МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Таврический национальный университет им. В. И.Вернадского

Т.Я. АЗИЗОВ, Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРОСТРАНСТВ ПОНТРЯГИНА

Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности "Математика"

Симферополь, 2008

ББК 22.162
А35
УДК 517.98

Рекомендовано к печати научно-методической комиссией факультета математики и информатики ТНУ (протокол № 2 от 12.11.2008 г.)

Рецензент :

Орлов И.В. – д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

А35 Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. ***Введение в теорию пространств Понтрягина*:** Специальный курс лекций. – Симферополь: ТНУ, 2008. – 112 с. – На русском языке.

В курсе лекций содержатся основные положения геометрии пространства Понтрягина и теории операторов, действующих в них, а также рассматривается спектральный подход к исследованию гидродинамического пучка С.Г. Крейна.

Изложение сопровождается примерами и упражнениями, что позволяет рекомендовать пособие как для аудиторных занятий, так и самостоятельного изучения.

Для студентов-магистрантов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики.

Содержание

Краткие исторические сведения и цели курса

Бесконечномерные пространства с индефинитной метрикой стали систематически изучаться после знаменитой работы Л.С. Понтрягина (1944), в которой доказывалось (в современной терминологии) существование $\varkappa$-мерного неотрицательного инвариантного подпространства у самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$. Об интересе к такого рода результатам, как пишет в своей статье Л.С. Понтрягин, он узнал от С.Л. Соболева, изучавшего в то время проблемы устойчивости в гидродинамике и получившего аналогичный результат при $\varkappa = 1$. Оригинальная работа С.Л. Соболева увидела свет лишь в 1960 г. После статьи Понтрягина появилась целая серия работ М.Г. Крейна и его учеников, в которых изучались как геометрия, так и теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, называемых сейчас пространствами Крейна. Сейчас теория пространств Понтрягина и Крейна является достаточно востребованной в различных приложениях, как в сложных теоретических направлениях математики, так и в прикладных, в частности, в механике. Мы не будем останавливаться подробно на истории вопроса, а также избежим ссылок в тексте, указав в библиографии литературу, где читатель может ознакомиться, кроме прочего, также с вопросами приоритетов.

Целью данного курса является краткое введение в геометрию и теорию операторов в пространствах Понтрягина. В тексте лекций излагаются, как хорошо известные результаты (для наиболее важных, с нашей точки зрения, указывается авторство), так и новые. Найдены и новые методические подходы. В конце курса приводится схема применения одной из спектральных теорем к исследованию гидродинамического пучка С.Г. Крейна.

1 Предварительные сведения

При изучении данного курса лекций потребуется знание основных положений теории линейных векторных пространств, теории гильбертовых пространств, а также теории линейных нормированных пространств. Напомним кратко некоторые из них.

Множество $\mathcal{E}$ произвольной природы называется комплексным линейным пространством (линейной системой, линеалом), если для элементов из $\mathcal{E}$ определены операции сложения двух элементов и операция умножения элемента на комплексное число. При этом

$$\alpha x + \beta y \in \mathcal{E}, \quad \forall x, y \in \mathcal{E}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

здесь через $\mathbb{C}$ обозначено множество комплексных чисел. Будем говорить, что $\mathcal{E}$ — *линейное нормированное пространство*, если для элементов из $\mathcal{E}$ определена функция (функционал) $\|\cdot\| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнены следующие условия:

1) $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$.

Определение 1.1. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{E}$ называется фундаментальной, если

$$\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty).$$

□

Определение 1.2. Линейное пространство $\mathcal{E}$ с нормой $\|\cdot\|$ (краткая запись $\{\mathcal{E}, \|\cdot\|\}$) называется полным (банаховым), если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{E}$ имеет (и тогда единственный) предел $x_0 := \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n \in \mathcal{E}$. (Иными словами, $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, т.е., $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) : n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - x_0\| < \varepsilon$.) □

Далее будем считать, что $\{\mathcal{E}, \|\cdot\|\}$ — банахово пространство.

