функционал в пространстве $W_2^1(\Omega)$, для которого*

$$l(u_0) \neq 0, \quad u_0 = u_0(x) \equiv 1. \tag{2.39}$$

Тогда норма

$$||u||_{1,\Omega}^2 := \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega + |l(u)|^2 \tag{2.40}$$

эквивалентна стандартной норме $W_2^1(\Omega)$. $\square$

Упражнение 2.4.5. Показать, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 \leqslant c\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad c > 0. \qquad \square \tag{2.41}$$

Доказательство теоремы 2.4.4. Установим неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leqslant c_2^2 \|u\|_{1,\Omega}^2 \tag{2.42}$$

дающее вместе с неравенством (2.41) при $c_1^2 = c^{-1}$ утверждение об эквивалентности норм $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Допустим противное. Тогда существует такая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_2^1(\Omega)$, для которой

$$\|u_n\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \geqslant n^2 \|u_n\|_{1,\Omega}^2. \tag{2.43}$$

Поэтому для элементов $v_n := u_n / \|u_n\|_{W_2^1(\Omega)}$ имеем

$$\|v_n\|_{W_2^1(\Omega)} = 1, \quad \|v_n\|_{1,\Omega}^2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \, d\Omega + |l(v_n)|^2 \leqslant \frac{1}{n^2}. \tag{2.44}$$

Так как последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $W_2^1(\Omega)$, то по первой теореме вложения Соболева, т.е. теореме 2.4.2, она компактна в $L_2(\Omega)$, и потому из $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $v_*(x) \in L_2(\Omega)$.

Из (2.44) для элементов выделенной подпоследовательности получаем, что $|\nabla v_{n_k}(x)| \to 0$ почти всюду в $L_2(\Omega)$, $|l(v_{n_k})| \to 0$ $(k \to \infty)$.

Отсюда предельным переходом при $k \to \infty$ устанавливается, что $v_*(x)$ имеет обобщенные производные по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$, которые равны нулю почти всюду в области Ω. Но тогда $v_*(x) = \mathrm{const} := C$. Так как $l(C) = Cl(1)$ и по условию $l(1) \neq 0$, то в силу свойства $\lim\limits_{k\to\infty} l(v_{n_k}) = 0 = Cl(1)$ получаем, что $C = 0$ и потому $v_*(x) \equiv 0 \in W_2^1(\Omega)$. Это противоречит соотношениям

$$\lim_{k\to\infty} \|v_{n_k}\|_{W_2^1(\Omega)} = 1 = \|v_*\|_{W_2^1(\Omega)}. \qquad \square$$

Упражнение 2.4.6. Доказать, что норма

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \left(\int\limits_\Omega u\, d\Omega \right)^2 \tag{2.45}$$

эквивалентна стандартной норме $W_2^1(\Omega)$ и отсюда получить неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_\Omega |u|^2\, d\Omega \leqslant c \left[\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \left(\int\limits_\Omega u\, d\Omega \right)^2 \right]. \qquad \square \tag{2.46}$$

Упражнение 2.4.7. Доказать, что норма

$$||u||_{1,\Omega}^2 := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \left(\int\limits_\Gamma u\, d\Gamma \right)^2, \tag{2.47}$$

где $\Gamma \subset \partial\Omega$ – произвольное множество положительной меры в $\mathbb{R}^{m-1}$, эквивалентна стандартной норме пространства $W_2^1(\Omega)$. $\square$

2.5 Максиминимальный принцип

Как было установлено в параграфе 2.3, собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(A)$ оператора $A \gg 0$, имеющего дискретный спектр, суть последовательные инфимумы, а точнее, последовательные минимумы отношения $\|u\|_A^2/\|u\|^2$, рассматриваемого на подпространствах $\mathcal{H}_A^{(k-1)}$ энергетического пространства $\mathcal{H}_A$.

При этом для нахождения $\lambda_k(A)$ и отвечающего ему собственного элемента $u_k(A)$ необходимо знать все собственные элементы $u_j(A)$ с номерами $j = 1, \dots, k-1$. Имеется, однако, и иной подход, позволяющий определить собственные значения $\lambda_k(A)$ без предварительного знания $\lambda_j(A)$ и $u_j(A)$ для $j = 1, \ldots, k-1$.

2.5.1 Максиминимальный принцип Куранта

Пусть $v_1, \ldots, v_{k-1}$ – линейно независимые и совершенно произвольные, но фиксированные элементы из $\mathcal{H}$. Рассмотрим задачу о нахождении инфимума (минимума) функционала

$$\varphi(u) := \|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1, \tag{2.48}$$

при дополнительных условиях

$$(u, v_j) = 0, \ j = 1, \ldots, k-1. \tag{2.49}$$

Множество элементов $u \in \mathcal{H}_A$, удовлетворяющих условиям (2.48), (2.49), обозначим через $M_k = M_k(v_1, \ldots, v_{k-1})$, а решение поставленной задачи – через

$$\lambda = \lambda(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1. \tag{2.50}$$

Упражнение 2.5.1. Доказать, что $M_k \subset \mathcal{H}_A$ есть подпространство *коразмерности* $k-1$.

Указание. Воспользоваться теоремой Рисса об общем виде линейного функционала в $\mathcal{H}_A$, представлениями

$$0 = (u, v_j) = (u, w_j)_A, \quad j = 1, \ldots, k-1, \ \forall u \in \mathcal{H}_A, \tag{2.51}$$

а также свойством линейной независимости элементов v_j в $\mathcal{H}$. □

Теорема 2.5.1 (максиминимальный принцип Р. Куранта)**.** *Собственное значение λ_k оператора A с дискретным спектром равно максимальному значению, которое может принять*

$$\min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2 = \lambda(v_1, \ldots, v_{k-1}), \quad \|u\| = 1,$$

если варьировать набор элементов $\{v_j\}_{j=1}^{k-1} \subset \mathcal{H}$. Это максимальное значение минимумов $\lambda(v_1, \ldots, v_{k-1})$ достигается при $u = u_k$, $v_j = u_j, j = 1, \ldots, k-1$, где $\{u_j\}_{j=1}^{k-1}$ – первые $k-1$ собственных элементов оператора A:

$$\lambda_k = \max_{M_k} \min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2, \ k = 1, 2, \ldots, \quad \|u\| = 1. \tag{2.52}$$

Доказательство. 1^0. Заметим прежде всего, что при $v_j = u_j$, $j = 1, \ldots, k-1$, имеем $\lambda_k = \lambda(u_1, \ldots, u_{k-1})$. Действительно, в этом случае $\lambda(u_1, \ldots, u_{k-1})$ есть минимум функционала $\|u\|_A^2, \quad \|u\| = 1$, при дополнительных условиях

$$(u, u_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1. \tag{2.53}$$

Однако этот факт уже ранее был установлен в основной спектральной теореме из параграфа 2.2. Таким образом, если в (2.52) в качестве M_k выбрать $M_k = M_k(u_1, \ldots, u_{k-1})$, то на этом подпространстве из $\mathcal{H}_A$ достигается максимальное значение $\min\limits_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2$.

2^0. Продолжая доказательство теоремы, установим, что

$$\lambda(v_1, \ldots, v_{k-1}) \leqslant \lambda_k \tag{2.54}$$

при произвольно выбранных $v_1, \ldots, v_{k-1}$ из $\mathcal{H}$.

Пусть u – произвольный элемент из $\mathcal{H}_A$. Так как система элементов $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$, то $u = \sum_{m=1}^{\infty}(u, u_m)u_m$. Элементы v_j также разложим в ряды по базису, имеем

$$v_j = \sum_{m=1}^{\infty}(v_j, u_m)u_m = \sum_{m=1}^{\infty} b_{jm}u_m, \quad j = 1, \ldots, k-1. \tag{2.55}$$

Далее достаточно выбрать лишь элементы $u = \tilde{u} = \sum_{m=1}^{k} a_m u_m \in M_k$ с произвольными коэффициентами a_m и такие, которые удовлетворяют лишь условиям ортогональности (2.49). Эти условия дают соотношения

$$0 = (\tilde{u}, v_j) = \left(\sum_{m=1}^{k} a_m u_m, \sum_{n=1}^{\infty} b_{jn}u_n\right) = \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} a_m b_{jn}(u_m, u_n) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} a_m b_{jm}, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

которые представляют собой систему $k-1$ линейных уравнений относительно k неизвестных a_m. Поэтому данная система имеет бесконечное множество решений, из них хотя бы одно можно выбрать так, чтобы $\|\tilde{u}\|^2 = \sum_{m=1}^{k}|a_m|^2 = 1$.

Для такого элемента $\tilde{u}$ имеем

$$\|\tilde{u}\|_A^2 = \sum_{m=1}^{k}\lambda_m|a_m|^2 \leqslant \lambda_k \sum_{m=1}^{k}|a_m|^2 = \lambda_k.$$

Так как по построению $\tilde{u} \in M_k(v_1, \dots, v_{k-1})$, то отсюда получаем

$$\min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2 \leqslant \|\tilde{u}\|_A^2 \leqslant \lambda_k,$$

и поэтому

$$\max_{M_k} \min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2 \leqslant \lambda_k. \tag{2.56}$$

Как уже упоминалось в начале доказательства теоремы, левая часть (2.56) совпадает с правой при $M_k = M_k(u_1, \dots, u_{k-1})$.

Теорема доказана полностью. □

2.5.2 Теорема о монотонности спектра

Из максиминимального принципа Куранта вытекает важная теорема, позволяющая во многих случаях сравнивать собственные значения двух операторов.

Определение 2.5.1. *Пусть $A \gg 0$, $B \gg 0$. Будем говорить, что A не меньше B и записывать это в виде $A \geqslant B$, если: 1) любой элемент $\mathcal{H}_A$ принадлежит также $\mathcal{H}_B$, т.е. $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_B$; 2) для любого элемента $u \in \mathcal{H}_A$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_A^2 \geqslant \|u\|_B^2. \tag{2.57}$$

Теорема 2.5.2 (о монотонности спектра). *Пусть выполнены условия: 1) $A \geqslant B$; 2) $\mathcal{H}_A \subset_{\rightarrow}\subset_{\rightarrow} \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_B \subset_{\rightarrow}\subset_{\rightarrow} \mathcal{H}$. Тогда*

$$\lambda_k(A) \geqslant \lambda_k(B), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.58}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что операторы A и B имеют дискретный спектр. Далее, так как

$$\|u\|_A^2 \geqslant \|u\|_B^2, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}_A, \quad \|u\| = 1,$$

то и

$$\max_{M_k} \min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2 \geqslant \max_{M_k} \min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_B^2, \quad \|u\| = 1, \tag{2.59}$$

где $M_k = M_k(v_1, \dots, v_{k-1})$.

В самом деле, из условия $\|u\|_A^2 \geqslant \|u\|_B^2$ $(u \in M_k)$ следует, что

$$\|u\|_A^2 \geqslant \|u\|_B^2 \geqslant \min_{u \in M_k} \|u\|_B^2.$$

Тогда и
$$\min_{u\in M_k}\|u\|_A^2 \geqslant \min_{u\in M_k}\|u\|_B^2.$$
Отсюда
$$\max_{M_k}\min_{u\in M_k}\|u\|_A^2 \geqslant \min_{u\in M_k}\|u\|_A^2 \geqslant \min_{u\in M_k}\|u\|_B^2,$$
значит
$$\max_{M_k}\min_{u\in M_k}\|u\|_A^2 \geqslant \max_{M_k}\min_{u\in M_k}\|u\|_B^2.$$

Из (2.59) и из максиминимального принципа Куранта получаются неравенства (2.58). □

Замечание 2.5.1. Часто теоремой о монотонности спектра пользуются для установления *двусторонних оценок* собственных значений оператора A. Пусть имеется связь $A' \leqslant A \leqslant A''$ и, например, $\mathcal{D}(A') = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A'')$. Если, кроме того, $\mathcal{H}_{A'} \subset\!\!\!\to\!\subset\!\!\!\to \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_A \subset\!\!\!\to\!\subset\!\!\!\to \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{A''} \subset\!\!\!\to\!\subset\!\!\!\to \mathcal{H}$, то по предыдущему получаем
$$\lambda_k(A') \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \lambda_k(A''), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.60}$$
На практике операторы A' и A'' для данного оператора A стараются подобрать таким образом, чтобы для этих операторов собственные значения находились достаточно легко. □

В следующих параграфах будут приведены примеры различных задач математической физики, для которых собственные значения допускают двусторонние оценки.

2.5.3 Спектральная задача с двумя положительными операторами

Очень часто при исследовании конкретных задач о колебаниях консервативных систем с бесконечным числом степеней свободы возникает спектральная задача вида
$$Au = \lambda Bu, \tag{2.61}$$
которая обобщает обсуждавшуюся до сих пор стандартную задачу
$$Au = \lambda u, \tag{2.62}$$
получающуюся из (2.61) при $B = I$, где I – единичный оператор.

Будем далее предполагать, что для операторов A и B, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, выполнены следующие условия

1^0. $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$.

2^0. $A \gg 0$, $B \gg 0$.

3^0. $\mathcal{H}_A \subset_{\rightarrow}\subset_{\rightarrow} \mathcal{H}_B$.

Исследование задачи (2.61) при предположениях $1^0 - 3^0$ представляем провести самостоятельно путем решения следующих упражнений.

Упражнение 2.5.2. Доказать, что собственные значения λ задачи (2.61) положительны, а собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $\mathcal{H}_A$, так и в $\mathcal{H}_B$. $\square$

Упражнение 2.5.3. Доказать, что если $\mathcal{H}_A \subset_{\rightarrow}\subset_{\rightarrow} \mathcal{H}_B$, то задача (2.61) имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, а соответствующая система собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный в $\mathcal{H}_B$ и ортогональный в $\mathcal{H}_A$ базис:

$$(u_k, u_j)_B = \delta_{kj}, \quad (u_k, u_j)_A = \lambda_k \delta_{kj}. \qquad \square \tag{2.63}$$

Упражнение 2.5.4. Собственные значения λ_k суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\|u\|_A^2 / \|u\|_B^2,$$

рассматриваемого на подпространствах $\mathcal{H}_A^{(k-1)}$ элементов из $\mathcal{H}_A$, ортогональных в $\mathcal{H}_B$ (либо в $\mathcal{H}_A$) к первым $k-1$ собственным элементам $u_1, \ldots, u_{k-1}$. Доказать эти факты. $\square$

Упражнение 2.5.5. Доказать, что для собственных значений λ_k задачи (2.61) справедлив максиминимальный принцип Куранта:

$$\lambda_k = \max_{M_k} \min_{0 \neq u \in M_k} \|u\|_A^2 / \|u\|_B^2, \tag{2.64}$$

где M_k – подпространство в $\mathcal{H}_B$, состоящее из элементов, ортогональных в $\mathcal{H}_B$ к произвольным линейно независимым элементам $v_1, \ldots, v_{k-1}$ из $\mathcal{H}_B$. $\square$

Определение 2.5.2. *Будем говорить, что A_2 не меньше A_1 в $\mathcal{H}_B$ ($A_2 \geqslant A_1$ в $\mathcal{H}_B$), если $\mathcal{H}_{A_2} \subset \mathcal{H}_{A_1} \subset \mathcal{H}_B$ и для любого элемента $u \in \mathcal{H}_{A_2}$ справедливо неравенство $\|u\|_{A_2}^2 \geqslant \|u\|_{A_1}^2$.* $\square$

Упражнение 2.5.6. Сформулируйте и докажите теорему о монотонности спектра для уравнения (2.61). $\square$

Упражнение 2.5.7. Пусть A, A_1, B, B_1 – положительно определенные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем $A \geqslant A_1$, $B \leqslant B_1$.

