МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Специальный курс лекций для студентов специальности "Математика"

Симферополь, 2009

ББК 22.311
К65
УДК 517.[958+983+984]

Рекомендовано к печати научно-методической комиссией
факультета математики и информатики ТНУ
(протокол № 2 от 12.11.2008 г.)

Рецензент :

Орлов И.В. – д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д. ***Спектральная теория операторных пучков*:** Специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА", 2009 – 128 с. – На русском языке.

В учебном пособии содержатся основные положения теории операторных пучков: постановка спектральной задачи для оператор-функций, действующих в гильбертовом пространстве, методы ее исследования и условия факторизации. Рассматриваются также вопросы полноты и базисности системы корневых элементов операторного пучка, асимптотическое поведение ветвей его собственных значений, а также спектральные свойства операторного пучка С.Г. Крейна, возникающего в гидродинамических задачах.

Для студентов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики.

Оглавление

Предисловие

В данном учебном пособии излагаются основные положения теории так называемых операторных пучков, т.е. оператор-функций, зависящих от комплексного параметра, принимающего значения в какой-либо области комплексной плоскости. Соответствующий специальный курс лекций в течение более двух десятков лет читался студентам–специализантам кафедры математического анализа Симферопольского (ныне Таврического Национального) университета в седьмом – восьмом семестрах. Спецкурс следует изучать после сдачи основного экзамена по функциональному анализу.

Естественный шаг, который осуществляется в спецкурсе, — это переход от классической задачи на собственные значения для оператора, действующего в гильбертовом пространстве, к исследованию спектральной задачи для оператор-функции, являющейся полиномом либо даже аналитической функцией относительно спектрального параметра. Возникающие на практике многие задачи механики, в частности, гидромеханики, теории упругости и другие, требуют развития спектральной теории операторных пучков. Здесь имеется огромная взаимная польза: общая теория помогает исследовать сложные и практически важные спектральные задачи, а эти прикладные задачи подсказывают дальнейшие пути развития теории.

На содержание данного спецкурса большое влияние оказали работы таких известных математиков, как М.В. Келдыш, М.Г. Крейн и Г.Лангер, С.Г. Крейн и его ученики, А.С. Маркус и В.И. Мацаев, Т.Я. Азизов и ряд других коллег. Особую роль сыграли также лекции А.С. Маркуса, прочитанные им в Ростовском, Харьковском и Симферопольском университетах.

Автор выражает благодарность А.С. Маркусу за внимание к данному кругу вопросов и полезные обсуждения.

Глава 1

Предварительные сведения

В этой главе дается постановка спектральной задачи для оператор-функций, действующих в гильбертовом пространстве, приводятся основные определения, связанные с этой проблемой, описываются методы исследования таких задач.

1.1 Введение

Здесь приводятся постановка задачи на собственные значения и примеры некоторых спектральных задач.

1.1.1 Стандартные спектральные задачи

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. является линейным ограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H}$ и заданным на области определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$.

В курсе функционального анализа в качестве основной спектральной задачи рассматривается задача вида

$$L(\lambda)\varphi := (A - \lambda I)\varphi = 0, \tag{1.1}$$

где $\varphi \neq 0$ — элемент из $\mathcal{H}$, а $\lambda \in \mathbb{C}$. Оператор-функцию $L(\lambda)$ из (1.1), линейно зависящую от спектрального параметра λ, обычно называют *линейным операторным пучком*.

Задачи вида (1.1) часто возникают при исследовании реальных физических процессов. Однако только такими задачами не исчерпываются потребности практики. Приведем ряд соответствующих примеров.

1.1.2 Задачи о малых колебаниях сплошных сред

Пусть при движении какой-либо динамической системы с бесконечным числом степеней свободы (жидкость, упругое тело и т.д.) действуют не только силы упругости, но также силы сопротивления (диссипации). Отклонение (смещение такой среды от состояния покоя) обычно описывается функцией $u = u(t)$ переменной t (т.е. времени) со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Закон Ньютона (произведение массы на ускорение равно сумме действующих сил) в такой среде в абстрактной форме записывается в виде линейного дифференциального уравнения вида

$$T\ddot{u} + F\dot{u} + Vu = 0, \tag{1.2}$$

где точкой обозначены производные по t от искомой функции $u(t)$, а T, F и V — линейные операторы, действующие в $\mathcal{H}$ и имеющие отчетливый физический смысл. Так, T есть оператор кинетической энергии, которая через T выражается в виде квадратичного функционала $(T\dot{u}, \dot{u})/2$; поэтому T — положительный оператор в $\mathcal{H}$. Далее, оператор V потенциальной энергии самосопряжен и ограничен снизу, т.е. $(Vu, u) \geqslant \gamma(u, u)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Если состояние равновесия (покоя) динамической системы статически устойчиво по линейному приближению, то оператор V также положителен. Наконец, оператор F диссипации энергии самосопряжен и неотрицателен: $(F\dot{u}, \dot{u}) \geqslant 0$.

Будем разыскивать (согласно известному в теории обыкновенных дифференциальных уравнений методу Эйлера) частные (элементарные) решения уравнения (1.2) в виде

$$u(t) = e^{\lambda t}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{1.3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторый искомый параметр, а $\varphi \neq 0$ не зависит от t. Тогда для решений вида (1.3) из (1.2) приходим к спектральной задаче

$$L(\lambda)\varphi := (\lambda^2 T + \lambda F + V)\varphi = 0 \tag{1.4}$$

для *квадратичного операторного пучка* $L(\lambda)$. Пучки вида (1.4) впервые исследовали М.Г. Крейн и Г.К. Лангер.

1.1.3 Нормальные колебания вязкой жидкости в сосуде

Брат М.Г. Крейна, также всемирно известный математик С.Г. Крейн, и его ученики изучали нормальные движения тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде. Рассматривая элементарные (нормальные) движения жидкости не в виде (1.3), а в виде $e^{-\lambda t}\varphi$, они привели исследование проблемы к задаче на собственные значения

$$L(\lambda)\varphi := (I - \lambda A - \lambda^{-1} B)\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{1.5}$$

где A — компактный положительный, а B — компактный неотрицательный операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Здесь возникает мероморфный пучок $L(\lambda)$, имеющий особенности при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Он будет предметом подробного исследования в данном курсе лекций.

1.1.4 Колебания идеальной вращающейся жидкости в открытом сосуде

При изучении свободных колебаний идеальной вращающейся жидкости в открытом сосуде автор данного курса лекций пришёл к задаче Коши

$$\ddot{u} - 2i\omega_0 A\dot{u} + Bu = 0, \quad u(0) = u^0, \quad \dot{u}(0) = u^1, \tag{1.6}$$

где ω_0 — угловая скорость вращения сосуда, $B \geqslant 0$ — оператор потенциальной энергии, а A — гироскопический оператор, обусловленный своим появлением действию кориолисовых (гироскопических) сил на динамическую систему. Этот оператор обладает свойствами $A = A^*$, $\sigma(A) = [-1, 1]$, т.е. его спектр $\sigma(A)$ заполняет весь отрезок $[-1, 1]$.

Рассматривая элементарные решения задачи (1.6) в виде

$$u(t) = e^{i\omega t}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{1.7}$$

где ω — частота собственных колебаний, а φ — так называемый амплитудный элемент, приходим к спектральной задаче

$$L(\omega)\varphi := (\omega^2 I - 2\omega_0\omega A - B)\varphi, \quad \omega \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

для квадратичного операторного пучка $L(\omega)$.

Эти примеры показывают, насколько важен вопрос об изучении *полиномиальных* и более сложного вида операторных пучков, являющихся оператор-функциями от спектрального параметра. Изложение некоторых результатов, полученных в этом направлении, и будет проведено в данном курсе лекций.

1.2 Основные определения

Здесь будут введены некоторые известные обозначения и определения.

1.2.1 Линейные ограниченные операторы

Далее все проблемы, которые будут изучаться в этом курсе лекций, рассматриваются в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которое всегда будем считать сепарабельным. Область определения линейного (аддитивного и однородного) оператора A, действующего в $\mathcal{H}$, будем обозначать через $\mathcal{D}(A)$, а множества его значений — через $\mathcal{R}(A)$, т.е.

$$\mathcal{R}(A) := \{Ax : \; x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H}.$$

Как правило, далее будем иметь дело с линейными ограниченными операторами, для таких операторов всегда считаем, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, будем обозначать через $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Как известно, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ является банаховым пространством с нормой

$$\|A\| := \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|.$$

Напомним еще, что $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ является полным нормированным кольцом (в другой терминологии — банаховой алгеброй), т.е.

$$\{A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\} \Rightarrow \{A + B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \; AB \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \; BA \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

1.2.2 Резольвента и спектр оператора

Начнем с простейших определений.

Определение 1.2.1. *Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется* ***регулярной точкой*** *оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, если существует определенный на всем $\mathcal{H}$ ограниченный оператор*

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1},$$

называемый ***резольвентой.*** $\square$

Из этого определения следует, что

$$R(\lambda)(A-\lambda I) = (A-\lambda I)R_\lambda(A) = I.$$

Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек оператора A, называемое *резольвентным множеством* оператора A, всегда открыто. При этом если $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то к $\rho(A)$ причисляется и бесконечно удаленная точка $\lambda = \infty$.

Определение 1.2.2. *Оператор-функция $L(\lambda)$, $\lambda \in G \subset \mathbb{C}$, называется голоморфной (аналитической) оператор-функцией в области G, если для всех $\lambda \in G$ оператор $L(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и в окрестности каждой точки $\lambda_0 \in G$ функция $L(\lambda)$ допускает разложение в сходящийся по равномерной операторной норме степенной ряд*

$$L(\lambda) = L(\lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k C_k, \quad C_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad \square$$

Упражнение 1.2.1. *Доказать, что резольвентное множество $\rho(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ открыто и в области $\rho(A)$ резольвента $R_\lambda(A)$ является голоморфной оператор-функцией.* $\square$

Указание. Опираясь на представление

$$A - \lambda I = (A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (A - \lambda_0 I)[I - (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)],$$

справедливое при $\lambda_0 \in \rho(A)$, проверить, что при

$$|\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_{\lambda_0}(A)\| < 1 \tag{1.9}$$

имеет место соотношение

$$\begin{aligned} R_{\lambda_0}(A) &= [I - (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}R_{\lambda_0}(A) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k[R_{\lambda_0}(A)]^{k+1}. \qquad \square \end{aligned} \tag{1.10}$$

Следствием формул (1.9) и (1.10) является такое утверждение: в области $\rho(A)$ резольвента $R_\lambda(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ является голоморфной оператор-функцией.

Упражнение 1.2.2. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Доказать, что при $\lambda > \|A\|$ резольвента $R_\lambda(A)$ существует и представима в виде ряда*

$$R_\lambda(A) = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k, \qquad (1.11)$$

откуда следует, что

$$\{\lambda : \ |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A). \qquad \square$$

Определение 1.2.3. *Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется дополнение резольвентного множества $\rho(A)$ до всей комплексной плоскости, т.е.*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A). \qquad \square \qquad (1.12)$$

Так как $\rho(A)$ — открытое множество, то $\sigma(A)$ — всегда *замкнутое множество.*

Упражнение 1.2.3. *Доказать, что спектры $\sigma(A)$ оператора A и $\sigma(A^*)$ сопряженного к A оператора A^* расположены симметрично относительно вещественной оси.* $\square$

Указание. Воспользоваться определением (1.12) и тем фактом, что если $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то $(A^* - \overline{\lambda} I)^{-1} = [(A - \lambda I)^{-1}]^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\square$

1.2.3 Собственные значения, собственные и присоединенные элементы оператора

Очевидно, спектру $\sigma(A)$ принадлежат те числа $\lambda = \lambda_0$, при которых уравнение

$$A(\lambda)\varphi := (A - \lambda I)\varphi = 0 \qquad (1.13)$$

имеет нетривиальное решение $\varphi = \varphi_0 \neq 0$. В этом случае элемент φ_0 называют *собственным элементом* оператора A, отвечающим *собственному значению* λ_0.

Множество всех собственных значений оператора A будем обозначать далее $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. Очевидно, $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$, если оператор $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda_0 I)^{-1}$ не существует: в этом случае ядро $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$.

Определение 1.2.4. *Элемент $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \neq 0$, называется корневым элементом оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, отвечающим собственному значению λ_0, если*

$$A^n(\lambda_0)\varphi := (A - \lambda_0 I)\varphi = 0 \qquad (1.14)$$

при некотором натуральном n.

Если уравнение (1.14) *имеет нетривиальное решение при $n = 2$ и $A(\lambda_0)\varphi \neq 0$, то элемент $\varphi_1 = \varphi$ называется первым присоединенным элементом к собственному элементу $\varphi_0 := A(\lambda_0)\varphi \neq 0$. Аналогично определяются последующие присоединенные элементы: второй (при $n = 3$), третий (при $n = 4$) и т.д.* $\square$

Далее собственные и присоединенные элементы опретора A будем называть для краткости *корневыми элементами* этого оператора.

Упражнение 1.2.4. *Доказать, что если $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то он не имеет присоединенных элементов.*

Указание. При решении этого упражнения воспользоваться следующими фактами: а) собственные значения самосопряженного оператора A являются вещественными; б) если

$$(A - \lambda_0 I)^2\varphi = 0, \quad \varphi \neq 0, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R},$$

то для $\varphi_0 := (A - \lambda_0 I)\varphi$ выполнены соотношения

$$\varphi_0 \in \mathcal{R}(A - \lambda_0 I) \cap (\mathcal{R}(A - \lambda_0 I))^{\perp}.$$

Отсюда будет следовать, что $\varphi_0 = 0$. Тогда $\varphi \neq 0$ удовлетворяет уравнению $(A - \lambda_0 I)\varphi = 0$, т.е. этот элемент является не присоединенным, а собственным элементом, отвечающим собственному значению λ_0. $\square$

Элементы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, отвечающие собственному значению λ_0 будем называть *цепочкой* из собственного и присоединенных к нему элементов.

Множество всех корневых элементов (по определению отличных от нуля) оператора A, отвечающее одному и тому же собственному значению λ_0, вместе с элементом $\varphi = 0$ образуют линейное множество (линеал) $\mathcal{L}_{\lambda_0}$, которое называют *корневым линеалом.* В такой корневой линеал входят все собственные элементы (их может быть несколько линейно независимых), отвечающие собственному значению λ_0, и цепочки элементов, присоединенных к каждому из собственных элементов.

Размерность $\nu_{\lambda_0} := \dim \mathcal{L}_{\lambda_0}$ линеала $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ_0. Если $\nu_{\lambda_0} < \infty$, то линеал $\mathcal{L}_{\lambda_0}$, очевидно, является замкнутым. В этом случае говорят о *корневом подпространстве* $\mathcal{L}_{\lambda_0}$.

Очевидно также, что *собственное подпространство* $\mathfrak{Z}_{\lambda_0} := \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)$, т.е. множество, состоящее из нулевого элемента и всех собственных элементов оператора A, отвечающих собственному значению λ_0, является частью $\mathcal{L}_{\lambda_0}$: $\mathfrak{Z}_{\lambda_0} \subset \mathcal{L}_{\lambda_0}$.

Размерность $\alpha_{\lambda_0} := \dim \mathfrak{Z}_{\lambda_0}$ подпространства $\mathfrak{Z}_{\lambda_0}$ называется *собственной кратностью* собственного значения λ_0. Таким образом, собственная кратность любого собственного значения не превышает его алгебраической кратности: $\alpha_{\lambda_0} \leqslant \nu_{\lambda_0}$.

Пусть λ_0 — собственное значение оператора A, а уравнение $(A - \lambda_0 I)^n \varphi = 0$ имеет нетривиальное решение $\varphi \neq 0$ при некотором *конечном* n. (Такая ситуация всегда реализуется при $\nu_{\lambda_0} < \infty$). Возьмем для выбранного φ наименьшее из всех возможных чисел n, когда этот факт имеет место, и образуем цепочку элементов

$$\begin{aligned}&\varphi_0 := (A - \lambda_0 I)^{n-1}\varphi \neq 0, \quad \varphi_1 := (A - \lambda_0 I)^{n-2}\varphi \neq 0, \dots,\\ &\varphi_{n-2} := (A - \lambda_0 I)\varphi \neq 0, \quad \varphi_{n-1} := \varphi \neq 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что φ_0 — собственный элемент оператора A, отвечающий собственному значению λ_0, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ — присоединенные к нему элементы. Эта *цепочка, составленная из собственного и присоединенных к нему элементов, называется жордановой цепочкой.*

Упражнение 1.2.5. *Доказать, что корневой линеал $\mathcal{L}$, отвечающий построенной жордановой цепочке, есть инвариантное подпространство для A, т.е. $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, причем* $\dim \mathcal{L} = n$, *так как элементы цепочки являются линейно независимыми.*

Указание. Заметьте, что

$$(A - \lambda_0 I)\varphi_0 = 0, \quad (A - \lambda_0 I)\varphi_1 = \varphi_0, \quad \dots, \quad (A - \lambda_0 I)\varphi_{n-1} = \varphi_{n-2},$$

и воспользуйтесь соотношением

$$A \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k = (A - \lambda_0 I) \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k + \lambda_0 \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k$$

при произвольных c_k. $\square$

1.3 Собственные и присоединенные элементы операторного пучка по М.В. Келдышу. Истоки возникновения спектральной теории операторных пучков

Здесь будет дано определение корневых элементов операторного пучка и будет указана связь такого определения с дифференциально-операторными уравнениями в гильбертовом либо банаховом пространстве.

1.3.1 Определения

Будем считать, что задана оператор-функция $A(\lambda)$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, голоморфная в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.3.1. *Точка $\lambda_0 \in G$ называется* **регулярной точкой** *пучка $A(\lambda)$, $\lambda_0 \in \rho\big(A(\lambda)\big)$, если оператор $A(\lambda_0)$ имеет ограниченный обратный, заданный на всем пространстве $\mathcal{H}$.* □

Определение 1.3.2. *Число $\lambda_0 \in G$ называется* **точкой спектра** *функции $A(\lambda)$, $\lambda_0 \in \sigma(A(\lambda))$, если $A(\lambda_0)$ не имеет ограниченного обратного.* □

Из этих определений следует, что

$$\rho(A(\lambda)) = G \backslash \sigma(A(\lambda)).$$

Определение 1.3.3. *Число $\lambda_0 \in G$ называется* **собственным значением** *оператор-функции $A(\lambda)$, если уравнение*

$$A(\lambda_0)\varphi_0 = 0 \tag{1.15}$$

имеет ненулевое решение φ_0. Это решение называется **собственным элементом***, отвечающим собственному значению λ_0.* □

Определение 1.3.4. *Подпространство $\mathfrak{Z}_{\lambda_0} = \mathrm{Ker} A(\lambda_0)$ всех решений уравнения (1.15) называется* **собственным подпространством** *пучка $A(\lambda)$, отвечающим собственному значению λ_0.* □

Перейдем теперь к определению присоединенных элементов для произвольной аналитической оператор-функции $A(\lambda)$. Это определение принадлежит М.В. Келдышу.

Определение 1.3.5. *Элементы φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, называют* ***присоединенными*** *к собственному элементу φ_0, отвечающему собственному значению λ_0, если*

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0)\varphi_{m-k} = 0, \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \qquad \square \tag{1.16}$$

Если выполнены соотношения (1.15) и (1.16), то говорят, что $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют *жорданову цепочку* корневых элементов.

Расшифруем определение (1.16). Вместе с (1.15) имеем:

$$\begin{aligned} &A(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \\ &A(\lambda_0)\varphi_1 + A'(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \\ &A(\lambda_0)\varphi_2 + A'(\lambda_0)\varphi_1 + \frac{1}{2!}A''(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1.17}$$

Упражнение 1.3.1. *Проверить, что для линейного пучка $A(\lambda) := A - \lambda I$ определение 1.3.5 присоединенных элементов совпадает с определением 1.2.4 корневых элементов оператора A.* $\square$

Замечание 1.3.1. *Элементы жордановой цепочки для данных λ_0 и φ_0 определяются неоднозначно. Если, например,*

$$A(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad A(\lambda_0)\varphi_1 + A'(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad A(\lambda_0)\widetilde{\varphi}_1 + A'(\lambda_0)\varphi_0 = 0,$$

то

$$A(\lambda_0)(\varphi_1 - \widetilde{\varphi}_1) = 0 \Longrightarrow \widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + c\varphi_0, \quad \forall\, c \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Замечание 1.3.2. *Элементы жордановой цепочки $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются линейно независимыми. Проверим этот факт для случая $n = 1$. Пусть $c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 = 0$. Тогда*

$$A(\lambda_0)(c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1) = c_1 A(\lambda_0)\varphi_1 = 0.$$

Так как $A(\lambda_0)\varphi_1 = -A'(\lambda_0)\varphi_0 \neq 0$ (иначе φ_1 был бы не первым присоединенным, а собственным элементом), то $c_1 = 0$, а потому и $c_0 = 0$. $\square$

Определение 1.3.5 присоединенных элементов по М.В. Келдышу, на первый взгляд, кажется, странным или по крайней мере неочевидным. Однако сейчас будет выяснено, что на самом деле оно является совершенно естественным.

1.3.2 Связь с эволюционными задачами

Как сейчас будет выяснено, классическое определение 1.2.4 системы корневых элементов оператора A (либо линейного пучка $A - \lambda I$) естественно связано со структурой элементарных решений задачи Коши для простейшего эволюционного уравнения

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u^0, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{1.18}$$

в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В то же время определение 1.3.5 корневых элементов (по М.В. Келдышу) естественно возникает при изучении операторных эволюционных уравнений вида

$$A\Big(\frac{d}{dt}\Big)u := \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{d^k u}{dt^k} = 0, \quad A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad m \leqslant \infty. \tag{1.19}$$

В частности, при $m = \infty$ имеем дифференциальное уравнение бесконечного порядка. Ему отвечает аналитическая оператор-функция

$$A(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k. \tag{1.20}$$

При $m < \infty$ уравнению (1.19) отвечает многочлен степени m:

$$A_m(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} A_k \lambda^k. \tag{1.21}$$

Итак, рассмотрим элементарные решения задачи (1.18) в виде

$$u_{\text{э}}(t) = e^{\lambda t}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}. \tag{1.22}$$

Легко видеть, что функция вида (1.22) будет решением задачи (1.18) тогда и только тогда, когда при $\lambda = \lambda_0$ элемент $\varphi = \varphi_0$ является решением уравнения

$$(A - \lambda_0 I)\varphi_0 = 0, \tag{1.23}$$

т.е. является собственным элементом оператора A (линейного пучка $A - \lambda I$).

Наряду с решениями вида (1.22) будем рассматривать также элементарные решения задачи (1.18) в виде

$$u_{\text{э}}(t) = e^{\lambda t} p_n(t), \quad p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\varphi_k, \tag{1.24}$$

где $p_n(t)$ — полиномиальная функция степени n со значениями в $\mathcal{H}$, а φ_k — некоторые элементы из $\mathcal{H}$.

Упражнение 1.3.2. *Убедиться, что элемент* φ_0 *в* (1.24) *является собственным, а элементы* φ_k, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$, *— присоединенными к нему элементами для линейного оператора* A *(пучка* $A(\lambda) := A - \lambda I$*), отвечающие собственному значению* $\lambda = \lambda_0$. $\square$

Эти рассмотрения показывают, что система корневых элементов оператора A тесно связана с решениями обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида (1.18) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения (1.19), причем для простоты будем считать, что $m = 2$, т.е. оно имеет вид

$$\sum_{k=0}^{2} A_k \frac{d^k u}{dt^k} = 0. \tag{1.25}$$

Упражнение 1.3.3. *Проверить, что функция вида* (1.24) *тогда и только тогда будет элементарным решением уравнения* (1.25), *когда элементы* φ_k *в* (1.24) *образуют жорданову цепочку корневых элементов по М.В. Келдышу для собственного значения* λ_0 *операторного пучка* (1.21) *при* $m = 2$.

Решение. Подставляя (1.24) в (1.25), приходим, после сокращения на $e^{\lambda t}$, к тождеству

$$A_0 p_n(t) + A_1(\lambda p_n(t) + p_n'(t)) + A_2(\lambda^2 p_n(t) + 2\lambda p_n'(t) + p_n''(t)) \equiv 0,$$

которое можно переписать в виде

$$A(\lambda) p_n(t) + \frac{A'(\lambda)}{1!} p_n'(t) + \frac{A''(\lambda)}{2!} p_n''(t) \equiv 0, \quad A(\lambda) := \sum_{k=0}^{2} A_k \lambda^k. \tag{1.26}$$

Учитывая еще формулы

$$p_n'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \varphi_k, \quad p_n''(t) = \sum_{k=0}^{n-k-2} \frac{t^{n-k-2}}{(n-k-2)!} \varphi_k,$$

и приравнивая коэффициенты при степенях t в (1.26), окончательно имеем

$$\frac{1}{n!} A(\lambda)\varphi_0 = 0, \quad \frac{1}{(n-1)!}[A(\lambda)\varphi_1 + \frac{A'(\lambda)}{1!}\varphi_0] = 0, \tag{1.27}$$

$$\frac{1}{(n-2)!}[A(\lambda)\varphi_2 + \frac{A'(\lambda)}{1!}\varphi_1 + \frac{A''(\lambda)}{2!}\varphi_0] = 0, \ldots .$$

Отсюда следует, что нетривиальными решения уравнения (1.25) в форме (1.24) будут в том и только том случае, когда $\lambda = \lambda_0$ — собственное значение пучка $A(\lambda) = A_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{2} \lambda^k A_k$, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — элементы жордановой цепочки, отвечающие этому собственному значению. $\square$

Упражнение 1.3.4. *(самостоятельно). Убедиться, что и для дифференциального уравнения* (1.19) *степени* $m \leq \infty$, *а также соответствующего операторного пучка* (1.21) *при том же* m *справедливы утверждения, сформулированные в предыдущем упражнении 1.3.3: элементарным решениям вида* (1.24) *отвечают при* $\lambda = \lambda_0$ *цепочки корневых элементов (по М.В. Келдышу) пучка* (1.21).

Указание. Здесь выкладки, аналогичные проведенным выше при $m = 2$, основаны на формулах

$$u_э^{(k)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j p_n^{(k-j)}(t),$$

$$p_n(t) = \sum_{l=0}^{n} \frac{t^{n-l}}{(n-l)!}\varphi_l,$$

$$p_n^{(k-j)}(t) = \sum_{l=0}^{n-k+j} \frac{t^{n-l-k+j}}{(n-l-k+j)!}\varphi_l,$$

где C_k^j — число сочетаний из k элементов по j. В итоге возникает тождество вида (проверьте этот факт!)

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \sum_{j=0}^{k} C_j^k \lambda^j \sum_{l=0}^{n-k+j} \frac{t^{n-l-k+j}}{(n-l-k+j)!}\varphi_l \equiv 0,$$

откуда снова следует соотношения (1.27). $\square$

1.3.3 О полноте системы элементарных решений

Отметим еще одно свойство элементарных решений.

Упражнение 1.3.5. *Проверить, что наряду с элементарными решениями вида* (1.24) *для задачи Коши* (1.18) *функции*

$$u_Э^{[k]}(t) := \left(\frac{d}{dt} - \lambda I\right)^k u_Э(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.28}$$

также являются элементарными решениями, и для них выполнены начальные условия

$$u_Э(0) = \varphi_n, \quad u_Э^{[1]}(0) = \varphi_{n-1}, \ldots, u_Э^{[n]}(0) = \varphi_0. \qquad \square \tag{1.29}$$

Аналогичное утверждение имеет место и для задачи Коши (1.19). Из этих фактов следует, что для линейных комбинаций элементов из цепочек корневых элементов, отвечающих собственному значению λ, можно взять соответствующие линейные комбинации элементарных решений задачи (1.18) или (1.19) таким образом, чтобы выполнялись начальные условия для этих задач, отвечающие указанным линейным комбинациям начальных данных задач Коши. Отсюда и возникает понятие полноты системы элементарных решений.

Перейдем непосредственно к определению этого понятия. Пусть операторный пучок $A(\lambda) := A_m(\lambda)$ вида (1.21) имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, каждое из которых конечнократно, т.е. имеет конечную алгебраическую (а потому и геометрическую) кратность. Пусть для данного собственного значения λ_j алгебраической кратности ν_j количество линейно независимых собственных элементов равно α_j, а $\{r_{kj}\}_{k=1}^{\alpha_j}$ — набор длин соответствующих жордановых цепочек (корневых элементов). Рсположим эти цепочки в порядке убывания r_{kj}, т.е.

$$r_{1j} \geqslant r_{2j} \geqslant \ldots \geqslant r_{\alpha_j,j} \geqslant 1.$$

При этом, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\alpha_j} r_{kj} = \nu_j. \tag{1.30}$$

Пусть

$$\varphi_{0kj}, \varphi_{1kj}, \ldots, \varphi_{pkj}, \ldots, \varphi_{r_{kj},kj} \tag{1.31}$$

— цепочка корневых элементов, отвечающая при собственном значении λ_j собственному элементу φ_{0kj}, $k = 1, \ldots, \alpha_j$.

Составим комбинации вида (1.24) для цепочек (1.31), имеем

$$\psi_{ikj}(t) = e^{\lambda_j t} \sum_{p=0}^{i} \frac{t^{i-p}}{(i-p)!}\varphi_{pkj}, \quad i = \overline{0, r_{kj}-1}. \tag{1.32}$$

Эти функции, как уже было выяснено выше, являются элементарными решениями уравнения (1.19). Поэтому их линейные комбинации вида

$$u_{э}^{N}(t) := \sum_{j=1}^{N} u_{эj}(t) := \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\alpha_j}\sum_{i=0}^{r_{kj}-1} c_{ikj}\psi_{ikj}(t) \tag{1.33}$$

с произвольными коэффициентами c_{ikj} также являются решениями уравнения (1.19).

Определение 1.3.6. *Система элементарных решений уравнения* (1.19) *называется* ***полной****, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое натуральное* $N = N(\varepsilon)$ *и коэффициенты* $c_{ikj}(\varepsilon)$*, что при любых начальных элементах*

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \ldots, \quad u^{(m-1)}(0) = u^{m-1}, \tag{1.34}$$

принадлежащих гильбертовому пространству $\mathcal{H}$*, для решения вида* (1.33) *с выбранными* $N(\varepsilon)$ *и* $c_{ikj}(\varepsilon)$ *выполнены условия*

$$\begin{gathered} \|u_{э}^{N}(0) - u^0\| < \varepsilon, \quad \|(u_{э}^{N})'(0) - u^1\| < \varepsilon, \quad \ldots \quad , \\ \|(u_{э}{}^{N})^{(m-1)}(0) - u^{m-1}\| < \varepsilon. \qquad \square \end{gathered} \tag{1.35}$$

Определение 1.3.7. *Система корневых (собственных и присоединенных) элементов операторного пучка* $A_m(\lambda)$ *вида* (1.21)*, ассоциированного с уравнением* (1.19)*, называется* ***m-кратно полной****, если система элементарных решений уравнения* (1.19) *полна в смысле определения 1.3.6.* $\square$

Из этого определения следует, что если система корневых элементов операторного пучка $A_m(\lambda)$ полна, то можно с любой наперед заданной точностью аппроксимировать начальные данные задачи Коши (1.19), (1.34). В виду этого обстоятельства далее в курсе лекций основное внимание будет уделено вопросам полноты системы корневых элементов операторных пучков, а также связанными с этими вопросами проблеме базисности корневых элементов и проблеме отыскания спектра пучка $A_m(\lambda)$.