Определение 1.3. Функция (полутора-линейная форма) $(\cdot, \cdot) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ называется скалярным произведением, если

1) $(x, x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}; \quad (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$. □

Определение 1.4. Банахово пространство $\mathcal{E}$ называется гильбертовым (будем обозначать, как правило, $\mathcal{H}$), если его норма порождена скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, т.е. $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. $\square$

Для элементов из $\mathcal{H}$ справедливо *неравенство Коши–Буняковского–Шварца*:

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Далее мы в подавляющем большинстве случаев будем иметь дело с гильбертовыми пространствами, оснащенными специальными структурами. Часть упомянутых или доказываемых результатов справедлива также и в более общем случае банаховых или даже общих топологических пространств, но мы будем себя ограничивать только случаем гильбертова пространства.

Замечание 1.1. Как нетрудно проверить, неравенство Коши–Буняковского–Шварца справедливо не только для скалярного произведения, но и в случае, когда в первом условии определения 1.3 ограничиться только условием $(x,x) \geqslant 0$, опустив требование $(x,x) = 0 \iff x = 0$, либо заменить его на $(x,x) \leqslant 0$ для любого x. $\square$

Всюду ниже термином подпространство пространства $\mathcal{H}$ будем называть замкнутый линеал, т.е. такую линейную систему элементов из $\mathcal{H}$, которая содержит все свои предельные точки.

Определение 1.5. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — линеалы из $\mathcal{H}$. Тогда суммой линеалов называется множество

$$\mathcal{L} + \mathcal{M} := \{x + y : x \in \mathcal{L},\ y \in \mathcal{M}\}. \quad \square$$

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — подпространства в $\mathcal{H}$, т.е. $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$. Будет ли сумма этих подпространств подпространством, т.е. всегда ли

$$\mathcal{L} + \mathcal{M} = \overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} \quad ? \tag{1.1}$$

Оказывается, не всегда. Однако, если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ ортогональны: $\mathcal{L} \perp \mathcal{M}$, т.е. $(x,y) = 0$ для $\forall x \in \mathcal{L}$, $\forall y \in \mathcal{M}$, то (1.1) проверяется непосредственно.

Другой пример, когда имеет место (1.1), отображен в следующей лемме.

Лемма 1.1. Если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — подпространства в $\mathcal{H}$ и

$$\min\{\dim \mathcal{L},\ \dim \mathcal{M}\} < \infty,$$

то и их сумма — подпространство. $\square$

Приведем пример пары подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, когда свойство (1.1) не выполнено.

Пример 1.1. Пусть $\mathcal{H} = L_2(0,1) \times L_2(0,1)$,

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ tx(t) \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} ty(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\}, \quad x(t),\ y(t) \in L_2(0,1).$$

Тогда множество $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ плотно в $\mathcal{H}$, но не совпадает с $\mathcal{H}$. $\square$

Предоставляем читателю самостоятельно доказать лемму 1.1 и проверить справедливость утверждения в примере 1.1.

Напомним определение и свойства линейных операторов, действующих гильбертовых пространствах.

Определение 1.6. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Отображение A с областью определения $\operatorname{dom} A \subset \mathcal{H}$ и областью значения $\operatorname{ran} A \subset \mathcal{H}$ (кратко запишем $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$) называется линейным оператором, *если выполнены следующие условия:*

(а) $\operatorname{dom} A$ — *линеал;*

(б) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$ $\square$

Далее, если не оговорено другое, под термином "оператор" будет подразумеваться линейный оператор и, как правило, будем считать $\operatorname{dom}\, A = \mathcal{H}$, т.е. оператор A будет задан на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 1.7. Оператор $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ называется непрерывным, если из сходимости векторов x_n к вектору x_0 следует сходимость векторов Ax_n к Ax_0, т.е.

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \Longrightarrow \|Ax_n - Ax_0\| \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty. \quad \square$$

Определение 1.8. Оператор $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ называется ограниченным, если

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} =: \|A\| < \infty.$$

$\square$

Как известно из курса функционального анализа, оператор $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен. Поэтому далее для линейного оператора будут как синонимы использоваться оба понятия, ограниченного и непрерывного оператора.