Тогда, если спектр уравнения

$$A_1 u = \lambda B_1 u \tag{2.65}$$

дискретен, то и спектр уравнения

$$Au = \tilde{\lambda} Bu \tag{2.66}$$

также дискретен, а собственные значения λ_k и $\tilde{\lambda}_k$ этих задач связаны соотношениями

$$\lambda_k \leqslant \tilde{\lambda}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.67}$$

Указание. Опираясь на свойства $A \geqslant A_1$ и $B \leqslant B_1$, доказать, что всякое множество, ограниченное в $\mathcal{H}_A$, компактно в $\mathcal{H}_B$; по пути использовать аналогичное свойство для задачи (2.65). Далее использовать теорему о монотонности спектра применительно к задачам (2.65) и (2.66). $\square$

2.6 Процесс Ритца в задаче на собственные значения

Для нахождения решений задачи на собственные значения $Au = \lambda u$ либо задачи $Au = \lambda Bu$, если они имеют дискретный спектр, можно, как и в случае уравнения $Au = f$, применить метод Ритца.

Напомним, что если оператор A имеет дискретный спектр, то его собственные значения суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$\lambda_k = \min_{0 \neq u \in \mathcal{H}_A^{(k-1)}} \|u\|_A^2, \quad \|u\|^2 = 1, \tag{2.68}$$

где $\mathcal{H}_A^{(k-1)}$ – подпространство пространства $\mathcal{H}_A$, ортогональное (в $\mathcal{H}_A$ либо в $\mathcal{H}$) к собственным элементам $\{u_j\}_{j=1}^{k-1}$, оператора A.

2.6.1 Общая схема процесса Ритца

Рассмотрим задачу о приближенном нахождении собственных элементов и собственных значений оператора A с дискретным спектром. Выберем, как и в параграфе 1.6, последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ координатных элементов, т.е. элементов, удовлетворяющих трем условиям:

1) $\varphi_k \in \mathcal{H}_A,\ k \in \mathbb{N}$; 2) при любом $n \in \mathbb{N}$ элементы $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы; 3) последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ полна в $\mathcal{H}_A$.

Будем разыскивать решения задачи (2.68) в виде

$$u = u^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \tag{2.69}$$

и подберем коэффициенты Ритца $\{a_k\}_{k=1}^n$ так, чтобы $\|u^{(n)}\|^2 = 1$ и чтобы $\|u^{(n)}\|_A^2$ была *минимальна*. Получим задачу о минимуме функции n переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\|u^{(n)}\|_A^2 = \sum_{k,m=1}^n a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m)_A \tag{2.70}$$

при дополнительном условии

$$\|u^{(n)}\|^2 = \sum_{k,m=1}^n a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1. \tag{2.71}$$

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, рассмотрим задачу на безусловный экстремум для квадратичной формы

$$\begin{aligned} F(u^{(n)}) :&= \|u^{(n)}\|_A^2 - \lambda \|u^{(n)}\|^2 = \\ &= \sum_{k,m=1}^n a_k a_m \left((\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Здесь λ пока – неопределенный множитель Лагранжа, играющий роль, как это будет ясно из дальнейшего, собственного значения.

В точке экстремума производные $\partial F / \partial a_m$ должны равняться нулю, эти условия приводят к системе уравнений

$$2 \sum_{k=1}^n a_k \left((\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right) = 0 \quad m = 1, \ldots, n. \tag{2.73}$$

Данная система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$\det \left((\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right)_{k,m=1}^n = 0, \tag{2.74}$$

т.е. числа λ должны быть корнями характеристического уравнения (2.74).

Лемма 2.6.1. *Уравнение (2.74) имеет в точности n корней, которые являются вещественными и положительными.*

Доказательство. 1^0. Так как элементы $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, то их определитель Грама $\det\left((\varphi_k,\varphi_m)\right)_{k,m=1}^n \neq 0$; именно этот множитель стоит в уравнении (2.74) при λ^n. В то же время свободный член этого многочлена есть $\det\left((\varphi_k,\varphi_m)_A\right)_{k,m=1}^n \neq 0$. Отсюда следует, что левая часть уравнения (2.74) есть в точности многочлен n–ой степени, причем $\lambda = 0$ не является его корнем.

2^0. По основной теореме алгебры получаем, что уравнение имеет ровно n (с учетом кратности) корней. Так как $A \gg 0$, то матрица Грама $A^{(n)} := \left((\varphi_k,\varphi_m)_A\right)_{k,m=1}^n$ – положительно определенная, аналогичным свойством обладает и матрица Грама $I^{(n)} := \left((\varphi_k,\varphi_m)\right)_{k,m=1}^n$. Отсюда следует, что решения уравнения (2.74), совпадающие с собственными значениями задачи

$$\left(A^{(n)} - \lambda I^{(n)}\right) v^{(n)} = 0, \quad v^{(n)} := (a_1,\ldots,a_n)^t, \tag{2.75}$$

вещественны и положительны. $\square$

Расположим корни уравнения (2.74) в порядке неубывания:

$$0 < \lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^{(n)}. \tag{2.76}$$

Пусть λ_0 – какой-либо из этих корней. Тогда при $\lambda = \lambda_0$ система (2.73) имеет нетривиальное решение $\{a_k^0\}_{k=1}^n$, которое можно найти с точностью до произвольного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы выполнялось соотношение

$$\|u_0^{(n)}\|^2 = \|\sum_{k=1}^n a_k^0\varphi_k\|^2 = \sum_{k,m=1}^n a_k^0 a_m^0(\varphi_k,\varphi_m) = 1. \tag{2.77}$$

Подставляя $\lambda = \lambda_0$, $a_k = a_k^0$, $k = 1,\ldots,n$, в соотношения (2.73), умножая каждое уравнение на a_m^0 и суммируя по m, получим

$$\begin{gathered}\sum_{k,m=1}^n a_k^0 a_m^0(\varphi_k,\varphi_m)_A = \|u_0^{(n)}\|_A^2 = \\ = \lambda_0 \sum_{k,m=1}^n a_k^0 a_m^0(\varphi_k,\varphi_m) = \lambda_0.\end{gathered} \tag{2.78}$$

Таким образом, *минимум функционала $\|u^{(n)}\|_A^2$ реализуется на одном из приближенных решений*, и потому этот минимум равен наименьшему собственному значению $\lambda_1^{(n)}$.

2.6.2 Теорема о наименьшем собственном значении

Рассмотрим теперь процесс, когда $n \to \infty$. Так как при возрастании n минимум функционала $\|u^{(n)}\|_A^2$ разыскивается на все более широком множестве, то $\lambda_1^{(n)}$ не возрастает. С другой стороны, последовательность $\{\lambda_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу числом

$$d := \inf_{0 \neq u \in \mathcal{H}_A} \|u\|_A^2 / \|u\|^2 > 0. \tag{2.79}$$

Значит, последовательность $\lambda_1^{(n)}$ имеет предел, который не меньше $d > 0$.

Теорема 2.6.1. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_1^{(n)} = d =: \lambda_1(A). \tag{2.80}$$

Доказательство. 1^0. По определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $u' \in \mathcal{H}_A$, что $\|u'\|^2 = 1$, $d \leqslant \|u'\|_A^2 < d + \varepsilon$. Отсюда

$$\sqrt{d} \leqslant \|u'\|_A < \sqrt{d + \varepsilon}.$$

В силу полноты системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}_A$ найдется элемент $u'_N := \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_k$ такой, что $\|u' - u'_N\|_A < \sqrt{\varepsilon}$. Тогда

$$\|u'_N\|_A = \|(u'_N - u') + u'\|_A < \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{d + \varepsilon}$$

и потому

$$\|u'_N\|_A^2 < \left(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{d + \varepsilon}\right)^2. \tag{2.81}$$

2^0. Оценим теперь снизу $\|u'_N\|$; имеем в силу (2.79)

$$\|u'_N - u'\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{d}} \|u'_N - u'\|_A < \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Поэтому

$$\|u'_N\| = \|(u'_N - u') + u'\| \geqslant \|u'\| - \|u'_N - u'\| > 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}. \tag{2.82}$$

3^0. Так как $\lambda_1^{(N)}$ есть минимум отношения вида $\|u'_N\|_A^2 / \|u'_N\|^2$, то в силу (2.81) и (2.82)

$$
\begin{aligned}
d \leqslant \lambda_1^{(N)} \leqslant \frac{\|u_N'\|_A^2}{\|u_N'\|^2} < \frac{\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{d+\varepsilon}\right)^2}{\left(1-\sqrt{\varepsilon/d}\right)^2} =: \\
=: d+\alpha(\varepsilon), \quad \alpha(\varepsilon)\to 0 \ (\varepsilon \to 0).
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует утверждение теоремы. □

2.6.3 Процесс Ритца для последующих собственных значений

Займемся теперь вопросом о том, как найти собственные значения $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ по методу Ритца. По-видимому, для нахождения приближенного значения для числа λ_k нужно разыскивать минимум функционала $\|u^{(n)}\|_A^2$ при дополнительных условиях

$$
\|u^{(n)}\|^2 = 1, \quad (u^{(n)}, u_j^{(n)}) = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{2.84}
$$

где $\{u_j^{(n)}\}_{j=1}^{k-1}$ – уже найденные приближенные собственные элементы оператора A, отвечающие собственным значениям $\lambda_j^{(n)}, \quad j = 1, \ldots, k-1$.

Рассмотрим для определенности процесс Ритца приближенного нахождения собственного значения λ_2. Снова применяя метод неопределенных множителей Лагранжа для учета дополнительных условий (2.84), приходим к квадратичной форме

$$
F(u^{(n)}) := \|u^{(n)}\|_A^2 - \lambda\|u^{(n)}\|^2 - 2\mu(u^{(n)}, u_1^{(n)}), \tag{2.85}
$$

где множители λ и μ подлежат определению. Приравнивая нулю производные по a_m, получаем взамен (2.73) систему уравнений

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\{a_k\left[(\varphi_k,\varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k,\varphi_m)\right] - \mu(\varphi_k,\varphi_m)a_k^1\} = 0, \\
m = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

где a_k^1 – коэффициенты Ритца для $u_1^{(n)}$.

Покажем, что в (2.86) на самом деле $\mu = 0$. Для этого умножим каждое уравнение (2.86) на a_m^1 и просуммируем по m, получим

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m^1 \left[(\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right] - \mu \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^1 a_m^1 = 0. \quad (2.87)$$

Так как в силу нормировки

$$\sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^1 a_m^1 = 1 \quad (2.88)$$

и для $u_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^1 \varphi_k$ справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^1 \left[(\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda_1^{(n)}(\varphi_k, \varphi_m)\right] = 0, \quad m = 1, \ldots, n, \quad (2.89)$$

то после перемены местами индексов суммирования в (2.87) получим с учетом (2.88), (2.89), (2.84):

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_m a_k^1 \left[(\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right] - \mu \sum_{k,m=1}^{n} a_k^1 a_m^1 (\varphi_k, \varphi_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} a_k^1 \left[(\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right] - \mu =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} (\lambda_1^{(n)} - \lambda) a_k^1 (\varphi_k, \varphi_m) - \mu =$$

$$= (\lambda_1^{(n)} - \lambda)(u^{(n)}, u_1^{(n)}) - \mu = -\mu = 0. \quad (2.90)$$

Итак, при нахождении $\lambda_2^{(n)}$ множитель Лагранжа $\mu = 0$ и потому снова можно использовать функционал

$$F(u^{(n)}) = \|u^{(n)}\|_A^2 - \lambda \|u^{(n)}\|^2, \quad (2.91)$$

при этом $\lambda_2^{(n)}$ будет собственным значением, следующим за $\lambda_1^{(n)}$.

Замечание 2.6.1. Аналогично доказывается, что при нахождении всех последующих собственных значений $\lambda_k^{(n)}$, $k = 2, \ldots, n$, множители Лагранжа равны нулю (все, кроме λ), т.е. можно исходить из функционала (2.91). При этом числа $\lambda_k^{(n)}$ суть последовательные корни характеристического уравнения

$$\det\left((\varphi_k, \varphi_m)_A - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right)_{k,m=1}^{n} = 0; \tag{2.92}$$

тогда

$$0 < \lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^{(n)}. \tag{2.93}$$

Теорема 2.6.2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = \lambda_k(A). \tag{2.94}$$

Доказательство этого факта здесь не приводится.

Сформулируем итоговый результат этого параграфа в виде следующего утверждения.

Теорема 2.6.3. *Собственные значения $\lambda_k(A)$ и собственные элементы $u_k(A)$ оператора A с дискретным спектром можно найти приближенно, применяя процесс Ритца к функционалу*

$$F(u) = \|u\|_A^2 - \lambda\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{H}_A; \tag{2.95}$$

для собственных значений $\lambda_k^{(n)}$ этот процесс является сходящимся при $n \to \infty$ и имеют место формулы (2.94). $\square$

Замечание 2.6.2. Аналогичная теорема имеет место и для задачи $Au = \lambda Bu$ с дискретным спектром; здесь вместо (2.95) следует взять функционал

$$F(u) = \|u\|_A^2 - \lambda\|u\|_B^2, \quad u \in \mathcal{H}_A. \qquad \square \tag{2.96}$$

2.6.4 Упражнения

Здесь будут приведены примеры некоторых задач на использование процесса Ритца при нахождении собственных значений.

Упражнение 2.6.1. В задаче

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \\ a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0, \end{gathered} \tag{2.97}$$

получить формулы для вычисления матриц Ритца $((\varphi_k,\varphi_m)_A)_{k,m=1}^n$ и $((\varphi_k,\varphi_m))_{k,m=1}^n$ на основе координатной системы функций

$$\varphi_k(x) = \sin\left(\pi k \frac{x-a}{b-a}\right), \ k \in \mathbb{N}. \tag{2.98}$$

Обосновать законность выбора этой координатной системы при условиях

$$0 < p_0 \leqslant p(x) \in C^1([a,b]), \qquad 0 \leqslant q(x) \in C([a,b]). \qquad \square$$

Упражнение 2.6.2. В задаче

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(h(x_1,x_2)\nabla u) + q(x_1,x_2)u = \lambda r(x_1,x_2)u, \\ u = u(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in (0,a)\times(0,b) =: \Omega, \\ u(0,x_2) = u(a,x_2) = 0, \quad u(x_1,0) = u(x_1,b) = 0, \end{aligned} \tag{2.99}$$

получить формулы для вычисления матриц Ритца на основе координатной системы функций

$$\varphi_{kj}(x_1,x_2) = \sin\frac{\pi k x_1}{a}\sin\frac{\pi j x_2}{b}, \quad k,j \in \mathbb{N}. \tag{2.100}$$

Обосновать законность выбора этой координатной системы при условиях

$$0 < h_0 \leqslant h(x_1,x_2) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad 0 \leqslant q(x_1,x_2) \in C(\overline{\Omega}),$$
$$0 < r_0 \leqslant r(x_1,x_2) \in C(\overline{\Omega}). \qquad \square$$

Замечание 2.6.3. При обосновании законности выбора координатных систем в упражнениях 2.6.1 и 2.6.2 воспользоваться тем, что эти системы функций образуют ортогональный базис в пространствах, энергетическая норма в которых эквивалентна энергетической норме в указанных упражнениях. Из этого факта следует полнота системы координатных функций в энергетическом пространстве (докажите это!). $\square$

Глава 3

Приложения

3.1 Одномерные и многомерные спектральные задачи математической физики

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые типичные спектральные задачи математической физики, имеющие дискретный спектр и полную ортогональную систему собственных элементов. Рассмотрение начнем с наиболее простых одномерных задач для функций, заданных на конечном отрезке.

3.1.1 Задача Штурма-Лиувилля

Эта задача является математическим обобщением задачи о собственных колебаниях неоднородной струны, закрепленной на концах. Постановка задачи следующая: требуется найти нетривиальные решения $u(x)$ дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = \lambda r(x)u, \quad a < x < b, \tag{3.1}$$

и спектральный параметр λ, если дополнительно заданы краевые условия в точках $x = a$ и $x = b$. Обычно рассматривают три вида классических краевых условий:

а) Условия Дирихле (задача A):

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{3.2}$$

б) Условия Неймана (задача B):

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{3.3}$$

в) Условия Ньютона (задача C):

$$\begin{gathered} u'(a) - \alpha u(a) = 0,\ u'(b) + \beta u(b) = 0, \\ \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Возможны и другие варианты, когда на левом и правом концах выбираются различные условия вида а), б) или в).