Итак, основными проблемами, рассматриваемыми в спектральной теории операторных пучков, являются:

1^0. изучение характера спектра пучка (дискретность, непрерывность и т.д.);

2^0. вопросы полноты и базисности системы корневых элементов пучка;

3^0. асимптотическое поведение отдельных ветвей собственных значений, а также некоторые другие проблемы.

Упражнение 1.3.6. *Убедиться, что для уравнения* (1.19) *справедливо утверждение, отмеченное ранее и сформулированное в упражнении 1.3.5 для уравнения* (1.18)*: функции* (1.28) *будут элементарными решениями уравнения* (1.19) *и для них также выполнены начальные условия* (1.29)*, если* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— цепочка корневых элементов по М.В. Келдышу.* $\square$

1.4 Два основных метода исследования операторных пучков

В этом параграфе на простом примере будут пояснены два основных приема, два метода исследования операторных пучков: метод глобальной линеаризации по М.В. Келдышу и метод факторизации операторного пучка.

1.4.1 Предварительные замечания

Будем рассматривать сейчас полиномиальные операторные пучки вида

$$A_m(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} A_k \lambda^k, \quad A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{1.36}$$

Общее качественное замечание для пучка такого вида состоит в следующем.

Пусть пучок $A_m(\lambda)$ имеет *дискретный спектр*, т. е. этот спектр состоит из изолированных собственных значений, каждое из которых имеет конечную алгебраическую кратность, а также из предельных точек этого счетного множества изолированных собственных значений. (Отметим, что такая ситуация является типичной в задачах математической физики; она реализуется, например, и для линейного пучка

$$A(\lambda) := A - \lambda I, \quad A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}).$$

Тогда у типичного пучка (многочлена степени m) запас корневых элементов "в m раз больше" размерности пространства $\mathcal{H}$, и из этого запаса следует отобрать лишь часть корневых элементов, предварительно разбив эти элементы на m множеств таким образом, чтобы каждое множество образовывало *полную* и *минимальную* систему корневых элементов в $\mathcal{H}$.

Имеется и другая возможность, другой подход, который восходит к М.В. Келдышу. Он связан с понятием m-кратной полноты и переходом от спектральной задачи для пучка $A_m(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{H}$ к преобразованной задаче в пространстве $\mathcal{H}^n := \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \ldots \mathcal{H}}_{n}$. Оба эти подхода сейчас будут объяснены на простом примере.

1.4.2 Основной пример

Рассмотрим квадратичный операторный пучок вида

$$L(\lambda) := \lambda^2 I - A^2, \quad 0 < A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{1.37}$$

Как следует из известной теоремы Гильберта–Шмидта, задача на собственные значения для оператора A, т.е. задача

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \in (\mathcal{H}), \tag{1.38}$$

для положительного компактного оператора имеет счетное множество $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ положительных конечнократных собственных значений $\lambda_j = \lambda_j(A)$,

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_j \geqslant \ldots, \quad \lambda_j \longrightarrow +0 \quad (j \longrightarrow \infty),$$

и отвечающую им систему собственных элементов $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$, которая образует ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Легко проверить, что

$$L(\pm\lambda_j(A))\varphi_j = 0,$$

т.е. элементы φ_j являются собственными элементами пучка $L(\lambda)$, отвечающими собственным значениям $\pm\lambda_j(A)$. Ясно также, что пучок $L(\lambda)$ других собственных значений не имеет. Из этих простых фактов можно сделать следующие выводы.

1^0. Для нелинейных операторных пучков собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям, не обязательно линейно независимы. Действительно, в разобранном примере собственным значениям $\lambda_j(A)$ и $-\lambda_j(A)$ отвечает один и тот же собственный элемент $\varphi_j(A)$. Поэтому в дальнейшем *целесообразно выделять полные и притом минимальные системы элементов.*

2^0. В приведенном примере система собственных элементов $\{\varphi_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающая лишь положительным собственным значениям $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$ пучка $L(\lambda)$, полна и минимальна в $\mathcal{H}$; это же свойство имеет место и для отрицательных собственных значений $\{-\lambda_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$.

Вот почему для полиномиального пучка степени m имеет смысл разбивать его спектр на такие m множеств, чтобы отвечающая каждому из этих множеств система корневых элементов была полной и минимальной в пространстве $\mathcal{H}$.

1.4.3 Идея М.В. Келдыша

Продемонстрируем теперь подход М.В. Келдыша для операторного пучка (1.37). В общей ситуации этот подход называется *методом глобальной линеаризации*.

Рассмотрим уравнение

$$L(\lambda)\varphi \equiv (\lambda^2 I - A^2)\varphi = 0. \tag{1.39}$$

Так как $A > 0$, то собственные значения λ задачи (1.39) ненулевые, и можно в (1.39) осуществить замену

$$A\varphi =: \lambda\psi. \tag{1.40}$$

Тогда вместо (1.39), (1.40) приходим к спектральной задаче

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, элементами которого являются вектор-столбцы $(\varphi; \psi)^t$, φ, $\psi \in \mathcal{H}$.

Легко проверить, что

$$\operatorname{Ker} \mathfrak{A} := \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} = \{(0; 0)^t\}.$$

Кроме того, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2)$. Поэтому задача (1.41) (по теореме Гильберта–Шмидта) имеет счетное множество собственных значений с предельной точкой в нуле. Именно, ее решения имеют вид (проверьте!)

$$\lambda_j^{\pm} = \pm\lambda_j(A), \quad (\varphi_j^{\pm}; \psi_j^{\pm})^t = (\varphi_j(A), \pm\varphi_j(A))^t, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.42}$$

Как следует опять-таки из теоремы Гильберта–Шмидта, система элементов (1.42) собственных элементов задачи (1.41) будет полной в $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ (и даже будет являться в этом пространстве ортогональным базисом), и можно говорить о *двукратной полноте* системы корневых (в данном случае лишь собственных) элементов исходного операторного пучка $L(\lambda)$.

По аналогии с рассмотренным примером для полиномиального пучка степени m вводится понятие *m-кратной полноты*.

Оказывается, имеется два принципиально разных подхода для построения полной системы корневых элементов полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$: либо рассматривается весь спектр пучка и для этого спектра и отвечающей ему системы корневых элементов вводится понятие *кратной полноты* (идея М.В. Келдыша; *глобальная линеаризация*); либо путем факторизации (разложения на множители) операторного пучка выделяется часть его спектра, такая, что ей отвечает полная и минимальная система корневых элементов (*частичная линеаризация*).

1.4.4 Прием факторизации операторного пучка

В данном курсе лекций в основном будет рассматриваться второй путь, т.е. прием *факторизации операторного пучка*.

Чтобы пояснить общую идею факторизации, снова рассмотрим задачу (1.39) и перепишем ее в виде

$$(A + \lambda I)(A - \lambda I)\varphi = 0. \tag{1.43}$$

Так как $A > 0$, то первый сомножитель в (1.43) при любом $\lambda > 0$ обратим и $A + \lambda I \geqslant \lambda I$. Поэтому из (1.43) имеем

$$(A - \lambda I)\varphi = 0. \tag{1.44}$$

Отсюда, очевидно, получаем набор решений

$$\lambda = \lambda_j(A), \quad \varphi = \varphi_j(A), \quad j \in \mathbb{N},$$

которые уже встречались ранее, см. (1.42).

Для выделения отрицательной части спектра нужно другое разложение на множители пучка $L(\lambda)$ (другая его факторизация):

$$(A - \lambda I)(A + \lambda I)\varphi = 0. \tag{1.45}$$

Здесь при $\lambda < 0$ первый множитель ограниченно обратим, так как $A - \lambda I \geqslant |\lambda| I$, и поэтому решения имеют вид

$$\lambda = -\lambda_j(A) < 0, \quad \varphi = \varphi_j(A), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.46}$$

Таким образом, выделяя различные области в комплексной области и осуществляя соответствующую факторизацию пучка $L(\lambda)$, можно выделять отвечающие этим областям системы корневых элементов пучка, полные и минимальные в пространстве $\mathcal{H}$.

1.5 Метод факторизации

В этом параграфе для операторного пучка, аналитического в некоторой части комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разбирается метод факторизации.

1.5.1 Одна лемма о системе корневых элементов пучка

Рассмотрим оператор-функцию $A(\lambda)$, голоморфную (аналитическую) в некоторой области $G \in \mathbb{C}$, и предположим, что эту функцию удалось представить (факторизовать) в виде произведения

$$A(\lambda) \equiv Q(\lambda)P(\lambda), \tag{1.47}$$

где $P(\lambda)$ — оператор-функция или операторный многочлен.

Из формулы (1.47) очевидно, что собственный элемент для $P(\lambda)$ является таковым и для $A(\lambda)$. Менее тривиальным является следующее утверждение.

Лемма 1.5.1. *Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ допускает представление* (1.47) *в некоторой подобласти $G_p \subset G$. Тогда если*

$$G_p \subset \rho\big(Q(\lambda)\big), \tag{1.48}$$

т.е. G_p принадлежит множеству точек регулярности оператор-функции $Q(\lambda)$, то системы корневых элементов оператор-функции $A(\lambda)$ и $P(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из подобласти G_p, совпадают между собой.

Доказательство. Оно проводится непосредственным подсчетом. Пусть, например, $\lambda_0 \in G_p$ — собственное значение оператор-функции $A(\lambda)$, а φ_0, φ_1 — отвечающие ему собственный и первый присоединенный элементы. Тогда имеем

$$A(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad A(\lambda_0)\varphi_1 + \frac{A'(\lambda_0)}{1!}\varphi_0 = 0. \tag{1.49}$$

Учитывая факторизацию (1.47), отсюда получаем

$$\begin{aligned} &Q(\lambda_0)P(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \\ Q(\lambda_0)P(\lambda_0)\varphi_1 + &\frac{1}{1!}\left(Q'(\lambda_0)P(\lambda_0) + Q(\lambda_0)P'(\lambda_0)\right)\varphi_0 = 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Так как по условиям леммы существует $Q^{-1}(\lambda_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то соотношения (1.50) дают

$$P(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad P(\lambda_0)\varphi_1 + \frac{1}{1!}P'(\lambda_0)\varphi_0 = 0. \tag{1.51}$$

Проведенные выкладки, очевидно, можно обратить, т.е. от соотношений (1.51) вернуться к (1.49).

Далее, можно проверить по индукции, что утверждения леммы имеют место для всей жордановой цепочки корневых элементов φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, отвечающих собственному значению λ_0. $\square$

Упражнение 1.5.1. *Проведите доказательство леммы 1.5.1 до конца.* $\square$

1.5.2 Лемма об объединении спектров

Рассмотрим снова разложение (1.47) и будем считать, что спектры $\sigma(Q(\lambda))$ и $\sigma(P(\lambda))$ не пересекаются:

$$\sigma(Q(\lambda)) \cap \sigma(P(\lambda)) = \varnothing. \tag{1.52}$$

Лемма 1.5.2. *Если выполнено условие* (1.52)*, то*

$$\sigma(A(\lambda)) = \sigma(Q(\lambda)) \cup \sigma(P(\lambda)). \tag{1.53}$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(P(\lambda))$; тогда по условию $\lambda_0 \in \rho\big(Q(\lambda)\big)$ и потому в силу (1.47)

$$P(\lambda_0) = Q^{-1}(\lambda_0)A(\lambda_0).$$

Если бы здесь $A(\lambda_0)$ был бы ограниченно обратим, то был бы ограниченно обратим и $P(\lambda_0)$, что неверно, так как $\lambda_0 \in \sigma\big(P(\lambda)\big)$. Поэтому $\lambda_0 \in \sigma\big(A(\lambda)\big)$.

Аналогично, если $\lambda_0 \in \sigma\big(Q(\lambda)\big)$, то $\lambda_0 \in \rho\big(P(\lambda)\big)$ и имеет место представление

$$Q(\lambda_0) = A(\lambda_0)P^{-1}(\lambda_0).$$

Отсюда, как и выше, получаем, что $\lambda_0 \in \sigma\big(A(\lambda)\big)$. Поэтому

$$\sigma(P(\lambda)) \cup \sigma(Q(\lambda)) \subset \sigma(A(\lambda)). \tag{1.54}$$

Обратно, если $\lambda_0 \in \sigma(A(\lambda))$, то какой–нибудь из операторов $Q(\lambda_0)$ или $P(\lambda_0)$ не имеет ограниченного обратного (почему?), и тогда $\lambda_0 \in \sigma(P(\lambda)) \cup \sigma(Q(\lambda))$, т.е.

$$\sigma(A(\lambda)) \subset \sigma(P(\lambda)) \cup \sigma(Q(\lambda)). \tag{1.55}$$

Из (1.54) и (1.55) следует (1.53). □

Упражнение 1.5.2. *Найти то место в доказательстве леммы, где существенно использовано условие* (1.52). □

Определение 1.5.1. *Если имеет место факторизация* (1.47)*, причем выполнено условие* (1.52)*, то говорят, что имеет место* ***спектральная факторизация*** *оператор-функции* $A(\lambda)$. □

Определение 1.5.2. *Если при факторизации оператор-функции* $A(\lambda)$ *функция* $P(\lambda)$ *есть многочлен первой степени* $\big(P(\lambda) = \lambda I - Z\big)$*, то говорят, что произведена* ***линеаризация части спектра****, а само разложение вида*

$$A(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda I - Z) \tag{1.56}$$

называется ***частичной линеаризацией*** *оператор-функции* $A(\lambda)$. □

1.5.3 Примеры и упражнения

Рассмотрим некоторые типичные примеры частичной линеаризации оператор-функций. Некоторые из них формулируются в виде упражнений.

Упражнение 1.5.3. *Проверить, что квадратичный операторный пучок*

$$L(\lambda) := \lambda I - \lambda^2 A - B, \qquad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{1.57}$$

допускает представление

$$L(\lambda) = X^{-1}(\lambda I - XB)(I - \lambda XA), \tag{1.58}$$

если оператор X *обратим и является решением уравнения*

$$X = I + BXAX. \qquad \square \tag{1.59}$$

Упражнение 1.5.4. *Убедиться, что пучок $L(\lambda)$ допускает также представление*

$$L(\lambda) = Y^{-1}(I - \lambda YA)(\lambda I - YB), \tag{1.60}$$

если оператор Y обратим и является решением уравнения

$$Y = I + AYBY. \qquad \square \tag{1.61}$$

Упражнение 1.5.5. *Доказать, что при выполнении условия*

$$4\|A\| \cdot \|B\| < 1 \tag{1.62}$$

каждое из уравнений (1.59) и (1.61) имеет единственное решение, принадлежащее операторному шару радиуса

$$R := \frac{r_-}{\|B\|} := \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|}}{2\|A\| \cdot \|B\|}, \tag{1.63}$$

где $r_\pm$ — решения квадратного уравнения

$$\|A\|r^2 - r + \|B\| = 0, \qquad 0 < r_- < r_+, \tag{1.64}$$

ассоциированного с пучком $L(\lambda)$. При этом решения X и Y являются ограниченно обратимыми операторами. $\square$

Сейчас будут приведены два способа доказательства существования и единственности решений уравнений (1.59) и (1.61). Для определенности будем говорить об уравнении (1.59), так как для уравнения (1.61) доказательства аналогичны.

1^0. Проверим прежде всего, что оператор $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, удовлетворяющий уравнению (1.59), имеет обратный. Для этого достаточно убедиться, что уравнение $X\xi = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Однако если $X\xi = 0$, то

$$X\xi = \xi + BXAX\xi = 0,$$

откуда следует, что $\xi = 0$. Поэтому оператор X^{-1} существует.

Покажем, что $X^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Из (1.59) следует, после применения оператора X^{-1} справа, что $I = X^{-1} + BXA$, т.е.

$$X^{-1} = I - BXA, \tag{1.65}$$

— ограниченный оператор, так как $B, X, A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Однако эта формула получена в предположении, что X^{-1} действует на образе $\mathcal{R}(X)$

оператора X (почему?). Покажем, что на самом деле $X^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. он линеен и ограничен на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Действительно, с учетом неравенства $\|X\| \leqslant R$ и (1.63) имеем

$$\|BXA\| \leqslant \|B\|\|X\|\|A\| \leqslant \|B\|\frac{r_-}{\|B\|}\|A\| = \frac{1-\sqrt{1-4\|A\|\|B\|}}{2} < \frac{1}{2} < 1.$$

Отсюда следует, что оператор $I - BXA$ ограниченно обратим, обратный оператор $X = (I - BXA)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и одновременно $X^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2^0. Для доказательства существования решения уравнения (1.59) в шаре $\|X\| \leqslant R$ рассмотрим наряду с уравнением (1.59) скалярное квадратное уравнение $x = 1 + \alpha x^2$, имеющее, как легко установить, решение вида

$$x_-(\alpha) = (1-\sqrt{1-4\alpha})/(2\alpha) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha^n, \tag{1.66}$$

$$a_n := \frac{(2n+2)!}{(2n+1)[(n+1)!]^2}, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

Учитывая это обстоятельство, введем в уравнение (1.59) формально параметр ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, и рассмотрим уравнение

$$X = I + \varepsilon BXAX, \qquad X = X_\varepsilon. \tag{1.67}$$

При $\varepsilon = 1$, очевидно, (1.67) переходит в уравнение (1.59).

Будем разыскивать решение $X = X_\varepsilon$ уравнения (1.67) в виде ряда по степеням ε. Учитывая (1.66) и аналогию между (1.67) и скалярным квадратным уравнением, приходим к выводу, что это разложение имеет вид

$$X_\varepsilon = I + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n(B,A)\varepsilon^n, \tag{1.68}$$

где $\hat{a}_n(B,\, A)$ — операторный коэффициент, однозначно вычисляемый по заданным операторным коэффициентам B и A. Проверьте, например, что

$$\hat{a}_1(B,A) = 2BA, \qquad \hat{a}_2(B,A) = 2(B^2A^2 + (BA)^2), \tag{1.69}$$

а остальные коэффициенты связаны рекуррентными соотношениями, позволяющими выразить $\hat{a}_n(B,A)$ через предыдущие операторные коэффициенты. При этом, как легко проследить по аналогии с представлением решения (1.66) скалярного уравнения в виде ряда по α, количество слагаемых в формуле для $\hat{a}_n(B, A)$ в точности равно числу a_n, а каждое из слагаемых равно произведению в разном порядке операторов B и A (см. (1.69)), причем эти слагаемые являются однородными функциями степени n относительно B и A. Отсюда следует, что имеют место следующие оценки:

$$\|\hat{a}_n(B; A)\| \leqslant a_n(\|B\| \cdot \|A\|)^n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.70}$$

где a_n — коэффициенты из (1.66).

Из этих оценок получаем, что операторный ряд (1.68) мажорируется по операторной норме числовым рядом:

$$\|X_\varepsilon\| \leqslant 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\|B\| \cdot \|A\|)^n \varepsilon^n. \tag{1.71}$$

Сравнивая правые части (1.71) и (1.66), видим, что ряд (1.71) сходится, если

$$4\alpha := 4(\|B\| \cdot \|A\| \cdot \varepsilon) < 1.$$

Однако так как выполнено условие (1.62), то ряд (1.71) сходится и при $\varepsilon = 1$, и тогда из (1.71) получим (при $\alpha = \|B\| \cdot \|A\|$), что

$$\|X\| = \|X_1\| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|}}{2\|A\| \cdot \|B\|} = \frac{r_-}{\|B\|} = R. \quad \square$$

Таким образом, при условии (1.62) уравнение (1.69) имеет решение X в шаре $\|X\| \leqslant R$, которое в этом шаре является единственным, так как все коэффициенты $\widehat{a}_n(B, A)$ находятся реккурентным образом однозначно.

Приведем теперь другое доказательство существования единственного решения X уравнения (1.59) при условии (1.62). Оно основано на принципе сжимающих отображений, примененном для операторного шара $\|X\| \leqslant R$.

Введем отображение

$$\mathcal{F}(X) := I + BXAX, \qquad \|X\| \leqslant R, \tag{1.72}$$

и запишем уравнение (1.59) в виде

$$\mathcal{F}(X) = X. \tag{1.73}$$

Тогда решение X уравнения (1.59) должно быть неподвижной точкой отображения $\mathcal{F}(X)$. *Согласно принципу сжимающих отображений*, уравнение (1.73) имеет в шаре $\|X\| \leqslant R$ единственное решение, если выполнены следующие два условия:

а) отображение $\mathcal{F}(X)$ переводит шар в себя, т.е.

$$\|X\| \leqslant R \Longrightarrow \|\mathcal{F}(X)\| \leqslant R; \tag{1.74}$$

б) отображение $\mathcal{F}(X)$ является *сжимающим*, т.е.

$$\|\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}(Y)\| \leqslant q\|X - Y\|, \quad \|X\| \leqslant R, \quad \|Y\| \leqslant R, \quad 0 < q < 1. \tag{1.75}$$

Убедимся, что для отображения $\mathcal{F}(X)$ оба эти условия выполнены.

а) Действительно, если $\|X\| \leqslant R$, то с учетом (1.69), имеем

$$\mathcal{F}(X) \leqslant 1 + \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|X\|^2 \leqslant 1 + \|A\| \cdot \|B\| \cdot R^2 = 1 + \|A\| \cdot \|B\| \frac{r_-^2}{\|B\|^2} =$$

$$= 1 + \|A\| \cdot r_-^2 \frac{1}{\|B\|} = 1 + \frac{1}{\|B\|}(r_- - \|B\|) = \frac{r_-}{\|B\|} = R,$$

т.е. выполнено условие (1.74).

а) Далее, пусть $\|X\| \leqslant R$ и $\|Y\| \leqslant R$. Тогда

$$\|\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}(Y)\| = \|BXAX - BYAY\| = \|BXA(X-Y) + B(X-Y)AY\| \leqslant$$

$$\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|X\| \cdot \|X-Y\| + \|B\| \cdot \|X-Y\| \cdot \|A\| \cdot \|Y\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|B\| \cdot R \cdot \|X-Y\| =$$

$$= 2\|A\| \cdot \|B\| \frac{r_-}{\|B\|} \|X - Y\| = (1 - \sqrt{1 - 4\|A\|\|B\|})\|X - Y\| =: q\|X - Y\|,$$

где $0 < q < 1$.

Таким образом, уравнение (1.73) имеет в шаре $\|X\| \leqslant R$ единственное решение (и оно может быть найдено методом итераций).

Замечание 1.5.1. *Обратимость оператора X, являющегося решением уравнения* (1.59)*, в шаре $\|X\| \leqslant R$ можно установить также из следующей оценки для нормы:*

$$\|BXAX\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|X\|^2 \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \left(\frac{r_-}{\|B\|}\right)^2 =$$

$$= \frac{\|A\|}{\|B\|} r_-^2 < \frac{\|A\|}{\|B\|} r_- \cdot r_+ = \frac{\|A\|}{\|B\|} \cdot \frac{\|B\|}{\|A\|} = 1.$$

Отсюда следует, что оператор $X = I + BXAX$ обратим и $X^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. □

1.5.4 Еще один подход к проблеме факторизации

Весьма интересным фактом в теории полиномиальных операторных пучков является утверждение, аналогичное теореме Безу для обычных многочленов.

Напомним, что остаток от деления многочлена $P_n(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ на двучлен $x - x_0$ равен $f(x_0)$ (теорема Безу). Отсюда следует, что число x_0 является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $x - x_0$. В этом случае $P_n(x) := (x - x_0)Q_{n-1}(x)$.

Прежде чем сформулировать аналогичное общее утверждение для операторных многочленов, вернемся к квадратичному операторному пучку

$$L(\lambda) := \lambda I - B - \lambda^2 A, \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{1.76}$$

Согласно (1.60) при условии (1.62) пучок $L(\lambda)$ можно разложить на множители в виде

$$L(\lambda) = (D - \lambda A)(\lambda I - Z) \equiv Y^{-1}(I - \lambda Y A)(\lambda I - Y B). \tag{1.77}$$

Зададим теперь такой вопрос: каким условиям должен удовлетворять фактор Z, чтобы имело место разложение (1.77)?

Лемма 1.5.3. *Для квадратичного операторного пучка* (1.76) *разложение* (1.77) *имеет место тогда и только тогда, когда оператор Z удовлетворяет квадратному уравнению*

$$L(Z) := Z - B - AZ^2 = 0, \quad Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{1.78}$$

ассоциированному с пучком $L(\lambda)$.

Доказательство. 1^0. (достаточность). Пусть уравнение (1.78) удовлетворяется при некотором $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда

$$\begin{aligned} L(\lambda) = L(\lambda) - L(Z) =& (\lambda I - B - \lambda^2 A) - (Z - B - AZ^2) = \\ = (\lambda I - Z) - A(\lambda^2 I - Z^2) &= [I - A(\lambda I + Z)](\lambda I - Z) =: \\ &=: (D - \lambda A)(\lambda I - Z). \end{aligned}$$

2^0. (необходимость). Пусть имеет место факторизация (1.77) с некоторыми $D, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда тождественно по λ имеем:

$$\lambda I - B - \lambda^2 A \equiv -\lambda^2 A + \lambda D + \lambda AZ - DZ.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ (почему это можно сделать?), получим

$$DZ = B, \quad D + AZ = I.$$

Находя из второго соотношения D и подставляя его в первое, получим

$$D = I - AZ, \quad DZ = (I - AZ)Z = B,$$

откуда следует уравнение (1.78). $\square$

1.5.5 Нелинейное операторное уравнение, ассоциированное с операторным пучком

Прежде чем формулировать и доказывать теорему Безу для произвольного полиномиального операторного пучка

$$L_n(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda^k, \quad A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{1.79}$$

напомним, что с этим пучком связано дифференциальное операторное уравнение

$$L_n(\frac{d}{dt})u := \sum_{k=0}^{n} A_k \frac{d^k u}{dt^k} = 0. \tag{1.80}$$

Поставим такой вопрос: каким должен быть оператор $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, чтобы функция $u(t)$ (со значениями в $\mathcal{H}$), имеющая вид

$$u(t) = \exp{(tZ)}\varphi, \quad \exp(Z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}, \tag{1.81}$$

была решением уравнения (1.80) *при любом* $\varphi \in \mathcal{H}$?

Лемма 1.5.4. *Функция вида* (1.81) *тогда и только тогда является решением уравнения* (1.80) *при любом* $\varphi \in \mathcal{H}$, *когда оператор* Z *является корнем операторного полиномиального уравнения*

$$L_n(Z) := \sum_{k=0}^{n} A_k Z^k = 0. \tag{1.82}$$

Доказательство. Оно весьма просто. Подставим функцию $u(t)$ из (1.81) в уравнение (1.80). Легко проверить, что возникает соотношение

$$L_n(Z)\exp(tZ)\varphi = 0.$$

Полагаем здесь $t = 0$ и вспоминая, что φ — произвольный элемент из $\mathcal{H}$, приходим к уравнению (1.82) для Z. $\square$

Эта лемма вскрывает еще одну тесную связь между решениями обыкновенного дифференциального уравнения (1.80) в гильбертовом пространстве, отвечающим этому уравнению полиномиальным операторным пучком $L_n(\lambda)$ и проблемой факторизации (частичной линеаризации) этого операторного пучка, т.е. выделения из пучка линейного множителя $\lambda I - Z$.

1.5.6 Теорема Безу для полиномиальных операторных пучков

Приведем основной результат, называемый операторной теоремой Безу.

Теорема 1.5.1. *Оператор Z тогда и только тогда является корнем уравнения $L_n(Z) = 0$, когда операторный пучок $L_n(\lambda)$ можно представить в виде*

$$L_n(\lambda) := Q_{n-1}(\lambda)(\lambda I - Z), \tag{1.83}$$

где $Q_{n-1}(\lambda)$ — операторный многочлен степени $(n-1)$.

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства леммы 1.5.3.

1^0 (достаточность). Пусть разложение (1.83) имеет место и

$$Q_{n-1}(\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} B_k\lambda^k, \quad B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{1.84}$$

Подставим (1.84) в (1.83) и вспомним определение $L_n(\lambda)$ из (1.79). Имеем тождество по λ:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k\lambda^k \equiv \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k\lambda^k\right)(\lambda I - Z).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к соотношениям

$$A_0 = -B_0 Z, \quad A_k = B_{k-1} - B_k Z, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad A_n = B_{n-1}.$$

Значит,

$$L_n(Z) := A_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k Z^k + A_n Z^n = -B_0 Z + \sum_{k=1}^{n-1} (B_{k-1} - B_k Z) Z^k + B_{n-1} Z^n =$$

$$= -B_0 Z + \{(B_0 Z - B_1 Z^2) + (B_1 Z^2 - B_2 Z^3) + \ldots +$$
$$+ (B_{n-2} Z^{n-1} - B_{n-1} Z^n)\} + B_{n-1} Z^n = 0.$$

2^0. (необходимость). Если $L_n(Z) = 0$, то

$$L_n(\lambda) - L_n(Z) = \sum_{k=1}^{n} A_k (\lambda^k I - Z^k) =$$

$$= \Big\{ \sum_{k=1}^{n} A_k \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j Z^{k-j-1} \Big) \Big\} (\lambda I - Z) =: Q_{n-1}(\lambda)(\lambda I - Z). \qquad \square$$

1.5.7 О некоторых свойствах корней квадратного операторного уравнения

Рассмотрим квадратное уравнение

$$L(Z) := Z^2 + BZ + C = 0 \tag{1.85}$$

и выведем свойства его корней путем решения упражнений.

Упражнение 1.5.6. *Показать, что при любых B, C из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ каждый корень Z уравнения* (1.85) *порождает разложение*

$$L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda B + C = (\lambda I - \hat{Z})(\lambda I - Z), \quad \hat{Z} = -B - Z. \tag{1.86}$$

Решение. Если $L(Z) = 0$, то

$$L(\lambda) = L(\lambda) - L(Z) = (\lambda^2 I - Z^2) + B(\lambda I - Z) =$$

$$= (\lambda I + Z + B)(\lambda I - Z) =: (\lambda I - \widehat{Z})(\lambda I - Z). \qquad \square$$

Замечание 1.5.2. *Из* (1.86) *следует, что*

$$-B = \widehat{Z} + Z, \qquad C = \widehat{Z}Z. \tag{1.87}$$

Эти соотношения напоминают теорему Виета для корней обычного квадратного уравнения. Здесь, однако, отличие для уравнения (1.85) *состоит в том, что* $\widehat{Z}$*, вообще говоря, может не быть корнем квадратного уравнения* (1.85). $\square$

Упражнение 1.5.7. *Показать, что при* $B = B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $C = C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *наряду с разложением* (1.86) *имеет место также разложение*

$$L(\lambda) = (\lambda I - Z^*)(\lambda I - \hat{Z}^*) = \lambda^2 I - \lambda(\hat{Z}^* + Z^*) + Z^*\hat{Z}^*. \tag{1.88}$$

Указание. Замените в (1.86) λ на $\overline{\lambda}$ и перейдите к сопряженным операторам, воспользовавшись свойством

$$(L(\overline{\lambda}))^* = L(\lambda). \qquad \square$$

Из (1.86), (1.88) непосредственно получаем, что при $B = B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $C = C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ каждому корню Z_1 уравнения (1.85) отвечает *сопутствующий корень* того же уравнения $Z_2 = (\hat{Z}_1)^*$. Связь между корнями Z_1 и Z_2 рефлексивна, т.е. если $Z_2 = (\hat{Z}_1)^*$, то $Z_1 = (\hat{Z}_2)^* = -B - Z_2^*$. Может случиться, что эти корни совпадают, т.е. $Z_1 = Z_2 = \hat{Z}_1{}^*$. Тогда из (1.88) получаем, что

$$L(\lambda) = (\lambda I - Z_1^*)(\lambda I - Z_1). \tag{1.89}$$

Упражнение 1.5.8. *Проверить, что, каков бы ни был оператор* $Z_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*, всегда можно построить уравнение* (1.85) *с самосопряженными операторами* B *и* C*, для которого* $Z = Z_1$ *будет одним из корней.*

Указание. Обратите внимание на формулы (1.86) – (1.88). $\square$

Глава 2

Применение метода факторизации

В этой главе на основе использования некоторых положений винеровской алгебры оператор-функций, заданных на единичной окружности в комплексной плоскости, а также теоремы о факторизации элементов абстрактной алгебры получены достаточные условия, обеспечивающие факторизацию операторных пучков. Эти условия используются далее для доказательства полноты системы корневых элементов, отвечающей части спектра голоморфной в окрестности нуля оператор-функции.