Определение 1.9. Оператор A, заданный на линеале $\mathrm{dom}\, A \subset \mathcal{H}$, называется замкнутым, если

$$\begin{cases} x_n \to x_0 \\ Ax_n \to y_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_0 \in \mathrm{dom}\, A \\ y_0 = Ax_0 \end{cases} .$$

□

Приведем некоторые простые примеры операторов.

Пример 1.2. Пусть $\mathcal{H} = L_2(0,1)$ и оператор $I : Ix = x$ (тождественный оператор) задан на множестве $\{x(t)\}$ абсолютно непрерывных функций, имеющих представление

$$x(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad g(s) \in L_2(0,1).$$

Непосредственно проверяется, что так определенный оператор I является ограниченным: $\|I\| = 1$, плотно заданным, но не замкнутым. □

Пример 1.3. Пусть, как и в примере 1.2, $\mathcal{H} = L_2(0,1)$ и A — оператор дифференцирования, т.е.

$$Ax(t) := \frac{dx}{dt}, \tag{1.2}$$

причем $\mathrm{dom}\, A \subset \mathcal{H}$ та же, что и в примере 1.2. Тогда, как известно, оператор (1.2) замкнут, но неограничен в $L_2(0,1)$. □

Далее понадобится следующий хорошо известный факт.

Теорема 1.1 (С. Банах). Пусть A — линейный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Тогда:

(1) замкнутый оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{dom}\, A = \overline{\mathrm{dom}\, A}; \tag{1.3}$$

(2) непрерывный оператор A замкнут тогда и только тогда, когда выполнено свойство (1.3). $\square$

Предоставляем читателю сравнить утверждения теоремы Банаха и свойства операторов из примеров 1.2 и 1.3.

Определение 1.10. Оператор $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ называется проектором (оператором проектирования), если $P^2 = P$, т.е. $P(Px) = Px, \forall x \in \mathcal{H}$. $\square$

Если P — проектор, то пространство $\mathcal{H}$ разлагается в сумму: $\mathcal{H} = P\mathcal{H} + (I - P)\mathcal{H}$. Иными словами, $x = Px + (I - P)x$, $\forall x \in \mathcal{H}$, где $Px \in P\mathcal{H}$, а $(I-P)x \in (I-P)\mathcal{H}$. Отметим, что $(I-P)$ — проектор одновременно с P.

2 Введение в геометрию пространства Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$

Пусть $\mathcal{E}$ — линейное пространство, не обязательно нормированное. Зададим на $\mathcal{E}$ полутора-линейную форму (в вещественном $\mathcal{E}$ форма называется билинейной) $[\cdot,\cdot] : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$, для которой выполнены следующие требования:

1) $[x,x] \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{E}$;

2) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z], \quad \forall x,y,z \in \mathcal{E}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$;

3) $[x,y] = \overline{[y,x]}, \quad \forall x,y,z \in \mathcal{E}$.

Полутора-линейную форму $[\cdot,\cdot]$ называют также *индефинитной метрикой*, а пространство $\{\mathcal{E}, [\cdot,\cdot]\}$ — *пространством с индефинитной метрикой.*
Из первого свойства следует, в частности, что для любого элемента $x \in \mathcal{E}$ выражение $[x,x]$ может быть положительным, отрицательным или нулем.

Определение 2.1. Элемент $x \in \mathcal{E}$ называется:

а) положительным, если $[x,x] > 0 \quad$ (сокращенно $x > 0$);

б) неотрицательным, если $[x,x] \geqslant 0 \quad (x \geqslant 0)$;

в) отрицательным, если $[x,x] < 0 \quad (x < 0)$;

г) неположительным, если $[x,x] \leqslant 0 \quad (x \leqslant 0)$;

д) нейтральным, если $[x,x] = 0$. $\square$

Соответствующим образом определяются и линеалы $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$.