В уравнении (3.1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ заданы и неотрицательны; далее предполагаем, что $p(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, а $q(x)$ и $r(x)$ – непрерывны на этом отрезке. Предполагаем также, что $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $r(x) \geqslant r_0 > 0$. С учетом вышесказанного получаем, что

$$p_1 \geqslant p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad q_1 \geqslant q(x) \geqslant q_0 \geq 0, \quad r_1 \geqslant r(x) \geqslant r_0 > 0. \tag{3.5}$$

Упражнение 3.1.1. Используя прием интегрирования по частям, проверить, что при любой $v(x) \in C^1[a, b]$ для решений $u(x) \in C^2[a, b]$ уравнения (3.1) выполнено тождество

$$\begin{gathered} \int\limits_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) \right] v(x)\, dx = \left(-p(x)u'(x)v(x) \right)_{x=a}^b + \\ + \int\limits_a^b \left[p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) \right] dx = \lambda \int\limits_a^b r(x)u(x)v(x)\, dx. \quad \square \end{gathered} \tag{3.6}$$

Покажем, что все три задачи Штурма-Лиувилля (3.1), (3.2) – (3.4) укладываются в общую схему спектральной задачи вида $Au = \lambda u$, где A — оператор с дискретным спектром, действующий в некотором гильбертовом пространстве. Особенностью этих трех задач является то обстоятельство, что в рассматриваемом случае в качестве основного гильбертового пространства $\mathcal{H}$ здесь естественно взять пространство $\mathcal{H} = L_2(a, b; r(x))$ с весом $r(x)$ и скалярным произведением

$$(u, v) := \int\limits_a^b r(x)u(x)v(x)\, dx; \tag{3.7}$$

такой вид скалярного произведения подсказывает правая часть в тождестве (3.6).

Закон, по которому должен действовать оператор A, заданный на плотном множестве в $\mathcal{H}$, получается из уравнения (3.1), если обе его части разделить на $r(x)$; тогда

$$Au(x) := \frac{1}{r(x)}\left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x)\right]. \tag{3.8}$$

Что касается выбора области определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A, то он обусловливается дифференциальным выражением (3.8) и краевыми условиями а), б) или в).

Далее для определенности рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля. Тогда

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in C^2([a,b]) : \quad u(a) = u(b) = 0\}. \tag{3.9}$$

Получим свойства решений задачи (3.1), (3.2) в процессе решения следующих ниже упражнений.

Упражнение 3.1.2. Опираясь на неравенства (3.5) для $r(x)$, доказать, что нормы в $L_2(a,b)$ и $L_2(a,b;r(x))$ эквивалентны. $\square$

Упражнение 3.1.3. Проверить, что оператор A, заданный выражением (3.8) на множестве $\mathcal{D}(A)$ (см. (3.9)), симметричен и положительно определен в $\mathcal{H} = L_2(a,b;r(x))$.

Указание. При установлении свойства $A \gg 0$ воспользоваться неравенством Пуанкаре. $\square$

Упражнение 3.1.4. Опираясь на неравенства (3.5), а также на неравенство Пуанкаре, установить, что энергетическая норма

$$\|u\|_A^2 := \int\limits_a^b \left[p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2\right]\,dx \tag{3.10}$$

эквивалентна стандартной норме

$$\|u\|^2_{W_2^1(a,b)} := \int\limits_a^b \left[|u'(x)|^2 + |u(x)|^2\right]\,dx \tag{3.11}$$

пространства $W_2^1(a,b)$. $\square$

Упражнение 3.1.5. Используя свойство эквивалентности норм в $L_2(a,b)$ и $L_2(a,b;r(x))$, а также норм (3.10) и (3.11), доказать, что

$$\mathcal{H}_A \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to \mathcal{H} = L_2(a,b;r(x)). \qquad \square \tag{3.12}$$

Следствием утверждений, приведенных в упражнениях 3.1.2–3.1.5, является

Теорема 3.1.1. *Задача Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля, т.е. задача (3.1), (3.2), имеет дискретный положительный спектр*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty \quad (k \to \infty), \tag{3.13}$$

и систему собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$*, полную и ортогональную в* $\mathcal{H} = L_2(a,b;r(x))$ *и* $\mathcal{H}_A$*, при этом выполнены следующие формулы ортогональности:*

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b r(x)u_k(x)u_j(x)\,dx &= \delta_{kj}, \\ \int\limits_a^b \left[p(x)u_k'(x)u_j'(x) + q(x)u_k(x)u_j(x)\right] dx &= \lambda_k\delta_{kj}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Доказательство утверждений теоремы следует из основной спектральной теоремы, так как $\mathcal{H}_A \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to \mathcal{H}$.

Убедимся теперь, что имеют место строгие неравенства (3.13), т.е. каждое собственное значение рассматриваемой задачи однократное. (Заметим, что такая ситуация типична для одномерных задач.)

Пусть какому-либо собственному значению λ_k отвечают две линейно независимые собственные функции $u_{k1}(x)$ и $u_{k2}(x)$. Для этих функций имеем $u_{k1}(a) = u_{k2}(a) = 0$, $u_{k1}'(a) \neq 0$, $u_{k2}'(a) \neq 0$. (Если положить равными нулю и производные, то по теореме единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка функции $u_{k1}(x)$ и $u_{k2}(x)$ тождественно равнялись бы нулю.) Рассмотрим функцию

$$u_k(x) := \frac{u_{k1}(x)}{u_{k1}'(a)} - \frac{u_{k2}(x)}{u_{k2}'(a)},$$

которая также является решением уравнения Штурма-Лиувилля при выбранном $\lambda = \lambda_k$. Имеем $u_k(a) = 0$, $u_k'(a) = 1 - 1 = 0$, и потому $u_k(x) \equiv 0$, т.е. $u_{k1}(x)$ и $u_{k2}(x)$ пропорциональны друг другу.

Простота (т.е. однократность) всех собственных значений λ_k, а вместе с этим и вся теорема в целом доказаны. $\square$

Упражнение 3.1.6. Опираясь на максиминимальный принцип Куранта и неравенства (3.5), установить, что для собственных значений λ_k задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля справедливы двусторонние оценки

$$\lambda_k' \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_k'', \tag{3.15}$$

где

$$\lambda_k' = \left[\frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2} p_0 + q_0\right] / r_1 \tag{3.16}$$

– собственные значения задачи

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{du}{dx}\right) + q_0 u(x) = \lambda r_1 u(x), \\ a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0, \end{gathered} \tag{3.17}$$

а

$$\lambda_k'' = \left[\frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2} p_1 + q_1\right] / r_0 \tag{3.18}$$

– собственные значения задачи

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{du}{dx}\right) + q_1 u(x) = \lambda r_0 u(x), \\ a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Указание. Воспользоваться неравенствами

$$\frac{\displaystyle\int_a^b \left[p_0 |u'(x)|^2 + q_0 |u(x)|^2\right] dx}{\displaystyle\int_a^b r_1 |u(x)|^2 \, dx} \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b \left[p(x) |u'(x)|^2 + q(x) |u(x)|^2\right] dx}{\displaystyle\int_a^b r(x) |u(x)|^2 \, dx} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b \left[p_1 |u'(x)|^2 + q_1 |u(x)|^2\right] dx}{\displaystyle\int_a^b r_0 |u(x)|^2 \, dx},$$

справедливыми для любой функции $u(x) \in \mathcal{H}_A$, а также максиминимальным принципом для собственных значений основной задачи и вспомогательных задач (3.17) и (3.19). □

Аналогично разбираются и два других вида классических краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля; это задачи (3.1), (3.3) и (3.1), (3.4). Обозначим операторы этих задач, которые задаются также дифференциальным выражением (3.8), символами B и C соответственно. Естественно выбрать

$$\mathcal{D}(B) := \{u(x) \in C^2([a,b]) : \quad u'(a) = u'(b) = 0\}, \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(C) := \{u(x) \in C^2([a,b]) : \quad u'(a) - \alpha u(a) = 0, \\ u'(b) + \beta u(b) = 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta > 0\}.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Упражнение 3.1.7. Опираясь на формулу (3.6), показать, что при $q(x) \geqslant q_0 > 0$ операторы B и C положительно определенные и

$$\begin{gathered}\|u\|_B^2 = \int_a^b \left[p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2\right] dx, \\ \mathcal{H}_B = \{u(x) : u'(x) \in L_2(a,b)\};\end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\begin{gathered}\|u\|_C^2 = \int_a^b \left[p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2\right] dx + \\ +\alpha p(a)|u(a)|^2 + \beta p(b)|u(b)|^2, \quad \mathcal{H}_C = \mathcal{H}_B. \quad \square\end{gathered} \tag{3.23}$$

Упражнение 3.1.8. Опираясь на эквивалентность норм в $L_2(a,b)$ и $L_2(a,b;r(x))$, а также на одномерные аналоги второй теоремы вложения Соболева (см. параграф 2.4), т.е. на формулы

$$|u(a)|^2 \leqslant c_1\|u\|^2_{W_2^1(a,b)}, \quad |u(b)|^2 \leqslant c_2\|u\|^2_{W_2^1(a,b)}, \tag{3.24}$$

установить эквивалентность норм в $\mathcal{H}_B$ и в $\mathcal{H}_C$ норме пространства $W_2^1(a,b)$ и, в силу этого, доказать свойства

$$\mathcal{H}_B \subset\to\subset\to \mathcal{H} = L_2(a,b;r(x)), \quad \mathcal{H}_C \subset\to\subset\to \mathcal{H}. \qquad \square \tag{3.25}$$

Следствием утверждений, сформулированных в упражнениях 3.1.7 и 3.1.8, является свойство дискретности спектра операторов B и C.

Упражнение 3.1.9. Опираясь на максиминимальный принцип для собственных значений операторов B и C, а также на формулы (3.22), (3.23), установить, что

$$\lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(C), \quad k \in \mathbb{N}. \qquad \square \tag{3.26}$$

Заметим теперь, что в задаче Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля

$$\mathcal{H}_A := \{u(x)\ :\ u'(x) \in L_2(a,b),\ u(a) = u(b) = 0\}, \tag{3.27}$$

и потому

$$\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_C \supset \mathcal{H}_A. \tag{3.28}$$

Если в граничных условиях Ньютона (3.28) осуществить предельный переход $\alpha \to +\infty$, $\beta \to +\infty$ (после предварительного деления на эти числа), то получим краевые условия задачи для оператора A. Отсюда и из (3.28) можно установить, что

$$\lambda_k(C) \leqslant \lambda_k(A), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Оказывается, для трех приведенных одномерных классических задач имеют место неравенства

$$\lambda_k(B) < \lambda_k(C) < \lambda_k(A), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Предоставляем читателю самостоятельно доказать при $k = 1$ свойства (3.30), опираясь на нестрогие неравенства (3.26), (3.29) и теорему единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, а также проверить эти свойства в приведенных ниже примерах–упражнениях.

Упражнение 3.1.10. Для уравнения

$$-u'' + u = \lambda u, \quad 0 < x < \pi, \tag{3.31}$$

получить решения задач:

A) $u(0) = u(\pi) = 0$;

B) $u'(0) = u'(\pi) = 0$;

C) $u(0) - u'(0) = 0, \quad u(\pi) + u'(\pi) = 0$.

Проверить, что для собственных значений этих задач выполнены соотношения (3.30). □

Упражнение 3.1.11. Убедиться, что собственные значения задачи (3.31) при условиях

A') $u(0) = u(\pi) = 0$;

B') $u(0) = u'(\pi) = 0$;

C') $u(0) = 0, \quad u(\pi) + u'(\pi) = 0$,

также связаны соотношениями вида (3.30). □

Упражнение 3.1.12. Доказать, что собственные значения задачи

$$-u'' = \lambda u, \quad a < x < b, \quad u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \tag{3.32}$$

монотонно возрастают при увеличении $\beta > 0$. $\square$

3.1.2 Три классические спектральные задачи математической физики

Рассмотрим в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задачу на собственные значения для уравнения Гельмгольца

$$-\Delta u + u = \lambda u, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega, \tag{3.33}$$

при трех типах классических краевых условий:

A) условие Дирихле:

$$u = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\,); \tag{3.34}$$

B) условие Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\,); \tag{3.35}$$

C) условие Ньютона:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0, \quad \sigma = \sigma(x) \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.36}$$

В последнем условии функция $\sigma(x)$ задана; будем считать, что она непрерывна на $\partial\Omega$.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле (3.33), (3.34).

Упражнение 3.1.13. В пространстве $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m,$$

для оператора A, действующего по закону

$$Au := -\Delta u + u,$$

задать естественным образом область определения $\mathcal{D}\,(A)$ для задачи Дирихле. Убедиться, что оператор A на $\mathcal{D}\,(A)$ симметричен и обладает свойством $A \gg 0$, а также доказать, что

$$\mathcal{H}_A \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to \mathcal{H} = L_2(\Omega). \quad \square$$

Упражнение 3.1.14. Введя область определения $\mathcal{D}(B)$ для задачи Неймана, доказать те же общие свойства для соответствующего оператора B. $\square$

Упражнение 3.1.15. Проверить, что для оператора C задачи (3.33), (3.36) также выполнены условие симметрии и свойства $C \gg 0$, $\mathcal{H}_C \subset\!\to\subset\!\to \mathcal{H}$, а

$$\|u\|_C^2 = \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u|^2\right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)|u(x)|^2\, dS. \qquad \square \tag{3.37}$$

Следствием из упражнений 3.1.13–3.1.15 является такой важный вывод.

Теорема 3.1.2. *Каждая из задач* (3.33), (3.34)–(3.36) *имеет дискретный спектр и полную и ортогональную в* $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ *и в соответствующих энергетических пространствах систему собственных элементов.* $\square$

Упражнение 3.1.16. Воспользовавшись тем, что

$$\mathcal{H}_A := \{u(x) \in W_2^1(\Omega)\ :\ u = 0 \quad (\text{ на } \partial\Omega\,)\} = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{3.38}$$

$$\mathcal{H}_B = W_2^1(\Omega) = \mathcal{H}_C, \tag{3.39}$$

а также неравенством

$$\|u\|_B^2 = \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u|^2\right] d\Omega \leqslant \|u\|_C^2, \tag{3.40}$$

установить, что

$$\lambda_1(B) \leqslant \lambda_1(C) \leqslant \lambda_1(A). \qquad \square \tag{3.41}$$

Упражнение 3.1.17. Доказать, что смешанная задача

$$\begin{gathered} Fu := -\Delta u + u = \lambda u \ (\text{ в } \Omega), \\ u = 0 \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega\backslash\Gamma\,), \end{gathered} \tag{3.42}$$

где Γ – произвольная часть границы $\partial\Omega$ (положительной меры), имеет дискретный спектр. Установить, что справедливы неравенства

$$\lambda_1(B) \leqslant \lambda_1(F) \leqslant \lambda_1(A). \qquad \square \tag{3.43}$$

Приведенные ниже примеры–упражнения позволяют использовать метод разделения переменных в спектральных задачах математической физики.

Пример 3.1.1. Решить задачу Дирихле

$$-\Delta u + u = \lambda u \ (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \ (\text{на } \partial\Omega),$$

в прямоугольнике

$$\Omega := \{(x, y) : \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b\} \subset \mathbb{R}^2. \qquad \square$$

Пример 3.1.2. Решить задачу Неймана

$$-\Delta u + u = \lambda u \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega),$$

в том же прямоугольнике. $\square$

Пример 3.1.3. Решить задачу Ньютона

$$-\Delta u + u = \lambda u \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0 \ (\text{на } \partial\Omega),$$

если Ω – та же область, причем $\sigma = 0$ на боковых стенках и нижней части границы $\partial\Omega$ области Ω, $\sigma = \sigma_0 > 0$ на верхней части границы. Убедиться, что собственные значения задачи монотонно зависят от $\sigma_0 > 0$. $\square$

Пример 3.1.4. Решить в той же области Ω задачу со смешанными краевыми условиями

$$-\Delta u + u = \lambda u \ (\text{в } \Omega),$$

$$u = 0 \ (\text{при } x = 0 \text{ и } x = a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad \text{а также при } \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ y = 0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{при } \ y = b, \ 0 \leqslant x \leqslant a).$$

Сравнить формулы для собственных значений во всех примерах и дать объяснение полученным выводам. $\square$

Аналогично рассматриваются трехмерные задачи в прямоугольном параллелепипеде, а также двумерные в прямоугольнике Ω с условиями Дирихле на боковых стенках и Неймана на днищах (и наоборот).