2.1 Винеровская алгебра с операторными коэффициентами

Здесь дается определение винеровской алгебры и ее прямого разложения, определение факторизации ее элементов, рассматриваются частные случаи факторизации и другие близкие вопросы.

2.1.1 Определение винеровской алгебры

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, а $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Определение 2.1.1. *Винеровской алгеброй W (названной в честь знаменитого американского математика 20-го века Норберта Винера), называется алгебра оператор-функций вида*

$$A(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \zeta^k, \quad |\zeta| = 1, \quad A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{2.1}$$

для которых

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k\| < \infty. \qquad \square \tag{2.2}$$

Замечание 2.1.1. *Так как для любого ζ с $|\zeta| = 1$ справедливо представление $\zeta = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то в силу* (2.1), (2.2) *можно заключить, что в алгебру W входят все оператор-функции $A(\zeta(\varphi))$, разлагающиеся в абсолютно сходящиеся по равномерной операторной норме ряды Фурье по φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.* $\square$

Определение 2.1.2. *Норма в алгебре W задается по формуле*

$$\|A(\zeta)\|_W := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|A_k\|. \qquad \square \tag{2.3}$$

Для алгебры W имеет место следующий важный факт, который здесь приводится без доказательства.

Теорема 2.1.1. *(Бохнер, Филлипс). Если $A(\zeta) \in W$ и оператор $A(\zeta)$ обратим при всех ζ с $|\zeta| = 1$, то $A^{-1}(\zeta) \in W$.* $\square$

Замечание 2.1.2. *Алгебра W является некоммутативной банаховой алгеброй с нормой* (2.3). *Для ее элементов сумма и произведение элементов вводится естественным образом:*

$$(A_1 + A_2)(\zeta) := A_1(\zeta) + A_2(\zeta), \quad (A_1 \cdot A_2)(\zeta) := A_1(\zeta) \cdot A_2(\zeta).$$

В другой терминологии W называют также нормированным кольцом. Очевидно, роль единицы в алгебре W играет единичный оператор I, а роль нуля — нулевой оператор 0. $\square$

Замечание 2.1.3. *Алгебра W является* **инволютивной** *нормированной алгеброй с естественно определяемой операцией инволюции $\mathcal{J}$, связанной с переходом к сопряженной оператор-функции:*

$$\mathcal{J}A(\zeta) = (A(\zeta))^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* (\zeta^k)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* \zeta^{-k}, \quad |\zeta| = 1. \quad \square \tag{2.4}$$

Упражнение 2.1.1. *Доказать, опираясь на* (2.4), *что*

$$\|A(\zeta)\|_W = \|\mathcal{J}A(\zeta)\|_W. \qquad \square \tag{2.5}$$

Напомним, что операция инволюции для операторов из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет следующие свойства:

1°. $(A+B)^* = A^* + B^*$; 2°. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
3°. $(AB)^* = B^* A^*$; 4°. $(A^*)^* = A$.

2.1.2 Прямое разложение алгебры W

Введем в алгебре W две подалгебры, дающие ее прямое разложение:

$$W = W_+ \dot{+} \overset{\circ}{W}_- . \tag{2.6}$$

Определение 2.1.3. *Подалгеброй W_+ называется подалгебра алгебры W, состоящая из элементов вида*

$$B_+(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^k =: P_+ B(\zeta), \quad B(\zeta) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \zeta^k. \tag{2.7}$$

Определение 2.1.4. *Подалгеброй $\overset{\circ}{W}_-$ называется подалгебра алгебры W, состоящая из элементов вида*

$$C_-(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k \zeta^k =: P_- C(\zeta), \quad C(\zeta) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \zeta^k. \qquad \square \tag{2.8}$$

Замечание 2.1.4. *Как следует из* (2.1), (2.6) – (2.8), *прямая сумма подалгебр W_+ и $\overset{\circ}{W}_-$ действительно дает всю алгебру W. При этом $P_+ + P_- = I$, и операторы P_+ и P_- являются операторами проектирования, т.е. обладают свойствами $(P_\pm)^2 = P_\pm$. Оператор P_+ проектирует W на W_+ параллельно $\overset{\circ}{W}_-$, а P_- проектирует W на $\overset{\circ}{W}_-$ параллельно W_+.* $\square$

Упражнение 2.1.2. *Доказать, что* $\|P_\pm\| = 1$. $\square$

2.1.3 Факторизация элемента алгебры W

Определение 2.1.5. *Будем называть* ***канонической факторизацией*** *элемента $A(\zeta) \in W$ представление его в виде*

$$A(\zeta) = A_+(\zeta)[I + A_-(\zeta)], \quad |\zeta| = 1, \tag{2.9}$$

где $A_+(\zeta) \in W_+$, $A_-(\zeta) \in \overset{\circ}{W}_-$, *причем существуют оператор-функции*

$$A_+^{-1}(\zeta) \in W_+, \quad (I + A_-(\zeta))^{-1} - I \in \overset{\circ}{W}_- . \qquad \square \tag{2.10}$$

Замечание 2.1.5. *Для факторизации элемента* $A(\zeta)$, *как следует из* (2.9), (2.10), *необходимо, чтобы оператор-функция* $A(\zeta)$ *была обратима при всех* ζ *с* $|\zeta| = 1$. $\square$

Непосредственно из определения канонической факторизации следует такой важный факт.

Лемма 2.1.1. *Если для элемента* $A(\zeta) \in W$ *имеет место каноническая факторизация в виде* (2.9), (2.10), *то функции* $A_+(\zeta)$ *и* $A_+^{-1}(\zeta)$ *допускают голоморфное продолжение внутрь единичного круга* $|\lambda| \leqslant 1$, *т.е. существуют голоморфные (аналитические) функции*

$$A_+(\lambda), \quad A_+^{-1}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leqslant 1. \tag{2.11}$$

Соответственно функции $I + A_-(\zeta)$ *и* $(I + A_-(\zeta))^{-1}$ *допускают голоморфное продолжение вне единичного круга в комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *т.е. существуют голоморфные функции*

$$I + A_-(\lambda), \quad (I + A_-^{-1}(\lambda))^{-1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \geqslant 1. \tag{2.12}$$

Доказательство. Оно проводится по одному и тому же плану для всех функций из (2.11), (2.12), поэтому проведем его лишь для функции $A_+(\zeta)$.

Так как $A_+(\zeta) \in W_+$, $|\zeta| = 1$, то

$$\begin{gathered} A_+(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_+)_k \zeta^k, \quad |\zeta| = 1, \\ \|A_+(\zeta)\|_W = \sum_{k=0}^{\infty} \|(A_+)_k\| < \infty. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Как известно, если голоморфное продолжение с окружности для обычных (а потому и операторных) функций существует, то оно определяется единственным образом. Введем продолжение $A_+(\zeta)$ внутрь единичного круга по закону

$$A_+(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} (A_+)_k \lambda^k, \quad |\lambda| \leqslant 1. \tag{2.14}$$

Тогда $A_+(\lambda)$ будет аналитической функцией λ при $|\lambda| \leqslant 1$. В самом деле, если $|\lambda| = t \leqslant 1$, то

$$\|A_+(\lambda)\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(A_+)_k\lambda^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|(A_+)_k\|\cdot t^k \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|(A_+)_k\| = \|(A_+)(\zeta)\|_W < \infty,$$

т.е. степенной ряд (2.14) сходится по равномерной операторной норме при любом $|\lambda| \leqslant 1$.

Аналогично доказывается утверждение леммы и для $A_+^{-1}(\zeta)$. Что касается функций (2.12), то полезно предварительно сделать замену $\lambda = \eta^{-1}$, вместо области $|\lambda| \geqslant 1$ рассмотреть проблему при $|\eta| \leqslant 1$ и повторить вышеприведенное доказательство. $\square$

Следствие 2.1.1. *В круге $|\lambda| \leqslant 1$ функция $A_+^{-1}(\lambda)$, т.е. голоморфное продолжение $A_+^{-1}(\zeta)$ внутрь единичного круга, является обратной для голоморфной функции $A_+(\lambda)$ при любом λ с $|\lambda| \geqslant 1$. Соответственно для голоморфных продолжений $(I + A_-(\lambda))$ и $(I + A_-(\lambda))^{-1}$ функций $I + A_-(\zeta)$ и $(I + A_-(\zeta))^{-1}$ справедливо то же утверждение при $|\lambda| \geqslant 1$.*

Доказательство. Проведем его лишь для первого утверждения этого следствия. Введем функцию

$$f(\zeta) := A_+(\zeta)A_+^{-1}(\zeta) = A_+^{-1}(\zeta)A_+(\zeta) \equiv I, \quad |\zeta| = 1,$$

и заметим, что эта функция имеет продолжение внутрь единичного круга, причем это продолжение, согласно интегральной формуле Коши, таково:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{I\cdot d\zeta}{\zeta-\lambda} = I, \quad |\lambda| < 1.$$

Отсюда следует, что при любом λ с $|\lambda| < 1$ имеем

$$f(\lambda) \equiv I \equiv A_+(\lambda)A_+^{-1}(\lambda) \equiv A_+^{-1}(\lambda)A_+(\lambda),$$

т.е. и при $|\lambda| < 1$ функции $A_+(\lambda)$ и $A_+^{-1}(\lambda)$ взаимно обратные.

Для доказательства второго утверждения данного следствия снова полезно сделать замену $\lambda = \eta^{-1}$, рассмотреть область $|\eta| < 1$ и повторить предыдущие рассуждения. $\square$

Замечание 2.1.6. *Проведенные выше рассуждения приводят к выводу о том, что при определении* (2.9), (2.10) *канонической факторизации элемента* $A(\zeta)$ *можно дополнительно требовать, чтобы функции* $A_+(\zeta)$ *и* $A_+^{-1}(\zeta)$ *были голоморфно продолжимы внутрь единичного круга* $|\lambda| \leqslant 1$ *и продолженные функции* $A_+(\lambda)$ *и* $A_+^{-1}(\lambda)$ *были взаимно обратны, а функции* $I + A_-(\zeta)$ *и* $(I + A_-(\zeta))^{-1}$ *обладали этими свойствами при* $|\lambda| \geqslant 1$. $\square$

Отметим еще раз, что условие существования обратной оператор-функции $A^{-1}(\zeta)$, т.е. такой, что $A(\zeta)A^{-1}(\zeta) \equiv A^{-1}(\zeta)A(\zeta) \equiv I$ при $|\zeta| = 1$, является необходимым, но не достаточным для факторизации оператор-функции $A(\zeta)$ на единичной окружности. Дополнительным необходимым свойством должно быть свойство голоморфной продолжимости $A_+(\zeta)$ и $A_-(\zeta)$ и их голоморфной обратимости после продолжения внутрь и вне единичного круга соответственно.

Замечание 2.1.7. *Формула* (2.9) *дает так называемую левую факторизацию функции* $A(\zeta)$. *Возможна и правая факторизация, когда множители в* (2.9) *стоят в обратном порядке.* $\square$

Упражнение 2.1.3. *Доказать, что* $A(\zeta)$ *допускает правую факторизацию тогда и только тогда, когда* $(A(\overline{\zeta}))^*$ *допускает левую факторизацию.* $\square$

В дальнейшем будем использовать лишь левую факторизацию и выясним достаточные условия, когда она возможна. Предварительно разберем некоторые простейшие ситуации.

2.1.4 Полюс оператор-функции в конечной точке комплексной плоскости

Для проведения дальнейших рассуждений понадобится операторный аналог известной из теории функций комплексного переменного теоремы Лиувилля.

Теорема 2.1.2. *(Лиувилль). Если оператор-функция* $A(\lambda)$ *аналитична во всей комплексной плоскости, включая бесконечно удаленную точку (т.е. в расширенной комплексной плоскости), то* $A(\lambda)$ *постоянна.*

Доказательство. Пусть $A(\lambda)$ аналитична в расширенной комплексной плоскости. Тогда при любых φ и ψ из $\mathcal{H}$ функция

$$f(\lambda) := (A(\lambda)\varphi, \psi)$$

будет обычной аналитической функцией комплексного переменного λ в расширенной комплексной плоскости. Поэтому, согласно теореме Лиувилля для обычных скалярных функций, отсюда заключаем, что $f(\lambda) \equiv \mathrm{const}$.

Тогда при любых λ_1, λ_2 из $\mathbb{C}$ имеем

$$(A(\lambda_1)\varphi, \psi) = (A(\lambda_2)\varphi, \psi) \Longleftrightarrow ((A(\lambda_1) - A(\lambda_1))\varphi, \psi) = 0.$$

Ввиду произвольности $\psi \in \mathcal{H}$ отсюда следует, что $(A(\lambda_1) - A(\lambda_1))\varphi = 0$, а в силу произвольности $\varphi \in \mathcal{H}$ приходим к соотношению

$$A(\lambda_1) = A(\lambda_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Перейдем теперь к определению понятия полюса оператор-функции.

Определение 2.1.6. *Говорят, что оператор-функция $A(\lambda)$ имеет полюс порядка n в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, если в окрестности $\mathcal{U}(\lambda_0)$ этой точки $A(\lambda)$ допускает представление*

$$A(\lambda) = F(\lambda) + \frac{A_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + \ldots + \frac{A_{-n}}{(\lambda - \lambda_0)^n}, \quad A_{-n} \neq 0, \tag{2.15}$$

где $F(\lambda)$ — аналитическая в $\mathcal{U}(\lambda_0)$ функция, а $A_{-k} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Равенство (2.15) равносильно тому, что

$$A(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^n}, \quad B(\lambda_0) = A_{-n} \neq 0, \tag{2.16}$$

где $B(\lambda)$ — функция, аналитическая в $\mathcal{U}(\lambda_0)$ (проверьте это!).

Лемма 2.1.2. *Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме точки $\lambda = 0$, где она, возможно, имеет полюс порядка не выше n. Если $A(\infty) = I$, то*

$$A(\lambda) = I + \frac{Z_1}{\lambda} + \ldots + \frac{Z_n}{\lambda^n}, \quad Z_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.17}$$

Доказательство. Оно будет проведено лишь для случая $n = 1$. Рассмотрим функцию

$$A_1(\lambda) := A(\lambda) - \frac{B}{\lambda}, \quad B := \lim_{\lambda \to 0} (\lambda A(\lambda)) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{2.18}$$

Очевидно, $A_1(\lambda)$ аналитична во всей расширенной комплексной плоскости, включая точку $\lambda = 0$, причем

$$A_1(\infty) = A(\infty) = I.$$

Поэтому по теореме Лиувилля (теорема 2.1.2) имеем $A_1(\lambda) \equiv \text{const} \equiv I$. Отсюда следует, что

$$A(\lambda) = I + \frac{Z_1}{\lambda}, \quad Z_1 = B,$$

где B выражается формулой (2.18). $\square$

Упражнение 2.1.4. *Доказать утверждение леммы 2.1.2 при любом $n \in \mathbb{N}$.* $\square$

2.1.5 Полюс в бесконечно удаленной точке

Как и для скалярных функций комплексного переменного, можно ввести понятие полюса в бесконечно удаленной точке для аналитической оператор-функции.

Определение 2.1.7. *Говорят, что оператор-функции $A(\lambda)$ имеет полюс порядка m в точке $\lambda = \infty$, если в R–окрестности $\mathcal{U}_R(\infty)$ этой точки, т.е. вне круга радиуса R с центром в начале координат, функция $A(\lambda)$ имеет представление*

$$A(\lambda) = F(\lambda) + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m, \quad A_m \neq 0, \tag{2.19}$$

где $F(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция в $\mathcal{U}_R(\infty)$, т.е. является правильной частью ряда Лорана (в окрестности $\lambda = \infty$), а все $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $k = 1, \ldots, m$. $\square$

Замечание 2.1.8. *Равенство* (2.19) *равносильно тому, что*

$$A(\lambda) = B(\lambda) \cdot \lambda^m, \tag{2.20}$$

где $B(\lambda)$ — аналитическая в $\mathcal{U}_R(\infty)$, причем $B(\infty) = A_m \neq 0$. $\square$

Лемма 2.1.3. *Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ является аналитической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а в бесконечно удаленной точке имеет полюс порядка не выше m. Тогда $A(\lambda)$ имеет вид многочлена степени не выше m:*

$$A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m, \quad A_0 = \lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda). \quad \square \tag{2.21}$$

Упражнение 2.1.5. *Доказать, опираясь на теорему Лиувилля (теорему 2.1.2), утверждение* (2.21) *для случая* $m = 1$, *т.е. для полюса порядка* 1. $\square$

Упражнение 2.1.6. *Доказать лемму 2.1.3 для полюса произвольного порядка* m.

Указание. Воспользоваться схемой доказательства леммы 2.1.2. Использовать также преобразование точек комплексной плоскости $\lambda = \eta^{-1}$, $|\eta| < R^{-1}$. $\square$

2.1.6 Частные случаи факторизации оператор-функций

Перейдем теперь к установлению некоторых фактов, связанных с факторизацией операторных пучков и элементов винеровской алгебры W.

Лемма 2.1.4. *Пусть* $A(\zeta) \in W$ *имеет вид*

$$A(\zeta) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k \zeta^k, \quad n > 0, \quad |\zeta| = 1, \tag{2.22}$$

и допускает каноническую факторизацию. Тогда

$$A_-(\zeta) = \sum_{k=-n}^{-1} B_k \zeta^k \in \overset{\circ}{W}_- . \tag{2.23}$$

Доказательство. Так как $A(\zeta)$ допускает каноническую факторизацию, то

$$A(\zeta) = A_+(\zeta)[I + A_-(\zeta)], \quad |\zeta| = 1, \tag{2.24}$$

$$A_+(\zeta), \quad A_+^{-1}(\zeta) \in W_+, \quad A_-(\zeta), \quad (I + A_-(\zeta))^{-1} - I \in \overset{\circ}{W}_- .$$

Умножим (2.24) на функцию $A_+^{-1}(\zeta)$, будем иметь тождество по ζ:

$$F_1(\zeta) := A_+^{-1}(\zeta) A(\zeta) \equiv I + A_-(\zeta), \quad |\zeta| = 1. \tag{2.25}$$

Убедимся, что функция $F_1(\zeta)$ имеет голоморфное (аналитическое) продолжение как внутрь, так и вне единичного круга комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В самом деле, согласно лемме 2.1.1 функция $I + A_-(\zeta)$

и обратная к ней $(I+A_-(\zeta))^{-1}$ голоморфно продолжимы вне единичного круга, и эти продолжения определяются единственным образом для каждой из них. Далее, функция $A_+^{-1}(\zeta)$ по той же лемме 2.1.1 голоморфно продолжима внутрь единичного круга, т.е. при $|\lambda|<1$. Наконец, $A(\zeta)$ также имеет продолжение внутрь единичного круга. Это продолжение находится однозначно и потому вычисляется по формуле

$$A(\lambda)=\sum_{k=-n}^{\infty} A_k\lambda^k, \quad n>0, \quad |\lambda|\leqslant 1. \tag{2.26}$$

Отсюда следует, что $F_1(\zeta)$ имеет голоморфное продолжение внутрь единичного круга согласно формуле

$$F_1(\lambda)=A_+^{-1}(\lambda)A(\lambda), \quad |\lambda|\leqslant 1, \tag{2.27}$$

и вне единичного круга по формуле

$$F_1(\lambda)=I+A_-(\lambda), \quad |\lambda|\geqslant 1. \tag{2.28}$$

Таким образом, возникает единая во всей комплексной плоскости аналитическая функция $F_1(\lambda)$, которая обладает следующими свойствами. В силу представления $A_-(\zeta)$ в виде $A_-(\zeta)=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}(A_-)_k\zeta^k$ после продолжения на область $|\lambda|>1$ имеем

$$F_1(\lambda)=I+A_-(\lambda)=I+\sum_{k=-\infty}^{-1}(A_-)_k\lambda^k,$$

откуда следует, что $F_1(\lambda)$ — аналитическая в бесконечно удаленной точке, причем $F_1(\infty)=I$. Далее, так как $A_+^{-1}(\lambda)$ голоморфна при $|\lambda|\leqslant 1$, и $A(\lambda)$ согласно (2.26) имеет в точке $\lambda=0$ полюс порядка не выше n, то и произведение этих функций, т.е. функция (2.27), имеет в точке $\lambda=0$ полюс порядка не выше n. Значит, согласно лемме 2.1.2 функция $F_1(\lambda)$ имеет вид

$$F_1(\lambda)=I+\sum_{k=-n}^{-1} B_k\lambda^k, \quad B_k\in\mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad k=-n,\dots,-1, \tag{2.29}$$

а потому при $\lambda=\zeta$, $|\zeta|=1$, приходим к формуле (2.23), причем $A(\zeta)\in\overset{\circ}{W}_-$. $\square$

Рассмотрим теперь другой частный случай оператор-функции $A(\zeta)\in W$. Здесь доказательство соответствующего утверждения опирается на лемму 2.1.3.

Лемма 2.1.5. *Пусть* $A(\lambda)$ *имеет вид*

$$A(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{m} A_k \zeta^k, \quad m > 0, \quad |\zeta| = 1, \tag{2.30}$$

и допускает каноническую факторизацию. Тогда

$$A_+(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} C_k \zeta^k \in W_+, \tag{2.31}$$

т.е. является многочленом степени не выше m.

Доказательство. Воспользуемся снова факторизацией (2.24) и введем оператор-функцию

$$F_2(\zeta) := A_+(\zeta) \equiv A(\zeta)[I + A_-(\zeta)]^{-1}, \quad |\zeta| = 1. \tag{2.32}$$

Повторим схему рассуждений, примененных при доказательстве предыдущей леммы. Именно, левая часть (2.32), т.е. $A_+(\zeta)$, допускает однозначное голоморфное продолжение внутрь единичного круга в виде функции $A_+(\lambda)$, $|\lambda| \leqslant 1$. Далее, правая часть в (2.32) допускает голоморфное продолжение вне единичного круга в виде функции $A(\lambda)[I + A_-(\lambda)]^{-1}$, $|\lambda| \geqslant 1$. При этом, $[I + A_-(\lambda)]^{-1}$ голоморфна во всех точках λ с $|\lambda| > 1$, включая бесконечно удаленную точку, где она равна единичному оператору I. В то же время функция

$$A(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{m} A_k \lambda^k, \quad m > 0, \quad |\lambda| \geqslant 1,$$

являющаяся голоморфным продолжением функции $A(\zeta)$ из (2.30), имеет, очевидно, на бесконечности полюс порядка не выше m.

Отсюда следует, что $F_2(\zeta)$ имеет голоморфное продолжение $F_2(\lambda)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, причем на бесконечности она имеет полюс порядка не выше m. Поэтому по лемме 2.1.3 получаем, что $F_2(\lambda)$ является многочленом степени не выше m, т.е.

$$F_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} C_k \lambda^k, \quad C_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad k = 0, \dots, m.$$

Отсюда при $\lambda = \zeta$, $|\zeta| = 1$, и из (2.32) приходим к утверждению леммы. $\square$

Следствием двух доказанных лемм является утверждение, которое часто используют на практике при факторизации операторных пучков полиномиального типа.

Лемма 2.1.6. *Пусть оператор-функция $A(\zeta)$ имеет вид*

$$A(\zeta) = \sum_{k=-n}^{m} A_k \zeta^k, \quad (n, m > 0), \tag{2.33}$$

и допускает каноническую факторизацию. Тогда

$$A_-(\zeta) = \sum_{k=-n}^{-1} B_k \zeta^k, \quad A_+(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} C_k \zeta^k. \tag{2.34}$$

Доказательство. Оператор-функция (2.33) удовлетворяет условиям двух предыдущих лемм. Кроме того, каноническая факторизация, как будет доказано ниже в основной факторизационной теореме, единственна. Поэтому обязательно должно иметь место разложение

$$\sum_{k=-n}^{m} A_k \zeta^k = \Big(\sum_{j=0}^{m} C_j \zeta^j\Big)\Big(I + \sum_{l=-n}^{-1} B_l \zeta^l\Big). \qquad \square \tag{2.35}$$

Следствие 2.1.2. *Умножим обе части* (2.35) *на* ζ^n. *Тогда возникнет разложение полиномиального операторного пучка степени* $n+m$ *на произведение сомножителей — полиномиальных пучков степени* m *и* n *соответственно:*

$$\begin{aligned} &P_{n+m}(\zeta) = Q_m(\zeta) L_n(\zeta), \quad P_{n+m}(\zeta) = \sum_{k=-n}^{m} A_k \zeta^{n+m}, \\ &Q_m(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} C_k \zeta^k, \quad L_n(\zeta) = I\zeta^n + \sum_{j=-n}^{-1} B_j \zeta^{n-j}. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.36}$$

После голоморфного продолжения $P_{n+m}(\zeta)$ с единичной окружности $|\zeta| = 1$ на всю комплексную плоскость из (2.36) имеем

$$P_{n+m}(\lambda) = Q_m(\lambda) L_n(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.37}$$

причем эта факторизация является *спектральной факторизацией* полиномиального операторного пучка $P_{n+m}(\lambda)$.

В самом деле, пучки $P_{n+m}(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $L_n(\lambda)$ обратимы на единичной окружности $\lambda = \zeta$, $|\lambda| = 1$. При этом, согласно предыдущим выводам, пучок $Q_m(\lambda)$ обратим при $|\lambda| < 1$, а $L_n(\lambda)$ — при $|\lambda| > 1$. Значит, для спектров $\sigma(Q_m(\lambda))$ и $\sigma(L_n(\lambda))$ выполнено условие

$$\sigma(Q_m(\lambda)) \cap \sigma(L_n(\lambda)) = \emptyset. \tag{2.38}$$

Поэтому согласно лемме 1.5.2

$$\sigma(P_{n+m}(\lambda)) = \sigma(Q_m(\lambda)) \cup \sigma(L_n(\lambda)), \qquad (2.39)$$

т.е. имеет место спектральная факторизация.

Замечание 2.1.9. *Если $n = 1$, то правый множитель в* (2.37)*, в силу формулы* (2.36) *для $L_n(\zeta)$, имеет вид $\lambda I - Z$, $Z = -B_{-1}$, т.е. будет иметь место* **частичная линеаризация** *операторного пучка $P_{m+1}(\lambda)$:*

$$P_{m+1}(\lambda) = Q_m(\lambda)(\lambda I - Z). \qquad (2.40)$$

Здесь фактор Z отвечает за ту часть спектра оператор-функции $P_{m+1}(\lambda)$, которая лежит внутри единичного круга:

$$\sigma(Z) \subset \{\lambda : \quad |\lambda| < 1\}. \qquad \square$$

2.2 Факторизационная теорема

В этом параграфе устанавливаются условия, позволяющие факторизовать элемент абстрактной банаховой алгебры, близкий к единичному.

2.2.1 Некоторые утверждения об обратимости элементов банаховой алгебры

Пусть $\mathfrak{A}$ — комплексная банахова алгебра с единицей e. Напомним, что банаховой алгеброй называется такое подмножество банахова пространства с нормой $\|\cdot\|$, для которого наряду с линейными операциями над элементами (сложение, умножение на скаляр) введена также операция умножения элементов. Если $a, b \in \mathfrak{A}$, то $ab \in \mathfrak{A}$ и $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$. При этом $ae = ea = a$ для любого $a \in \mathfrak{A}$, и если существует элемент a^{-1}, обратный к элементу a, то $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Рссмотрим вопросы, связанные с обратимостью элементов алгебры, близких к единичному элементу e. Первый результат на этом пути совсем простой и хорошо известен.

Лемма 2.2.1. *Пусть для элемента a банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей e выполнено условие*

$$\|a\| < 1. \qquad (2.41)$$

Тогда элемент $e-a$ обратим и

$$(e-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k, \quad a^0 := e. \tag{2.42}$$

Доказательство. Так как $\|a\| < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k$ сходится, так как

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} a^k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|a^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k = \frac{1}{1-\|a\|} < \infty.$$

Поэтому общий член этого ряда, т.е. a^k, стремится к нулевому элементу алгебры:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} a^k = 0. \tag{2.43}$$

Воспользуемся тождеством

$$(e-a)\big(\sum_{k=0}^{n} a^k\big) = \big(\sum_{k=0}^{n} a^k\big)(e-a) = e - a^{n+1}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \longrightarrow \infty$ и учитывая свойство (2.43), приходим к соотношению

$$(e-a)\big(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\big) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\big)(e-a) = e,$$

откуда следует, что элемент $e-a$ обратим и обратный выражается формулой (2.42). $\square$

Замечание 2.2.1. *Для любого элемента a из $\mathfrak{A}$ существует его характеристика $r(a)$, называемая спектральным радиусом:*

$$r(a) := \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\big\} \leqslant \|a\|. \tag{2.44}$$

Как видно из доказательства леммы 2.2.1, ее утверждение справедливо и в случае $r(a) < 1$.

В самом деле, достаточно заметить, что ряд (2.42) *мажорируется по норме (см. выше) числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|a^k\|$, который сходится по достаточному радикальному признаку Коши, если*

$$\lim_{k\to\infty} \|a^k\|^{\frac{1}{k}} = r(a) < 1. \qquad \square$$

Замечание 2.2.2. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$, и $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда имеет место свойство*

$$r(A) \geqslant \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}, \tag{2.45}$$

т.е. весь спектр $\sigma(A)$ оператора A лежит в круге с центром в начале координат с радиусом, равным спектральному радиусу оператора A:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r(A)\}. \tag{2.46}$$

Доказательство. Действительно, оператор $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ обратим, если спектральный радиус оператора $\lambda^{-1}A$ меньше единицы, т.е.

$$r(\lambda^{-1}A) = |\lambda|^{-1} r(A) < 1.$$

Тогда $|\lambda| > r(A)$, и потому спектр оператора A целиком находится в круге радиуса $r(A)$ с центром в начале координат, см. (2.46). □

Замечание 2.2.3. *Можно доказать, что на самом деле в* (2.45) *вместо неравенства имеет место знак равенства.* □

Рассмотрим снова комплексную банахову алгебру $\mathfrak{A}$ с единицей e и введем следующее определение.