3.1.3 Спектральная задача для эллиптического оператора общего вида

Эллиптическим дифференциальным выражением называется выражение вида

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x)u, \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \tag{3.44}$$

где $(a_{ik}(x))_{i,k=1}^{m}$ – симметрическая положительно определенная матрица с переменными коэффициентами, $q(x) \geq 0$ – заданная функция точки $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$.

Далее предполагаем, что

$$a_{ki}(x) \equiv a_{ik}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad q(x) \geqslant q_0 > 0, \quad q(x) \in C(\overline{\Omega}). \tag{3.45}$$

Будем считать дополнительно, что выполнено условие равномерной эллиптичности:

$$c_1 \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2, \quad 0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty. \tag{3.46}$$

Очевидно, если

$$a_{ik}(x) \equiv \delta_{ik}, \quad q(x) \equiv 0, \tag{3.47}$$

то $-\mathcal{L}u = \Delta u$, т.е. превращается в обычный оператор Лапласа. Для эллиптической спектральной задачи

$$\mathcal{L}u = \lambda u \ (\text{в } \Omega\,) \tag{3.48}$$

можно, как и для оператора $-\Delta u + u$ или $-\Delta u$, ставить три вида краевых условий:

а) задача Дирихле:

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega; \tag{3.49}$$

б) задача Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\widehat{\vec{n}, x_k}) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.50}$$

в) задача Ньютона:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0, \quad \sigma = \sigma(x) \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.51}$$

Выражение $\partial u/\partial\nu$ называют производной по конормали к $\partial\Omega$.

Можно говорить также о смешанных краевых условиях, когда на одной части границы задается одно из условий а)–в), а на другой какие-либо иные из этих условий.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что при любых дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функциях $u(x)$ и $v(x)$ имеет место первая формула Грина для дифференциального выражения $\mathcal{L}$:

$$\int_\Omega (\mathcal{L}u)v\,d\Omega = L(u,v) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} v\,dS, \tag{3.52}$$

$$L(u,v) := \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} + q(x)uv\right] d\Omega. \tag{3.53}$$

Формулы (3.52), (3.45) и условие равномерной эллиптичности (3.46) позволяют, как и в п. 2, во всех трех спектральных задачах (3.48)–(3.51) (Дирихле, Неймана и Ньютона) установить, что соответствующие энергетические нормы эквивалентны стандартной норме пространства $W_2^1(\Omega)$, а потому каждая из этих задач имеет дискретный спектр. Имеют место также неравенства для собственных значений этих задач, аналогичные неравенствам (3.41). Можно установить также, опираясь на неравенства (3.46), двусторонние оценки для собственных значений эллиптических задач и соответствующих задач для оператора Лапласа из п.3.1.2.

Предоставляем возможность только что приведенные утверждения самостоятельно доказать читателю.

3.2 Продольные и поперечные колебания - стержня переменного сечения

Эта одномерная задача, несмотря на ее относительную простоту, интересна тем, что при наличии груза на одном из концов стержня она содержит спектральный параметр не только в уравнении, но и в граничном условии. Однако операторный подход, рассмотренный выше, применим и здесь после некоторого его видоизменения.

3.2.1 Постановка начально-краевой задачи о продольных колебаниях стержня

Рассмотрим неоднородный стержень, имеющий в ненагруженном состоянии длину l и расположенный вертикально, т.е. вдоль направления действия силы тяжести. В произвольной точке x стержня, $0 \leqslant x \leqslant l$, площадь поперечного сечения обозначим через $S(x)$, переменную плотность стержня – через $\rho(x)$, а модуль упругости – через $E(x)$.

При продольных колебаниях стержня под действием внешних сил в сечении с координатой x стержень испытывает продольное отклонение, которое обозначим через $u(t,x)$. Это и будет искомая функция в данной задаче.

Выведем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(t,x)$. Относительное удлинение стержня, т.е. величина продольного отклонения, приходящаяся на единицу длины стержня, в любой точке x равна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x). \tag{3.54}$$

По *закону Гука* для малых относительных отклонений *натяжение* $T(t,x)$ в точке x равно

$$T(t,x) = E(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.55}$$

На элемент стержня длины dx действует продольная сила, равная разности натяжений на его концах, т.е.

$$T(t,x+dx) - T(t,x) \approx dT(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx. \tag{3.56}$$

Эта сила по *закону Ньютона* равна произведению массы выделенной части стержня на ускорение частицы, т.е. величине

$$dx\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.57}$$

Отсюда приходим к уравнению продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3.58}$$

Замечание 3.2.1. Если в каждом сечении стержня с координатой x действует дополнительная продольная *объемная сила* $F(t,x)$, то в правую часть (3.58) вместо нуля следует подставить заданную функцию $f(t,x) := F(t,x)/\rho(x)$. Тогда соответствующее уравнение (3.58) будет описывать процесс вынужденных продольных колебаний стержня. $\square$

Перейдем теперь к описанию граничных условий на концах стержня $x = 0$ и $x = l$. Будем все время считать, что верхний конец стержня закреплен, т.е. его продольное отклонение в процессе колебаний равно нулю:

$$u(t,0) = 0. \tag{3.59}$$

На нижнем конце рассмотрим далее три вида краевых условий.

а) Жесткое закрепление

$$u(t,l) = 0. \tag{3.60}$$

б) Нижний конец стержня свободен, т.е. натяжение $T(t,x)$ на этом конце равно нулю:

$$E(l)S(l)\frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0. \tag{3.61}$$

в)На нижнем конце находится груз массой m. В этом случае имеем

$$-E(l)S(l)\frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l). \tag{3.62}$$

Замечание 3.2.2. Получим, опираясь на закон Ньютона, краевое условие (3.62). Для груза и части стержня длины dx, примыкающего к грузу, сила $T(t, l-dx)$ направлена вверх, а сила тяжести mg – вниз, тогда

$$-T(t,l-dx) + mg =: -E(l-dx)S(l-dx)\frac{\partial u}{\partial x}(t,l-dx) + mg =$$

$$= (m + \rho_{cp}S_{cp}\cdot dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x_c),$$

где x_c – координата центра тяжести выделенной части, а ρ_{cp} и S_{cp} – средние плотность и площадь этой части. При $dx \to 0$ в пределе имеем $x_c \to l$, и тогда

$$-E(l)S(l)\frac{\partial u}{\partial x}(t,l) + mg = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l).$$

Так как упругие силы часто являются главными в рассматриваемой задаче, то можно слева вторым слагаемым пренебречь. $\square$

Для полной постановки начально-краевой задачи о продольных колебаниях стержня необходимо в начальный момент времени задать исходные отклонения сечений стержня и их скорости:

$$u(0,x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x). \tag{3.63}$$

Таким образом, рассматриваемая задача состоит в решении дифференциального уравнения (3.58) при краевом условии (3.59), начальных условиях (3.63) и одном из трех краевых условий (3.60) – (3.62).

3.2.2 Собственные продольные колебания стержня с грузом на конце

Далее будем изучать лишь так называемые *собственные колебания стержня*, т.е. такие решения $u(t,x)$ начально-краевой задачи о продольных колебаниях, которые зависят от t по закону

$$u(t,x) = \cos\omega t\, u(x), \tag{3.64}$$

или

$$u(t,x) = \sin\omega t\, u(x); \tag{3.65}$$

можно также считать, что

$$u(t,x) = e^{i\omega t}\, u(x). \tag{3.66}$$

Здесь ω – неизвестная заранее *частота собственных колебаний* стержня, которая подлежит определению наряду с функцией $u(x)$. Можно показать, что суперпозицией решений приведенного выше вида можно приближенно представить решение $u(t,x)$ начально-краевой задачи. Исследования такого подхода выходят за рамки данного курса, и потому далее будем рассматривать лишь собственные колебания и возникающие при этом задачи на собственные значения.

Подставляя выражение (3.66) в уравнение (3.58) задачи о продольных колебаниях стержня, приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$-\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d}{dx}\left(E(x)S(x)\frac{du}{dx}\right) = \lambda u, \quad \lambda = \omega^2, \quad 0 < x < l. \tag{3.67}$$

Аналогично получаем граничное условие Дирихле на верхнем конце

$$u(0) = 0, \tag{3.68}$$

а также одному из трех краевых условий на нижнем конце:

$$1^0. \quad u(l) = 0; \tag{3.69}$$

$$2^0. \quad E(l)S(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l) = 0; \tag{3.70}$$

$$3^0. \quad E(l)S(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l) = \lambda m u(l). \tag{3.71}$$

Далее предполагаем, что функция $\rho(x)$ непрерывна на $[0, l]$, а $E(x)$ и $S(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на этом отрезке. Кроме того, считаем, что

$$0 < \rho_0 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_1, \quad 0 < E_0 \leqslant E(x) \leqslant E_1, \quad 0 < S_0 \leqslant S(x) \leqslant S_1. \tag{3.72}$$

Назовем соответственно три приведенные спектральные задачи с различными краевыми условиями на нижнем конце задачами 1^0, 2^0 и 3^0.

Скажем несколько слов о задачах 1^0 и 2^0. Прежде всего отметим, что задачи 1^0 и 2^0 являются задачами Штурма-Лиувилля, разобранными в параграфе 3.1. В самом деле, сравнение с уравнением (3.1) показывает, что уравнение (3.67) есть частный случай (3.1), когда

$$r(x) := \rho(x)S(x), \quad p(x) := E(x)S(x), \quad q(x) \equiv 0, \tag{3.73}$$

а краевые условия задач 1^0 и 2^0 совпадают с разобранными в параграфе 3.1 вариантами краевых условий Дирихле либо Неймана на нижнем конце и условием Дирихле – на верхнем. Поэтому для задач 1^0 и 2^0 справедливы все общие выводы, которые были получены в параграфе 3.1 для задачи Штурма-Лиувилля. Обозначая операторы задач 1^0 и 2^0 символами A_1 и A_2 соответственно, получаем, что каждая из этих задач имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A_1)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k(A_2)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно, причем имеют место неравенства

$$\lambda_k(A_2) < \lambda_k(A_1), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.74}$$

Отсюда следует, что частоты $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ собственных колебаний стержня при его жестком закреплении на нижнем конце больше соответствующих частот колебаний при свободном нижнем конце.

Наиболее интересной является задача 3^0 о продольных собственных колебаниях стержня с грузом на нижнем конце. Перейдем к ее подробному рассмотрению. Задача состоит в нахождении функций $u(x)$ и собственных значений λ следующей задачи:

$$-\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d}{dx}\left(E(x)S(x)\frac{du}{dx}\right) = \lambda u, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = 0, \tag{3.75}$$

$$\frac{1}{m}E(l)S(l)\frac{du}{dx}(l) = \lambda u(l), \quad \lambda = \omega^2.$$

Особенностью этой задачи является то, что здесь спектральный параметр λ входит не только в уравнение, но и в краевое условие при $x = l$. Применим к задаче (3.75) операторный подход, приспособленный к краевому условию, содержащему спектральный параметр λ.

Чтобы понять, какие пространства здесь выбрать в качестве основного гильбертова и соответственно энергетического, проведем следующие преобразования. Умножим уравнение (3.75) на $\rho(x)S(x)u(x)$, проинтегрируем от 0 до l, а затем по частям, и используем граничные условия на концах. Имеем

$$-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(E(x)S(x)\frac{du}{dx}\right)\cdot u(x)\,dx = -E(x)S(x)\frac{du}{dx}u(x)|_0^l + \tag{3.76}$$

$$+\int_0^l E(x)S(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx = -E(l)S(l)\frac{du}{dx}(l)u(l) + \int_0^l E(x)S(x)\left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx =$$

$$= \int_0^l E(x)S(x)\left|u'(x)\right|^2 dx - \lambda m|u(l)|^2 = \lambda\int_0^l \rho(x)S(x)|u(x)|^2\,dx.$$

Отсюда получаем выражение для собственных значений λ через собственные функции $u(x)$:

$$\lambda = \frac{\int_0^l E(x)S(x)\left|u'(x)\right|^2 dx}{\int_0^l \rho(x)S(x)|u(x)|^2\,dx + m|u(l)|^2}. \tag{3.77}$$

Здесь справа стоит вариационное отношение, которое, по-видимому, связано с квадратом энергетической нормы – в числителе, и с квадратом нормы в основном пространстве – в знаменателе.

Исходя из этих предварительных соображений, введем в качестве основного пространства $\mathcal{H}$ совокупность $\{\hat{u}\}$ элементов вида

$$\hat{u} := \{u(x),\ 0 < x < l; \quad u(l)\}, \tag{3.78}$$

а на этих элементах – скалярное произведение

$$(\hat{u}, \hat{v}) := \int_0^l \rho(x)S(x)u(x)v(x)\,dx + mu(l)v(l). \tag{3.79}$$

Упражнение 3.2.1. Опираясь на неравенства (3.72), доказать, что норма в $\mathcal{H}$, порожденная скалярным произведением (3.79), эквивалентна норме в пространстве $\hat{L}_2 := L_2(0,l) \oplus \mathbb{R}$:

$$\|\hat{u}\|^2_{\hat{L}_2} := \int\limits_0^l |u(x)|^2\,dx + |u(l)|^2. \qquad \square \tag{3.80}$$

Введем теперь в рассмотрение множество $\mathcal{D}(A_3) \subset \mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{D}(A_3) := \{\hat{u} \in \mathcal{H} : \quad u(x) \in C^2[0,l],\ u(0) = 0, \quad u(l) \in \mathbb{R}\}, \tag{3.81}$$

плотное в пространстве $\mathcal{H}$, и на этом множестве рассмотрим оператор A_3, действующий по закону

$$A_3\hat{u} := \{-\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d}{dx}\left(E(x)S(x)\frac{du}{dx}\right); \quad \frac{1}{m}E(l)S(l)\frac{du}{dx}(l)\}. \tag{3.82}$$

Тогда задача (3.75), т.е. уравнение и соответствующее краевое условие при $x = l$, может быть переписано в виде

$$A_3\hat{u} = \lambda\hat{u}, \quad \hat{u} \in \mathcal{D}(A_3) \subset \mathcal{H}. \tag{3.83}$$

Упражнение 3.2.2. Проверить, что оператор A_3 симметричен на $\mathcal{D}(A_3)$ и $A_3 \gg 0$. $\square$

Упражнение 3.2.3. Убедиться, используя неравенства (3.72), что энергетическая норма

$$\|\hat{u}\|^2_{A_3} := \int\limits_0^l E(x)S(x)|u'(x)|^2\,dx \tag{3.84}$$

эквивалентна стандартной норме пространства $W_2^1(0,l) \oplus \mathbb{R}$, т.е. норме

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(0,l)\oplus\mathbb{R}} := \int\limits_0^l \left[|u'(x)|^2 + |u(x)|^2\right]\,dx + |u(l)|^2. \qquad \square \tag{3.85}$$

Из упражнений 3.2.1–3.2.3 и теоремы о компактном вложении

$$V : W_2^1(0,l) \oplus \mathbb{R} \to L_2(0,l) \oplus \mathbb{R}$$

следует, что

$$\mathcal{H}_{A_3} \subset\!\!\to\subset\!\!\to \mathcal{H}. \tag{3.86}$$

Отсюда и из основной теоремы о спектре получаем такой важный вывод.