Определение 2.2.1. *Говорят, что элемент $a \in \mathfrak{A}$ обратим только слева (справа), если он имеет левый (правый) обратный, но не имеет обратного, т.е. существует такой элемент $a^{(-1)} \in \mathfrak{A}$, что $a^{(-1)}a = e$, (соответственно $aa^{(-1)} = e$).* □

Лемма 2.2.2. *Множество элементов из $\mathfrak{A}$, обратимых только слева, открыто.* □

Доказательство. Пусть $a \in \mathfrak{A}$ обратим только слева и $a^{(-1)}a = e$. Пусть, далее, элемент $b \in \mathfrak{A}$ таков, что выполнено условие

$$\|ba^{(-1)}\| < 1. \tag{2.47}$$

Тогда легко убедиться, что элемент $a+b$ также обратим только слева.

В самом деле,

$$(a+b) = (e + ba^{(-1)})a,$$

и при условии (2.47) первый сомножитель просто обратим (лемма 2.2.1). Поэтому $a + b$ обратим только слева, если a обратим только слева. Отсюда следует, что множество элементов, обратимых только слева, открыто, так как наряду с обратимым только слева элементом a оно содержит все элементы вида $a+b$, если выполнено условие (2.47). $\square$

Упражнение 2.2.1. *Сформулировать и доказать аналог леммы 2.2.2 для множества элементов, обратимых только справа.* $\square$

Лемма 2.2.3. *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — односвязное множество, т.е. любые две его точки можно соединить ломаной, содержащейся в этом множестве. Пусть $a = a(t)$, $t \in \Lambda$, — функция переменной t со значениями в алгебре $\mathfrak{A}$, причем $a(t)$ непрерывна на Λ.*

Если элемент $a(t)$ как минимум обратим слева при любом $t \in \Lambda$ (т.е. он обратим только слева либо двусторонне обратим) и для некоторого $t_0 \in \Lambda$ элемент $a(t_0)$ двусторонне обратим (т.е. просто обратим), то $a(t)$ обратим при всех $t \in \Lambda$.

Доказательство. Введём множества

$$\Lambda_0 = \{t \in \Lambda : \quad a(t) \text{ — обратим}\},$$
$$\Lambda_1 = \{t \in \Lambda : \quad a(t) \text{ — обратим только слева}\}.$$

Согласно лемме 2.2.2 множество Λ_1 — открытое. Дословно повторяя доказательство леммы 2.2.2 с заменой слов "обратим только слева" на слова "двусторонне обратим", можно убедиться, что Λ_0 — также открытое множество.

Далее, очевидно, что $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$ и $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 \neq \varnothing$. Таким образом, односвязное множество Λ является объединением двух открытых непересекающихся между собой множеств. Так как по условию леммы Λ_0 не пусто ($t_0 \in \Lambda_0$), то пустым должно быть множество Λ_1, и потому $\Lambda = \Lambda_0$. $\square$

Упражнение 2.2.2. *Сформулировать и доказать аналог леммы 2.2.3 для случая обратимости справа.* $\square$

2.2.2 Основная факторизационная теорема для элементов абстрактной банаховой алгебры

Сейчас будет сформулирована и доказана теорема, играющую фундаментальную роль в проблеме факторизации операторных пучков. Эта теорема позволит получить достаточные условия для канонической факторизации операторного пучка, близкого к единичному оператору.

Теорема 2.2.1. *(о факторизации элемента банаховой алгебры, близкого к единичному). Пусть разложение*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ \dot{+} \mathfrak{A}_- \tag{2.48}$$

является прямым разложение банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ *на две подалгебры, а* P_+ *и* P_- *— соответствующие проекторы* (P_+ *проектирует* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}_+$ *параллельно* $\mathfrak{A}_-$*, а* P_- *проектирует* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}_-$ *параллельно* $\mathfrak{A}_+$*), причем*

$$\|P_+\| = \|P_-\| = 1. \tag{2.49}$$

Если выполнено условие

$$\|a\| < 1, \tag{2.50}$$

то элемент $e + a$ *допускает единственную факторизацию в виде*

$$e + a = (e + a_+)(e + a_-), \tag{2.51}$$

где $a_\pm \in \mathfrak{A}_\pm$*, причем оба множителя в* (2.51) *обратимы и*

$$(e + a_+)^{-1} - e \in \mathfrak{A}_+, \quad (e + a_-)^{-1} - e \in \mathfrak{A}_-. \tag{2.52}$$

Доказательство. Оно приводится по этапам, если $a \neq 0$. При $a = 0$ утверждение теоремы очевидно.

1^0. Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{A}$ уравнение

$$x + P_+(xa) = e, \tag{2.53}$$

где e — единичный элемент алгебры, а ненулевой элемент $a \in \mathfrak{A}$ обладает свойством (2.50). Свяжем с уравнением (2.53) оператор $A_+ : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, действующий по закону

$$A_+ x := P_+(xa), \quad \forall x \in \mathfrak{A}, \quad A_+ : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}. \tag{2.54}$$

Легко убедиться, что оператор A_+ обладает свойствами линейности (аддитивности, однородности). Проверим, что он является (линейным) ограниченным оператором. Действительно,

$$\|A_+ x\| = \|P_+(xa)\| \leqslant \|xa\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|, \quad \|A_+\| \leqslant \|a\| < 1. \tag{2.55}$$

Уравнение (2.53) теперь можно переписать в виде

$$(I + A_+)x = e. \tag{2.56}$$

Так как $\|A_+\| < 1$, то существует ограниченный обратный оператор $(I + A_+)^{-1}$ (см. лемму 2.2.1 применительно к алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{A})$), и тогда задача (2.56) имеет единственное решение

$$x = (I + A_+)^{-1} e = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A_+)^k \right) e. \tag{2.57}$$

Как видно из (2.53), это решение x имеет структуру

$$x = e + x_+, \quad x_+ := -P_+(xa) = -A_+ x \in \mathfrak{A}_+. \tag{2.58}$$

2^0. Рассмотрим теперь выражение $x + xa$; оно отличается от левой части (2.53), тем, что в (2.53) слева не хватает слагаемого $a_- := P_-(xa) \in \mathfrak{A}_-$, т.е.

$$x + xa = e + a_-.$$

Подставляя сюда в качестве x решение $x = e + x_+$, получим

$$(e + x_+)(e + a) = e + a_- . \tag{2.59}$$

3^0. Проведем теперь рассуждения, двойственные к тем, которые уже проведены выше, но теперь по отношению не к оператору P_+, а к оператору P_-. Именно, рассмотрим уравнение

$$y + P_-(ay) = e, \tag{2.60}$$

где $P_- : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_-$ — проектор на подалгебру $\mathfrak{A}_-$ параллельно $\mathfrak{A}_+$. Далее, введем оператор $A_- : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_+$, действующий по закону

$$A_- y := P_-(ay). \tag{2.61}$$

Как и выше, устанавливаем, что A_- — линейный ограниченный оператор и

$$\|A_-\| \leqslant \|a\| < 1. \tag{2.62}$$

Записываем уравнение (2.60) в виде

$$(I + A_-) y = e. \tag{2.63}$$

Здесь оператор $I + A_-$ в силу (2.62) имеет ограниченный обратный и потому

$$\begin{gathered} y = (I + A_-)^{-1} e = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A_-)^k \right) e = e + x_-, \\ x_- := -P_-(ay). \end{gathered} \tag{2.64}$$

4^0. Добавим к обеим частям (2.61) элемент

$$a_+ := P_+(ay). \tag{2.65}$$

Тогда будем иметь из (2.64), (2.65)

$$y + ay = (e + a)y = (e + a)(e + x_-) = e + a_+. \tag{2.66}$$

5^0. Умножим справа обе части (2.59) на элемент, обратный к $e + a$. Так как по условию $\|a\| < 1$, то этот обратный элемент $(e + a)^{-1}$ существует (лемма 2.2.1).

Имеем

$$(e + a_-)(e + a)^{-1} = e + x_+. \tag{2.67}$$

Перемножая теперь левые и правые части (2.67) и (2.66), получаем

$$(e + a_-)(e + x_-) = (e + x_+)(e + a_+). \tag{2.68}$$

Убедимся теперь, что обе части этого равенства равны единичному элементу e. В самом деле, раскрывая скобки в (2.68) и сокращая на e, получим

$$d_- := a_- + x_- + a_- x_- = x_+ + a_+ + x_+ a_+ =: d_+. \tag{2.69}$$

Так как $d_- \in \mathfrak{A}_-$, а $d_+ \in \mathfrak{A}_+$, то отсюда следует, что $d_+ = d_- = 0$ (почему?).

6^0. Таким образом, получаем из (2.68), что

$$(e + a_-)(e + x_-) = (e + x_+)(e + a_+) = e, \tag{2.70}$$

то есть $e + x_+$ обратим справа, а $e + a_-$ — слева.

Как будет следовать из приводимой ниже леммы 2.2.4, эти элементы просто обратимы, а тогда из (2.70) имеем:

$$(e + a_-)^{-1} = (e + x_-), \quad (e + x_+)^{-1} = e + a_+. \tag{2.71}$$

Отсюда и из (2.66) тогда получим

$$(e + a)(e + a_-)^{-1} = e + a_+ \Longleftrightarrow e + a = (e + a_+)(e + a_-). \tag{2.72}$$

Соотношение (2.72) получается также из (2.59) с учётом второй формулы (2.71). $\square$

Итак, утверждения теоремы 2.2.1 можно считать доказанными, если справедливо следующее утверждение.

Рис. 2.1:

Лемма 2.2.4. *В условиях предыдущей теоремы справедливы формулы* (2.71). $\square$

Доказательство. Введём в рассмотрение параметр $t \in \mathbb{C}$ и множество

$$\Lambda = \{t \in \mathbb{C}: \quad |t-\tau| < \delta, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad \delta = (1-\|a\|)/\|a\|\},$$

(см. рис. 2.1).

Убедимся, что при $\|a\| < 1$ для любой точки $t \in \Lambda$ выполнено неравенство

$$\|ta\| < 1. \tag{2.73}$$

В самом деле,

$$\|ta\| = \|(t-\tau)a + \tau a\| \leqslant |t-\tau| \cdot \|a\| + |\tau| \cdot \|a\| <$$
$$< \delta\|a\| + \|a\| = (1-\|a\|)\|a\|^{-1} \cdot \|a\| + \|a\| = 1.$$

Отсюда следует, что все рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.2.1, справедливы не только для элемента a с $\|a\| < 1$, но и для элемента ta при $t \in \Lambda$. Поэтому вместо (2.53) можно рассмотреть уравнение

$$x(t) + P_+(x(t)ta) = e, \tag{2.74}$$

а вместо (2.60)— уравнение

$$y(t) + P_+(ta\, y(t)) = e. \tag{2.75}$$

При этом все полученные выше формулы, вплоть до формул (2.70), сохраняются.

В частности, элементы $x_\pm(t)$ и $a_\pm(t)$ непрерывны по t при $t \in \Lambda$. Действительно. вместо (2.57) и (2.64) теперь имеем соответственно формулы

$$x(t) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-tA_+)^k\Big)e, \quad y(t) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-tA_-)^k\Big)e,$$

которые показывают, что $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные по t функции при $t \in \Lambda$. Поэтому функции

$$x_+(t) = -P_+(x(t)ta), \quad x_-(t) = -P_-(ta\, y(t)) \tag{2.76}$$

также непрерывны по t при $t \in \Lambda$.

Теперь из формулы, аналогичной (2.70), имеем

$$(e + a_-(t))(e + x_-(t)) = (e + x_+(t))(e + a_+(t)) = e\,.$$

Здесь элемент $e + x_+(t)$, во-первых, обратим справа при $t \in \Lambda$, а во-вторых, при $t = 0$ он двусторонне обратим, так как из (2.76) следует, что $x_+(0) = 0$ и потому $e + x_+(0) = e$. Значит, по лемме 2.2.3 $e + x_+(t)$ двусторонне обратим при всех $t \in \Lambda$, в частности, при $t = 1$. Отсюда и из (2.70) следует вторая формула (2.71).

Первая формула (2.71) основана на рассмотрении уравнения (2.75) и доказывается так же. $\square$

Весьма важным является также следующий факт.

Лемма 2.2.5. *В условиях доказанной выше теоремы 2.2.1 представление* (2.51) *единственно.*

Доказательство. Пусть, напротив, имеются две факторизации элемента $e + a$:

$$e + a = (e + a_+)(e + a_-) = (e + \tilde{a}_+)(e + \tilde{a}_-).$$

Тогда

$$(e + \tilde{a}_+)^{-1}(e + a_+) = (e + \tilde{a}_-)(e + a_-)^{-1}. \tag{2.77}$$

Однако
$$(e+a_-)^{-1}=e+x_-,\quad (e+\tilde a_+)^{-1}=e+\tilde x_+.$$
Подставляя эти соотношения в (2.77) и раскрывая скобки, будем иметь (после сокращения на e)

$$\mathfrak{A}_+\ni d_+:=\tilde x_+ + a_+ + \tilde x_+ a_+ = \tilde x_- + a_- + \tilde x_- a_- =: d_-\in\mathfrak{A}_-,$$

откуда следует, что $d_+ = d_- = 0$. Поэтому обе части (2.77) равны единичному элементу e, и тогда

$$e+a_+=e+\widetilde a_\pm,\quad e+a_-=e+\widetilde a_\pm \quad\Longleftrightarrow\quad a_+=\widetilde a_\pm,\quad a_-=\widetilde a_\pm.\quad\square$$

2.3 Применения факторизационной леммы к спектральной теории операторных пучков

Здесь абстрактная теорема 2.2.1 будет применена к элементам винеровской алгебры W, и на этой основе будут получены условия факторизации оператор-функций относительно окружности. Полученные факты позволяют далее доказать, опираясь на теоремы М.В. Келдыша, утверждения о полноте и минимальности системы корневых элементов, отвечающих части спектра операторного пучка.

2.3.1 Применения к винеровской алгебре W

Возьмём в качестве конкретной реализации алгебры $\mathfrak{A}$ винеровскую алгебру W и её прямое разложение на подалгебры W_+ и $\overset{\circ}{W}_-$ (см. параграф 2.1):

$$\mathfrak{A}=W,\quad \mathfrak{A}_+=W_+,\quad \mathfrak{A}_-=\overset{\circ}{W}_-\,. \tag{2.78}$$

Сейчас будет показано, что общие рассуждения, о которых шла речь в основной факторизационной теореме, позволяют получить достаточные условия канонической факторизации операторного пучка, близкого к единичному оператору.

Рассмотрим оператор-функцию вида

$$L(\lambda):=\lambda I-A-B(\lambda), \tag{2.79}$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а $B(\lambda)$ — оператор-функция, голоморфная в некотором круге $|\lambda| < r$:

$$B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^k, \quad B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad |\lambda| < r. \tag{2.80}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть для некоторого $t \in (0, r)$ выполнено условие*

$$\frac{\|A\|}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1. \tag{2.81}$$

Тогда оператор-функция $L(\lambda)$ допускает спектральную факторизацию (частичную линеаризацию) вида

$$L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \tag{2.82}$$

где спектр

$$\sigma(Z) \subset \{\lambda : |\lambda| < t\}, \tag{2.83}$$

а $A_+(\lambda)$ — голоморфная и голоморфно обратимая оператор-функция в замкнутом круге $\{\lambda : |\lambda| \leqslant t\}$.

Доказательство. Рассмотрим окружность $|\lambda| = t$ и осуществим в (2.79) замену $\lambda = \zeta t$, $|\zeta| = 1$. Тогда

$$L(\zeta t) = \zeta t I - A - B(\zeta t), \quad |\zeta| = 1. \tag{2.84}$$

Введем в рассмотрение оператор-функцию

$$A(\zeta) := \frac{L(\zeta t)}{\zeta t} = I - \frac{A}{\zeta t} - \frac{1}{\zeta t} B(\zeta t). \tag{2.85}$$

Как видно из (2.80),

$$A(\zeta) = I - D(\zeta) := I - \Big\{ \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{A}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k t^{k-1}) \zeta^{k-1} \Big\}. \tag{2.86}$$

Проверим, что при выполнении условия (2.81) оператор-функция $D(\zeta) \in W$, более того, выполнено условие

$$\|D(\zeta)\|_W < 1. \tag{2.87}$$

В самом деле, согласно определению (2.3) нормы в алгебре W и определению $D(\zeta)$ имеем

$$\|D(\zeta)\|_W = \left\|\frac{A}{t}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty}\|B_k t^{k-1}\| = \frac{1}{t}\|A\| + \sum_{k=1}^{\infty}\|B_k\|t^{k-1} < 1.$$

Так как в алгебре W роль единичного элемента играет единичный оператор I, то к элементу $I - D(\zeta)$ при условии (2.87) можно применить основную факторизационную теорему 2.2.1. Учитывая еще специальный вид $A(\zeta)$, а также утверждение леммы 2.1.4 для $n = 1$, приходим к выводу, что имеет место факторизация

$$A(\zeta) = I - D(\zeta) = (I + D_+(\zeta))\Big(I - \frac{Z_1}{\zeta}\Big), \quad |\zeta| = 1, \tag{2.88}$$

где

$$I + D_+(\zeta) \in W_+, \quad (I + D_+(\zeta))^{-1} - I \in W_+, \tag{2.89}$$

$$Z_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (I - \frac{Z_1}{\zeta})^{-1} - I \in \overset{\circ}{W}_- \,. \tag{2.90}$$

Кроме того, как было выяснено в п. 2.1.3, при канонической факторизации оператор-функции $A(\zeta) \in W$ оператор-функция $I + D_+(\zeta)$ голоморфна и обратима при $|\zeta| \leqslant 1$, а оператор-функция $(I - \frac{Z_1}{\zeta})^{-1} - I$ обладает этими свойствами при $|\zeta| \geqslant 1$. Поэтому из разложения (2.88) будем иметь свойство

$$\sigma(Z_1) \subset \{\zeta : |\zeta| < 1\}. \tag{2.91}$$

Осуществляя в (2.90), (2.91) обратную замену $\zeta = \lambda/t$, придем с учётом (2.84), (2.85) к факторизации (2.82) и формуле (2.83), причем

$$A_+(\lambda) := I + D_+(\lambda t^{-1}), \quad \sigma(Z) \subset \{\lambda : \ |\lambda| < t\}, \tag{2.92}$$

и $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| \leqslant t$.

Отметим еще одно важное свойство, которое понадобиться далее. Так как имеют место включения (2.89), то

$$\begin{gathered} A_+(\lambda) := I + D_+(\lambda t^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\widetilde{A}_+)_k\zeta^k, \\ \sum_{k=0}^{\infty}\|(\widetilde{A}_+)_k\| = \|I + D_+(\zeta)\|_W < \infty. \end{gathered} \tag{2.93}$$

Отсюда следует, что

$$A_+(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\widetilde{A}_+)_k t^{-k} \lambda^k =: \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \tag{2.94}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \|(\widetilde{A}_+)_k\| < \infty. \tag{2.95}$$

Аналогичные свойства имеют место и для $A_+^{-1}(\lambda)$, т.е.

$$A_+^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^{(-1)}) \lambda^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|(A_k^{(-1)})\| \cdot t^k < \infty. \qquad \square \tag{2.96}$$

Важным следствием доказанной теоремы является такое утверждение.

Теорема 2.3.2. *Пусть $B(\lambda) = \lambda^2 B$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда если выполнено условие*

$$4\|A\| \cdot \|B\| < 1, \tag{2.97}$$

то пучок $L(\lambda) = \lambda I - A - \lambda^2 B$ допускает каноническую факторизацию в виде

$$L(\lambda) = (D - \lambda B)(\lambda I - Z), \quad D = I - BZ, \tag{2.98}$$

где

$$\sigma(D - \lambda B) \subset \{\lambda : \quad |\lambda| \geqslant r_+\}, \quad \sigma(Z) \subset \{\lambda : \quad |\lambda| \leq r_-\}, \tag{2.99}$$

$$r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|}}{2\|B\|}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty. \tag{2.100}$$

Доказательство. Рассматриваемый пучок $L(\lambda) = \lambda I - A - \lambda^{-1} B$, очевидно, является частным случаем пучка (2.79), (2.80). Поэтому условие (2.81), достаточное для его факторизации, принимает вид

$$\frac{\|A\|}{t} + t\|B\| < 1. \tag{2.101}$$

В силу (2.97) ему удовлетворяют все $t \in (r_-, r_+)$, где $r_\pm$ — числа, определённые формулами (2.100) и являющиеся корнями квадратного уравнения $\|B\|r^2 - r + \|A\| = 0$, ассоциированного с $L(\lambda)$.

Поэтому из теоремы 2.3.1 следует, что имеет место факторизация (2.98), (2.99) и

$$\sigma(Z) \subset \{\lambda : \; |\lambda| < t\} \Longrightarrow \sigma(Z) \subset \{\lambda : \; |\lambda| \leq r_-\}.$$

Соответственно для пучка $D - \lambda B$ имеем

$$\sigma(D - \lambda B) \subset \{\lambda : \; |\lambda| > t\} \Longrightarrow \sigma(D - \lambda B) \subset \{\lambda : \; |\lambda| \geqslant r_+\}.$$

Заметим еще, что в кольце $\{\lambda : \; r_- < t < r_+\}$ пучок $L(\lambda)$ не имеет точек спектра, так как при любом λ с $|\lambda| = t \in (r_-, r_+)$ пучок $L(\lambda)$ обратим. □

Замечание 2.3.1. *Напомним, что вопрос о факторизации квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ (с заменой A на B и B на A) уже рассматривался в пункте 1.5.3 (см. упражнения 1.5.3–1.5.5). Там, в частности, было установлено, что при условии* (2.97) *имеет место факторизация вида* (2.98), *причем для $L(\lambda) = \lambda I - A - \lambda^2 B$, как следует из упражнения 1.5.4,*

$$Z = YA, \quad D - \lambda B = Y^{-1}(I - \lambda YB), \quad Y = I + BYAY. \tag{2.102}$$

Условие (2.97) *было достаточным условием для существования единственного решения Y квадратного операторного уравнения* (2.102) *в шаре $\|Y\| \leqslant R := r_-/\|A\|$.*

В теореме 2.3.2 те же выводы получены более легким путем, с использованием теоремы 2.3.1 и тривиального неравенства (2.101). □

2.3.2 Теоремы М.В. Келдыша

При исследовании операторных пучков часто оказываются весьма полезными признаки, позволяющие установить факт полноты системы корневых элементов вполне непрерывного оператора, близкого к самосопряжённому. Результаты, которые сформулированы ниже, принадлежат выдающемуся советскому математику и механику, организатору науки в СССР, президенту Академии Наук СССР, главному теоретику космонавтики Мстиславу Всеволодовичу Келдышу.

Определение 2.3.1. *Будем говорить, следуя М.В. Келдышу, что оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$* ***имеет конечный порядок****, если этот оператор* *принадлежит классу* $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $(0 < p < \infty)$. *Это означает, что его s-числа, т.е. собственные значения оператора* $(A^*A)^{1/2}$, *суммируются со степенью* p, $0 < p < \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(s_k(A))^p < \infty. \tag{2.103}$$

Нижнюю грань чисел p, *для которых выполнено условие* (2.103), *называют порядком оператора* A *и обозначают* $p\,(A)$. $\square$

Теорема 2.3.3. *(первая теорема М.В. Келдыша о полноте системы корневых элементов и локализации спектра слабовозмущённого самосопряжённого вполне непрерывного оператора). Пусть выполнены условия*

$$Z = A(I+S), \quad A = A^* \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}), \quad 0 < p\,(A) < \infty, \quad S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{2.104}$$

Тогда:

1°. *Если* $\operatorname{Ker} Z = \{0\}$, *то система корневых элементов оператора* Z *полна в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

2°. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения* λ *оператора* Z, *кроме, быть может, конечного их числа, лежат в углах*

$$-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon, \quad \pi - \varepsilon < \arg\lambda < \pi + \varepsilon. \tag{2.105}$$

3°. *Если оператор* A *имеет только конечное число отрицательных (положительных) собственных значений, то оператор* Z *имеет не более конечного числа собственных значений в угле*

$$\pi - \varepsilon < \arg\lambda < \pi + \varepsilon \quad (-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon). \quad \square \tag{2.106}$$

Доказательство теоремы М.В. Келдыша, а также более общих теорем о кратной полноте системы корневых элементов полиномиальных операторных пучков можно найти в монографиях И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна (см. [7]), а также А.С. Маркуса (см. [28]). Здесь ограничимся лишь некоторыми замечаниями к теореме 2.3.3.

Замечание 2.3.2. *Условие* $\operatorname{Ker} Z = \{0\}$ *равносильно тому, что оператор* $I + S$ *обратим (и тогда обратный ограничен), а также тому, что* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. *В последнем случае говорят, что самосопряженный компактный оператор* A *является* ***полным***. $\square$

Замечание 2.3.3. *При выполнении условий теоремы 2.3.3 можно также утверждать, что система корневых элементов сопряжённого оператора*

$$Z^* = (I + S^*)A \tag{2.107}$$

тоже полна в $\mathcal{H}$.

В самом деле, оператор $Z_1 = A(I + S^*)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.3.3, а оператор (2.107) *подобен ему:*

$$Z^* = (I + S^*)Z_1(I + S^*)^{-1}. \qquad \square \tag{2.108}$$

Этот факт есть следствие такого утверждения.

Лемма 2.3.1. *Справедливо общее утверждение: если оператор Z обладает полной системой корневых элементов, то этим свойством будет обладать и всякий подобный ему оператор*

$$Z_1 := W^{-1}ZW, \quad W, W^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad \square$$

Доказательство. Для любого $\psi \in \mathcal{H}$ возьмем элемент $\varphi := W\psi$. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — полная система корневых элементов оператора Z. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать номер $N = N(\varepsilon)$ и коэффициенты $c_k = c_k(\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, N(\varepsilon)$, что

$$\|\varphi - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\| < \frac{\varepsilon}{\|W^{-1}\|}. \tag{2.109}$$

Докажем теперь, что корневые элементы $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ оператора Z и корневые элементы $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ подобного ему оператора $Z_1 = W^{-1}ZW$ связаны соотношениями

$$\varphi_j = W\psi_j, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{2.110}$$

В самом деле, пусть ψ_j — корневой элемент оператора Z_1, отвечающий собственному значению λ_j. Тогда имеем при некотором натуральном m:

$$(Z_1 - \lambda_j I)^m\psi_j = 0, \qquad (Z_1 - \lambda_j I)^{m-1}\psi_j \neq 0.$$

Отсюда получаем соотношения

$$(Z_1 - \lambda_j I)^m\psi_j = (W^{-1}ZW - \lambda_j W^{-1}W)^m\psi_j = (W^{-1}(Z - \lambda_j I)W)^m\psi_j =$$

$$= W^{-1}(Z-\lambda_j I)^m W\psi_j = 0, \qquad W^{-1}(Z-\lambda_j I)^{m-1} W\psi_j \neq 0,$$

из которых следует, в силу обратимости операторов W и W^{-1}, что имеет место связь (2.110).

Опираясь на (2.110) и определение элемента φ, перепишем (2.109) в виде

$$\|W\psi - \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k\| < \frac{\varepsilon}{\|W^{-1}\|}.$$

Отсюда получаем

$$\|\psi - \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k\| = \|W^{-1}(W\psi - \sum_{k=1}^{N} c_k W\psi_k)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|W^{-1}\| \cdot \|W\psi - \sum_{k=1}^{N} c_k W\psi_k\| < \|W^{-1}\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|W^{-1}\|} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Замечание 2.3.4. *Из леммы 2.3.1 вытекает, что теорема 2.3.3 допускает обобщение на случай, когда оператор Z имеет вид*

$$Z = (I+S_1)A(I+S_2), \quad S_j \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad j=1,2, \tag{2.111}$$

причём операторы $(I+S_j)$ обратимы, а $\operatorname{Ker} Z = \{0\}$. $\square$

В самом деле, если положить

$$I+S := (I+S_2)(I+S_1), \quad Z_1 := A(I+S),$$

то

$$Z = W^{-1} Z_1 W, \quad W = (I+S_1)^{-1}.$$

Так как оператор Z_1 удовлетворяет условиям теоремы 2.3.3, а оператор Z подобен ему, то по лемме 2.3.1 получаем, что система корневых элементов оператора Z полна в $\mathcal{H}$.

Иногда в приложениях вместо теоремы 2.3.3 пользуются другим утверждением, близким к нему.

Теорема 2.3.4. *(вторая теорема М.В. Келдыша). Система корневых элементов линейного пучка*

$$L(\lambda) := I - T - \lambda A \tag{2.112}$$

полна в $\mathcal{H}$, если оператор A — полный самосопряжённый оператор конечного порядка ($\operatorname{Ker} A = \{0\}$, $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$), *а $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Оно основано на сведении проблемы к ситуации, когда справедлива первая теорема М.В. Келдыша.

1°. Без ограничения общности можно считать, что оператор $I-T$ в (2.112) обратим. В самом деле, замена параметра λ на $\lambda+a$ в пучке (2.112), очевидно, не меняет его корневых элементов, а лишь сдвигает его спектр на a. При таком сдвиге пучок $L(\lambda)$ переходит в пучок

$$L(\lambda+a) = I - T - aA - \lambda A. \tag{2.113}$$

Если теперь выбрать невещественное a так, чтобы выполнялось условие

$$\|(I-aA)^{-1}T\| < 1, \tag{2.114}$$

то оператор

$$I - T - aA = (I-aA)(I-(I-aA)^{-1}T)$$

будет обратим, так как этим свойством будут обладать оба сомножителя: первый в силу того, что $\operatorname{Im} a \neq 0$, а второй — в силу (2.114).

Оказывается, условие (2.114) можно обеспечить подбором $a \in \mathbb{C}$; в частности, оценка (2.114) следует из леммы 7.1 монографии ([7], с. 309).

2°. Итак, предполагая в (2.112) существование ограниченного оператора $(I-T)^{-1}$, будем иметь

$$(I-T)^{-1} = I + S, \qquad S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{2.115}$$

Как уже отмечалось ранее (лемма 1.5.1), умножение слева любого пучка $L(\lambda)$ на некоторый ограниченный и ограниченно обратимый оператор не меняет его корневых элементов. Умножим $L(\lambda)$ из (2.112) на оператор $I+S=(I-T)^{-1}$; тогда он перейдёт в пучок

$$L_1(\lambda) = (I+S)L(\lambda) = I - \lambda Z_1, \qquad Z_1 = (I+S)A. \tag{2.116}$$

3°. Таким образом, при условии обратимости оператора $I-T$ полнота системы корневых элементов оператора Z_1 эквивалентна полноте системы корневых элементов операторного пучка $L(\lambda)$. Воспользуемся теперь замечанием 2.3.3 и теоремой 2.3.3. Так как Z_1 подобен оператору

$$Z := A(I+S) = (I+S)^{-1}Z_1(I+S),$$

а оператор Z, согласно теореме 2.3.3, имеет полную систему корневых элементов, то этим же свойствам обладает оператор Z_1, а потому и пучок $L(\lambda)$. $\square$

2.3.3 О полноте системы корневых элементов оператор-функций

Применим теперь результаты, приведенные в пунктах 2.3.1 и 2.3.2, для получения достаточных условий полноты системы корневых элементов некоторых оператор-функций.