Теорема 3.2.1. *Задача* 3^0 *о продольных собственных колебаниях стержня с грузом на конце имеет дискретный спектр*

$$\{\lambda_k(A_3)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \lambda_k = \omega_k^2,$$

а также систему собственных элементов $\hat{u}_k := \{u_k(x); u_k(l)\}_{k=1}^{\infty}$, *образующих ортогональный базис в* $\mathcal{H}_{A_3}$ *и ортонормированный в* $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} (\hat{u_k}, \hat{u_j}) &:= \int\limits_0^l \rho(x)S(x)u_k(x)u_j(x)\,dx + mu_k(l)u_j(l) = \delta_{kj}, \\ (\hat{u_k}, \hat{u_j})_{A_3} &:= \int\limits_0^l \rho(x)S(x)u_k'(x)u_j'(x)\,dx = \lambda_k(A_3)\delta_{kj}. \qquad \Box \end{aligned} \tag{3.87}$$

Докажем еще одно свойство решений задачи 1^0, связывающее их с решениями задач 1^0 и 2^0.

Теорема 3.2.2. *Для собственных значений задач* 3^0, 2^0 *и* 1^0 *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &\lambda_1(A_3) < \lambda_1(A_2) < \lambda_1(A_1) < \ldots < \\ &< \lambda_k(A_3) < \lambda_k(A_2) < \lambda_k(A_1) < \ldots \end{aligned} \tag{3.88}$$

Доказательство. Установим сначала, что

$$\lambda_k(A_3) < \lambda_k(A_2), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.89}$$

Для этого заметим, что $\lambda_k(A_3)$ суть максиминимальные значения вариационного отношения (3.77), рассматриваемого на элементах из $\mathcal{H}_{A_3}$, т.е. на таких элементах $\hat{u}(x) = \{u(x); u(l)\}$, для которых

$$u'(x) \in L_2(0,l), \quad u(0) = 0. \tag{3.90}$$

Однако в задаче 2^0, которая получается из задачи 3^0 при $m = 0$, соответствующее вариационное отношение не меньше, чем (3.77), поскольку $m > 0$, а сравнение ведется на том же классе функций $u(x)$, которые удовлетворяют условиям (3.90). Отсюда и из максиминимального принципа для задач 2^0 и 3^0 получаем, что $\lambda_k(A_3) \leqslant \lambda_k(A_2)$, $k \in \mathbb{N}$. Однако знак равенства здесь невозможен. В самом деле, при фиксированном $\lambda > 0$ подпространство решений уравнения (3.75) при нулевом краевом

условии на левом конце одномерно, и любое решение $u = u(x; \lambda)$ имеет вид
$$u(x;\lambda) = Cu_0(x;\lambda), \quad u_0(0;\lambda) = 0, \quad u_0'(0;\lambda) = 1. \tag{3.91}$$
Так как $u(x;\lambda)$, согласно предположению, является собственной функцией задач 3^0 и 2^0 одновременно, то на правом конце в данном случае должны удовлетворяться условия
$$u'(l;\lambda) = 0,\ u(l;\lambda) = 0,$$
откуда (по теореме единственности решения задачи Коши) получаем, что $C = 0$, т.е. $u(x,\lambda)$ – тривиальное решение. Таким образом, неравенства (3.89) доказаны.

Остальные неравенства (3.88) следуют из факта непрерывной зависимости решения $u_0(x;\lambda)$ от параметра λ при монотонном возрастании λ от 0 до $+\infty$. Можно проследить из соображений непрерывности, что сначала при возрастании λ удовлетворяется граничное условие для задачи 3^0, затем для задачи 2^0, затем 1^0, а потом эта картина повторяется.

Теорема доказана. □

Упражнение 3.2.4. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях стержня, имеющего все постоянные характеристики. Получить и качественно исследовать характеристическое уравнение для собственных значений задачи, т.е. частот собственных колебаний. Получить асимптотическое решение задач 1^0, 2^0 и 3^0 для частот с большими номерами. Проверить выполнение неравенств (3.88) в рассматриваемом случае. □

Следующие ниже задачи-упражнения послужат дополнением к обсуждаемой проблеме.

Упражнение 3.2.5. Рассмотреть по аналогичной операторной схеме задачу о малых поперечных колебаниях струны, содержащей в некоторой своей промежуточной точке x_0, $0 < x_0 < l$, материальную точку массой m (бусинку). Эта проблема состоит в нахождении нетривиальных решений следующей спектральной задачи
$$-a^2\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0, \quad \lambda = \omega^2, \tag{3.92}$$
$$u(x_0+0) = u(x_0-0), \quad T_0[u'(x_0-0) - u'(x_0+0)] = m\lambda u(x_0 \pm 0),$$
где $T_0 > 0$ – натяжение струны, $a^2 = T_0/\rho$, ρ – плотность струны. □

Упражнение 3.2.6. Выписать спектральную задачу о малых колебаниях струны с закрепленными на ней в точках

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < l$$

бусинками с массами m_k, $k = 1, \ldots, n$. Привести построения, позволяющие сформулировать эту задачу как задачу на собственные значения для некоторого оператора с дискретным спектром, действующего в соответственно подобранном гильбертовом пространстве. $\square$

Упражнение 3.2.7. Собственные крутильные колебания упругого цилиндрического стержня, жестко закрепленного на левом конце и содержащего шкив на правом конце, описываются нетривиальными решениями следующей спектральной задачи:

$$\begin{gathered} -a^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = \lambda\theta, \quad 0 < x < l, \quad \theta(0) = 0, \\ GJ\frac{d\theta}{dx}(l) = \lambda K_{\text{ш}}\theta, \quad \lambda = \omega^2, \end{gathered} \tag{3.93}$$

где G, J и K – модуль сдвига, геометрический полярный момент инерции поперечного сечения и осевой момент инерции единицы длины стержня, $a^2 = GJ/K > 0$, $\theta = \theta(x)$ – угол поворота стержня в сечении с координатой x, $K_{\text{ш}}$ – момент инерции шкива.

Доказать адекватность задачи (3.93) некоторой задаче на собственные значения для оператора A с дискретным спектром. $\square$

Упражнение 3.2.8. Сформулировать и исследовать задачу о малых крутильных колебаниях системы упругих цилиндрических стержней, на границах которых находятся шкивы с заданными моментами инерции. $\square$

3.2.3 Постановка задачи о поперечных колебаниях стержня

Будем теперь считать, что стержень длины l расположен горизонтально, т.е. перпендикулярно действию силы тяжести. Тогда под действием внешних сил и, в частности, силы тяжести, стержень будет совершать поперечные колебания. Соответствующие поперечные отклонения от ненагруженного состояния будем описывать функцией $u(t,x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$.

Приведем краткие пояснения к выводу уравнения малых поперечных колебаний стержня. В одномерной теории упругости предполагается, что в таком процессе сечения стержня остаются плоскими, но подвергаются изгибу. В частности, в процессе изгиба элемент стержня длины dx не меняет свою длину, а лишь поворачивается так, что его концевые сечения составляют угол $d\varphi$ между собой; тогда

$$d\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x+dx) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)dx. \tag{3.94}$$

При этом изгибающий момент сил $M = M(t,x)$, действующий в сечении x на правую часть стержня, пропорционален $d\varphi$ и равен

$$M(t,x) = -E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \tag{3.95}$$

где $E(x)$ – модуль упругости материала стержня, а $J(x)$ – так называемый момент инерции сечения стержня относительно горизонтальной оси.

Для элемента стержня длины dx слева действует момент $M(t,x)$, а справа – момент $M(t,x+dx) = M(t,x) + dM(t,x)$; при этом разность моментов компенсируется моментом тангенциальных, т.е. поперечных, сил:

$$dM = F(t,x)dx. \tag{3.96}$$

Отсюда в силу (3.95) получаем, что поперечная сила в сечении x равна

$$F(t,x) = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{3.97}$$

Приравнивая согласно закону Ньютона действующую на выделенный элемент стержня результирующую силу

$$dF = F(t,x+dx) - F(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}dx = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx$$

произведению массы элемента на его поперечное ускорение, т.е. величине

$$dx\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

получаем дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3.98}$$

Замечание 3.2.3. Если на стержень действует поперечная объемная сила $\hat{F}(t,x)$, то в правой части (3.98) следует нуль заменить функцией

$$f(t,x) := \frac{\hat{F}(t,x)}{\rho(x)S(x)}. \qquad \square \tag{3.99}$$

Замечание 3.2.4. Если стержень расположен на упругом основании и сила сопротивления основания пропорциональна величине поперечного отклонения стержня, т.е.

$$F_{\text{сопр}}(t,x) = -K(x)u(t,x), \tag{3.100}$$

то в левую часть уравнения (3.98) следует добавить член

$$k(x)u(x), \quad k(x) := \frac{K(x)}{\rho(x)S(x)}. \qquad \square \tag{3.101}$$

Рассмотрим теперь, какие граничные условия следует поставить на концах стержня. Далее все время будем считать, что на левом конце стержень жестко защемлен, т.е. этот конец неподвижен и имеет горизонтальную касательную:

$$u(t,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0. \tag{3.102}$$

На правом конце, как и в случае продольных колебаний стержня, рассмотрим три основных вида краевых условий.

а) *Жесткое защемление*:

$$u(t,l) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0. \tag{3.103}$$

б) *Свободный правый конец.* В этом случае при $x = l$ должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная сила, т.е.

$$\begin{gathered} -E(l)J(l)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,l) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right)\Big|_{x=l} = 0. \end{gathered} \tag{3.104}$$

в) *На правом конце находится груз* массой m. Здесь при $x = l$ изгибающий момент по-прежнему равен нулю, а тангенциальная сила равна произведению массы m груза на ускорение правого конца стержня:

$$\begin{gathered} -E(l)J(l)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,l) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right)\Big|_{x=l} = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l). \end{gathered} \tag{3.105}$$

Замечание 3.2.5. Вывод соотношения (3.105) можно провести так же, как и в случае продольных колебаний стержня. Именно, для участка стержня $[l-dx, l]$ с грузом на правом конце имеем

$$F(t, l-dx) = \Big[m + (\rho(x)S(x))_{cp} \cdot dx\Big] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_{cp}),$$

откуда при $dx \to 0$ получаем (3.105). □

Для полной постановки начально-краевой задачи о поперечных колебаниях стержня в начальный момент следует задать положение стержня и скорость отклонения его элементов

$$u(0,x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x). \tag{3.106}$$

3.2.4 Задача о поперечных колебаниях упругого стержня

Идеи, которые были применены в предыдущем пункте в задаче о продольных колебаниях упругого стержня, могут быть почти полностью использованы и в спектральной задаче о поперечных колебаниях стержня переменного сечения с тем или иным условием закрепления на правом конце.

Как и в п.3.2.2, под собственными поперечными колебаниями упругого стержня будем понимать решения уравнения (3.98) в форме

$$u(t,x) = e^{i\omega t}u(x), \tag{3.107}$$

где ω – частота, а $u(x)$ – амплитудная функция. Тогда для функции $u(x)$ приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d^2}{dx^2}\Big(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\Big) = \lambda u(x),\\ 0 < x < l, \quad \lambda := \omega^2,\end{gathered} \tag{3.108}$$

а также к условиям жесткого защемления на левом конце:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \tag{3.109}$$

Далее в виде упражнений рассмотрим последовательно три спектральные задачи о поперечных колебаниях упругого стержня при следующих трех краевых условиях на правом конце.

Задача 3.2.1. *Жесткое защемление:*

$$u(l) = u'(l) = 0. \tag{3.110}$$

Задача 3.2.2. *Колебания со свободным правым концом:*

$$-E(l)J(l)\frac{d^2u}{dx^2}(l) = 0, \quad \left(-\frac{d}{dx}\left((E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right)\right)\Big|_{x=l} = 0. \tag{3.111}$$

Задача 3.2.3. . *Колебания с грузом массы m на правом конце:*

$$\begin{aligned} -E(l)J(l)\frac{d^2u}{dx^2}(l) =& 0,\\ \frac{1}{m}\left(\frac{d}{dx}\left((E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right)\right)\Big|_{x=l} =& \lambda u(l). \end{aligned} \tag{3.112}$$

Относительно коэффициентов дифференциального уравнения (3.108) будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} E(x),\, J(x) \in C^2([0,l]),\\ \rho(x),\ S(x) \in C([0,l]), \quad 0 < \rho_0 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_1,\\ 0 < S_0 \leqslant S(x) \leqslant S_1,\ 0 < E_0 \leqslant E(x) \leqslant E_1,\ 0 < J_0 \leqslant J(x) \leqslant J_1. \end{gathered} \tag{3.113}$$

Упражнение 3.2.9. Проверить, что при условиях (3.109) жесткого защемления на левом конце для любых $u(x) \in C^4([0,l])$ и $v(x) \in C^2([0,l])$ справедлива следующая формула Грина:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^l \rho(x)S(x)\Big(\frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d^2}{dx^2}\Big(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\Big)\Big)v(x)dx =&\\ = \int\limits_0^l E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}dx -&\\ -\Big(\frac{d}{dx}\Big(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\Big)v(x)\Big)_{x=l} + \Big(\Big(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\Big)\frac{dv}{dx}\Big)_{x=l}&. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Упражнение 3.2.10. Показать, что в задачах 3.2.1 и 3.2.2 в качестве основного гильбертова пространства, в котором естественно рассматривать эти задачи, следует взять пространство $\mathcal{H} := L_2\big((0,l); \rho(x)S(x)dx\big)$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2 := \int\limits_0^l \rho(x)S(x)|u(x)|^2dx, \tag{3.115}$$

а в задаче 3.2.3 — пространство $\mathcal{H} := L_2\big((0,l);\rho(x)S(x)dx\big)\oplus\mathbb{R}$ элементов вида $\hat{u} := \big\{u(x),\ 0\leqslant x\leqslant l;\ u(l)\big\}$ с квадратом нормы

$$\|\hat{u}\|^2 := \int\limits_0^l \rho(x)S(x)|u(x)|^2dx + m|u(l)|^2. \quad \square \tag{3.116}$$

Упражнение 3.2.11. Показать, что оператор B_1 задачи 3.2.1 естественно определить на множестве

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(B_1) := \{u(x)\in C^4[0,l] :& \\ &u(0)=u'(0)=0, \quad u(l)=u'(l)=0\}\end{aligned} \tag{3.117}$$

по закону

$$B_1u := \frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right). \tag{3.118}$$

Убедиться, что $B_1 \gg 0$, а квадрат энергетической нормы равен

$$\|u\|^2_{B_1} = \int\limits_0^l E(x)J(x)\Big|\frac{d^2u}{dx^2}\Big|^2dx. \tag{3.119}$$

Используя дважды неравенство Пуанкаре (для $u(x)$ и $u'(x)$), показать, что норма (3.119) эквивалентна стандартной норме пространства $W_2^2(0,l)$. $\square$

Упражнение 3.2.12. Проверить, что оператор B_2 задачи 3.2.2 естественно определить на множестве

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(B_2) := \{u(x)\in C^4([0,l]) : \quad u(0)=u'(0)=0,\\ &-E(l)J(l)\frac{d^2u}{dx^2}(l)=0, \frac{d}{dx}\left(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=l}=0\}\end{aligned} \tag{3.120}$$

по закону

$$B_2u := \frac{1}{\rho(x)S(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right). \tag{3.121}$$

Убедиться, что $B_2 \gg 0$ и квадрат энергетической нормы равен

$$\|u\|^2_{B_2} = \int\limits_0^l E(x)J(x)\Big|\frac{d^2u}{dx^2}\Big|^2dx, \tag{3.122}$$

причем здесь функции из энергетического пространства $\mathcal{H}_{B_2}$, в отличие от задачи 3.2.1, не удовлетворяют, вообще говоря, краевым условиям на правом конце. $\square$

Упражнение 3.2.13. Показать, что оператор B_3 задачи 3.2.3 естественно определить на множестве

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(B_3) := \{\widehat{u}(x) := \{u(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad u(l)\} : \\ &u(x) \in C^4([0,l]), u(0) = u'(0) = 0, \quad -E(l)J(l)\frac{d^2u}{dx^2}(l) = 0\} \end{aligned} \tag{3.123}$$

по закону

$$B_3\hat{u} := \left\{ \frac{1}{\rho(x)S(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2} \right); \quad \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dx} \left(E(x)J(x)\frac{d^2u}{dx^2} \right) \right)_{x=l} \right\}. \tag{3.124}$$

Доказать, что $B_3 \gg 0$ и квадрат энергетической нормы равен

$$\|\hat{u}\|^2_{B_3} = \int\limits_0^l E(x)J(x)\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|^2 dx, \tag{3.125}$$

причем здесь элементы энергетического пространства, как и в задаче 3.2.2, не удовлетворяют, вообще говоря, краевым условиям на правом конце. $\square$

Упражнение 3.2.14. Опираясь на решения упражнений 3.2.9–3.2.13, доказать, что в задачах 3.2.1, 3.2.2 и 3.2.3 энергетическое пространство компактно вложено в основное пространство, а потому каждая из этих задач имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(B_j)\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, 3$ и полные ортогональные системы собственных элементов в основном и энергетическом пространстве. $\square$

Упражнение 3.2.15. Убедиться, что собственные значения $\lambda_k(B_j)$ трех рассматриваемых задач удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_k(B_3) < \lambda_k(B_2) < \lambda_k(B_1), \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad \square \tag{3.126}$$

Упражнение 3.2.16. Рассмотреть задачи 3.2.1, 3.2.2 и 3.2.3, в случае, когда

$$\rho(x) = \rho_0 > 0, \quad S(x) = S_0 > 0, \quad E(x) = E_0 > 0, \quad J(x) = J_0 > 0.$$

Качественно и асимптотически исследовать характеристическое уравнение каждой из задач, проверить выполнение неравенств (3.126). $\square$

Заметим в заключение этого параграфа, что прием, позволяющий исследовать задачу со спектральным параметром в уравнении и краевом условии, можно применять не только в одномерных, но и в многомерных задачах. Классическим примером такого рода является задача

$$-\Delta u + u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \quad (\text{в } \partial\Omega), \tag{3.127}$$

где Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^m$. Подобным же образом можно исследовать другие задачи, в которых краевое условие вида (3.127) задано не на всей границе $\partial\Omega$, а лишь на некоторой ее части Γ положительной меры, а на $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ задано какое-либо из классических однородных краевых условий.