Теорема 2.3.5. *Пусть для оператор-функции*

$$L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda), \quad B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^k, \quad 0 \leqslant |\lambda| < r, \qquad (2.117)$$

выполнены следующие условия:

1^0. *Оператор* $A = A^* \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ *является полным (*$\mathrm{Ker} A=\{0\}$*).*

2^0. *Оператор* $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$.

3^0. *Выполнено условие, достаточное для спектральной факторизации* $L(\lambda)$*, т.е. найдется такое* $t \in (0, r)$*, что*

$$\|A\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1. \qquad (2.118)$$

Тогда система корневых элементов оператор-функции $L(\lambda)$*, отвечающая собственным значениям из круга* $\{\lambda : \ |\lambda| < t\}$*, полна и минимальна в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$*, а собственные значения* λ *локализованы вдоль действительной оси.*

Доказательство. По теореме 2.3.1 в силу условия (2.118) оператор-функция $L(\lambda)$ допускает спектральную факторизацию

$$L(\lambda) \equiv A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \quad Z \in \mathcal{L}(H), \qquad (2.119)$$

$A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| \leq t$, а $\sigma(Z) \subset \{\lambda : |\lambda| < t\}$.

Разложим $A_+(\lambda)$ в ряд Маклорена,

$$A_+(\lambda) = A_+(0) + \lambda A_+'(0) + \dots ,$$

а затем приравняем коэффициенты при степенях λ^0 и λ^1 в тождестве (2.119). Это приводит к соотношениям

$$-A = -A_+(0) Z, \quad I - B_1 = -A_+'(0) Z + A_+(0). \qquad (2.120)$$

Так как оператор-функция $A_+(\lambda)$ обратима при $|\lambda| \leqslant t$, то $A_+^{-1}(0) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, и из первого уравнения (2.120) получаем

$$Z = A_+^{-1}(0)A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}), \tag{2.121}$$

так как $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$. Второе уравнение (2.120) дает

$$A_+(0) = I - B_1 + A'_+(0)Z =: I - T, \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \tag{2.122}$$

поскольку по условию $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, $A'_+(0) \in \mathcal{L}((\mathcal{H}))$.

Снова вспоминая об обратимости $A_+(0)$ и его структуре (2.122), из (2.121) получаем

$$Z = (I-T)^{-1}A = (I+S)A, \quad S = (I-T)^{-1} - I \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{2.123}$$

Выяснив структуру фактора Z, вернемся к разложению (2.119). Так как $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| \leq t$, то спектральная задача

$$L(\lambda)\varphi \equiv A_+(\lambda)(\lambda I - Z)\varphi = 0, \quad |\lambda| \leq t, \tag{2.124}$$

равносильна задаче

$$Z\varphi = \lambda\varphi, \quad Z = (I+S)A, \quad |\lambda| \leq t, \quad \sigma(Z) \subset \{\lambda : \ |\lambda| < t\}. \tag{2.125}$$

Это — задача на собственные значения для слабовозмущенного самосопряженного оператора Z, к которой применима первая теорема М.В. Келдыша (теорема 2.3.3), а также замечание 2.3.3 к ней. Действительно, по условию 1^0 оператор $A = A^* \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ полный, а оператор $(I+S)$, как доказано выше, обратим и $S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Поэтому из теоремы 2.3.3 следует, что система корневых элементов задачи (2.125), а потому и задачи (2.124), отвечающая собственным значениям λ из открытого круга $|\lambda| < t$, полна в $\mathcal{H}$, а собственные значения локализованы вдоль действительной оси. Кроме того, эта система обладает свойством минимальности в $\mathcal{H}$, поскольку (2.125) — задача на собственные значения для линейного пучка, когда свойство переполнения (неминимальности) корневых элементов не имеет места. $\square$

Рассмотрим теперь вместо (2.117) оператор-функцию более специального вида, возникающую, как уже упоминалось выше, в задачах гидродинамики вязкой жидкости.

Теорема 2.3.6. *Пусть для операторного пучка С.Г. Крейна*

$$L(\lambda) := I - \lambda A - \lambda^{-1}B \tag{2.126}$$

выполнены условия

$$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} B = \{0\}. \tag{2.127}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1°. *Если* $A = A^*$, $B = B^*$ *и выполнено условие сильной демпфированности*

$$4(A\varphi, \varphi)(B\varphi, \varphi) < (\varphi, \varphi)^2, \quad \forall \varphi \neq 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{2.128}$$

то пучок $L(\lambda)$ *может иметь лишь вещественные собственные значения.*

2°. *Если в отличие от* 1° *условие* (2.128) *не выполнено, то все невещественные собственные значения, а также те вещественные собственные значения, собственные элементы которых имеют присоединённые элементы, расположены в кольце*

$$\frac{1}{2\|A\|} \leqslant |\lambda| \leqslant 2\|B\|. \tag{2.129}$$

(В этом случае $4\|A\| \cdot \|B\| \geqslant 1$.*)*

3°. *Если* $B = B^* \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $\quad 0 < p < \infty$, *и выполнено условие*

$$4\|A\| \cdot \|B\| < 1, \tag{2.130}$$

то система корневых элементов пучка $L(\lambda)$, *отвечающая собственным значениям из круга*

$$|\lambda| \leqslant r_-, \quad r_\pm := (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|})/(2\|A\|), \tag{2.131}$$

полна и минимальна в $\mathcal{H}$.

4°. *Если* $A = A^* \in \mathfrak{S}_q(\mathcal{H})$, $\quad 0 < q < \infty$, *и выполнено условие* (2.130), *то система корневых элементов пучка* $L(\lambda)$, *отвечающая собственным значениям вне круга* $|\lambda| < r_+$, *полна и минимальна в* $\mathcal{H}$.

Доказательство. 1°. Утверждение 1° есть следствие соотношения

$$(L(\lambda)\varphi, \varphi) := (\varphi, \varphi) - \lambda(A\varphi, \varphi) - \lambda^{-1}(B\varphi, \varphi) = 0, \tag{2.132}$$

которое выполняется для собственного значения λ пучка $L(\lambda)$ и отвечающего этому значению собственного элемента $\varphi \neq 0$.

2°. Пусть $A = A^*$, $\quad B = B^*$, а условие (2.128) не выполнено для всех $\varphi \in \mathcal{H}$. Тогда для невещественных собственных значений λ пучка $L(\lambda)$, определяемых (как решения уравнения (2.132)) по формуле

$$\lambda = \frac{(\varphi,\varphi) \pm \sqrt{(\varphi,\varphi)^2 - 4(A\varphi,\varphi)(B\varphi,\varphi)}}{2(A\varphi,\varphi)}, \tag{2.133}$$

подкоренное выражение (дискриминант квадратного относительно λ трехчлена) будет отрицательным. Поэтому

$$(\varphi,\varphi)^2 < 4(A\varphi,\varphi)(B\varphi,\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(\varphi,\varphi)}{2|(A\varphi,\varphi)|} < \frac{2|(B\varphi,\varphi)|}{(\varphi,\varphi)}. \tag{2.134}$$

При невещественном λ из формулы (2.133) следует также (проверьте!), что

$$0 < |\lambda|^2 = \frac{|(B\varphi,\varphi)|}{|(A\varphi,\varphi)|} = \frac{2|(B\varphi,\varphi)|}{(\varphi,\varphi)} \cdot \frac{(\varphi,\varphi)}{2|(A\varphi,\varphi)|}. \tag{2.135}$$

Применяя теперь в обе стороны неравенство (2.134), получим из (2.135)

$$\Big(\frac{(\varphi,\varphi)}{2(A\varphi,\varphi)}\Big)^2 < |\lambda|^2 < \Big(\frac{2(B\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}\Big)^2. \tag{2.136}$$

Отсюда следуют оба неравенства (2.129) для невещественных λ.

Пусть теперь $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}$ — собственное значение пучка $L(\lambda) := I - A(\lambda)$, $A(\lambda) := \lambda A + \lambda^{-1}B$, для которого собственному элементу $\varphi = \varphi_0$ отвечает также присоединённый элемент φ_1. Тогда соотношения $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$ и $L(\lambda_0)\varphi_1 + L'(\lambda_0)\varphi_0 = 0$ приводят к формулам

$$\varphi_0 = A(\lambda_0)\varphi_0, \quad \varphi_1 = A(\lambda_0)\varphi_1 + A'(\lambda_0)\varphi_0.$$

Умножим скалярно обе части второго равенства на φ_0 и воспользуемся свойством самосопряжённости оператора $A(\lambda_0)$ (почему?), а также первым уравнением. После умножения на λ_0 будем иметь

$$\lambda_0(A'(\lambda_0)\varphi_0,\varphi_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0(A\varphi_0,\varphi_0) - \frac{1}{\lambda_0}(B\varphi_0,\varphi_0) = 0.$$

Отсюда и из соотношения

$$(L(\lambda_0)\varphi_0,\varphi_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0(A\varphi_0,\varphi_0) + \frac{1}{\lambda_0}(B\varphi_0,\varphi_0) = (\varphi_0,\varphi_0)$$

будем иметь

$$2\lambda_0(A\varphi_0,\varphi_0)=(\varphi_0,\varphi_0),\quad \frac{2}{\lambda_0}(B\varphi_0,\varphi_0)=(\varphi_0,\varphi_0).$$

Тогда

$$\frac{(\varphi_0,\varphi_0)}{2(A\varphi_0,\varphi_0)}=\lambda_0=\frac{2(B\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)},$$

откуда снова следуют неравенства (2.129).

3^0. Пусть теперь $B=B^*\in\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ и выполнено условие (2.130). Воспользуемся уже доказанной ранее (см. упражнение 1.5.4 и условие (1.62)) факторизацией операторного пучка $\lambda L(\lambda)=\lambda I-\lambda^2 A-B$. Тогда для $L(\lambda)$ будем иметь

$$L(\lambda)=Y^{-1}(I-\lambda YA)(I-\lambda^{-1}YB),\quad Y=I+AYBY, \tag{2.137}$$

для которой (при условии $4\|A\|\cdot\|B\|<1$) спектр

$$\sigma(I-\lambda^{-1}YB)\subset\{\lambda:|\lambda|\leqslant r_-,\quad \lambda\neq 0\}.$$

Кроме того, по условию (2.117) $\operatorname{Ker}B=\{0\}$. Из квадратного операторного уравнения для Y в (2.137) имеем

$$Y=I+S,\quad S\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),\quad (I+S)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Вспоминая еще, что оператор $(I-\lambda YA)$ обратим при $|\lambda|<r_+$, приходим к выводу, что $\sigma(L)=\sigma(YB)$ при $|\lambda|\leqslant r_-$. Отсюда по первой теореме Келдыша (теорема 2.3.3) получаем, что имеет место утверждение 3^0 данной теоремы.

4^0. Пусть $A=A^*\in\mathfrak{S}_q(\mathcal{H})$, $0<q<\infty$, и выполнено условие (2.130). Тогда (согласно упражнению 1.5.3) имеет место другая факторизация (см. (1.58), (1.59))

$$L(\lambda)=X^{-1}(I-\lambda^{-1}XB)(I-\lambda XA),\quad X=I+BXAX. \tag{2.138}$$

Осуществим в (2.138) замену спектрального параметра $\lambda=\mu^{-1}$. Тогда возникает операторный пучок $\widetilde{L}(\mu)=I-\mu^{-1}A-\mu B$ и его факторизация

$$\widetilde{L}(\mu):=X^{-1}(I-\mu XB)(I-\mu^{-1}XA),\quad X=I+BXAX, \tag{2.139}$$

которые совпадают с (2.137), если формально произвести замены

$$\lambda\mapsto\mu,\quad Y\mapsto X,\quad A\mapsto B,\quad B\mapsto A.$$

Поэтому доказательство утверждения 4^0 теоремы в точности повторяет рассуждения, проведенные выше в пункте 3^0. Этим завершается доказательство всей теоремы в целом. $\square$

Упражнение 2.3.1. *Показать, опираясь на представление* (2.139), *что для пучка* $L(\lambda)$ *в представлении* (2.137) *выполнено включение*

$$\sigma(I - \lambda XA) \subset \{\lambda : \, |\lambda| \geqslant r_+\},$$

а оператор $(I - \lambda^{-1}XB)$ *обратим при* $|\lambda| > r_-$. $\square$

Замечание 2.3.5. *Утверждения* 3° *и* 4° *теоремы 2.3.6 можно доказать также, опираясь на условие сильной демпфированности* (2.128) *и один результат Гохберга–Лайтерера о факторизации операторных пучков.* $\square$

Замечание 2.3.6. *Несколько позже утверждения* 3° *и* 4° *теоремы 2.3.6 будут усилены: вместо требований* $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $B \in \mathfrak{S}_q(\mathcal{H})$ *будет достаточно, чтобы* A, $B \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, *причём будут доказаны не только свойства полноты, но и базисности Рисса системы корневых элементов операторного пучка С.Г. Крейна.* $\square$

Следствие 2.3.1. *Пусть* $A = A^* \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $B = B^* \in \mathfrak{S}_q(\mathcal{H})$ — *полные операторы, для которых выполнено условие* (2.130)*. Тогда пучок* $L(\lambda)$ *обратим в кольце* $r_- < |\lambda| < r_+$ *и для него имеют место утверждения* 1°, 3° *и* 4° *теоремы 2.3.6.* $\square$

Глава 3

Базисность системы корневых элементов оператор-функции

В этой главе рассматриваются операторные пучки, которые называются самосопряженными. В этом случае оказывается, что при наличии факторизации такого пучка фактор Z во втором сомножителе в формуле

$$L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$$

обладает дополнительными полезными свойствами. Именно, оказывается что Z подобен самосопряженному оператору, а потому система его собственных элементов образует так называемый базис Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В некоторых случаях собственные элементы оператора Z обладают еще более тонким свойством, чем базисность Рисса, — свойством так называемой p–базисности. Элементы p–базиса достаточно близки в определенном смысле к элементам ортонормированного базиса.

Еще одна важная проблема — выяснение характера асимптотического поведения ветвей собственных значений операторного пучка, расположенного в том или ином секторе комплексной плоскости. Эта проблема также обсуждается в данной главе.

Наконец, в последнем параграфе главы изучаются спектральные свойства операторного пучка С.Г. Крейна, возникающего при нормальных колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде. Рассмотрено также обобщение этой задачи, когда сосуд с жидкостью в невозмущенном состоянии равномерно вращается с постоянной угловой скоростью.

3.1 Самосопряжённые операторные пучки

Коль скоро для некоторого операторного пучка $L(\lambda)$ установлено свойство полноты системы его корневых элементов, возникает естественный вопрос: нельзя ли из этих элементов составить базис в $\mathcal{H}$.

3.1.1 Базисы в гильбертовом пространстве

Напомним сейчас некоторые известные определения.

Определение 3.1.1. *Последовательность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется базисом этого пространства, если любой элемент $\varphi \in \mathcal{H}$ разлагается единственным образом в ряд*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j,$$

сходящийся по норме пространства $\mathcal{H}$, т.е.

$$\|\varphi - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

При этом коэффициенты c_j находятся по элементу φ однозначно, т.е. $c_j = c_j(\varphi)$, $j = 1, 2, \ldots$. $\square$

Определение 3.1.2. *Базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, для элементов которого выполнены свойства*

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера ($\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$ и $\delta_{jj} = 1$), называется **ортонормированным базисом** *пространства $\mathcal{H}$.*

Определение 3.1.3. *Базис $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, получаемый из ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ по закону*

$$\psi_j = A\varphi_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где A — некоторый линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор ($A, A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$), называется **базисом, эквивалентным ортонормированному**, *или* **базисом Рисса**. $\square$

В некоторых задачах возникают базисы, еще более близкие к ортонормированному, чем базис Рисса.

Определение 3.1.4. *Будем говорить, что базис Рисса* $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *является* p*–базисом,* $0 < p \leqslant \infty$*, если*

$$\psi_j = (I + T)\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}),$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— ортонормированный базис в* $\mathcal{H}$*. При* $p = 2$ *говорят о* ***базисе Бари****.* $\square$

Замечание 3.1.1. *При* $p < \infty$ *из свойства* p*–базисности системы элементов* $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *следует свойство* p*–близости этой системы к соответствующему ортонормированному базису* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$*, то есть свойство*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j - \varphi_j\|^p < \infty. \qquad \square$$

При $0 < p \leqslant 2$ из свойства p–близости базиса $\{\psi\}_{j=1}^{\infty}$ к ортонормированному базису $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ следует, что $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ является p–базисом. Отсюда получаем, что при $p = 2$, т.е. для базиса Бари, понятия p–близости и p–базисности эквивалентны. $\square$

3.1.2 Самосопряжённые оператор-функции

Многие задачи механики сплошных сред приводят к изучению операторных пучков с коэффициентами, являющимися самосопряжёнными операторами.

Определение 3.1.5. *Операторный пучок* $L(\lambda)$ *называется самосопряжённым, если*

$$\big(L(\bar{\lambda})\big)^* \equiv L(\lambda). \quad \square$$

Пример 3.1.1. *Пучок С.Г. Крейна, отвечающий задаче о нормальных колебаниях тяжёлой вязкой жидкости в сосуде, как уже упоминалось во введении, имеет вид*

$$L(\lambda) := I - (\lambda A + \lambda^{-1} B), \quad \lambda \neq 0, \quad A = A^* > 0, \quad B = B^* \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Он, очевидно, самосопряжён. $\square$

Пример 3.1.2. *Пусть*

$$L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda), \quad B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^k, \quad |\lambda| < r,$$
$$A = A^*, \quad B_k = B_k^*, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{3.2}$$

Для этого пучка свойство самосопряжённости также выполнено. □

Пусть самосопряженный пучок $L(\lambda)$ допускает частичную линеризацию, т.е. факторизацию

$$L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \quad \sigma(Z) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < t\}, \tag{3.3}$$

относительно окружности $|\lambda| = t$. В некоторых случаях удается установить. что фактор Z, отвечающий за ту часть спектра пучка $L(\lambda)$, которая расположена в круге $|\lambda| < t$, подобен самосопряженному оператору. Поэтому Z может иметь лишь собственные элементы. При определенных условиях эти собственные элементы образуют базис Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а иногда и p-базис.

Перейдем к рассмотрению этих вопросов.

Определение 3.1.6. *Говорят, что самосопряжённый оператор F **симметризует оператор** Z **справа**, если*

$$(ZF)^* = ZF. \quad \square$$

Лемма 3.1.1. *Если Z из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет положительно определенный симметризатор $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. $F = F^* \gg 0$, то Z подобен самосопряжённому оператору.*

Доказательство. В самом деле, так как $F \gg 0$ и $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то существуют операторы $F^{1/2}$, $F^{-1/2}$, которые также являются самосопряженными и положительно определёнными (эти факты следуют из спектрального разложения для $F = F^* \gg 0$, проверьте это!). Тогда

$$F^{-1/2} Z F^{1/2} = F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2} =: K = K^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

так как $(ZF)^* = ZF$. Поэтому

$$Z = F^{1/2} K F^{-1/2},$$

то есть Z подобен самосопряжённому оператору K. □

Упражнение 3.1.1. *Проверить, что $F \gg 0$ тогда и только тогда симметризует оператор Z справа, когда F^{-1} симметризует Z слева, т.е.*

$$(F^{-1}Z)^* = F^{-1}Z. \qquad \square$$

3.1.3 О базисности Рисса системы корневых элементов самосопряжённого операторного пучка

Рассмотрим снова операторный пучок вида (3.2) и будем предполагать, что выполнено условие, достаточное для его канонической факторизации: существует $t \in (0, r)$ такое, что

$$\|A\|t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1.2. *Пусть выполнены условия* (3.2), (3.4). *Тогда фактор* Z, *появляющийся при факторизации* (3.3) *пучка* $L(\lambda)$, *допускает симметризацию справа оператором*

$$F := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} L^{-1}(\lambda) d\lambda\,. \tag{3.5}$$

Доказательство. Заметим сначала, что $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ как интеграл от непрерывной функции $L^{-1}(\lambda)$, заданной на окружности $|\lambda| = t$.

Проверим теперь, что $F = F^*$. Действительно, из (3.5) имеем,

$$F^* = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\bar{\lambda}|=t} \left(L^{-1}(\lambda)\right)^* d\bar{\lambda} = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\bar{\lambda}|=t} L^{-1}(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda}.$$

Осуществляя здесь замену $|\bar{\lambda} \mapsto \lambda|$, т.е. переходя от интегрирования по часовой стрелке к интегрированию против часовой стрелки, получим (по свойствам криволинейных интегралов)

$$F^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} L^{-1}(\lambda) d\lambda = F.$$

Убедимся, наконец, что F симметризует оператор Z справа. В самом деле,

$$ZF := Z\Big(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t} L^{-1}(\lambda)d\lambda\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t} (Z-\lambda I)L^{-1}(\lambda)d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t} \lambda L^{-1}(\lambda)d\lambda =:$$

$$=: \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t} (Z-\lambda I)(\lambda I - Z)^{-1}A_+^{-1}(\lambda)d\lambda + F_1\,.$$

Так как $A_+^{-1}(\lambda)$ голоморфна в круге $|\lambda| \leqslant t$, то первый интеграл справа (по теореме Коши) равен нулю, а второй является самосопряжённым оператором. Этот последний факт доказывается так же, как вышеприведенное рассуждение для F. Окончательно получаем

$$ZF = F_1 = F_1^* = (ZF)^*. \quad \square$$

Следующий весьма важный шаг состоит в доказательстве такого утверждения.

Лемма 3.1.3. *Пусть выполнены условия* (3.2), (3.4). *Тогда симметризатор F оператора Z из разложения* (3.3) *является положительно определенным в $\mathcal{H}$:*

$$F \gg 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. Если выполнено условие (3.4), то при любом $\varphi \in \mathcal{H}$, при любом λ с $|\lambda| = t$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\Big(\frac{L(\lambda)}{\lambda} - I\Big)\varphi,\varphi\Big)\Big| &= \Big|\Big(\Big(\frac{1}{\lambda}A + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\lambda^{k-1}\Big)\varphi,\varphi\Big)\Big| \leqslant \\ &\leqslant \Big(\frac{\|A\|}{t} + \sum_{k=1}^{\infty}\|B_k\|t^{k-1}\Big)\|\varphi\|^2 =: \delta(t)\|\varphi\|^2 < \|\varphi\|^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Поэтому при любом $\varphi \in \mathcal{H}$ и тех же λ (в силу свойства $F^* = F$) имеем

$$(F\varphi,\varphi) = \mathrm{Re}\,(F\varphi,\varphi) = \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t} \Big(L^{-1}(\lambda)\varphi,\varphi\Big)d\lambda\Big\}.$$

Осуществим здесь замены

$$\lambda = te^{-i\theta}, \quad d\lambda = te^{i\theta} i d\theta, \quad L(\lambda) =: \lambda L_0(\lambda),$$

$$L_0(\lambda) = I - \lambda^{-1} A - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} B_k\,.$$

Тогда

$$(F\varphi, \varphi) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \Big(L_0^{-1}(te^{i\theta})\varphi, \varphi \Big) d\theta \right\}.$$

Вводя еще функцию

$$\psi(\theta) := L_0^{-1}(te^{i\theta})\varphi,$$

получим

$$\begin{aligned}
(F\varphi, \varphi) &= \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\psi(\theta), L_0(te^{i\theta})\psi(\theta) \Big) d\theta \right\} = \\
&= \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\psi(\theta), (I - (A(te^{i\theta})^{-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} (te^{i\theta})^{k-1} B_k))\psi(\theta) \Big) d\theta \right\} \geqslant \qquad (3.8)\\
&\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(1 - \delta(t) \Big) \|\psi(\theta)\|^2 d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi} \Big(1 - \delta(t) \Big) \rho^2(t) \|\varphi\|^2 \cdot 2\pi = \\
&= \Big(1 - \delta(t) \Big) \rho^2(t) \|\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Здесь использовано неравенство (3.7) при $\lambda = te^{i\theta}$, а в последнем переходе — неравенство

$$\|\psi(\theta)\| \geqslant \rho(t)\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}, \quad t = |\lambda|, \quad \rho(t) := \Big(\max_{|\lambda| = t} \|L_0(\lambda)\| \Big)^{-1}.$$

(докажите этот факт).

Из (3.8) следует, что оператор F положительно определен:

$$(F\varphi, \varphi) > c\|\varphi\|^2, \quad c := \Big(1 - \delta(t) \Big) \rho^2(t) > 0. \qquad (3.9)$$

Неравенство (3.9) и есть утверждение данной леммы. □

Естественным следствием доказанных лемм 3.1.1 — 3.1.3 является такое утверждение.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия* (3.2), (3.4) *для самосопряжённого операторного пучка* $L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda)$.

Тогда:

1°. *Пучок* $L(\lambda)$ *допускает факторизацию* (3.3), *где оператор-функция* $A_+(\lambda)$ *голоморфна и голоморфно обратима в круге* $|\lambda| \leqslant t, \quad t \in (0, r)$,

$$\sigma(Z) \subset (-t, t), \tag{3.10}$$

и оператор Z *подобен самосопряжённому оператору.*

2°. *Если дополнительно выполнены условия*

$$A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \tag{3.11}$$

то задача $L(\lambda)\varphi = 0$ *имеет на промежутке* $(-t, t)$ *дискретный спектр*

$$\sigma(Z) = \{0\} \cup \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty, \quad \lambda_j \to 0 \quad (j \to \infty), \tag{3.12}$$

где $\lambda_j = \lambda_j(Z)$ — *изолированные конечнократные собственные значения оператора* Z. *Этим значениям отвечает совокупность* $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ *собственных элементов (присоединённых нет!), образующих базис Рисса в* $\mathcal{H}$:

$$\psi_j = F^{1/2}\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — *ортонормированный базис, составленный из собственных элементов самосопряженного компактного оператора* $K := F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$.

Доказательство. При выполнении условия (3.4) пучок $L(\lambda)$, согласно теореме 2.3.1, допускает факторизацию (3.3). Так как $L(\lambda)$ — самосопряженный пучок, то по лемме 3.1.2 фактор Z симметризуется справа оператором F из (3.5). Далее, по лемме 3.1.3 симметризатор F положительно определен. Поэтому по лемме 3.1.1 получаем, что оператор Z подобен самосопряженному оператору. Тогда его спектр, расположенный внутри круга $|\lambda| \leqslant t$, должен быть вещественным, т.е. выполнено включение (3.10).

Пусть теперь выполнены условия (3.11). Тогда, как следует из доказательства теоремы 2.3.5 и формул (2.123),

$$Z = (I + S)A, \quad S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad (I + S)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.13}$$

Так как по условию $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то $\operatorname{Ker} Z = \{0\}$.

Рассмотрим теперь в области $(-t,t)$ задачу на собственные значения

$$Z\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in \mathcal{H}. \tag{3.14}$$

Осуществим здесь замену

$$\psi = F^{1/2}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{3.15}$$

и подействуем на обе части (3.14) оператором $F^{-1/2}$. Возникает задача

$$K\varphi := F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}\varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda \in (-t,t). \tag{3.16}$$

Поскольку здесь оператор ZF самосопряжён и вполне непрерывен (так как $(I+S) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$), а его ядро нулевое, то (3.16) есть задача на собственные значения для полного самосопряжённого оператора K. Поэтому, согласно теореме Гильберта-Шмидта, она имеет счётное множество конечнократных собственных значений и полную ортонормированную систему собственных элементов:

$$\lambda_j = \lambda_j(K) = \lambda_j(Z), \quad \lambda_j \to 0, \quad (j \to \infty), \quad (\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}.$$

Поэтому в задаче (3.14) в силу замены (3.15) имеем

$$\begin{gathered}\sigma(Z) = \{0\} \cup \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty, \quad \psi = \psi_j = F^{1/2}\varphi_j, \\ j = 1,\, 2,\, \ldots\,, \quad F^{1/2}, F^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\end{gathered}$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис оператора $K = F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$, а $F \gg 0$ — симметризатор фактора Z. $\square$

3.1.4 О базисности Рисса для пучка С.Г. Крейна

Рассмотрим снова пучок С.Г. Крейна

$$L(\lambda) := I - (\lambda A + \lambda^{-1} B), \quad \lambda \neq 0, \tag{3.17}$$

и будем считать, что

$$A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad B = B^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{3.18}$$

Теорема 3.1.2. *Пусть для пучка* (3.17), (3.18) *выполнены условия:*

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad \dim(\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0) = \infty, \quad \mathcal{H}_0 := \operatorname{Ker} B, \quad \dim \mathcal{H}_0 \geqslant 0, \tag{3.19}$$

$$4\|A\|\cdot\|B\|<1,\quad r_\pm:=\frac{1\pm\sqrt{1-4\|A\|\cdot\|B\|}}{2\|A\|}. \tag{3.20}$$

Тогда:

1°. *Пучок $L(\lambda)$ имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$.*

2°. *Предельной точке $\lambda=0$ отвечает ветвь $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ изолированных конечнократных собственных значений $\lambda=\lambda_{0n}$, расположенных на отрезке $[-r_-,r_-]\subset\mathbb{R}$. Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) после проектирования на подпространство $\mathcal{H}_1:=\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_0$ образует базис Рисса в $\mathcal{H}_1$.*

3°. *Предельной точке $\lambda=\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_{\infty m}\}_{m=1}^{\infty}$ изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на действительной оси вне промежутка $(-r_+,r_+)$. Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) образует базис Рисса в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Утверждение 1° будет доказано в процессе доказательства утверждений 2° и 3°.

Докажем (наиболее сложное) утверждение 2°. Введём пучок

$$M(\lambda):=\lambda L(\lambda)=\lambda I-B-\lambda^2 A.$$

Он имеет структуру пучка, к которому применимы результаты теоремы 3.1.1 (так как здесь можно заменить $A\mapsto B$, $B(\lambda)\mapsto\lambda^2 A$), а также теоремы 2.3.6.

В частности, при выполнении условия $4\|A\|\cdot\|B\|<1$ имеет место факторизация

$$\begin{gathered}M(\lambda)=Y^{-1}(I-\lambda YA)(\lambda I-YB),\\ Y=I+AYBY,\quad |\lambda|\leqslant t\in(r_-,r_+),\end{gathered} \tag{3.21}$$

причем оператор $I-\lambda YA$ обратим при $|\lambda|<r_+$, а

$$\sigma(Z):=\sigma(YB)\subset\{\lambda:\ |\lambda|\leqslant r_-\}. \tag{3.22}$$

Так как $M(\lambda)$ — самосопряженный пучок и выполнено условие, достаточное для его факторизации, то по леммам 3.1.2 и 3.1.3 фактор

$Z = YB$ симметризуется справа оператором $F \gg 0$,

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} M^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in (r_-, r_+). \tag{3.23}$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим в круге $|\lambda| < t$ спектральную задачу

$$Z\varphi = \lambda\varphi, \quad Z = YB, \quad Y = I + AYBY =: I + \Phi. \tag{3.24}$$

Отметим, что в этой задаче $\operatorname{Ker} B$ может быть нетривиальным, так как по условию $\dim \mathcal{H}_0$ может быть положительной.

Пусть P_0 и P_1 — ортопроекторы на $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ соответственно. Тогда $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ – инвариантные подпространства для оператора B, причем

$$B_0 := P_0BP_0 = BP_0 = 0, \quad \dim \operatorname{Ker} B_1 := \dim \operatorname{Ker} P_1BP_1 = \infty.$$

Отметим еще, что оператор $\Phi := AYBY \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ в силу (3.18).