3.3 Малые колебания идеальной жидкости в частично заполненном контейнере

Данная задача интересна тем, что здесь уравнение, которому подчинена функция, в определенном смысле играет ту же роль, что в обычных задачах краевое условие, а краевое условие на свободной поверхности жидкости фактически приводит к спектральной задаче для неограниченного самосопряженного оператора. Отметим, что рассматриваемая задача является одной из главных гидродинамических задач при расчете траектории движения космической ракеты с жидким топливом на борту в то время, когда ракета находится на активном участке полета.

3.3.1 Постановка задачи о малых колебаниях тяжелой идеальной жидкости в произвольном контейнере

Будем считать, что идеальная несжимаемая жидкость плотности $\rho = \text{const} > 0$ частично заполняет некоторый контейнер и в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную свободной поверхностью Γ и твердой стенкой S. Поверхность Γ расположена перпендикулярно действию однородного гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Начало O этой системы выберем на Γ, тогда уравнение Γ примет вид $x_3 = 0$.

В состоянии покоя давление в жидкости $P_0 = P_0(x_3)$ распределено по закону Архимеда:

$$P_0(x_3) = p_a - \rho g x_3, \tag{3.128}$$

где p_a — постоянное внешнее (атмосферное) давление.

Рассмотрим теперь задачу о движениях жидкости в контейнере. Как следует из гипотез, обычно применяемых в механике сплошных сред, на частицу идеальной (невязкой) жидкости действует поле давлений, а также поле внешних сил. Если поле скоростей в жидкости обозначить через $\vec{v} = \vec{v}(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, то применение закона Ньютона к жидкой частице единичного объема дает уравнение Эйлера:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} := \rho \Big[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \Big] = -\nabla P - \rho g \vec{e}_3, \tag{3.129}$$

где $P = P(t, x)$ — полное давление в жидкости, $d\vec{v}/dt$ — полная производная по времени для скорости жидкой частицы в процессе ее движения вдоль траектории, а $\nabla = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_3 \partial/\partial x_k$ — оператор градиента (оператор набла).

Так как жидкость несжимаемая, то к (3.129) следует добавить уравнение неразрывности, которое при $\rho = \mathrm{const}$ дает условие

$$\mathrm{div}\, \vec{v} := \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \tag{3.130}$$

Рассмотрим малые движения жидкости в контейнере, т.е. будем считать, что поле скорости $\vec{v}(t, x)$ и отклонение $p(t, x) := P(t, x) - P_0(x_3)$ поля давления от равновесного давления (эту разность называют динамическим давлением в отличие от статического давления $P_0(x_3)$) суть бесконечно малые функции первого порядка малости. Так как в силу (3.128)

$$\nabla P_0 = -\rho g \vec{e}_3, \tag{3.131}$$

то линеаризация уравнения (3.129) дает

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p, \tag{3.132}$$

где $p = p(t, x)$ — динамическое давление.

Перейдем теперь к описанию граничных условий в данной задаче. Частицы идеальной жидкости могут свободно двигаться вдоль твердой стенки S и не могут пройти в поперечном к S направлении, поэтому на S выполнено условие непротекания

$$v_n := \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \tag{3.133}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к области Ω.

На движущейся свободной поверхности $\widetilde{\Gamma}(t)$, по предположению мало отклоняющейся от Γ, давление $P(t,x)$ должно равняться атмосферному давлению p_a, т.е. выполнено динамическое условие

$$P(t,x) = p_a, \quad x \in \widetilde{\Gamma}(t). \tag{3.134}$$

Будем считать, что уравнение движущейся поверхности $\widetilde{\Gamma}(t)$ имеет вид $x_3 = \zeta(t,x_1,x_2)$, $(x_1,x_2) \in \Gamma$, где $\zeta(t,x_1,x_2)$ — также бесконечно малая функция первого порядка. Тогда соотношение (3.134), с учетом представления $P = p + P_0$, дает

$$P_0\left(\zeta(t,x_1,x_2)\right) + p\left(t,x_1,x_2,\zeta(t,x_1,x_2)\right) = p_a.$$

Разлагая здесь первое и второе слагаемые слева по формуле Тейлора (по степеням ζ) и ограничиваясь членами нулевого и первого порядка малости, имеем

$$\left(P_0(0) + \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=0} \cdot \zeta + \ldots\right) + \left(p(t,x_1,x_2,0) + \ldots\right) = p_a,$$
$$\left(\frac{\partial P_0}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=0} = -\rho g.$$

С учетом (3.128) отсюда получаем линеаризованное динамическое условие

$$p(t,x_1,x_2,0) = \rho g \zeta(t,x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Gamma. \tag{3.135}$$

Получим теперь кинематическое условие на равновесной поверхности Γ. Исходным здесь является естественное предположение о том, что частица жидкости, находящаяся на свободной движущейся поверхности $\widetilde{\Gamma}(t)$ в некоторый момент времени, остается на этой поверхности во все время движения. Именно, если функции $x_i = x_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ описывают траекторию движения жидкой частицы, то на $\widetilde{\Gamma}(t)$ должно выполняться соотношение

$$x_3(t) \equiv \zeta\big(t, x_1(t), x_2(t)\big).$$

Но тогда

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \cdot v_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \cdot v_2,$$

и после линеаризации этого соотношения получаем кинематическое условие

$$v_3 = v_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (x_1,x_2) \in \Gamma. \tag{3.136}$$

Итак, начально-краевая задача о малых (линейных) колебаниях идеальной жидкости формулируется следующим образом: найти поле скорости $\vec{v}(t, x)$, динамическое давление $p(t, x)$ и функцию $\zeta(t, x_1, x_2)$ отклонения свободной поверхности Γ из следующих уравнений, краевых и начальных условий:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \mathrm{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad v_n = 0 \quad (\text{на } S), \tag{3.137}$$

$$p = \rho g \zeta, \quad v_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{на } G), \quad \vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0, x_1, x_2) = \zeta^0(x_1, x_2).$$

Последние два соотношения задают начальные условия в задаче (3.137): для однозначного определения движения жидкости в контейнере следует в начальный момент времени задать поле скоростей в области Ω и форму отклонения свободной поверхности от равновесной поверхности Γ.

Отметим еще, что следствием условия сохранения объема при колебаниях является условие

$$\int_\Gamma \zeta(t, x_1, x_2) d\Gamma = 0. \tag{3.138}$$

3.3.2 Формулировка задачи Стеклова в проблеме собственных колебаний тяжелой жидкости в контейнере

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях жидкости, т.е. задачу о нахождении таких ее решений, которые зависят от t по экспоненциальному закону $\exp(i\omega t)$, где ω — неизвестная заранее частота колебаний; имеем:

$$\begin{gathered} \vec{v}(t, x) = \vec{v}(x) \exp(i\omega t), \quad p(t, x) = p(x) \exp(i\omega t), \\ \zeta(t, x_1, x_2) = \zeta(x_1, x_2) \exp(i\omega t). \end{gathered} \tag{3.139}$$

Из (3.137) для амплитудных функций $\vec{v}(x)$, $p(x)$ и $\zeta(x_1, x_2)$ получаем систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{cases} i\omega\rho\vec{v} = -\nabla p, \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad v_n = 0 \quad (\text{на } S), \\ p = \rho g \zeta, \quad v_n = i\omega\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{cases} \tag{3.140}$$

Покажем, что задачу (3.140) можно привести к нахождению лишь одной скалярной функции, через которую выражаются все амплитудные искомые функции. В самом деле, из первого уравнения (3.140) следует, что при $\omega \neq 0$ поле $\vec{v}(x)$ потенциально:

$$\vec{v} = \nabla u, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega. \tag{3.141}$$

Тогда это первое соотношение дает связь (давление находится с точностью до произвольной постоянной!)

$$p + i\rho\omega u = \mathrm{const} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{3.142}$$

а второе уравнение приводит к уравнению Лапласа:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{3.143}$$

Далее, условие непротекания на S дает условие Неймана

$$v_n = \nabla u \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{3.144}$$

На Γ аналогично получаем, с учетом (3.142), что

$$\zeta = (i\omega)^{-1} \frac{\partial u}{\partial n}, \quad i\rho\omega u = \rho g (i\omega)^{-1} \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{3.145}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma), \quad \lambda = \omega^2 / g. \tag{3.146}$$

Таким образом, окончательно спектральная задача о нахождении потенциала скорости $u(x_1, x_2, x_3)$ может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{gathered} \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma), \quad \lambda = \omega^2 / g. \end{gathered} \tag{3.147}$$

Задачу (3.147) при $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \emptyset$ рассматривал еще в конце XIX века известный русский и советский математик В.А. Стеклов; в дальнейшем эту задачу будем называть *задачей Стеклова.* Имея решения задачи Стеклова, амплитудные функции $\vec{v}(x)$, $p(x)$ и $\zeta(x_1, x_2)$ можно найти из соотношений (3.141), (3.142) и (3.145) соответственно.

3.3.3 Оператор задачи Стеклова

Как сейчас будет установлено, задача Стеклова (3.147) равносильна операторному уравнению вида

$$Aw = \lambda w, \quad A \gg 0, \quad A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{3.148}$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Для доказательства этого рассмотрим вспомогательную задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.149}$$

Упражнение 3.3.1. Опираясь на первую формулу Грина для оператора Лапласа, т.е. на формулу

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS,$$

убедиться, что необходимым условием разрешимости задачи (3.149) является условие

$$\int_\Gamma \psi d\Gamma = 0. \qquad \square \tag{3.150}$$

Так как решение задачи (3.149) находится с точностью до произвольной постоянной, наложим на это решение дополнительное условие

$$\int_\Gamma u d\Gamma = 0. \tag{3.151}$$

Упражнение 3.3.2. Доказать, что задача (3.149), (3.151) имеет единственное решение. $\square$

Рассмотрим теперь свойства решений вспомогательной задачи Неймана. Пусть $v(x)$ — произвольная функция из $C^1(\overline{\Omega})$. Предполагая, что решение $u(x)$ задачи (3.149), (3.151) является дважды непрерывно дифференцируемым в $\overline{\Omega}$, получим с помощью формулы Грина тождество

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_\Gamma \psi v d\Gamma. \tag{3.152}$$

Докажем, опираясь на тождество (3.152), существование обобщенного решения задачи (3.149), (3.151). С этой целью введем в рассмотрение гильбертово пространство $W_2^1(\Omega)$ с квадратом нормы в одной из эквивалентных форм:

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \left(\int_\Gamma u d\Gamma\right)^2.$$

Далее будем рассматривать лишь те функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, которые удовлетворяют дополнительному условию (3.151). Их совокупность образует подпространство $\widetilde{W}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$, имеющее коразмерность 1; квадрат нормы в $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ совпадает с интегралом Дирихле:

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega, \quad u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega). \tag{3.153}$$

Определение 3.3.1. *Будем говорить, что задача* (3.149), (3.151) *имеет обобщенное решение из* $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, *если существует такая функция* $u(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$, *для которой при любой функции* $v(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *выполнено интегральное тождество* (3.152). $\square$

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\mathcal{H} := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ *— гильбертово пространство суммируемых с квадратом по* Γ *функций, ортогональных к единичной функции. Если* $\psi(x) \in \mathcal{H}$, *то существует единственное обобщенное решение* $u(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *вспомогательной задачи* (3.149), (3.151).

Доказательство. Если $\psi(x) \in \mathcal{H}$, то при любой $v(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ правая часть в (3.152) представляет собой линейный ограниченный функционал (относительно v) в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$. Действительно, по второй теореме вложения Соболева (см. теорему 2.4.3) оператор следа $\gamma: W_2^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ компактен и потому ограничен, и тогда

$$\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant c\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega). \tag{3.154}$$

Поэтому для $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left|\int_\Gamma \psi v d\Gamma\right| = \left|(\psi, v)_{L_2(\Gamma)}\right| \leqslant \|\psi\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|v\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \\ \leqslant \left(c\|\psi\|_{L_2(\Gamma)}\right) \cdot \|v\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Отсюда по теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве получаем, что существует единственный элемент $u(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$, такой, что

$$\int_\Gamma \psi v d\Gamma = (u,v)_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \quad \forall v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega). \tag{3.156}$$

Теорема доказана. $\square$

Представим решение вспомогательной задачи (3.149), (3.150) в виде

$$u = T\psi, \quad T: \quad \mathcal{H} \to \widetilde{W}_2^1(\Omega).$$

Упражнение 3.3.3. Доказать, что оператор T ограничен и

$$\|T\| \leqslant c, \tag{3.157}$$

где $c > 0$ — константа из неравенства (3.154).

Решение. Полагая в (3.156) $v = u = T\psi$, будем иметь

$$\begin{aligned}\|T\psi\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} =& (\psi, T\psi)_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|\psi\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|T\psi\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \\ \leqslant& \big(c\|\psi\|_{L_2(\Gamma)}\big)\|T\psi\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)};\end{aligned}$$

после сокращения на $\|T\psi\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}$ отсюда следует (3.157). $\square$

Рассмотрим теперь оператор

$$G := \gamma T: \quad \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \tag{3.158}$$

где $\gamma: \ W_2^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ — упомянутый выше оператор следа: $\gamma(u\big|_\Omega) := u\big|_\Gamma$.

Как следует из предыдущего, оператор G сопоставляет функции $\psi = \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma \in \mathcal{H}$ след на Γ решения вспомогательной задачи (3.148), (3.150), т.е.

$$G\psi = G\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma = u\big|_\Gamma. \tag{3.159}$$

Так как оператор $T: \ \mathcal{H} \to \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ ограничен, а $\gamma: \ \widetilde{W}_2^1(\Omega) \to \mathcal{H}$ — компактен, то $G = \gamma T$ — компактный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Очевидно, он задан на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Упражнение 3.3.4. Доказать, опираясь на первую и вторую формулы Грина для оператора Лапласа, что $G = G^*$ и $G > 0$.

Решение. Пусть $u = u_i$ — решения вспомогательной задачи Неймана при $\psi = \psi_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда (при любых ψ_1 и ψ_2 из H) имеем:

$$\begin{aligned}(G\psi_1, \psi_2)_{L_2(\Gamma)} &= \int_\Gamma u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} dS = \\ &= \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 d\Omega = \dots = \int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial n} u_2 d\Gamma = (\psi_1, G\psi_2)_{L_2(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{3.160}$$

Отсюда следует, что $G^* = G$. Полагая в (3.160) $\psi_2 = \psi_1 = \psi$ $(u_2 = u_1 = u)$, получаем

$$(G\psi, \psi)_{L_2(\Gamma)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega \geq 0, \tag{3.161}$$

и потому G — неотрицательный оператор.

Далее, если $(G\psi, \psi)_{L_2(\Gamma)} = 0$, то в силу (3.161) имеем $\nabla u = \vec{0}$ (почти всюду в Ω), т.е. $u(x) = \mathrm{const}$, и так как для $u(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ выполнено $\int\limits_\Gamma u d\Gamma = 0$, то $u(x) \equiv 0$. Значит, $\psi = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$, и свойство $G > 0$ доказано. $\square$

Итак, введенный посредством формулы (3.158) оператор G — компактный положительный оператор, действующий в $\mathcal{H} = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$. Обратный оператор $A := G^{-1}$ является, очевидно, неограниченным положительно определенным, заданным на некотором плотном в $\mathcal{H}$ множестве

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(G) \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(G) = \mathcal{H}. \tag{3.162}$$

В силу свойств $A^{-1} = G$ получаем, что оператор A имеет дискретный спектр и отвечающий собственным значениям этого спектра ортогональный базис (в $\mathcal{H}$ и в $\mathcal{H}_A$), составленный из собственных элементов оператора A.

Определение 3.3.2. *Оператор $A = G^{-1} \gg 0$ $(A^{-1} = G \in \mathfrak{S}_\infty)$ называется оператором задачи Стеклова.* $\square$

3.3.4 Свойства решений задачи Стеклова

Покажем, что задача Стеклова (3.147) естественным образом может быть сформулирована как задача на собственные значения для оператора Стеклова.

Теорема 3.3.2. *Задача на собственные значения*

$$\Delta u = 0 \quad (\textit{в}\ \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на}\ S), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \quad (\textit{на}\ \Gamma), \tag{3.163}$$

равносильна задаче

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi = u\big|_\Gamma \in \mathcal{H} = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}. \tag{3.164}$$

Доказательство. Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \psi, \quad u\big|_\Gamma =: \varphi. \tag{3.165}$$

Согласно определению оператора G, для решений задачи (3.163) имеем

$$u\big|_\Gamma = \varphi = G\psi = G\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma,$$

и потому

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = A\left(u\big|_\Gamma\right) = A\varphi, \tag{3.166}$$

где A — оператор Стеклова. Поэтому соотношение $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \lambda u$ (на Γ) с учетом $\Delta u = 0$ (в Ω), $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ (на S) может быть записано в виде

$$A\left(u\big|_\Gamma\right) = \lambda\left(u\big|_\Gamma\right),$$

т.е. в виде (3.164). $\square$

Теорема 3.3.3. *Собственные значения* $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *задачи Стеклова можно найти как последовательные минимумы вариационного отношения*

$$\|u\|_A^2/\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega \Big/ \int_\Gamma |u|^2 d\Gamma, \tag{3.167}$$

рассматриваемого на множестве функций $u(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$, *для которых*

$$\Delta u = 0 \quad (\textit{в}\ \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на}\ S) \quad \left(\int_\Gamma u d\Gamma = 0\right). \tag{3.168}$$

Доказательство. Оно основано на спектральной теореме о свойствах спектра положительно определенного оператора A, имеющего компактный обратный оператор $A^{-1} > 0$ (когда $\mathcal{H}_A \subset\!\to\subset\!\to \mathcal{H}$), а также на вариационных принципах для собственных значений такого оператора (глава 2 данного курса лекций). Предоставляем читателю возможность доказать эту теорему самостоятельно. $\square$

Замечание 3.3.1. Первое собственное значение λ_1 есть минимум вариационного отношения (3.167), второе — минимум этого отношения на классе функций $u(x)$, для которых выполнены условия (3.168) и условие ортогональности

$$\int_\Gamma u \cdot u_1 d\Gamma = 0$$

к первой собственной функции $u_1(x)$, отвечающей собственному значению λ_1 задачи Стеклова, и т.д. $\square$

Замечание 3.3.2. Если для обратных величин λ_k^{-1} взамен (3.167) рассматривать вариационное отношение

$$\int_\Gamma |u|^2 d\Gamma \Big/ \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega, \quad \int_\Gamma u d\Gamma = 0, \tag{3.169}$$

то можно показать, что при нахождении последовательных максимумов этого отношения варьирование здесь можно проводить в классе всех функций из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, а не только тех, которые удовлетворяют дополнительным условиям (3.168). Эти условия при такой вариационной формулировке задачи являются естественными, т.е. не только условие Неймана $\partial u/\partial n = 0$ (на S), но и уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ (в Ω) автоматически выполняются для решения, реализующего последовательные максимумы отношения (3.169). $\square$

Упражнение 3.3.5. Обозначим через $U_2^1(\Omega)$ множество функций $u(x)$ из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, для которых выполнены соотношения (3.168). Доказать, что $U_2^1(\Omega)$ — подпространство в $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и имеет место ортогональное разложение

$$\widetilde{W}_2^1(\Omega) = U_2^1(\Omega) \oplus \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{3.170}$$

где

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) := \big\{u(x) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega) : \quad u(x) \equiv 0 \quad (\text{на } \Gamma)\big\}. \tag{3.171}$$

Указание. Воспользоваться определением скалярного произведения в $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и первой формулой Грина для оператора Лапласа. $\square$

Следствием ортогонального разложения (3.170) и предыдущих рассмотрений является

Теорема 3.3.4. *Задача о собственных колебаниях тяжелой идеальной жидкости в сосуде имеет дискретный спектр частот* $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$, $\omega_k^2/g = \lambda_k(A)$,

$$0 < \omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 \leqslant \dots \leqslant \omega_k^2 \leqslant \dots, \quad \omega_k^2 \to +\infty \quad (k \to \infty), \tag{3.172}$$

и систему собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *(потенциалов скоростей, через которые выражаются амплитуды колебаний полей скорости, давления и отклонения свободной движущейся поверхности от равновесной поверхности), обладающих следующими свойствами:*

1^0. *Функции* $\{u_k(x)\big|_{\Gamma}\}_{k=1}^{\infty}$ *вместе с* $u_0(x)\big|_{\Gamma} \equiv 1$ *образуют ортогональный базис в* $L_2(\Gamma)$.

2^0. *Функции* $\{u_k(x)\big|_{\Omega}\}_{k=1}^{\infty}$ *образуют ортогональный базис в подпространстве* $U_2^1(\Omega) \subset \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *гармонических функций из* $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, *удовлетворяющих условию Неймана на твердой стенке* S.

3^0. *Имеют место следующие формулы ортогональности:*

$$\begin{gathered}\int_{\Gamma} u_k(x)u_j(x)d\Gamma = \delta_{kj},\\ \int_{\Omega} \nabla u_k(x)\cdot\nabla u_j(x)d\Omega = (\omega_k^2/g)\delta_{kj}. \qquad \Box\end{gathered} \tag{3.173}$$

3.3.5 Примеры

Если сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеет цилиндрическую форму с образующей, параллельной вертикальной оси Ox_3, то задача Стеклова

$$\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.174}$$

допускает разделение переменных. Обозначим поперечное сечение сосуда через Γ и будем считать, что равновесной поверхности жидкости отвечает уравнение $x_3 = 0$, а дну сосуда — уравнение $x_3 = -h$.

Упражнение 3.3.6. Осуществляя в задаче Стеклова (3.174) разделение переменных в форме

$$u(x_1,x_2,x_3) = w(x_3)v(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\Gamma, \quad x_3\in(-h,0), \tag{3.175}$$

получить для функций $w(x_3)$ и $v(x_1,x_2)$ задачи

$$\begin{gathered}-\Delta_2 v := -\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big)v = \mu v \quad (\Gamma),\\ \frac{\partial v}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \qquad \int_{\Gamma} v d\Gamma = 0,\end{gathered} \tag{3.176}$$

$$w'' - \mu w = 0 \quad (-h < x_3 < 0), \quad w'(-h) = 0, \quad w'(0) = \lambda w(0), \tag{3.177}$$

где $\vec{n}_2$ — внешняя нормаль к $\partial\Gamma$. Исследовать задачи (3.176) и (3.177) и получить ответ в виде

$$\begin{cases} u = u_k(x_1, x_2, x_3) = v_k(x_1, x_2)\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{\mu_k}(x_3 + h)\right], \\ \lambda_k = \sqrt{\mu_k}\,\mathrm{th}\left[\sqrt{\mu_k}h\right], \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.178}$$

где $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — дискретный спектр собственных значений задачи (3.176), а $\{v_k(x_1, x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ — отвечающие им собственные функции. $\square$

Упражнение 3.3.7. Решить задачу Стеклова (3.174) в плоской области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, $\Gamma = (0, a)$.

Ответ. $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{a}\,\mathrm{th}\,\dfrac{\pi k b}{a}$, $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Упражнение 3.3.8. Решить задачу Стеклова в прямоугольном параллелепипеде $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$, $\Gamma = (0, a) \times (0, b)$.

Ответ. $\lambda = \lambda_{km} = \sqrt{\dfrac{\pi^2 k^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2 m^2}{b^2}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2 k^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2 m^2}{b^2}}c\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $k + m > 0$. $\square$

Упражнение 3.3.9. Используя специальные функции математической физики — функции Бесселя $J_k(x)$, решить методом разделения переменных задачу Стеклова в круговом цилиндре $\Omega = \Gamma \times (-h, 0)$, $\Gamma = \left\{(x_1, x_2) :\ x_1^2 + x_2^2 < \mathbb{R}^2\right\}$.

Ответ. $\lambda = \lambda_{km} = \mu_{km}\,\mathrm{th}(\mu_{km} h)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, где μ_{km} есть m-ый корень производной функции $J_k(x)$: $J_k'(\mu_{km}) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$. $\square$

В заключение этого параграфа отметим, что операторный подход, который здесь был применен к задаче о малых колебаниях тяжелой идеальной жидкости в произвольном контейнере, может быть использован также и в трех близких задачах: задаче о малых колебаниях идеальной жидкости, находящейся в условиях, близких к невесомости, когда необходим учет капиллярных сил; в задаче о колебаниях жидкости, ограниченной упругой мембраной; в задаче о колебаниях жидкости в сосуде с упругим днищем. Здесь также имеет место свойство дискретности спектра, а спектральная задача примет вид

$$Au = \lambda Bu,$$

где A — оператор потенциальной, а B — оператор кинетической энергии, причем $\mathcal{H}_A \subset\!\to\!\subset\!\to \mathcal{H}_B$.

Заметим еще, что в настоящее время приближенные методы типа метода Ритца хорошо разработаны для всех перечисленных и близких к ним задач; результаты расчетов опубликованы в ряде научных статей и монографий; они оказали значительное влияние на развитие исследований в области освоения космического пространства.

3.4 Малые движения вязкой жидкости в - полностью заполненном контейнере

Эта задача, важная для приложений, по разному может быть исследована в двумерном и в трехмерном случае: с применением функции тока (в $\mathbb{R}^2$) либо на основе ортогонального разложения гильбертова пространства вектор-функций, суммируемых с квадратом по области (в $\mathbb{R}^3$).

3.4.1 Постановка задачи

Будем считать, что вязкая несжимаемая жидкость плотности $\rho > 0$ полностью заполняет некоторый контейнер Ω с границей $S = \partial\Omega$, которую будем считать гладкой.

Выбирая, как и в параграфе 3.3, ось Ox_3 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ в направлении, противоположном действию однородного гравитационного поля с ускорением $\vec{g}$, т.е. считая $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, в состоянии покоя имеем закон Архимеда для статического давления:

$$P_0 = P_0(x_3) = -\rho g x_3 + \mathrm{const}\,. \tag{3.179}$$

Здесь постоянная может быть выбрана произвольной, так как физический смысл имеет лишь разность давлений.

Рассмотрим теперь движения жидкости в контейнере Ω. Так как в данной задаче следует учитывать и вязкие силы, то основное уравнение движения, называемое уравнением Навье-Стокса, должно содержать, в отличие от случая идеальной жидкости, дополнительное слагаемое, связанное с действием вязких сил:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \rho\Big[\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla P + \rho\nu\Delta\vec{v} - \rho g\vec{e}_3. \tag{3.180}$$

Здесь по-прежнему $\vec{v} = \vec{v}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, — поле скоростей жидкости, $P(t,x)$ — поле давлений, $\nu > 0$ — коэффициент так называемой кинематической вязкости, Δ — трехмерный оператор Лапласа: $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{3} \partial^2/\partial x_k^2$.

Далее будем рассматривать лишь малые движения жидкости в контейнере. Представим $P(t,x)$ в виде

$$P(t,x) = P_0(x_3) + p(t,x) \qquad (3.181)$$

и будем считать, что $\vec{v}(t,x)$ и динамическое давление $p(t,x)$ являются бесконечно малыми функция первого порядка малости. После линеаризации уравнения (3.180) с учетом (3.181) и (3.179) получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}. \qquad (3.182)$$

К уравнению (3.182) следует присоединить еще условие несжимаемости жидкости $\mathrm{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega)$, а также условие прилипания на твердой стенке $S = \partial\Omega$ контейнера Ω и начальное условие для поля скоростей. Окончательно получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}, \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \quad (\text{в } \Omega). \end{gathered} \qquad (3.183)$$

3.4.2 Двумерная задача. Применение функции тока

Если задача о малых движениях вязкой жидкости рассматривается в двумерной области, т.е. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то в этом случае от векторной задачи (3.183) можно перейти к начально-краевой задаче для одной искомой скалярной функции, которую называют функцией тока.

Переход к такой начально-краевой задаче осуществим с помощью последовательного рассмотрения ряда этапов, сформулированных в виде упражнений. Введем функцию тока $\psi(t,x) = \psi(t,x_1,x_2)$, $x = (x_1,x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, связанную с полем скоростей $\vec{v}(t,x) = v_1(t,x)\vec{e}_1 + v_2(t,x)\vec{e}_2$ соотношениями

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \qquad (3.184)$$

Физический смысл названия "функция тока" станет очевиден после решения следующего упражнения.

Упражнение 3.4.1. Доказать, что вдоль линии тока (когда $d\vec{r}$ параллельно $\vec{v}$), отвечающей полю скоростей $\vec{v}(t,x)$, выполнено соотношение

$$\psi(t,x_1,x_2)=c(t), \tag{3.185}$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени. $\square$

Таким образом, в заданный момент t частицы жидкости движутся вдоль кривых в области Ω, определяемых семейством (3.185), и потому $\psi(t,x)$ называют *функцией тока.*

Если выполнены соотношения (3.184) и $\psi(t,x)\in C^2(\Omega)$, то

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 x_2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2 x_1}\equiv 0, \tag{3.186}$$

т.е. поле $\vec{v}(t,x)$, определяемое соотношениями (3.184), соленоидально и потому отвечает некоторому движению несжимаемой жидкости.