Применим к обеим частям уравнения (3.24) ортопроекторы P_0 и P_1 соответственно, получим

$$P_0(I + \Phi)BP_1\varphi_1 = \lambda\varphi_0, \quad \varphi_0 := P_0\varphi; \tag{3.25}$$

$$P_1(I + \Phi)BP_1\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \quad \varphi_1 := P_1\varphi. \tag{3.26}$$

Так как по условию (см. (3.17)) $\lambda \neq 0$, то по известному решению $\varphi_1 := P_1\varphi$, отвечающему собственному значению λ, можно найти $\varphi_0 = P_0\varphi$ из (3.25). В то же время уравнение (3.26) не содержит φ_0, и потому это уравнение можно рассмотреть отдельно в пространстве $\mathcal{H}_1$.

Здесь $BP_1 = P_1BP_1 =: B_1 = B_1^*$ — полный оператор в $\mathcal{H}_1$ ($\operatorname{Ker} B_1 = \{0\}$), являющийся также самосопряженным.

Перепишем (3.26) в виде

$$Z_1\varphi_1 := P_1(I + \Phi)P_1B_1\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}_1, \tag{3.27}$$

и воспользуемся теперь свойством $ZF = (ZF)^* =: K$. Применяя здесь оператор P_1 слева и справа, будем иметь

$$(P_1(I + \Phi)BP_1)\,(P_1FP_1) =: Z_1 \cdot F_1 = (Z_1F_1)^* =: K_1 = K_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1). \tag{3.28}$$

Легко убедиться, что оператор $F_1 := P_1FP_1 \gg 0$ (в $\mathcal{H}_1$). Действительно, при любом $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$ имеем $\varphi_1 = P_1\varphi_1$ и потому

$$\begin{aligned}(F_1\varphi_1, \varphi_1) =&(P_1FP_1\varphi_1, \varphi_1) = (FP_1\varphi_1, P_1\varphi_1) = \\ =&(F\varphi_1, \varphi_1) \geqslant c\|\varphi_1\|^2, \quad c > 0.\end{aligned}$$

Докажем теперь, что для оператора $Z_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$ из (3.27), (3.28) выполнено условие $\operatorname{Ker} Z_1 = \{0\}$. В самом деле, в представлении

$$Z_1 = (P_1(I+\Phi)P_1)B_1$$

второй сомножитель имеет нулевое ядро по выбору подпространства $\mathcal{H}_1$. Поэтому достаточно установить, что оператор

$$P_1(I+\Phi)P_1 = P_1YP_1, \quad Y = I + AYBY,$$

обратим в $\mathcal{H}_1$, поскольку $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$.

Докажем этот факт. Из уравнения для Y следует, что $Y^{-1} = I - AYB$. Тогда матричное представление Y^{-1} в ортогональном разложении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ имеет вид

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} I_1 - P_1AYBP_1 & -P_1AYBP_0 \\ -P_0AYBP_1 & I_0 - P_0AYBP_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} I_1 - \Phi_{11} & 0 \\ -\Phi_{01} & I_0 \end{pmatrix}.$$

Так как оператор $Y = (Y^{-1})^{-1}$ существует и принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, то уравнение $Y^{-1}u = v$ должно иметь единственное решение. Если $u = (u_1;\, u_0)^t$, $v = (v_1;\, v_0)^t$ — соответствующие вектор–столбцы в данном ортогональном разложении, то указанное уравнение приводит к системе уравнений

$$(I_1 - \Phi_{11})u_1 = v_1, \quad -\Phi_{01}u_1 + u_0 = v_0.$$

Она имеет единственное решение, если $I_1 - \Phi_{11}$ обратим. Тогда $(I_1 - \Phi_{11})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, а решение системы уравнений дается формулой

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} (I_1 - \Phi_{11})^{-1} & 0 \\ \Phi_{01}(I_1 - \Phi_{11})^{-1} & I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} =$$
$$= Yv = \begin{pmatrix} P_1YP_1 & P_1YP_0 \\ P_0YP_1 & P_0YP_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что оператор $P_1YP_1 = P_1(I+\Phi)P_1$ обратим в $\mathcal{H}_1$ и

$$(P_1YP_1)^{-1} = I_1 - \Phi_{11} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1).$$

Вернемся к соотношению (3.28), оно приводит к формуле

$$Z_1 = P_1(I+\Phi)BP_1 = P_1(I+\Phi)P_1 \cdot B_1 = K_1 \cdot F_1^{-1}. \tag{3.29}$$

Тогда уравнение (3.27) принимает вид

$$K_1F_1^{-1}\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}_1. \tag{3.30}$$

Осуществим здесь замену

$$\varphi_1 = F_1^{1/2}\eta, \quad \eta \in \mathcal{H}_1, \tag{3.31}$$

и применим слева в (3.30) оператор $F_1^{-1/2}$. Получим уравнение

$$F_1^{-1/2} K_1 F_1^{-1/2} \eta = \lambda \eta. \tag{3.32}$$

Теперь остается лишь повторить концовку доказательства теоремы 3.1.1: так как $F_1^{-1/2} K_1 F_1^{-1/2}$ является компактным самосопряженным оператором с нулевым ядром, то задача (3.32) имеет счетное множество конечнократных изолированных собственных значений $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_{0n} \to 0$ $(n \to \infty)$, и отвечающую им полную ортогональную систему собственных элементов $\{\varphi_{0n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_1$, т.е. ортогональный базис подпространства $\mathcal{H}_1$. Поэтому с учётом формулы связи (3.31) отсюда следует, что проекции на $\mathcal{H}_1$ собственных элементов исходной задачи (3.24) образуют базис Рисса в $\mathcal{H}_1$, и утверждение 2^0 данной теоремы доказано.

Докажем теперь утверждение 3^0. Это можно сделать так же, как в конце доказательства теоремы 2.3.6. Именно, в пучке $L(\lambda)$ (см. (3.17)) осуществляем замену $\lambda = \mu^{-1}$. Возникает пучок $\widetilde{L}(\mu) = I - \mu B - \mu^{-1} A$, который факторизуется по формуле (2.139), и тогда

$$\mu \widetilde{M}(\mu) = X^{-1}(I - \mu X B)(\mu I - XA), \quad X = I + BXAX. \tag{3.33}$$

Здесь следует учесть, что для факторизационной окружности

$$|\mu| = \widetilde{t} \in (\widetilde{r}_-, \widetilde{r}_+), \quad \widetilde{r}_\pm = 1/r_\mp = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|})/(2\|B\|).$$

Упрощающим обстоятельством для пучка (3.33) и соответствующей задачи

$$\widetilde{Z}\psi := XA\psi = \mu\psi, \quad |\mu| \leqslant \widetilde{t}, \tag{3.34}$$

теперь является тот факт, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Поэтому в (3.34) не нужно проводить процедуру проектирования на $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0$, так как $\mathcal{H}_0 = \{0\}$.

Этим завершается доказательство всей теоремы в целом, так как утверждение 1^0, как уже упоминалось, следует из утверждений 2^0 и 3^0. □

Упражнение 3.1.2. *Проведите подробное доказательство утверждения 3^0 теоремы 3.1.2.* □

3.2 О p-базисности системы собственных элементов и асимптотике ветвей собственных значений операторных пучков

Здесь будут получены достаточные условия, обеспечивающие для фактора Z, возникающего при факторизации пучка $L(\lambda)$, свойство не только базисности Рисса его собственных элементов, но и свойство их p-базисности. Кроме того, при некоторых более жёстких ограничениях на свойства операторных коэффициентов пучка будут получены асимптотические формулы для отдельных ветвей собственных значений.

3.2.1 Об s-числах вполне непрерывных операторов

Пусть $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, $B := (A^*A)^{1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, $B \geqslant 0$. Как уже упоминалось в п. 2.3.2, s-числами оператора A называются собственные значения оператора B:

$$s_j(A) = \lambda_j((A^*A)^{1/2}), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Так как $s_j(A) \geqslant 0$, то их можно пронумеровать в порядке убывания с учетом их кратности. Если ненулевых s-чисел оператора A лишь конечное число, равное, скажем, M, то полагают $s_j(A) = 0$ при $j > M$.

Укажем некоторые простейшие свойства s-чисел оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$:

1°. $s_1(A) = \|A\|$;

2°. $A = A^* \Rightarrow s_j(A) = |\lambda_j(A)|, \quad j = 1, 2, \ldots;$

3°. $s_j(cA) = |c| s_j(A), \quad \forall c \in \mathbb{C};$

4°. $s_j(A) = s_j(A^*), \quad j = 1, 2, \ldots .$

Отметим ещё несколько важных свойств:

5°. $s_j(BA) \leqslant \|B\| \cdot s_j(A), \quad j = 1, 2, \ldots;$

6°. $s_j(AB) \leqslant \|B\| \cdot s_j(A), \quad j = 1, 2, \ldots;$

7°. $s_{m+n-1}(A + B) \leqslant s_m(A) + s_n(B), \quad m, n = 1, 2, \ldots;$

8°. $s_{m+n-1}(AB) \leqslant s_m(A) \cdot s_n(B), \quad m, n = 1, 2, \ldots .$

Напомним, что оператор $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, если его s-числа суммируются со степенью p, а нижнюю грань значений p для оператора A называют порядком оператора A и обозначают $p\,(A)$.

Пусть A, B — операторы конечного порядка. Тогда для таких операторов имеют место следующие свойства:

$$9^0. \quad A \in \mathfrak{S}_{p_A},\ B \in \mathfrak{S}_{p_B} \Longrightarrow A + B \in \mathfrak{S}_q,\ q = \max(p_A; p_B); \tag{3.35}$$

$$10^0. \quad A \in \mathfrak{S}_{p_A},\ B \in \mathfrak{S}_{p_B} \Longrightarrow AB,\, BA \in \mathfrak{S}_q,\ q^{-1} = (p_A)^{-1} + (p_B)^{-1}. \tag{3.36}$$

Все эти свойства, а также многие другие свойства s-чисел доказываются в монографии И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [7].

3.2.2 О p-базисности системы собственных элементов, отвечающих двум ветвям пучка С.Г. Крейна

Перед рассмотрением этой проблемы решим предварительно следующее упражнение.

Упражнение 3.2.1. Пусть $\sigma(Z) \subset \{\lambda :\ |\lambda| < t\}$. Доказать, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (Z - \lambda I)^{-1} \lambda^k d\lambda = Z^k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{3.37}$$

Доказательство. Пусть сначала $k \geqslant 1$. Тогда левая часть (3.37) равна

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (Z - \lambda I)^{-1} (\lambda^k I - Z^k) d\lambda + Z^k \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (Z - \lambda I)^{-1} d\lambda \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (\lambda^{k-1} I + \lambda^{k-2} Z + \ldots + \lambda Z^{k-2} + Z^{k-1}) d\lambda + Z^k \cdot I = Z^k,$$

если выполнено (3.35) при $k = 0$. Здесь первый интеграл равен нулю по теореме Коши, так как подинтегральная функция является аналитической при $|\lambda| \leqslant t$ (в данном случае — полином порядка $k - 1$).

В случае $k = 0$ воспользуемся тем фактом, что $\sigma(Z) \subset \{\lambda :\ |\lambda| < t\}$. Тогда $(Z - \lambda I)^{-1}$ при $|\lambda| = t$ обратим и (см. упражнение 1.2.2)

$$(Z - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} Z)^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} Z^k =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} Z^k, \quad |\lambda| = t.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t}(Z-\lambda I)^{-1}d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t}\lambda^{-(k+1)}d\lambda\right\}Z^k=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=t}\frac{d\lambda}{\lambda}\cdot Z^0=I. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь снова пучок С.Г. Крейна

$$L(\lambda):=I-\lambda A-\lambda^{-1}B \tag{3.38}$$

и будем считать, что

$$A=A^*\in\mathfrak{S}_{p_A},\quad B=B^*\in\mathfrak{S}_{p_B}. \tag{3.39}$$

Теорема 3.2.1. *Пусть для пучка* (3.38), (3.39) *выполнены условия теоремы 3.1.2, т.е.*

$$\begin{gathered}\operatorname{Ker}A=\{0\},\quad \dim\mathcal{H}_1:=\dim\{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_0\}=\infty,\\ \mathcal{H}_0:=\operatorname{Ker}B,\quad \dim\mathcal{H}_0\geqslant 0,\end{gathered} \tag{3.40}$$

$$4\|A\|\cdot\|B\|<1,\quad r_{\pm}=(1\pm\sqrt{1-4\|A\|\cdot\|B\|})/(2\|A\|). \tag{3.41}$$

Тогда система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка $[-r_-,\,r_-]$*, после проектирования на* $\mathcal{H}_1$ *образует* p*-базис в* $\mathcal{H}_1$ *при*

$$p\geqslant p_0,\quad p_0^{-1}=(p_A)^{-1}+(p_B)^{-1}. \tag{3.42}$$

Соответственно система собственных элементов, отвечающая собственным значениям на вещественной оси вне промежутка $(-r_+,r_+)$*, образует* p*-базис в* $\mathcal{H}$ *при тех же* p*.*

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 3.1.2, то пучок (3.38) допускает факторизацию относительно окружности $|\lambda|=t$, $t\in(r_-,r_+)$, причём две ветви собственных значений $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что им отвечают собственные элементы, образующие базисы Рисса в $\mathcal{H}_1$ (после проектирования на $\mathcal{H}_1$) и $\mathcal{H}$ соответственно.

Напомним ещё, что в области $|\lambda| < t$ спектральная задача для пучка $L(\lambda)$ была приведена к изучению проблемы

$$Z_1\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \quad \varphi_1 = P_1\varphi_1, \quad Z_1 := P_1 Z P_1. \tag{3.43}$$

Здесь $P_1 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ — ортопроектор, Z — фактор, появившийся при разложении

$$L(\lambda) = Y^{-1}(I - \lambda Y A)(I - \lambda^{-1} Z), \quad Z = YB, \quad Y = I + AYBY, \tag{3.44}$$

Z_1 — полный оператор, симметризующийся справа оператором $F_1 := P_1 F P_1 \gg 0$, где F — симметризатор для Z, $F \gg 0$.

Далее, при доказательстве теоремы 3.1.2 вводился оператор $K_1 := Z_1 F_1 = K_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$, а уравнение (3.43) после замены

$$\varphi_1 = F_1^{1/2}\eta \tag{3.45}$$

было приведено к уравнению

$$\widetilde{K}_1\eta := F_1^{-1/2} K_1 F_1^{-1/2}\eta = \lambda\eta \tag{3.46}$$

с полным самосопряжённым компактным оператором $\widetilde{K}_1$. Собственные элементы $\{\eta_{0n}\}_{n=1}^\infty$ этого оператора, согласно теореме Гильберта–Шмидта, образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}_1$. Выбирая его ортонормированным, считаем, что $\{\eta_{0n}\}_{n=1}^\infty$ —ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1$.

Покажем теперь, что если выполнены условия (3.39), то справедливо первое утверждение теоремы и имеет место формула (3.42). Для доказательства p–базисности собственных элементов

$$\varphi_{1n} = F_1^{1/2}\eta_{0n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.47}$$

задачи (3.43) необходимо установить, что

$$F_1^{1/2} = I_1 + T_1, \quad T_1 \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_1), \quad p \geqslant p_0. \tag{3.48}$$

Представим T_1 в виде

$$\begin{gathered} T_1 = F_1^{1/2} - I_1 = (F_1 - I_1)(F_1^{1/2} + I_1)^{-1} = \\ = P_1(F - I)P_1(F_1^{1/2} + I_1)^{-1} = P_1 T P_1 (F_1^{1/2} + I_1)^{-1}, \\ T := F - I. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Так как здесь справа все сомножители, кроме T, ограничены, то T_1 будет принадлежать классу $\mathfrak{S}_p$, если $T \in \mathfrak{S}_p$. (В самом деле, из свойств

5^0 и 6^0 s–чисел и определения класса $\mathfrak{S}_p$ следует, что AB, BA принадлежат классу $\mathfrak{S}_p$, если $A \in \mathfrak{S}_p$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, продумайте это!).

Воспользуемся представлением (3.23) для симметризатора F,

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} M^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \quad M(\lambda) = \lambda L(\lambda),$$

а также разложением (3.44). Будем иметь

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (\lambda I - YB)^{-1}(I - \lambda YA)^{-1} Y\, d\lambda.$$

Так как здесь оператор-функция $(I - \lambda YA)^{-1}$ голоморфна при $|\lambda| \leqslant t$, то она допускает разложение в равномерно сходящийся ряд Маклорена (ряд Неймана для оператора, близкого к единичному):

$$(I - \lambda YA)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda YA)^k, \quad |\lambda| \leqslant t.$$

Поэтому

$$F = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (YB - \lambda I)^{-1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (YA)^k \lambda^k \Big) Y d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (YB - \lambda I)^{-1} \lambda^k \Big\} (YA)^k Y.$$

Так как $\sigma(Z) = \sigma(YB) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leqslant r_- < t\}$, то по формулам (3.37) из упражнения 3.2.1 получаем, что

$$F = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (YB)^k (YA)^k \right) Y. \tag{3.50}$$

Отсюда и из уравнения $Y = I + AYBY$ (см. (3.44)) имеем

$$\begin{aligned} F = Y + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (YB)^k (YA)^k \right) Y = \\ = I + AYBY + YB \left(\sum_{m=0}^{\infty} (YB)^m (YA)^m \right) YAY = \\ = I + AYBY + YBFYAY. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Тогда
$$T := F - I = AYBY + YBFYAY. \qquad (3.52)$$

Так как здесь операторы Y и F ограничены, а операторы A и B принадлежат классам $\mathfrak{S}_{p_A}$ и $\mathfrak{S}_{p_B}$ соответственно, то каждое слагаемое в (3.52), а потому и сумма операторов принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p = p_0$, $p_0^{-1} = p_A^{-1} + p_B^{-1}$. Поэтому T принадлежит этому же классу $\mathfrak{S}_p$, а вместе с ним, в силу представления (3.49), $T_1 \in \mathfrak{S}_p$. Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично с теми упрощениями, о которых уже упоминалось в процессе доказательства п.3^0 теоремы 3.1.2. Именно, осуществляя в пучке $L(\lambda)$ замену $\lambda = \mu^{-1}$, приходим к пучку $\widetilde{L}(\mu) := I - \mu B - \mu^{-1}A$, который допускает факторизацию относительно окружности $|\mu| = \widetilde{t}$, $\widetilde{t} \in (\widetilde{r}_-, \widetilde{r}_+)$, $\widetilde{r}_\pm = 1/r_\mp$. Для этого пучка вводим симметризатор

$$\widetilde{F} := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=\widetilde{t}} \widetilde{M}^{-1}(\mu)\, d\mu, \quad \widetilde{M}(\mu) = \mu \widetilde{L}(\mu),$$

и повторяем вышеприведенные рассуждения с тем упрощением, что здесь в силу свойства $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ вместо проектора P_1 следует взять единичный оператор I, действующий в $\mathcal{H}$. Это лишь сократит доказательство второго утверждения теоремы. $\square$

Замечание 3.2.1. *Если вместо условий* (3.39) *взять условия* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $B \in \mathfrak{S}_{p_B}$, *то справедливо первое утверждение теоремы 3.2.1 при* $p = p_0 = p_B$. *Этот факт следует из представления* (3.52) *оператора* T. *Аналогично, если выполнены условия* $A \in \mathfrak{S}_{p_A}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *то справедливо второе утверждение теоремы 3.2.1 при* $p = p_0 = p_A$. *Это также следует из* (3.52). $\square$

3.2.3 О p-базисности системы собственных элементов самосопряженной оператор-функции

Утверждения, полученные в п.3.2.2 для пучка С.Г. Крейна, можно обобщить на случай самосопряженной оператор-функции общего вида

$$L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda), \quad B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k, \quad |\lambda| < r, \qquad (3.53)$$

который рассматривался выше. В частности, при дополнительной информации о свойствах операторных коэффициентов A и B_k, $k = 1, 2, \ldots$, можно взамен свойства базисности Рисса системы собственных элементов функции $L(\lambda)$ (теорема 3.1.1) установить свойство их p–базисности.

Рассмотрим предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.2.1. *Пусть выполнены условия*

$$\|A\|t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1, \quad t \in (0, r), \tag{3.54}$$

$$A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{3.55}$$

Тогда симметризатор

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} L^{-1}(\lambda)\, d\lambda$$

для фактора Z из разложения

$$L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z) \tag{3.56}$$

имеет структуру

$$F = I + T, \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{3.57}$$

Доказательство. При выполнении условия (3.54) имеет место факторизация (3.56), причем $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| \leqslant t$, а $\sigma(Z) \subset (-t, t)$.

Отсюда имеем

$$A_+^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \lambda^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|D_k\| t^k < \infty. \tag{3.58}$$

В частности, как следует из доказательства теоремы 2.3.1 (см. (2.93) – (2.96)), неравенство (3.58) с точностью до обозначений есть установленное выше неравенство (2.96).

Опираясь на эти факты, а также на формулы (3.37), представим симметризатор F в виде

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} L^{-1}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (\lambda I - Z)^{-1} A_+^{-1}(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (Z - \lambda I)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} D_k \lambda^k \right) d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k D_k =$$

$$= D_0 + Z \sum_{k=1}^{\infty} Z^{k-1} D_k =: D_0 + Z\widetilde{D}_1. \qquad (3.59)$$

Покажем, что операторный ряд, стоящий справа, сходится по равномерной операторной норме. В самом деле,

$$\|\widetilde{D}_1\| = \| \sum_{k=1}^{\infty} Z^{k-1} D_k \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|D_k\| \cdot \|Z^{k-1}\|, \qquad (3.60)$$

причем

$$\|Z^{k-1}\|^{1/k} = \|Z^{k-1}\|^{(\frac{1}{k-1}) \cdot (\frac{k-1}{k})} \longrightarrow r(Z) < t, \quad k \longrightarrow \infty,$$

где $r(Z)$ — спектральный радиус оператора Z. Так как $\sigma(Z) \subset (-t, t)$, то $r(Z) < t$, и в силу неравенства (3.58) ряд (3.60) сходится.

Вспомним теперь, что при доказательстве теоремы 2.3.5 было получено представление (2.121) – (2.122) для оператора Z:

$$Z = A_+^{-1}(0)\, A = D_0 A, \quad D_0 = (I - B_1 + A_+'(0) Z)^{-1} =: I + S. \quad (3.61)$$

Отсюда, в силу условий (3.55), следует, что $Z \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ и $S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Поэтому из (3.59) имеем

$$F = I + S + Z\widetilde{D}_1 =: I + T, \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

так как $\widetilde{D}_1$ — ограниченный оператор. $\square$

Следствием установленного факта, а также лемм 3.1.2, 3.1.3 и теоремы 3.1.1 является такой результат.

Лемма 3.2.2. *Если выполнены условия* (3.54), (3.55), *то система собственных элементов* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям оператора* Z, *т.е. собственным значениям оператор-функции* $L(\lambda)$ *из промежутка* $(-t,\, t)$, *образует* p*–базис в* $\mathcal{H}$ *при* $p = \infty$.

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 3.1.1 (см. (3.14) – (3.16)), имеют место формулы

$$\psi_k = F^{1/2} \varphi_k, \quad k = 1,\, 2,\, \dots\,,$$

где $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис оператора $K = F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$. Отсюда и из (3.55) имеем (как и при получении формулы (3.49))

$$T_1 := F^{1/2} - I = (F - I)(F^{1/2} + I)^{-1} = T(F^{1/2} + I)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}).$$

Поэтому, согласно определению 3.1.4, элементы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют p–базис в $\mathcal{H}$ при $p = \infty$. $\square$

Теперь сформулируем и докажем один важный факт, установленный В.И. Ломоносовым. Заметим предварительно, что формулы (3.37), доказанные выше (см. упражнение 3.2.1), справедливы и в том случае, когда вместо окружности $\Gamma_0 := \{\lambda : \ |\lambda| < t\}$ взят любой контур Γ, содержащий внутри себя спектр $\sigma(Z)$ оператора Z. В самом деле, между Γ и Γ_0 подинтегральная функция является аналитической и потому по теореме Коши интеграл по $\Gamma \cup \Gamma_0$ равен нулю. Таким образом, справедливы формулы

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=t} (Z - \lambda I)^{-1} \lambda^k \, d\lambda = Z^k, \quad \sigma(Z) \subset \Lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.62}$$

где Λ — область с границей $\Gamma = \partial\Lambda$, содержащая точки спектра $\sigma(Z)$.

Теорема 3.2.2. *(В.И. Ломоносов). Пусть $L(\lambda)$ — самосопряженная оператор-функция в односвязной и симметричной относительно вещественной оси области Λ, допускающая представление* (3.56)*, т.е.*

$$L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \tag{3.63}$$

где $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в Λ, а $\sigma(Z) \subset \Lambda$.

Если $\Gamma \subset \Lambda$ — произвольный контур, охватывающий $\sigma(Z)$, то операторы

$$F := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} L^{-1}(\lambda) \, d\lambda, \tag{3.64}$$

$$F^{-1} := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} (\lambda I - Z^*)^{-1} \, L(\lambda) \, (\lambda I - Z)^{-1} \, d\lambda \tag{3.65}$$

являются самосопряженными и взаимно обратными.

Доказательство. Тот факт, что $F = F^*$, уже установлен в лемме 3.1.2, если заметить, что интегрирование по Γ можно заменить интегрированием по $\Gamma_0 = \{\lambda : \ |\lambda| < t\}$.

Так же, как и в лемме 3.1.2, проверяется свойство самосопряженности оператора F^{-1}. Действительно,

$$(F^{-1})^* = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \left((\lambda I - Z^*)^{-1}L(\lambda)(\lambda I - Z)^{-1}\right)^* d\overline{\lambda} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \left((\lambda I - Z)^{-1}\right)^* (L(\lambda))^* \left((\lambda I - Z^*)^{-1}\right)^* d\overline{\lambda} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (\overline{\lambda} I - Z^*)^{-1}L(\overline{\lambda})(\overline{\lambda} I - Z)^{-1} d\overline{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (\lambda I - Z^*)^{-1}L(\lambda)(\lambda I - Z)^{-1} d\lambda = F^{-1}.$$

Далее, так как $L(\lambda)$ обратима в области $\Lambda \setminus \sigma(Z)$, то операторы F и F^{-1} не зависят от того, какой контур Γ, принадлежащий Λ и охватывающий $\sigma(Z)$, выбран в (3.64), (3.65). Из самосопряженности оператор-функции $L(\lambda)$ вытекает, что спектр $\sigma(Z)$ симметричен относительно вещественной оси. (В самом деле, если λ — регулярная точка $L(\lambda)$, принадлежащая Λ, то существует ограниченный обратный оператор $L^{-1}(\lambda)$. Но тогда $(L^{-1}(\lambda))^* = L^{-1}(\overline{\lambda}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т.е. $\overline{\lambda}$ — также регулярная точка функции $L(\lambda)$.)

Из этих фактов следует, что существуют симметричные относительно вещественной оси контуры Γ_1 и Γ_2 из Λ, такие, что Γ_1 содержится в области Λ_2 с $\partial\Lambda_2 = \Gamma_2$, а $\sigma(Z) \subset \Lambda_1$ с границей $\partial\Lambda_1 = \Gamma_1$ (см. рис. 3.1). При этом, очевидно, вместо (3.64), (3.65) имеем

$$F = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2} L^{-1}(\mu)\, d\mu, \tag{3.66}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} (\lambda I - Z^*)^{-1}L(\lambda)(\lambda I - Z)^{-1}\, d\lambda. \tag{3.67}$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} F^{-1}F &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_1}\oint\limits_{\Gamma_2} (\lambda I - Z^*)^{-1}L(\lambda)(\lambda I - Z)^{-1}L^{-1}(\mu)\, d\lambda\, d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_1}\oint\limits_{\Gamma_2} (\lambda I - Z^*)^{-1}L(\lambda)(\lambda I - Z)^{-1}(\mu I - Z)^{-1}A_+^{-1}(\mu)\, d\lambda\, d\mu \end{aligned} \tag{3.68}$$

Рис. 3.1:

и воспользуемся известным тождеством Гильберта для резольвенты (докажите его!)

$$(Z-\lambda I)^{-1}-(Z-\mu I)^{-1}=(\lambda-\mu)(Z-\lambda I)^{-1}(Z-\mu I)^{-1}. \tag{3.69}$$

Тогда из (3.68) имеем

$$\begin{aligned}
F^{-1}F &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_1}\oint\limits_{\Gamma_2}(\lambda I-Z^*)^{-1}A_+(\lambda)(\lambda I-Z)\cdot \\
&\cdot\left[\frac{(Z-\lambda I)^{-1}-(Z-\mu I)^{-1}}{\lambda-\mu}\right]A_+^{-1}(\mu)\,d\lambda\,d\mu= \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_1}\oint\limits_{\Gamma_2}(\lambda I-Z^*)^{-1}\,\frac{A_+(\lambda)\ A_+^{-1}(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\,d\mu- \\
&- \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_1}\oint\limits_{\Gamma_2}(\lambda I-Z^*)^{-1}\,A_+(\lambda)\cdot \\
&\cdot\frac{(\lambda I-Z)(Z-\mu I)^{-1}A_+^{-1}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu=:\mathcal{I}_1-\mathcal{I}_2.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Так как точка $\lambda\in\Gamma_1$ по выбору Γ_1 и Γ_2 принадлежит области Λ_2, то

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}(\lambda I - Z^*)^{-1}A_+(\lambda)\left\{\frac{1}{(2\pi i)}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{A_+^{-1}(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu\right\}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}(\lambda I - Z^*)^{-1}A_+(\lambda)\,A_+^{-1}(\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}(\lambda I - Z^*)^{-1}\,d\lambda = I.$$

Здесь при выводе была использована формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{A_+^{-1}(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu = A_+^{-1}(\lambda),$$

а также формула (3.62) при $k = 0$ для оператора Z^* (с учетом того, что $\sigma(Z^*)$, как и $\sigma(Z)$, лежит в $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$).

Для $\mathcal{I}_2$ из (3.70) аналогично имеем

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_2}\left\{\oint\limits_{\Gamma_1}(\lambda I - Z^*)^{-1}\,\frac{L(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\right\}(Z-\mu I)^{-1}A_+(\mu)\,d\mu.$$

Так как $\mu \in \Gamma_2$ находится вне области Λ_1, то во внутреннем интеграле подинтегральная функция голоморфна в Λ_1 и, следовательно, по теореме Коши этот интеграл равен нулю. Поэтому и $\mathcal{I}_2 = 0$.