Рассмотрим задачу (3.183) в $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ и запишем уравнения Навье-Стокса в проекциях на оси координат Ox_1 и Ox_2:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\Delta v_1,\quad \frac{\partial v_2}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\nu\Delta v_2. \tag{3.187}$$

Упражнение 3.4.2. Вводя функцию тока по формулам (3.184) и исключая в (3.187) давление $p(t,x)$ с помощью перекрестного дифференцирования, получить для функции тока $\psi(t,x)$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi=\nu\Delta^2\psi,\quad \Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.\qquad\square \tag{3.188}$$

Упражнение 3.4.3. Опираясь на условие прилипания $\vec{v}=\vec{0}$ (на S), т.е. на условия $v_1(t,x)=0$, $v_2(t,x)=0$ на S, получить для функции тока $\psi(t,x)$ граничные условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\quad \psi=c(t)\quad (\text{на } S). \tag{3.189}$$

Упражнение 3.4.4. С использованием соотношений (3.184) при $t=0$ получить начальное условие для функции тока:

$$\psi(0,x_1,x_2)=\int_{(x_1^0,x_2^0)}^{(x_1,x_2)}\big(-v_2^0(x_1,x_2)dx_1+v_1^0(x_1,x_2)dx_2\big)=:\psi^0(x_1,x_2), \tag{3.190}$$

где (x_1^0,x_2^0) — произвольная точка на $S=\partial\Omega$. $\square$

Так как $\psi(t,x)$ определяется с точностью до произвольной постоянной функции от t, то из (3.190) следует, что и в любой момент времени можно считать $\psi(t,x) \equiv 0$ на S.

Проведенные рассуждения доказывают следующий факт.

Теорема 3.4.1. *Начально-краевая векторная задача* (3.183) *о свободных малых движениях однородной вязкой жидкости в полностью заполненном контейнере* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *равносильна следующей начально-краевой задаче для функции тока* $\psi(t,x)$*:*

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = \nu\Delta^2\psi \quad (\textit{в}\ \Omega),\\ \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на}\ S = \partial\Omega), \quad \psi(0,x) = \psi^0(x). \qquad \square\end{gathered} \tag{3.191}$$

3.4.3 Качественное исследование спектральной задачи для функции тока

Рассмотрим нормальные движения вязкой жидкости, отвечающие задаче (3.191):

$$\psi(t,x) = \psi(x)\exp(-\widehat{\lambda}t), \quad \widehat{\lambda} \in \mathbb{C}. \tag{3.192}$$

Для решений такого вида получаем

$$\Delta^2\psi = \lambda(-\Delta\psi) \quad (\text{в}\ \Omega), \quad \lambda := \widehat{\lambda}/\nu, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на}\ S). \tag{3.193}$$

Покажем, что задача (3.193) может быть приведена к виду

$$A\psi = \lambda B\psi, \quad \psi = \psi(x) \in L_2(\Omega), \tag{3.194}$$

и имеет дискретный спектр; установим также свойства собственных функций $\psi(x)$ этой задачи.

С этой целью введем на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве функций

$$\mathcal{D}(A) := \left\{\psi(x) \in C^4(\overline{\Omega}) : \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на}\ S)\right\} \tag{3.195}$$

оператор A по закону

$$A\psi := \Delta^2\psi. \tag{3.196}$$

Упражнение 3.4.5. Проверить, опираясь на формулу Грина для бигармонического оператора Δ^2, т.е. на формулу

$$\int_\Omega \Delta^2 u \cdot v d\Omega = \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial n}\Delta u\Big)v - \Delta u\frac{\partial v}{\partial n}\Big] dS, \tag{3.197}$$

что оператор A симметричен и положителен на $\mathcal{D}(A) \subset L_2(\Omega)$. $\Box$

Замечание 3.4.1. Формула Грина (3.197) получается из второй формулы Грина для оператора Лапласа Δ, т.е. из формулы

$$\int_\Omega (\Delta w \cdot v - w\Delta v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial w}{\partial n} v - w\frac{\partial v}{\partial n}\Big) dS, \tag{3.198}$$

если здесь вместо w взять $w = \Delta u$. $\Box$

Решение упражнения 3.4.5. Если $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ из $\mathcal{D}(A)$, то

$$(A\psi, \varphi)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \Delta^2\psi \cdot \varphi d\Omega =$$
$$= \int_\Omega \Delta\psi \cdot \Delta\varphi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial n}\Delta\psi\Big)\varphi - \Delta\psi\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big] dS =$$
$$= \int_\Omega \Delta\psi \cdot \Delta\varphi d\Omega = \cdots = \int_\Omega \psi\Delta^2\varphi d\Omega = (\psi, A\varphi)_{L_2(\Omega)},$$

откуда следует свойство симметрии оператора A на $\mathcal{D}(A)$.

Полагая в (3.199) $\varphi = \psi$, имеем

$$(A\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega \geq 0, \tag{3.199}$$

т.е. A — неотрицательный оператор. Однако, если $(A\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} = 0$, то для $\psi(x) \in \mathcal{D}(A)$ получаем, что $\Delta\psi = 0$ в Ω, и тогда, как следует из формулируемого ниже утверждения в упражнении 3.4.6, имеем $\psi(x) \equiv 0$. Поэтому $A > 0$. $\Box$

Упражнение 3.4.6. Проверить, что задача

$$\Delta\psi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \psi = 0 \quad (\text{на } S = \partial\Omega), \tag{3.200}$$

имеет только тривиальное решение $\psi(x) \equiv 0$. $\Box$

Дальнейшее исследование задачи (3.193) основано на следующем вспомогательном, но важном результате.

Теорема 3.4.2. *(вспомогательная). Для функций $\psi(x)$ из $\mathcal{D}(A)$ имеет место равенство*

$$\int_\Omega \Bigg(\sum_{i,k=1}^{2} \Big|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_k}\Big|^2\Bigg) d\Omega = \int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega. \tag{3.201}$$

Доказательство. Оно основано на прямой проверке. Для любой $\psi(x) \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{2} \Big|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k}\Big|^2 \right) d\Omega - \int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega = \\
&= \int_\Omega \left[\Big|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\Big|^2 + 2\Big|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\Big|^2 \right] d\Omega - \\
&- \int_\Omega \left[\Big|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\Big|^2 + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right] d\Omega = \\
&= 2\int_\Omega \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right] d\Omega = \\
&= 2\int_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \Big) - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right] d\Omega - \right. \\
&\left. - \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \Big) - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right] \right\} d\Omega = \\
&= 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot n_1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \cdot n_2 \Big) dS = 0,
\end{aligned}
$$

так как на $\partial\Omega$ для $\psi(x)$ из $\mathcal{D}(A)$ выполнено условие $\nabla\psi = 0$. В ходе доказательства была использована теорема Остроградского-Гаусса; при этом внешняя нормаль $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$. □

Заметим теперь, что для функций $\psi(x)$ из $\mathcal{D}(A)$ и их первых производных $\partial\psi/\partial x_i$ $(i = 1, 2)$ справедливо неравенство Фридрихса, причем с одной и той же константой c^2:

$$
\begin{gathered}
\int_\Omega |\nabla\psi|^2 d\Omega \geqslant c^2 \int_\Omega |\psi|^2 d\Omega, \\
\int_\Omega \Big|\nabla \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big|^2 d\Omega \geqslant c^2 \int_\Omega \Big|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big|^2 d\Omega.
\end{gathered}
\tag{3.202}
$$

Упражнение 3.4.7. Опираясь на (3.201) и (3.202), установить неравенства

$$
\int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega \geqslant c^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 d\Omega \geqslant c^4 \int_\Omega |\psi|^2 d\Omega \tag{3.203}
$$

для элементов из $\mathcal{D}(A)$.

Доказательство. В силу (3.201) и (3.202) имеем

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega &= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^2 \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_k}\right|^2 + \sum_{k=1}^2 \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_k}\right|^2\right) d\Omega = \\ &= \int_\Omega \left(\left|\nabla\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\nabla\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|^2\right) d\Omega \geqslant \\ &\geqslant c^2 \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|^2\right) d\Omega = \\ &= c^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 d\Omega \geqslant c^4 \int_\Omega |\psi|^2 d\Omega. \qquad \square\end{aligned} \tag{3.204}$$

Следствием упражнения 3.4.7 является свойство $A \gg 0$. Действительно, из (3.199) и (3.203) получаем

$$(A\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega \geqslant c^4 \int_\Omega |\psi|^2 d\Omega. \tag{3.205}$$

Упражнение 3.4.8. Опираясь на неравенства (3.201) и (3.204), установить, что энергетическая норма оператора A эквивалентна стандартной норме пространства $W_2^2(\Omega)$.

Решение. Вводя стандартную норму

$$\|\psi\|^2_{W_2^2(\Omega)} := \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^2 \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2 + |\nabla\psi|^2 + |\psi|^2\right) d\Omega, \tag{3.206}$$

докажем лишь неравенство

$$\|\psi\|_A^2 \geqslant c_1^2 \|\psi\|^2_{W_2^2(\Omega)},$$

так как неравенство противоположного смысла в силу (3.201) и определения (3.206) устанавливается тривиально. Имеем

$$\begin{aligned}\|\psi\|_A^2 = (A\psi, \psi)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega &= \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^2 \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right) d\Omega = \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^2 \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right) d\Omega \geqslant\end{aligned} \tag{3.207}$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\left\{ \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \right|^2 \right) + c^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 d\Omega + c^4 \int_\Omega |\psi|^2 d\Omega \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\big[\min(1; c^2; c^4)\big] \|\psi\|^2_{W_2^2(\Omega)} =: c_1^2 \|\psi\|^2_{W_2^2(\Omega)}. \qquad \square$$

Далее для простоты будем называть A бигармоническим оператором.

Введем теперь второй оператор в спектральной задаче (3.193). На множестве

$$\mathcal{D}(B) := \big\{u(x) \in C^2(\overline{\Omega}) : \quad u = 0 \quad (\partial\Omega)\big\} \supset \mathcal{D}(A) \tag{3.208}$$

определим оператор B по закону

$$B\psi := -\Delta\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(B). \tag{3.209}$$

Упражнение 3.4.9. Доказать, что оператор B положительно определен на $D(B)$, причем

$$\|\psi\|^2_B \geqslant c^2 \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{3.210}$$

где c^2 — константа из неравенства Фридрихса (3.202). $\square$

Теорема 3.4.3. *Спектральная задача*

$$\Delta^2\psi = \lambda(-\Delta\psi) \quad (\textit{в } \Omega), \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на } \partial\Omega), \tag{3.211}$$

равносильна операторному уравнению

$$A\psi = \lambda B\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B), \tag{3.212}$$

с введенными выше операторами A и B. При этом имеют место следующие утверждения.

1^0. *Всякое множество функций $\{\psi(x)\}$, ограниченное в $\mathcal{H}_A$, компактно в $\mathcal{H}_B$, и потому задача* (3.212) *имеет дискретный положительный спектр с единственной предельной точкой $+\infty$.*

2^0. *Собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(A; B)$ задачи* (3.212) *обладают свойством*

$$\lambda_k(A; B) \geqslant c^2, \tag{3.213}$$

где c^2 — постоянная из неравенства Фридрихса (3.202)*; они могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения*

$$\frac{\|\psi\|^2_A}{\|\psi\|^2_B} = \int_\Omega |\Delta\psi|^2 d\Omega \Big/ \int_\Omega |\nabla\psi|^2 d\Omega, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на } \partial\Omega). \tag{3.214}$$

3^0. *Собственные функции* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k(A;B)\}_{k=1}^{\infty}$, *образуют ортогональный базис как в* $\mathcal{H}_B$, *так и в* $\mathcal{H}_A$; *их можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям ортогональности:*

$$\int_{\Omega} \nabla\psi_k(x) \cdot \nabla\psi_j(x) d\Omega = \delta_{kj}, \\ \int_{\Omega} \Delta\psi_k(x) \cdot \Delta\psi_j(x) d\Omega = \lambda_k(A;B)\delta_{kj}. \tag{3.215}$$

4^0. *Решения задачи* (3.212) *можно найти по методу Ритца на основе рассмотрения стационарных точек функционала*

$$F(\psi) := \int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 d\Omega - \lambda \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 d\Omega, \quad \psi(x) \in \mathcal{H}_A. \tag{3.216}$$

Доказательство. Равносильность задач (3.211) и (3.212) после введения операторов A и B очевидна.

1^0. Так как энергетическая норма оператора A (см. упражнение 3.4.8) эквивалентна стандартной норме пространства $W_2^2(\Omega)$, а энергетическая норма оператора B эквивалентна стандартной норме пространства $W_2^1(\Omega)$ (докажите это!), то по теореме вложения Соболева $W_2^2(\Omega) \subset\to\subset\to W_2^1(\Omega)$ получаем, что $\mathcal{H}_A \subset\to\subset\to \mathcal{H}_B$, откуда и следует утверждение 1^0.

2^0. Неравенство (3.213) есть следствие вариационного принципа (3.214) и первого неравенства (3.203), которое сохраняется для элементов из $\mathcal{H}_A$.

3^0. Это свойство, а также свойство 4^0 есть следствия основной спектральной теоремы и факта компактности вложения $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B$.

Теорема доказана. $\square$

В заключение этого пункта отметим следующее весьма интересное обстоятельство, которое хорошо известно специалистам по теории упругости. Оказывается, первое собственное значение $\lambda_1(A;B)$ задачи (3.211) в теории упругости характеризует наименьшую величину равномерного сжатия упругой пластинки, при котором пластинка теряет устойчивость. Этот факт еще раз подтверждает тезис о том, что операторные методы математической физики могут быть применены в задачах, имеющих совершенно различный физический смысл, однако общие свойства решений таких задач могут быть идентичными.

Подводя, наконец, итоги рассмотрения плоской задачи, сформулируем основной результат.

Теорема 3.4.4. *Начально-краевая векторная задача* (3.183) *в плоской области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *в качестве нормальных движений, т.е. решений, зависящих от* t *по закону* $\vec{v}(t,x) = \exp(-\widehat{\lambda}t)\vec{v}(x)$, $x = x(x_1, x_2) \in \Omega$, *имеет набор функций, для которых* $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}_k = \nu\lambda_k(A;B)$, *где* $\lambda_k(A;B)$ *— собственные значения задачи* (3.211)*; эти движения суть апериодически затухающие со временем, причем с ростом номера* k *величина декремента затухания* $\nu\lambda_k(A;B)$ *растет к бесконечности. Соответствующие амплитудные функции* $\vec{v}(x) = \vec{v}_k(x)$ *связаны с решениями задачи* (3.211) *посредством формул* (3.184) *и обладают свойствами, являющимися следствием формул* (3.215)*:*

$$\begin{gathered}\int_\Omega \vec{v}_k(x) \cdot \vec{v}_j(x) d\Omega = \delta_{kj}, \\ \int_\Omega \operatorname{rot} \vec{v}_k(x) \cdot \operatorname{rot} \vec{v}_j(x) d\Omega = \widehat{\lambda}_k \delta_{kj}. \qquad \square\end{gathered} \tag{3.217}$$

Литература

[1] Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике.* — М.: Наука, 1970. – 512 с.

[2] Михлин С. Г. *Курс математической физики.* — М.: Наука, 1968. – 576 с.

[3] Михлин С. Г. *Линейные уравнения в частных производных.* — М.: Наука, 1977. – 432 с.

[4] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* — М.: Наука., 1989. – 416 с.

[5] Мышкис А. Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ф., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Методы решения задач гидродинамики для условий невесомости (под редакцией А. Д. Мышкиса).* — Киев: Наукова думка, 1992. – 592 с.

[6] Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике.* — М.: Мир, 1985. – 590 с.

[7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* — М.: ГИТТЛ, 1953. – 680 с.

[8] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике.* — М.: Наука, 1980. – 688 с.

[9] Ж.–П. Обэн. *Приближенное решение эллиптических краевых задач.* — М.: Мир, 1977. – 384 с.

[10] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* — М.: Наука, 1978. – 400 с.

[11] Березанский Б.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. *Функциональный анализ.* — Киев: Выща школа, 1990. – 600 с.

Операторные методы математической физики

Специальный курс лекций
для студентов специальностей
"Математика" и "Прикладная математика"

Автор: Копачевский Николай Дмитриевич

Корректура и верстка: Газиев Э.Л.

Подписано к печати 10.12.2008г. Формат 60х84 1/16.
Бумага тип. ОП. Объем 9 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. Горького 8.
ООО "ФОРМА".