Итак, $F^{-1}F = I$, и в силу самосопряженности F и F^{-1} также $FF^{-1} = F^*(F^{-1})^* = (F^{-1}F)^* = I^* = I$. Значит, F^{-1} является правым и левым обратным для F, т.е. F и F^{-1} взаимно обратны. $\square$

Будем теперь считать, что операторные коэффициенты операторного пучка

$$L(\lambda) := \lambda I - A - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k B_k, \quad |\lambda| < r, \tag{3.71}$$

удовлетворяют условию

$$\|A\|t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\|B_k\|t^{k-1} < 1, \quad t \in (0,\, r), \tag{3.72}$$

достаточному для факторизации

$$L(\lambda) := A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \tag{3.73}$$

а также следующим условиям:

$$\begin{aligned} A = A^* \in \mathfrak{S}_{p_0}, \quad B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_{p_k}, \\ 0 < p_k < \infty, \quad k = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Теорема 3.2.3. *(В.А. Гринштейн, Н.Д. Копачевский). Если выполнены условия* (3.72), (3.74) *для пучка* $L(\lambda)$*, то система* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *собственных элементов* $L(\lambda)$*, отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (-t,\, t)$*, образует* p*–базис в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *при* $p \geqslant \widetilde{p}$*,*

$$\begin{aligned} \widetilde{p} := [\,\min(p_1^{-1}, p_0^{-1} + p_2^{-1}, 2p_0^{-1} + p_3^{-1}, \ldots, \\ (m-1)p_0^{-1} + p_m^{-1}, mp_0^{-1})]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 3.1.1 и леммы 3.2.2, достаточно лишь убедиться, что симметризатор F оператора Z обладает свойством

$$F^{1/2} = I + T_1, \quad T_1 \in \mathfrak{S}_{\widetilde{p}}. \tag{3.76}$$

Докажем этот факт. Воспользуемся теоремой 3.2.2, формулой (3.65) для оператора F^{-1}, а также соотношениями

$$A_+(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| t^k < \infty, \tag{3.77}$$

следующими из факторизационной теоремы 2.3.1 (см. (2.94) и (2.95)). Имеем для контура Γ, охватывающего $\sigma(Z) \subset (-t,\, t)$,

$$F^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda I - Z^*)^{-1}\, L(\lambda)\, (\lambda I - Z)^{-1}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda I - Z^*)^{-1} A_+(\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (Z^* - \lambda I)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k \right) d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (Z^* - \lambda I)^{-1} \lambda^k d\lambda \right\} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} (Z^*)^k A_k. \tag{3.78}$$

Здесь в последнем переходе были учтены формулы (3.62) для оператора Z^*, а также тот факт, что $\sigma(Z^*) = \sigma(Z) \subset (-t,\, t)$.

Получим выражения для коэффициентов A_k, опираясь на факторизационное тождество (3.73) и на (3.77). Имеем

$$L(\lambda) \equiv \lambda I - A - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k \equiv \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k\right)(\lambda I - Z). \tag{3.79}$$

Приравнивая операторные коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к рекуррентным соотношениям

$$A_0 = I - B_1 + A_1 Z, \quad A_k = -B_{k+1} + A_{k+1} Z, \quad k = 1, \ldots, m-1. \tag{3.80}$$

Отсюда непосредственно выводим формулы

$$\begin{gathered} A_0 = I - \sum_{k=1}^{m} B_k Z^{k-1} + A_m Z^m, \\ A_j = - \sum_{k=j+1}^{m} B_k Z^{k-j-1} + A_m Z^{m-j}, \quad j = 1, \ldots, m-1. \end{gathered} \tag{3.81}$$

Подставляя эти выражения в (3.78), после перегруппировки слагаемых получим

$$\begin{gathered} F^{-1} = I - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-1} (Z^*)^j B_k Z^{k-j-1} + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} (Z^*)^j A_m Z^{m-j} + (Z^*)^m \sum_{j=m}^{\infty} (Z^*)^{j-m} A_j =: I + T. \end{gathered} \tag{3.82}$$

Убедимся, что операторный ряд

$$\sum_{j=m}^{\infty} (Z^*)^{j-m} A_j$$

сходится по операторной норме. В самом деле,

$$\| \sum_{j=m}^{\infty} (Z^*)^{j-m} A_j \| \leqslant \sum_{j=m}^{\infty} \|(Z^*)^{j-m}\| \cdot \|A_j\|.$$

Так как

$$\|(Z^*)^{j-m}\|^{1/j} = \left(\|(Z^*)^{j-m}\|^{\frac{1}{(j-m)}}\right)^{\frac{j-m}{j}} \longrightarrow r(Z^*) < t, \quad j \to \infty,$$

то операторный и числовой ряды сходятся в силу неравенства (3.77).

Представление оператора F^{-1} позволяет с использованием условий (3.74) установить, какому классу $\mathfrak{S}_p$ принадлежит оператор T.

Воспользуемся свойствами s–чисел 5° и 6° и свойствами 9° и 10° из п.3.2.1 для операторов класса $\mathfrak{S}_p$. Заметим сначала, что из факторизационного тождества при $\lambda = 0$ имеем $A = A_0 Z$, и так как $A_0 = A_+(0)$ ограниченно обратим, то

$$Z = A_0^{-1} A \in \mathfrak{S}_{p\,0}. \tag{3.83}$$

Отсюда имеем также свойства

$$Z^k = \mathfrak{S}_{(p_0/k)}, \quad (Z^*)^j \in \mathfrak{S}_{(p_0/j)}. \tag{3.84}$$

Из этих свойств следует, что

$$\begin{gathered} (Z^*)^j B_k Z^{k-j-1} \in \mathfrak{S}_{q_k}, \\ q_k^{-1} = (k-1) p_0^{-1} + p_k, \quad k = 2, \ldots, m-1, \end{gathered} \tag{3.85}$$

а при $k = 1$ имеем в двойной сумме (3.82) слагаемое $B_1 \in \mathfrak{S}_{p_1}$.

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-1} (Z^*)^j B_k Z^{k-j-1} \in \mathfrak{S}_{\widetilde{p_1}}, \quad \widetilde{p_1} := \max(p_1, q_1, \ldots, q_{m-1}).$$

Аналогичный подсчет для второй суммы в (3.82) дает

$$\sum_{j=0}^{k-1} (Z^*)^j A_m Z^{m-j} \in \mathfrak{S}_{p_0/m}, \quad 0 \neq A_m \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Если же $A_m = 0$, то эта сумма равна нулю.

Так как по доказанному выше

$$\sum_{j=m}^{\infty} (Z^*)^{j-m} A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

то последнее слагаемое справа в (3.82) принадлежит классу $\mathfrak{S}_{p_0/m}$.

Из проведенных рассуждений следует, что оператор T из (3.82) принадлежит классу $\mathfrak{S}_{p_T}$, где

$$p_T := \max(p_1, q_1, \ldots, q_{m-1}, p_0/m),$$

или

$$p_T^{-1} = [\min(p_1^{-1}, p_0^{-1} + p_2^{-1}, 2p_0^{-1} + p_3^{-1}, \ldots, \\ (m-1)p_0^{-1} + p_m^{-1}, mp_0^{-1})]^{-1} = \widetilde{p}^{-1}. \quad (3.86)$$

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь воспользоваться свойством

$$T_1 := F^{1/2} - I = (F - I)(F^{1/2} + I)^{-1} =$$

$$= -(F^{-1} - I)F(F^{1/2} + I)^{-1} = -TF(F^{1/2} + I)^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_T} = \mathfrak{S}_{\widetilde{p}}. \qquad \square$$

Упражнение 3.2.2. *Убедиться, что имеют место соотношения* (3.80). $\square$

Упражнение 3.2.3. *Вывести соотношения* (3.81). $\square$

Упражнение 3.2.4. *Убедиться, что справедлива формула* (3.82). $\square$

Замечание 3.2.2. *Из доказательства теоремы 3.2.3 видно (см. представление* (3.82)*), что если какой-либо из операторов B_k, $k = 1, \ldots, m$, является лишь ограниченным, а не компактным оператором класса $\mathfrak{S}_{p_k}$, то утверждение теоремы 3.2.3 и формула* (3.75) *сохраняют силу с формальной заменой числа p_k на $+\infty$.* $\square$

Замечание 3.2.3. *Если оператор A в пучке $L(\lambda)$ (см.* (3.71) *принадлежит лишь классу $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а также $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, то в формуле* (3.75) *можно формально положить $p_0 = \infty$, $p_1 = \infty$. Тогда $\widetilde{p} = \infty$, т.е. приходим к утверждению, сформулированному выше в лемме 3.2.2.* $\square$

3.2.4 Теорема Маркуса-Мацаева

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотическом поведении собственных значений оператор-функции, получающейся из линейного пучка при его аналитическом возмущении.

Рассмотрим оператор-функцию вида

$$M(\mu) := I + T - \mu G + Q(\mu), \quad (3.87)$$

$$G = G^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \operatorname{Ker} G = \{0\}, \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

где $Q(\mu)$ – аналитическая оператор-функция в бесконечно удаленной точке,

$$\mu \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| > R\}, \quad \lim_{\mu \longrightarrow \infty} Q(\mu) = 0. \quad (3.88)$$

Введем наряду с $M(\mu)$ "укороченный" пучок

$$M_0(\mu) := I - \mu G. \tag{3.89}$$

Сейчас будут приведены условия, достаточные для того, чтобы асимптотическое поведение собственных значений оператор-функции $M(\mu)$ при $\mu \to \infty$ и укороченного пучка $M_0(\mu)$ было одним и тем же.

Определение 3.2.1. *Пусть $\{\mu_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ — положительные и отрицательные собственные значения укороченного пучка, т.е. характеристические числа оператора G. Расположим их в порядке возрастания модулей и с учетом кратностей, а через*

$$n_{\pm}(r,\, G) := \sum_{|\mu_n^{\pm}|<r} 1 \tag{3.90}$$

обозначим соответствующие функции распределения положительных и отрицательных собственных значений $M_0(\mu)$. Для данного $r > 0$ функция $n_{\pm}(r,\, G)$ равна количеству собственных значений $M_0(\mu)$, лежащих на промежутке $(0,\, r)$ для $n_+(r, G)$ и на промежутке $(-r,\, 0)$ для $n_-(r,\, G)$ соответственно. $\square$

Для оператор-функции $M(\mu)$ собственные значения могут быть локализованы в окрестности полуосей $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$. Поэтому для $M(\mu)$ вводится следующее определение.

Определение 3.2.2. *Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число, а $\{\mu_n^{\pm}(M(\mu))\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения оператор-функции $M(\mu)$, локализованные в окрестности полуосей $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ соответственно. Через $n_{\pm}(r;\, M(\mu))$ обозначим функции распределения собственных значений пучка $M(\mu)$, т.е.*

$$n_{\pm}(r,\, M(\mu)) := \sum_{|\mu_n^{\pm}(M(\mu))|\leqslant r} 1, \quad \mu \in \Lambda_{\pm}(\varepsilon), \tag{3.91}$$

где

$$\Lambda_+(\varepsilon) := \{\mu :\ |\arg \mu| < \varepsilon\}, \quad \Lambda_-(\varepsilon) := \{\mu :\ |\arg \mu - \pi| < \varepsilon\}. \quad \square \tag{3.92}$$

Оказывается, что если функции $n_{\pm}(r,\, G)$ имеют степенное асимптотическое поведение при $r \to \infty$, то аналогичное поведение имеют функции $n_{\pm}(r,\, M(\mu))$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2.4. *(А.С. Маркус, В.И. Мацаев). Если выполнены условия* (3.87), (3.88) *и условия*

$$n_\pm(r;\,G) = a_\pm r^{\alpha_\pm}[1+o(1)] \quad (r\to\infty), \quad a_\pm > 0, \quad \alpha_\pm > 0, \tag{3.93}$$

то

$$n_\pm(r;\,M(\mu)) = a_\pm r^{\alpha_\pm}[1+o(1)] \quad (r\to\infty). \qquad \square \tag{3.94}$$

Доказательство этой теоремы здесь не приводится ввиду его громоздкости. Приведем лишь важное практическое следствие из нее.

Теорема 3.2.5. *Если выполнены условия* (3.93) *для укороченного пучка $M_0(\mu)$, то для пучка $M(\mu)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $\mu = \infty$ существуют две ветви собственных значений $\mu_n^\pm(M((\mu))$, которые имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_n^\pm(M(\mu) = \mu_n^\pm(G)[1+o(1)] = \pm a_n^{(-1/\alpha_\pm)} n^{(1/\alpha_\pm)}[1+o(1)] \quad (n\to\infty). \tag{3.95}$$

Доказательство. Убедимся, что соотношения (3.93) равносильны соотношениям

$$\mu_n^\pm(G) = \pm a_n^{(-1/\alpha_\pm)} n^{(1/\alpha_\pm)}[1+o(1)] \quad (n\to\infty), \tag{3.96}$$

а соотношения (3.94) — равносильны соответственно соотношениям

$$\mu_n^\pm(M(\mu)) = \pm a_n^{(-1/\alpha_\pm)} n^{(1/\alpha_\pm)}[1+o(1)] \quad (n\to\infty), \tag{3.97}$$

отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Рассмотрим для простоты лишь один из четырех вариантов формул (3.96), (3.97), именно, лишь вариант „+” в (3.96). Остальные варианты рассматриваются аналогично.

Из (3.93) имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r,\,G)}{a_+ r^{\alpha_+}} = 1.$$

Воспользуемся определением предела по Гейне. Тогда для любой последовательности $\{r_n\}_{n=1}^\infty$, $r_n\to\infty$ при $n\to\infty$, будем иметь

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{n_+(r_n,\,G)}{a_+ r_n^{\alpha_+}} = 1. \tag{3.98}$$

Однако, в силу определения функции $n_+(r,\,G)$ распределения характеристических чисел оператора G (см. (3.90)), при $r_n = \mu_n^+(G)$ имеем

$$n_+(\mu_n^+(G);\,G) = n.$$

Тогда из (3.98) получаем

$$\lim_{\mu_n^+(G)\to\infty} \frac{n}{a_+(\mu_n^+(G))^{\alpha_+}} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_+(\mu_n^+(G))^{\alpha_+}} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \mu_n^+(G) = a_+^{(-1/\alpha_+)} n^{(1/\alpha_+)}[1+o(1)] \quad (n\to\infty). \qquad \square$$

Таким образом, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 утверждают, что при выполнении условий (3.93) главные члены асимптотики ветвей оператор-функции $M(\mu)$ и укороченного пучка $M_0(\mu)$ совпадают.

3.2.5 Об асимптотике собственных значений операторных пучков

Теорема Маркуса–Мацаева позволяет установить характер асимптотического поведения ветвей собственных значений оператор-функций, которые систематически рассматривались до сих пор.

Теорема 3.2.6. *Пусть для операторного пучка*

$$L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda), \quad B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k, \quad |\lambda| < r, \tag{3.99}$$

выполнены условия

$$A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \tag{3.100}$$

$$\begin{gathered} \mu_n^\pm(A) = \pm a_\pm^{-1/\alpha_\pm}\, n^{1/\alpha_\pm}\,[1+o(1)], \\ \alpha_\pm > 0, \quad a_\pm > 0, \quad n\to\infty. \end{gathered} \tag{3.101}$$

Тогда $L(\lambda)$ имеет две ветви собственных значений $\lambda_n^\pm(L(\lambda))$, локализованных в окрестности положительной и отрицательной полуосей соответственно и имеющих предельную точку $\lambda = 0$. Асимптотическое поведение этих ветвей таково:

$$\lambda_n^\pm(L(\lambda)) = (\mu_n^\pm(A))^{-1}[1+o(1)] \quad (n\to\infty), \tag{3.102}$$

где $\mu_n^\pm(A)$ — характеристические числа оператора A (с асимптотическим поведением (3.101)*).*

Доказательство. Оно опирается на теорему Маркуса-Мацаева. В самом деле, осуществим в (3.99) замену спектрального параметра по формуле $\lambda = \mu^{-1}$ и рассмотрим вместо $L(\lambda)$ оператор-функцию

$$M(\mu) := \mu\, L(\mu^{-1}) = I - B_1 - \mu A - \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{1-k} B_k, \quad |\mu| > r^{-1}. \quad (3.103)$$

Так как здесь $A = A^*$, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ и

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mu^{1-k} B_k \longrightarrow 0 \quad (\mu \to \infty),$$

то в силу асимптотических формул (3.101) справедливы утверждения теорем 3.2.4 и 3.2.5. Поэтому имеют место формулы (3.95), а после обратной замены $\mu = \lambda^{-1}$ — соответственно формулы (3.102). □

Следующий аналогичный, но важный результат справедлив и для пучка С.Г. Крейна.

Теорема 3.2.7. *Пусть для пучка С.Г. Крейна*

$$L(\lambda) = I - \lambda A - \lambda^{-1} B \quad (3.104)$$

выполнены условия

$$\begin{gathered} A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad B = B^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \\ \dim \mathcal{H}_1 := \dim(\mathcal{H} \ominus \operatorname{Ker} B) = \infty, \end{gathered} \quad (3.105)$$

$$\lambda_n^{\pm}(A) = \pm c_A^{\pm}\, n^{-1/\alpha_\pm}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty), \quad c_A^{\pm} > 0, \quad \alpha_\pm > 0, \quad (3.106)$$

$$\lambda_n^{\pm}(B) = \pm c_B^{\pm}\, n^{-1/\beta_\pm}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty), \quad c_B^{\pm} > 0, \quad \beta_\pm > 0. \quad (3.107)$$

Тогда:

1. *Пучок $L(\lambda)$ имеет две ветви вещественных собственных значений $\{\lambda_{\infty n}^{\pm}(L(\lambda))\}_{n=1}^{\infty}$, расположенных соответственно на положительной и отрицательной полуосях и имеющих предельные точки $\lambda = \pm\infty$, причем*

$$\lambda_{\infty n}^{\pm}(L(\lambda)) = (\lambda_n^{\pm}(A))^{-1}[1 + o(1)] \quad (n \to \infty). \quad (3.108)$$

2. *$L(\lambda)$ имеет две ветви вещественных собственных значений $\{\lambda_{0n}^{\pm}(L(\lambda))\}_{n=1}^{\infty}$ с предельными точками ± 0, причем*

$$\lambda_{0n}^{\pm}(L(\lambda)) = \lambda_{0n}^{\pm}(B)[1 + o(1)] \quad (n \to \infty). \quad (3.109)$$

3. Если в (3.106), (3.107) *имеется лишь одна ветвь с указанным асимптотическим поведением, то аналогичное свойство имеет место и для оператор-функции* $L(\lambda)$.

Доказательство. 1^0. Первое утверждение тривиально следует из теорем 3.2.5, 3.2.6, если заметить, что $\mu_n^{\pm}(A) = (\lambda_n^{\pm}(A))^{-1}$.

2^0. Для доказательства второго утверждения перейдём в $L(\lambda)$ к переменной $\mu = \lambda^{-1}$ и рассмотрим уравнение

$$L(\mu^{-1})\xi = (I - \mu B - \mu^{-1}A)\xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}. \tag{3.110}$$

Здесь при больших μ выполнены все условия теоремы 3.2.5, кроме условия $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ (см. (3.105)). Чтобы преодолеть эту трудность, представим при μ с $|\mu| > \|A\|$ задачу (3.110) в виде

$$L(\mu^{-1})\xi = (I - \mu^{-1}A)[I - \mu(I - \mu^{-1}A)^{-1}B]\xi =$$

$$(I - \mu^{-1}A)\Big[I - \mu B - AB - \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \mu^{1-k}A^k\Big)B\Big]\xi = 0.$$

Тогда достаточно рассматривать лишь уравнение

$$\begin{gathered}[I - \mu B - AB - Q(\mu)B]\xi = 0,\\ Q(\mu) := \sum_{k=2}^{\infty} \mu^{1-k}A^k \longrightarrow 0 \quad (\mu \to \infty)\end{gathered} \tag{3.111}$$

(почему это можно сделать?).

Введем ортопроекторы $P_1 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ и $P_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_0 := \operatorname{Ker} B$. Тогда $P_0 + P_1 = I$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Применим к (3.111) P_1 и P_0 соответственно, учитывая, что

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad \xi_0 = P_0\,\xi = P_0\,\xi_0, \quad \xi_1 = P_1\,\xi = P_1\,\xi_1.$$

Тогда вместо (3.111) будем иметь систему уравнений

$$\begin{gathered}[I_1 - \mu B_1 - A_1 B_1 - P_1\,Q(\mu)\,P_1 B_1]\xi_1 = 0,\\ B_1 := P_1 B P_1, \quad A_1 := P_1 A P_1,\\ \xi_0 = P_0 A P_1 \cdot B_1\,\xi_1 + P_0\,Q(\mu)\,P_1 \cdot B_1 \xi_1.\end{gathered} \tag{3.112}$$

(Проверьте соотношения (3.112) с учетом того, что
$B\xi_1 = BP_1\xi_1 = P_1 B P_1 \xi_1$.)

Второе соотношение (3.112) показывает, что ξ_0 выражается через ξ_1, причем ξ_0 не входит в первое соотношение. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением первого уравнения (3.112). Так как здесь по выбору подпространства $\mathcal{H}_1$ оператор $B_1 = P_1 B P_1 = B_1^*$ имеет нулевое ядро и для ненулевых собственных значений оператора B

$$\lambda_n^{\pm}(B) = \lambda_n^{\pm}(B_1), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots\,,$$

то к пучку (3.112) теперь применимы теоремы 3.2.5, 3.2.6. В самом деле, имеем в подпространстве $\mathcal{H}_1$:

$$A_1 B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad P_1\, Q(\mu) P_1 \longrightarrow 0 \quad (\mu \to 0), \quad \operatorname{Ker} B_1 = \{0\}.$$

Отсюда и следует второе утверждение теоремы.

3^0. Третье утверждение теоремы очевидно. $\square$

3.3 Приложения к гидродинамическим задачам

В этом параграфе рассматриваются две конкретные спектральные задачи линейной гидродинамики, приводящиеся к исследованию операторных пучков, действующих в гильбертовом пространстве. При этом будет использован весь аппарат теории операторных пучков, знакомство с которым было проведено в предыдущих параграфах.

3.3.1 Нормальные колебания тяжёлой вязкой жидкости во вращающемся частично заполненном сосуде

Будем считать, что тяжелая вязкая жидкость находится в произвольном неподвижном сосуде под действием силы тяжести с ускорением $g > 0$. Кинематическую вязкость жидкости, т.е. отношение динамической вязкости $\mu > 0$ к плотности $\rho > 0$ обозначим через $\nu = \mu\rho^{-1} > 0$.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Такие движения называются нормальными движениями, если искомые функции задачи (поле скоростей, поле давлений, поле отклонения движущейся свободной поверхности жидкости от равновесной свободной горизонтальной поверхности) зависят от времени t по закону $\exp(-\lambda t)$. Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, характеризующий частоту нормальных движений и декремент их затухания.

В самом деле, если $\lambda = \alpha + i\beta$, то

$$e^{-\lambda t} = [\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)]e^{-\alpha t},$$

откуда следует, что любое нормальное движение является колебательным процессом с частотой колебаний $\beta = \operatorname{Im}\lambda$ и декрементом затухания $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$.

Как показал С.Г. Крейн, задача о нормальных движениях (нормальных колебаниях) тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде приводится к исследованию уравнения

$$\nu\varphi = \lambda A\varphi + \lambda^{-1}B\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \tag{3.113}$$

в некотором бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. При этом операторы A и B обладают следующими свойствами:

1^0. $A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad A > 0$;

2^0. $B = B^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad B \geqslant 0$;

3^0. $\dim\mathcal{H}_2 := \dim\operatorname{Ker}B = \infty; \quad \dim\mathcal{H}_1 := \dim(\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_2) = \infty$;

4^0. $\lambda_n(A) = \lambda_n^+(A) = (c_A)^{2/3}\,n^{-2/3}[1+o(1)] \quad (n\to\infty), \quad c_A = |\Omega|/(3\pi^2)$;

5^0. $\lambda_n(B) = \lambda_n^+(B) = (c_B)^{1/2}\,n^{-1/2}[1+o(1)] \quad (n\to\infty), \quad c_B = g^2|\Gamma|/(16\pi)$.

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, занимаемая жидкостью в состоянии покоя, $|\Omega|$ — ее объем, Γ — горизонтальная свободная поверхность жидкости, $|\Gamma|$ — ее площадь. Кроме того, плотность жидкости $\rho > 0$ для простоты рассуждений при выводе уравнения (3.113) положена равной 1 (в соответствующих единицах измерения).

Позже Н.Д. Копачевский рассмотрел задачу о нормальных колебаниях тяжёлой жидкости, равномерно вращающейся относительно вертикальной оси с угловой скоростью ω и частично заполняющей некоторый сосуд. Им была изучена также задача о нормальных колебаниях системы вращающихся несмешивающихся жидкостей, расположенных одна над другой. Здесь будем говорить для простоты лишь об одной жидкости и отметим только, что при равномерном вращении жидкости её свободная поверхность Γ уже не будет плоской, а представляет собой параболоид вращения. Эта новая задача приводит к исследованию операторного уравнения, несколько более сложного, чем (3.113):

$$\nu\varphi = \lambda A\varphi + \lambda^{-1}B\varphi + 2i\omega S\varphi. \tag{3.114}$$

Здесь оператор S (кориолисов оператор) обладает следующими свойствами:

6^0. $S = S^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$;

$$7^0.\ S = A^{1/2} S_0 A^{1/2}, \quad S_0 = S_0^*, \quad \sigma(S_0) = [-1,\, 1]. \tag{3.115}$$

Кроме того, в (3.114) оператор A, как и ранее, обладает свойствами 1^0, 4^0, а оператор B — также свойствами 2^0, 3^0, 5^0, однако теперь

$$c_B = \frac{1}{16\pi} \int\limits_{\Gamma} a^2 d\Gamma, \quad a = g\cos(\bar{n}\widehat{,}z) - \omega_0^2 r \cos(\bar{n}\widehat{,}r), \tag{3.116}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Γ, Oz — ось вращения системы, а $Or\theta z$ — цилиндрическая система координат, жестко связанная с вращающимся телом.

Отметим, что обе задачи, т.е. задачи (3.113) и (3.114), играют важную роль в проблеме динамики космической ракеты на активном участке ее полета. Баки с жидким топливом заполнены лишь частично, и колебания топлива следует учитывать при исследовании устойчивости движения всей гидромеханической системы, каковой является ракета с жидким топливом на ее борту.

Оказывается, задачу (3.114) можно привести к виду (3.113), но с видоизмененными коэффициентами A и B. Это позволит, как выяснится, исследовать обе задачи одновременно.

С этой целью введем в рассмотрение оператор

$$I - 2i\omega\nu^{-1} S,$$

который в силу самосопряженности и компактности S имеет ограниченный обратный:

$$I_\omega := (I - 2i\omega\nu^{-1} S)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.117}$$

Поэтому, перенося последнее слагаемое в (3.114) справа налево и применяя оператор I_ω, получим уравнение

$$\nu\varphi = I_\omega(\lambda A + \lambda^{-1} B)\varphi, \tag{3.118}$$

которое при $I_\omega = I$, т.е. при $\omega = 0$, переходит в (3.113).

Лемма 3.3.1. *Оператор I_ω имеет структуру*

$$I_\omega = I + \Phi, \quad \Phi \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad \|I_\omega\| = 1. \tag{3.119}$$

Доказательство. Структура I_ω следует из того, что оператор $I - 2i\omega\nu^{-1}S$ обратим и $S = S^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Для доказательства последнего утверждения (3.119) заметим, что

$$Re(I_\omega^{-1}\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 \leqslant |(I_\omega^{-1}\varphi, \varphi)| \leqslant \|I_\omega \varphi\| \cdot \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \neq 0.$$

Отсюда для $\psi := I_\omega^{-1}\varphi$ получаем

$$\|I_\omega\psi\| \leqslant \|\psi\|, \quad \forall\psi \in \mathcal{H},$$

т.е. $\|I_\omega\| \leqslant 1$.

Покажем теперь, что $\|I_\omega\| = 1$. В самом деле, пусть $\varphi_n = \varphi_n(S)$, $n = 1, 2, \dots$, — ортонормированная последовательность собственных элементов оператора $S = S^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а $\{\lambda_n(S)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность отвечающих им собственных значений. Тогда на элементах этой последовательности в силу свойства $\lambda_n(S) \to 0$ $(n \to \infty)$ имеем

$$\|I_\omega\varphi_n\| = \left\|\left(1 - 2i\omega\nu^{-1}\lambda_n(S)\right)^{-1}\varphi_n\right\| \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

Отсюда и следует свойство $\|I_\omega\| = 1$. $\square$

3.3.2 Раздельная полнота и базисность системы корневых элементов гидродинамических задач

Рассмотрим сначала задачу (3.118) о нормальных колебаниях вращающейся вязкой жидкости. Необходимые изменения и дополнительные утверждения для невращающейся жидкости, когда в (3.118) $I_\omega = I$, будут получены позже.

Будем считать, что вязкость жидкости настолько велика, что

$$4\|A\| \cdot \|B\| < \nu^2. \tag{3.120}$$

Введём, как и ранее, числа

$$r_\pm := \frac{\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\|A\| \cdot \|B\|}}{2\|A\|}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty. \tag{3.121}$$

Перепишем задачу (3.118) в виде

$$L(\lambda)\varphi = 0, \quad L(\lambda) := I - \nu^{-1}I_\omega(\lambda A + \lambda^{-1}B). \tag{3.122}$$

Заметим теперь, что в силу доказанного выше свойства $\|I_\omega\| = 1$ условие (3.120) достаточно для канонической факторизации пучка $L(\lambda)$ относительно окружности

$$\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad |\lambda| = t \in (r_-, r_+)\}.$$

Лемма 3.3.2. *Если выполнено условие* (3.120), *то пучок* $L(\lambda)$ *допускает представления двух типов:*

$$\begin{gathered} L(\lambda) = I_\omega X^{-1}(I - (\nu\lambda)^{-1}XB)(I - \lambda\nu^{-1}XA), \\ X = I_\omega(I + \nu^{-2}BXAX), \end{gathered} \tag{3.123}$$

$$\begin{gathered} L(\lambda) = I_\omega Y^{-1}(I - \lambda\nu^{-1}YA)(I - (\lambda\nu)^{-1}YB), \\ Y = I_\omega(I + \nu^{-2}AYBY). \end{gathered} \tag{3.124}$$

При этом в представлении (3.123) *функция* $I-(\nu\lambda)^{-1}XB$ *голоморфна и голоморфно обратима при* $|\lambda| > r_-$, *а*

$$\sigma(I - \lambda\nu^{-1}XA) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: \ |\lambda| \geqslant r_+\};$$

соответственно в представлении (3.124) *функция* $I - \lambda\nu^{-1}YA$ *голоморфна и голоморфно обратима при* $|\lambda| < r_+$, *а*

$$\sigma(I - (\lambda\nu^{-1})YB) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: \ |\lambda| \leqslant r_-\}. \qquad \square$$

Упражнение 3.3.1. *Провести доказательство леммы 3.3.2, опираясь на свойство* $\|I_\omega\| = 1$, *а также на упражнения 1.5.3 — 1.5.5 либо доказательство теоремы 2.3.2.* $\square$

Упражнение 3.3.2. *Проверить, что в* (3.123) *и* (3.124) *операторы* X *и* Y *обратимы, и каждый из них имеет структуру* $I + \Phi$, $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. $\square$

Итогом этих рассмотрений, а также результатов, изложенных выше, является следующее утверждение.

Теорема 3.3.1. *Если выполнено условие* (3.120), *то решения задачи о нормальных колебаниях вязкой вращающейся жидкости обладают следующими свойствами.*

1^0. *Задача* (3.118) *имеет дискретный спектр с двумя предельными точками* $\lambda = 0$ *и* $\lambda = \infty$. *Все собственные значения конечнократны и расположены в правой полуплоскости* $Re\,\lambda \geqslant 0$, *их можно разбить на две ветви* $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$ *и* $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = 0$.

2^0. *Для собственных значений* $\lambda_{\infty n}$ *выполнены свойства*

$$|\lambda_{\infty n}| \geqslant r_+, \quad |\arg\lambda_{\infty n}| < \varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.125}$$

Последнее свойство выполнено для всех собственных значений $\lambda_{\infty n}$, кроме, быть может, конечного их числа.

3^0. *Для собственных значений $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены свойства*

$$|\lambda_{0n}| \leqslant r_-, \quad |\arg \lambda_{0n}| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.126}$$

причем последнее — также для всех собственных значений, кроме, быть может, конечного их числа.

4^0. *Система корневых элементов $\{\varphi_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ задачи* (3.118), *отвечающих собственным значениям $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$, полна в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а система корневых элементов $\{\varphi_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$, после проектирования на $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \ominus \operatorname{Ker} B$ является полной в подпространстве $\mathcal{H}_1$.*

5^0. *Собственные значения $\lambda_{\infty n}$ имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_{\infty n} = \nu \lambda_n^{-1}(A)(1 + o(1)) \quad (n \to \infty), \tag{3.127}$$

а собственные значения λ_{0n} — соответственно поведение

$$\lambda_{0n} = \nu^{-1} \lambda_n(B)(1 + o(1)) \quad (n \to \infty). \tag{3.128}$$

6^0. *Если вращение системы отсутствует, т.е. $\omega = 0$, $I_\omega = I$, то система $\{\varphi_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ состоит лишь из собственных элементов и образует p–базис в $\mathcal{H}$ при $p > 6/7$. Соответственно система собственных элементов $\{\varphi_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$, после проектирования на $\mathcal{H}_1$, образует p–базис в $\mathcal{H}_1$ при $p > 6/7$.*

Доказательство. Здесь будет приведена лишь схема доказательства данной теоремы.

1^0. То, что $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$ для собственных значений λ задачи (3.118), следует из свойств $A > 0$, $B \geqslant 0$, $S = S^*$ и из квадратного уравнения

$$\nu(\varphi, \varphi) = \lambda(A\varphi, \varphi) + \lambda^{-1}(B\varphi, \varphi) + 2i\omega(S\varphi, \varphi),$$

вытекающего из (3.114).

$2^0 - 3^0$. Далее, условие (3.120) в силу равенства $\|I_\omega\| = 1$ достаточно для факторизаций (3.123) и (3.124) операторного пучка $L(\lambda)$ из (3.122). Тогда, используя теорему Келдыша (см. теорему 2.3.3), получаем утверждения о наличии двух ветвей спектра $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ и о их локализации вдоль положительной полуоси (см. (3.125), (3.126)).

4^0. Доказательство утверждения 4^0 проводится в точности так же, как соответствующие рассуждения в пп. 3^0 и 4^0 теоремы 2.3.6.

5^0. Утверждение 5^0 данной теоремы следуют из асимптотических формул для $\lambda_n(A)$ и $\lambda_n(B)$ (см. свойства 4^0 и 5^0 в п. 3.3.1, а также (3.116)) и теоремы 3.2.7.

6^0. При доказательстве свойств 6^0 используется теорема 3.2.1, а также тот факт, что в силу упомянутых выше асимптотических формул для $\lambda_n(A)$ и $\lambda_n(B)$ операторы A и B принадлежат классам $\mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$ для оператора A и $p > 2$ для оператора B. Тогда по теореме 3.2.1 получаем, что система $\{\varphi_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ собственных элементов задачи С.Г. Крейна (3.113) образует p–базис в $\mathcal{H}$ при $p > p_0$,

$$p_0^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6},$$

т.е. при $p > 6/7$. Аналогичное утверждение имеет место и для системы $\{\varphi_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ собственных элементов $\{\varphi_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$, после ее проектирования на $\mathcal{H}_1$. $\square$

В дополнение к установленному основному результату сделаем еще несколько замечаний.

Определение 3.3.1. *Будем говорить, что система элементов* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *полна в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *с точностью до конечного дефекта, если ортогональное дополнение к этой системе в пространстве* $\mathcal{H}$ *конечномерно.* $\square$

Замечание 3.3.1. *Пусть* $r > 0$ *произвольно. Рассмотрим в правой полуплоскости* $Re\,\lambda \geqslant 0$ *две области:*

$$G_1 = \{\lambda : \quad |\lambda| > r, \quad Re\lambda \geqslant 0\}, \quad G_2 = \{\lambda : \quad |\lambda| < r, \quad Re\lambda \geqslant 0\}.$$

Можно доказать, что при произвольной вязкости $\nu > 0$ *система корневых элементов задачи* (3.114)*, отвечающая собственным значениям из* G_1*, полна с точностью до конечного дефекта в пространстве* $\mathcal{H}$*. Соответственно система корневых элементов, отвечающая собственным значениям из* G_2*, после проектирования на* $\mathcal{H}_1$ *полна в этом подпространстве с точностью до конечного дефекта.* $\square$

Замечание 3.3.2. *При произвольной вязкости* $\nu > 0$ *асимптотические формулы* (3.127) *и* (3.128) *сохраняются.* $\square$

Замечание 3.3.3. *Можно доказать, что при любом* $\varepsilon > 0$ *и* $\omega \neq 0$ *для всех собственных значений* $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ *задачи* (3.114)*, кроме, быть может, конечного их числа (зависящего от* ε*), выполняются условия*

$$|Im\,\lambda_{\infty n}| < 2\omega(1+\varepsilon), \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad \square$$

3.4 Литературные комментарии

В этом параграфе опишем кратко историю создания спектральной теории операторных пучков и некоторые ее этапы. Здесь также будет кратко упомянут материал, не вошедший в основной курс лекций.

3.4.1 К истории вопроса

Разработка спектральной теории операторных пучков была начата в основополагающей работе М.В. Келдыша [11]. Подробная публикация на эту тему содержится в [12]. М.В. Келдышем были введены основные понятия этой теории, доказаны теоремы о полноте системы собственных и присоединенных элементов для важных классов линейных и полиномиальных пучков, найдена асимптотика ветвей собственных значений.

Новым этапом в развитии спектральной теории операторных пучков стали работы М.Г. Крейна и Г.К. Лангера (см., в частности, [21]), в которых детально исследовались квадратичные пучки и впервые применен метод факторизации пучков. Одновременно появились также работы С.Г. Крейна и его учеников (см. [22, 23, 5]). В дальнейшем к этой тематике подключился большой коллектив математиков.

Глубокие результаты исследования вопросов полноты и базисности системы корневых элементов полиномиальных пучков, а также аналитических оператор-функций, получены в работах А.С. Маркуса и В.И. Мацаева (см. [6, 25–30]). В этих работах изучалось также асимптотическое поведение ветвей собственных значений (см. [26, 27]). Одновременно с этими работами серьёзные результаты получены также Г.В. Радзиевским [32]. Результаты М.В. Келдыша и их обобщения, а также исследования А.С. Маркуса и его совместные результаты с В.И. Мацаевым, отражены в монографии А.С. Маркуса [28].

Важный вклад в развитие спектральной теории полиномиальных операторных пучков внесли работы А.Г. Костюченко и участников его научного семинара при МГУ им. М.В. Ломоносова, учеников и коллег (А.А. Шкаликов, Г.В. Радзиевский, М.Б. Оразов и др., см. [17–20, 32–33).

Отметим, что приложения спектральной теории операторных пучков в задачах гидромеханики отражены в монографии Н.Д. Копачевского, С.Г. Крейна и Нго Зуй Кана [16].

Приведём теперь без доказательства некоторые утверждения, не вошедшие в основной текст лекций,но играющие важную роль в приложениях.

1^0. *Фредгольмовой оператор-функцией*, или *фредгольмовым пучком*, называется функция вида

$$L(\lambda) = I - A(\lambda), \tag{3.129}$$

где значениями $A(\lambda)$ являются компактные в $\mathcal{H}$ операторы. Если λ_0 — собственное значение оператора $L(\lambda)$, то число 1 является собственным значением оператора $A(\lambda_0)$ и потому его геометрическая кратность конечна, т.е. $\dim \operatorname{Ker} L(\lambda_0) < \infty$.

Фредгольмов пучок называется *регулярным* в области $G \subset \mathbb{C}$, если оператор-функция $A(\lambda)$ голоморфна в G и оператор $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный хотя бы в одной точке из G. Спектр регулярного пучка состоит из изолированных точек в G, его предельные точки могут лежать лишь на границе G. Все собственные значения являются изолированными для оператор-функции $L(\lambda)$. Собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, имеют конечные алгебраические кратности. Резольвента $L^{-1}(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ является *мероморфной* в области G оператор-функцией, имеющей полюса в точках, совпадающих с собственными значениями. Кратность полюса совпадает с максимальной кратностью собственных элементов, отвечающих собственному значению.

Перечисленные выше факты составляют содержание *теоремы И.Ц. Гохберга* (см. [7], с. 37–40). Некоторые её утверждения можно найти в работе М.В. Келдыша [11].

2^0. Функция $\varphi(\lambda)$ со значениями в $\mathcal{H}$ называется *корневой функцией* операторного пучка $L(\lambda)$ относительно точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, если:

1) она голоморфна в окрестности точки λ_0; 2) $\varphi(\lambda_0) \neq 0$;

3) $L(\lambda_0)\varphi(\lambda_0) = 0$.

Если $m+1$ – *порядок нуля* функции $L(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0, то число m называется *порядком* корневой функции $\varphi(\lambda)$.

Нетрудно проверить, что в разложении в ряд Тейлора по степеням $\lambda - \lambda_0$ корневой функции $\varphi(\lambda)$ порядка m,

$$\varphi(\lambda) = \varphi_0 + (\lambda - \lambda_0)\varphi_1 + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^m \varphi_m, \tag{3.130}$$

элемент φ_0 является собственным для $L(\lambda)$, а элементы

$$\varphi_k := \frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi(\lambda)}{d\lambda^k} \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3.131}$$

– присоединенными к нему, отвечающие собственному значению $\lambda=\lambda_0$. Обратно, если в разложении $\varphi(\lambda)$ в ряд Тейлора φ_0 – собственный, а φ_k $(k = 1, \ldots, m)$ – присоединенные к нему элементы, то $\varphi(\lambda)$ – корневая функция порядка не ниже m для $L(\lambda)$ в точке λ_0.

Применение корневой функции при исследовании операторных пучков позволяет рассматривать сразу всю цепочку из присоединенных элементов, отвечающих данному собственному элементу φ_0 и соответствующему собственному значению λ_0.

Понятие корневой функции было введено независимо С.Г. Крейном и его учеником В.П. Трофимовым, а также В.И. Мацаевым и его учеником Ю.А. Палантом.

3^0. В данном курсе лекций изучались теоремы о факторизации операторных пучков относительно окружности некоторого радиуса. Для самосопряженных оператор-функций имеют место аналогичные утверждения для случая, когда они заданы на некотором отрезке.

Пусть $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ и $\mathcal{U}$ – некоторая связная окрестность отрезка $[a,\ b]$, симметричная относительно $\mathbb{R}$. Пусть $A(\lambda)$ – самосопряженная и голоморфная в $\mathcal{U}$ оператор-функция. Если выполнены условия $A(a) \ll 0$, $A(b) \gg 0$ и функция $(A(\lambda)\varphi,\ \varphi)$ при любом $\varphi \neq 0$ имеет ровно один корень $p\,(\varphi)$ в $(a,\ b)$, причем

$$\inf_{\|\varphi\|=1} (A'(p\,(\varphi))\varphi,\ \varphi) > 0, \tag{3.132}$$

то $A(\lambda)$ допускает факторизацию вида

$$A(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \tag{3.133}$$

где оператор-функция $A_+(\lambda)$ голоморфна и обратима в $\mathcal{U}$, $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\sigma(Z) \subset (a,\ b)$. При этом Z имеет положительно определенный симметризатор и, следовательно, подобен самосопряженному оператору.

Сформулированные утверждения справедливы, в частности, если выполнены условия

$$A(a) \ll 0, \quad A(b) \gg 0, \quad A'(\lambda) \gg 0, \quad a \leqslant \lambda \leqslant b. \tag{3.134}$$

4^0. Условия (3.134) и факторизация (3.133) позволяют, как и в п.3.1.3, доказать, при дополнительном условии

$$A(c) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad a < c < b, \tag{3.135}$$

теорему о базисности Рисса системы тех собственных элементов оператор-функции $A(\lambda)$, собственные значения которой расположены на промежутке $(a,\ b)$.

Если вместо (3.134), (3.135) выполнены лишь условия

$$A(0) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad A'(0) \gg 0, \tag{3.136}$$

то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ собственные элементы, отвечающие собственным значениям из промежутка $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, образуют базис Рисса в подпространстве, имеющем конечный дефект (конечную коразмерность) в $\mathcal{H}$.

Сформулированные в утверждениях 3^0 и 4^0 результаты принадлежат А.С. Маркусу и В.И. Мацаеву (см. [29]), доказательство теоремы В.И. Ломоносова для этого случая приведено в работе [6]. Упомянем также работу [24], содержащую некоторые обобщения приведенных результатов.

Отметим в заключение этого пункта, что понятие p-базисности последовательности элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ введено в [31] В.А. Пригорским, учеником и коллегой А.С. Маркуса. Свойство p-базисности системы собственных элементов в случае пучка С.Г. Крейна установлено Н.Д. Копачевским [13], последующее изучение этого круга вопросов проводилось в работе Т.Я. Азизова и Н.Д. Копачевского [3]. Для аналитических оператор-функций аналогичные рассмотрения были проведены Гринштейном В.А. и Н.Д. Копачевским [8], Гринштейном В.А. [9, 10], а также в работах Н.Д. Копачевского и О.И. Немирской [14, 15], Т.Я. Азизова, Н.Д. Копачевского и Л.И. Сухочевой [4]. Заметим также, что в случае операторов, самосопряженных в пространстве с индефинитной метрикой, вопросы p-базисности системы собственных элементов изучены в известной монографии Т.Я. Азизова и И.С. Иохвидова и принадлежат Т.Я. Азизову.

3.4.2 Вариационные методы исследования непрерывных оператор-функций

Эти методы разработаны для самосопряженных оператор-функций, непрерывных на некотором интервале $(a, b) \in \mathbb{R}$; соответствующие вариационные принципы установлены Ю.Ш. Абрамовым [1]. Приведем без доказательства основные положения этой теории.

Пусть для самосопряженной непрерывной по t оператор-функции $L(t),\ t \in (a,\ b),$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}),$ выполнены следующие условия:

1^0. Для любого $\varphi \neq 0$ из $\mathcal{H}$ функция $g(t) := (L(t)\varphi,\ \varphi)$ имеет ровно один корень $p\,(\varphi) \in (a,\ b)$.

2^0. Функция $g(t)$ возрастает в точке $t_0 = p(\varphi)$. Если, в частности, $L(t)$ – непрерывно дифференцируемая оператор-функция, то считаем выполненным условие $(L'(p(\varphi))\varphi,\, \varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$.

3^0. Функционал $p(\varphi)$ при $\varphi \neq 0$ непрерывен.

4^0. Если $\alpha = \inf\, p(\varphi)$, $\beta = \sup\, p(\varphi)$, то $\alpha > a$, $\beta < b$.

Функционал $p(\varphi)$ называется *функционалом Рэлея* оператор-функции $L(t)$. Например, для линейного операторного пучка $L(t) = A - t\,I$, $A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, отвечающего стандартной спектральной задаче (см. п. 1.1.1), функционал Рэлея имеет вид

$$p(\varphi)) = (A\varphi,\, \varphi)/(\varphi,\, \varphi).$$

Пусть кроме условий 1^0 – 4^0 для оператор-функции $L(t)$ дополнительно выполнены следующие условия.

5^0. $L(t)$ имеет в интервале $(a,\, b)$ последовательность собственных значений конечной кратности, сходящуюся к числу c (которое может быть собственным значением любой кратности).

6^0. Система собственных элементов оператор-функции $L(t)$, отвечающая ее собственным значениям из интервала $(a,\, b)$, полна в $\mathcal{H}$.

Занумеруем собственные значения $L(t)$, лежащие в интервале $(c,\, b)$, в порядке невозрастания в последовательность $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ (с учетом их кратностей), а собственные значения $L(t)$ из интервала $(a,\, c)$ – в порядке неубывания в последовательность $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ (также с учетом их кратностей).

Тогда имеют место следующие утверждения.

1^0. Справедлив *вариационный принцип Фишера–Куранта–Вейля*:

$$\begin{aligned} \lambda_k^+ &= \min_{dim\mathcal{L}^\perp = k-1}\ \max_{0 \neq \varphi \in \mathcal{L}} p(\varphi), \\ \lambda_k^- &= \max_{dim\mathcal{L}^\perp = k-1}\ \min_{0 \neq \varphi \in \mathcal{L}} p(\varphi), \end{aligned} \tag{3.137}$$

где $\mathcal{L}$ – произвольное подпространство из $\mathcal{H}$ коразмерности $k-1$.

2^0. Справедлив *вариационный принцип Пуанкаре–Ритца*:

$$\begin{aligned} \lambda_k^+ &= \max_{dim\mathcal{M} = k}\ \min_{0 \neq \varphi \in \mathcal{M}} p(\varphi), \\ \lambda_k^- &= \min_{dim\mathcal{M} = k}\ \min_{0 \neq \varphi \in \mathcal{M}} p(\varphi), \end{aligned} \tag{3.138}$$

где $\mathcal{M}$ – произвольное k–мерное подпространство в $\mathcal{H}$.

Эти принципы позволяют, в частности, получать двусторонние оценки для собственных значений $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$, с предельными точками $+\infty$ и 0 соответственно, отвечающих двум ветвям операторного пучка С.Г. Крейна

$$L(t) := I - tA - t^{-1}B$$

при условии $4\|A\| \cdot \|B\| < 1$. Асимптотическое поведение этих ветвей получено в теореме 3.2.7, а соответствующие двусторонние оценки, выведенные в [16, с. 300], имеют вид

$$\lambda_k(B) \leqslant \lambda_k^- \leqslant \lambda_k(B)/(1 - 2\lambda_k(B) \cdot \|A\|), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.139}$$

$$1/\lambda_k(A) - 2\|B\| \leqslant \lambda_k^+ \leqslant 1/\lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{3.140}$$

Следствием формул (3.139), (3.140) являются, в частности, асимптотические формулы

$$\lambda_k^- = \lambda_k(B)[1+o(1)] \ (k \to \infty), \ \ \lambda_k^+ = 1/\lambda_k(A)+O(1) \ (k \to \infty). \tag{3.141}$$

Заметим еще, что вариационные принципы (3.137), (3.138) использовались также при получении двусторонних оценок собственных значений задачи о свободных колебаниях идеальной жидкости в равномерно вращающемся частично заполненном сосуде (см. [16, с. 224]).

3.4.3 Базисность по Абелю-Лидскому

В п. 3.1.1 рассматривались некоторые виды базисов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Существует еще один вид базиса, который занимает промежуточное положение между полнотой и просто базисностью. Это – так называемый базис со скобками.

Минимальная система элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *базисом со скобками* в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если существует такая возрастающая последовательность номеров $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$, что для любого вектора $\varphi \in \mathcal{H}$ последовательность частичных сумм с номерами $\{m_l\}$ ряда Фурье

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

элемента φ сходится к φ, т.е.

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=m_l+1}^{m_{l+1}} c_k \varphi_k \Big) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l f, P_l f := \sum_{k=m_l+1}^{m_{l+1}} c_k \varphi_k, m_0 := 0. \tag{3.142}$$

При этом предполагается, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная минимальная система в $\mathcal{H}$, а тогда, как известно, существует отвечающая ей *биортогональная* система $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, которая также является полной и минимальной в $\mathcal{H}$. Соответствующие формулы биортогональности имеют вид

$$(\varphi_k,\, \psi_j) = \delta_{kj}, \ \ k, j = 1,\, 2,\, \dots\,, \tag{3.143}$$

откуда следует, что в (3.142) $c_k = (\varphi,\, \psi_k), \ \ k = 1,\, 2,\, \dots .$

Опираясь на определение базисности со скобками, дадим теперь определение базисности по Абелю–Лидскому (см., например, [2], с. 248–249). Оно относится к системе корневых элементов оператора L с дискретным спектром или обратного к нему компактного (несамосопряженного) оператора $A = L^{-1}$.

Предположим, что все собственные значения μ_j оператора L (характеристические числа оператора $A = L^{-1}$), кроме, быть может, конечного их числа, содержатся в угле

$$\Lambda_\theta := \{\mu : |\arg\,\mu| < \theta\},$$

и пусть α – положительное число, $\alpha\theta < \pi/2$. Положим

$$\mu^\alpha := |\mu|^\alpha e^{i\alpha \arg\,\mu}$$

в этом угле, так что $|\exp{(-\mu^\alpha t)}| \to 0$ при $t = \mathrm{const} > 0$, $\mu \in \Lambda_\theta$, $\mu \to \infty$.

Пусть сначала в системе $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ корневых элементов оператора L нет присоединенных элементов, отвечающих собственным значениям $\mu_j \in \Lambda_\theta$ (по крайней мере, начиная с некоторого номера j). В этом случае будем говорить, что $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – *базис для метода суммирования Абеля–Лидского порядка* α, если существует такая последовательность номеров

$$0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_l < \ldots\,,$$

что для любого $\varphi \in \mathcal{H}$ при $t > 0$ сходится ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=m_l+1}^{m_{l+1}} c_j\, e_j(t)\, \varphi_j \tag{3.144}$$

и его сумма $\varphi(t)$ стремится к φ в $\mathcal{H}$ при $t \to +0$. Здесь функция $e_j(t) = e_j(t,\, \alpha) := \exp(-(\mu_j)^\alpha t)$, если $\mu_j \in \Lambda_\theta$, причем все члены, отвечающие одному и тому же собственному значению μ_j, содержатся в одном слагаемом суммы по l. Для тех j, для которых $\mu_j \notin \Lambda_\theta$ (например, для $\mu_j = 0$, если 0 – собственное значение), полагают $e_j(t) \equiv 1$.

В общем случае, когда у L имеются и присоединенные элементы, данное определение базисности по Абелю–Лидскому обобщается следующим образом. Пусть $\varphi_p, \ldots, \varphi_q$ – базис в корневом подпространстве $\mathcal{L}_{\mu_0}$ оператора L, отвечающий собственному значению $\mu_0 \in \Lambda_\theta$. Тогда сумма

$$c_p\, e_p(t)\varphi_p + \ldots + c_q\, e_q(t)\varphi_q$$

(см. (3.144)) заменяется интегралом

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu_0|=\varepsilon} \exp(-\mu^\alpha t)(L-\mu I)^{-1}\varphi\, d\mu, \tag{3.145}$$

где контур интегрирования лежит в Λ_θ и окружает только одно собственное значение μ_0 с обходом против часовой стрелки. Этот интеграл при $t = 0$ становится равным проекции элемента φ на корневое подпространство $\mathcal{L}_{\mu_0}$ оператора L, т.е. величине $c_p\,\varphi_p + \ldots + c_q\,\varphi_q$. Если вместо L рассматривается обратный ему оператор $A = L^{-1}$, то в (3.145) резольвенту $(L-\mu I)^{-1}$ следует заменить на *модифицированную резольвенту* $A(I-\mu A)^{-1}$.

Заметим, что, в отличие от других видов базисности, данный вид базисности по Абелю–Лидскому тесно связан с изучаемым оператором L с дискретным спектром $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, поскольку от него зависят функции $e_j(t,\,\alpha)$.

Опираясь на определение базисности по Абелю–Лидскому, сформулируем основные результаты, относящиеся к операторам L с дискретным спектром либо к операторам $A = L^{-1}$ (см., например, [2], с. 284, 291–292).

Рассмотрим оператор $A = L^{-1}$, который допускает представление

$$A = A_0(I + T_1), \tag{3.146}$$

где $T_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а оператор A_0 самосопряжен и компактен, причем все его собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, отрицательны либо положительны. Тогда:

1^0. Если выполнено условие

$$s_j(A_0) = |\lambda_j(A_0)| \leqslant cj^{-p}, j = 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{3.147}$$

то система корневых элементов оператора A образует базис Абеля–Лидского порядка $\alpha = p^{-1} + \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0$.

2^0. Если характеристические числа $\nu_j(A_0)$ оператора A_0 (т.е. собственные значения оператора $L_0 = A_0^{-1}$) имеют асимптотическое поведение

$$\nu_j(A_0) = cj^p + o(j^p), \quad j \to \infty, \quad c \neq 0, \tag{3.148}$$

то та же формула имеет место для характеристических чисел оператора $A = L^{-1}$:

$$\nu_j(A) = cj^p + o(j^p), \quad j \to \infty, \quad c \neq 0. \tag{3.149}$$

Приведем еще одно утверждение, относящееся к оператору L с дискретным спектром. Пусть оператор L имеет вид

$$L = L_0 + L_1, \tag{3.150}$$

где L_0 – самосопряженный оператор с дискретным положительным спектром, а L_1 – оператор, подчиненный некоторой степени L_0^q оператора L_0. Точнее, будем предполагать, что выполнены следующие два условия:

а) для собственных значений $\lambda_j(L_0)$ оператора L_0 имеют место оценки

$$\lambda_j(L_0) \geqslant cj^p, \quad c > 0, \quad p > 0, \quad j = 1, 2, \ldots ; \tag{3.151}$$

б) справедливо неравенство

$$\|L_1 L_0^{-q}\| =: b < \infty, \quad q < 1. \tag{3.152}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1^0. Если выполнены условия

$$p\,(1-q) < 1, \quad \alpha > p^{-1} - (1-q),$$

то корневые элементы оператора L образуют базис Абеля–Лидского порядка α.

2^0. Если $p\,(1-q) = 1$, то эти элементы образуют базис Рисса со скобками.

3^0. Если $p\,(1-q) > 1$, то они образуют базис Бари́ (см. определение в п. 3.1.1) со скобками.

Литература

[1] Абрамов Ю.Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 180 с.

[2] Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. – Berlin, ... , Toronto: Wiley–VCH, 1999. – 380 p.

[3] Azizov T.Ya., Kopachevsky N.D. On basicity of the system of eigen– and associated elements of the S.G. Krein's problem of normal oscillations of a viscous fluid // Тезисы лекц. и докл. III Крымской осенней матем. шк.–симпоз. [КРОМШ–III], (Севастополь–Симферополь, 1994г.). – Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 1994. – С. 38–39.

[4] Azizov T.Ya., Kopachevsky N.D., Suhocheva L.I. On eigenvalues of a self–adjoint pencil with a parameter // Proceedings of the OT–16 Conference. – Buharest: The Theta Foundation, 1997. – pp. 37–50.

[5] Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – 2, № 2. – С. 21–32.

[6] Вирозуб А.И., Мацаев В.И. О спектральных свойствах одного класса самосопряженных оператор-функций // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – 8, № 1. – С. 1–10.

[7] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. – М.:, Наука, 1965. – 448 с.

[8] Гринштейн В.А., Копачевский Н.Д. О p-базисности системы элементов самосопряженной оператор-функции // Тез. докл. 15 Всесоюзн. шк. по теории операторов в функциональных пространствах, (Ульяновск, 5–12 сентября 1990 г.) –Ульяновск, 1990.–Ч. I. – С. 72.

[9] Гринштейн В.А. О p-базисности системы собственных и присоединенных векторов полиномиального самосопряженного операторного пучка. – Симферополь, 1990. – 9 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.05.90, № 890.

[10] Гринштейн В.А. Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции // Матем. заметки. – 1991. – 50, № 1. – С. 142–144.

[11] Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых операторов // Докл. АН СССР. – 1951. – 77, № 1. – С. 11–14.

[12] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов // Успехи матем. наук. – 1971. – 24, вып. 4(160). – С. 15–41.

[13] Копачевский Н.Д. О свойствах базисности систем собственных и присоединённых векторов самосопряжённого операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ // Функциональный анализ и его приложения. – 1981. – 15, № 2. – С. 77–78.

[14] Копачевский Н.Д., Немирская О. И. О p-базисности системы элементов самосопряженной оператор-функции. – Симферополь, 1992. – 10 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 16.12.92, № 1969.

[15] Kopachevsky N.D., Nemirskaya O.I. On p-basicity of projections of the system of eigenelements of a self-adjoint operator-valued function // Тезисы лекц. и докл. III Крымской осенней матем. шк.–симпоз. [КРОМШ–III], (Севастополь–Симферополь, 1994г.). – Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 1994. – С. 43–44.

[16] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[17] Костюченко А.Г., Оразов М.Б. О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка // Функциональный анализ и его приложения. – 1975. – Т. 9, № 4. – С. 28–40.

[18] Костюченко А.Г., Оразов М.Б. Проблема колебаний упругого полуцилиндра и связанный с ней самосопряженный квадратичный пучок // Труды семинара им. И.Г. Петровского, 1981. – Т. 6. – С. 97–146.

[19] Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи // Функциональный анализ и его приложения. – 1983. – Т. 17, вып. 2. – С. 38–61.

[20] Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. К теории самосопряженных операторных пучков // Вестник МГУ, сер. 1: Матем. и механика, 1983. – № 6. – С. 40–51.

[21] Крейн М.Г., Лангер Г.К. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Труды междунар. симпоз. по применению ТФКП в механике сплошной среды. – М: Наука, 1965. – 2. – С. 283–322.

[22] Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 2. – С. 262–265.

[23] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – 2, № 1. – С. 40–50.

[24] Krupnik Ilya. On the basic property of the eigenvectors of a holomorphic self-adjoint operator-valued function // Integral Equations and Operator Theory. – 1991. – Vol. 14. – pp. 545–551.

[25] Маркус А.С., Мацаев В.И., Руссу Г.И. О некоторых обобщениях теории сильно демпфированных пучков на случай пучков произвольного порядка // Acta Sci. Math. – Szeged, 1973. – 34. – P. 245–271.

[26] Маркус А.С., Мацаев В.И. Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики // Труды Московского матем. общества. – 1982. – 45. – С. 133–181.

[27] Маркус А.С., Мацаев В.И. Теоремы о сравнении спектров и спектральные асимптотики для пучков Келдыша // Матем. сборник. – 1984. – 123(165), № 3. – С. 391–406.

[28] Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.

[29] Маркус А.С., Мацаев В.И. О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка // Матем. сборник. – 1987. – 133(175), № 3(7). – С. 293–313.

[30] Маркус А.С., Мацаев В.И. Базисность подсистемы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка // Функциональный анализ и его приложения. – 1987. – Т. 21, вып. 1. – С. 82–83.

[31] Пригорский В.А. О некоторых классах базисов гильбертова пространства // Успехи матем. наук. – 1965. – 20, № 5 (125). – С. 231–236.

[32] Радзиевский Г.В. Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи матем. наук. – 1982. – № 5. – С. 81–145.

[33] Шкаликов А.А., Плиев В.Т. Компактные возмущения сильно демпфированных операторных пучков // Матем. заметки. – 1989. – Т. 45, вып. 2. – С. 118–129.

Спектральная теория операторных пучков

Специальный курс лекций
для студентов специальности "Математика"

Автор:
Копачевский Николай Дмитриевич

Корректура и верстка: Газиев Э.Л.

Подписано к печати 08.01.2009г. Формат 70x84/16.
Бумага тип. ОП. Объем 8 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. Горького 8. ООО "ФОРМА".