Определение 2.2. Линеал $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ называется:

а) положительным, если $[x,x] > 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}, \quad x \neq 0$ (сокращенно $\mathcal{L} > 0$);

б) неотрицательным, если $[x,x] \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L} \geq 0$);

в) отрицательным, если $[x,x] < 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}, \quad x \neq 0$ ($\mathcal{L} < 0$);

г) неположительным, если $[x,x] \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L} \leq 0$);

д) нейтральным, если $[x,x]=0, \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

При этом отрицательные и положительные линеалы называются *дефинитными*, а неотрицательные и неположительные, в частности нейтральные, — *семидефинитными*. Линеалы, содержащие как положительные так и отрицательные векторы, называются *индефинитными*. $\square$

Целью этого курса является изучение геометрии пространства Понтрягина и теории операторов в этих пространствах. Пространство Понтрягина — специальный случай индефинитного пространства и по определению удовлетворяет формулируемым ниже аксиомам (i) – (iv).

Определение 2.3. Пространство $\{\mathcal{E},[\cdot,\cdot]\}$ называется пространством Понтрягина с $\varkappa$ положительными квадратами и обозначается $\Pi_\varkappa$, если выполнены следующие аксиомы:

(i) в $\mathcal{E}$ нет ненулевого вектора, ортогонального всему $\mathcal{E}$, т.е. $[x_0,x]=0, \quad \forall x \in \mathcal{E}$, влечет $x_0=0$;

(ii) в $\mathcal{E}$ существует хотя бы одно $\varkappa$-мерное, $\varkappa \in \mathbb{N}$, положительное подпространство;

(iii) для любых $\varkappa+1$ векторов $\{x_j\}_{j=1}^{\varkappa+1}$ квадратичная форма $\sum_{k,j=1}^{\varkappa+1}[x_j,x_k]\xi_j\overline{\xi_k}$ имеет не более $\varkappa$ неотрицательных квадратов;

(iv) существует разложение
$$\mathcal{E} =: \Pi_\varkappa = \Pi_+[\dot{+}]\Pi_-, \tag{2.1}$$
с $\Pi_+>0$, $\Pi_-<0$, $[x_+,x_-]=0$ при всех $x_\pm \in \Pi_\pm$,
$$\dim \Pi_+ = \varkappa, \tag{2.2}$$
и пространства $\{\Pi_\pm, \pm[x,y]\}$ гильбертовы.

$\square$

Замечание 2.1. На практике используются пространства Понтрягина $\Pi_\varkappa$ как с $\varkappa$ положительными квадратами, так и с $\varkappa$ отрицательными квадратами, которые определяются естественным образом. Оба эти варианта равносильны, и далее для определенности, если не оговорено другое, будет использован первый из них, т.е. случай (2.2). $\square$

Замечание 2.2. В определении 2.3 пространства Понтрягина $\Pi_\varkappa$, существование разложения (2.1) со свойством (2.2) есть следствие предыдущих аксиом (i)–(iii). Поскольку положительные подпространства $\{\Pi_\pm, \pm[\cdot,\cdot]\}$ являются предгильбертовыми, а конечномерное Π_+ гильбертово, то аксиома (iv) является по существу предположением полноты Π_-.

Проверим существование разложения (2.1) со свойством (2.2).

Из аксиомы (ii) следует существование $\varkappa$-мерного положительного подпространства, которое обозначим через Π_+. Тогда $\forall x \in \mathcal{E}$:

$$x = x_+ + x_-, \quad x_+ \in \Pi_+, \quad [x_-, y_+] = 0, \quad \forall y_+ \in \Pi_+.$$

В самом деле, так как $\varkappa$-мерное положительное подпространство $\{\Pi_+, [\cdot,\cdot]\}$ гильбертово, то в нем существует ортонормированный базис $\{e_j^+\}_{j=1}^{\varkappa}$, т.е. $[e_j^+, e_k^+] = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера: $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kj} = 0$, $k \neq j$, $k, j = \overline{1,\varkappa}$. Поэтому любой элемент x_+ из Π_+ имеет вид

$$x_+ = \sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j e_j^+, \quad \alpha_j = [x_+, e_j^+], \quad j = \overline{1,\varkappa},$$

т.е.

$$x_+ = \sum_{j=1}^{\varkappa} [x_+, e_j^+] e_j^+.$$

Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathcal{E}$. Положим

$$x_+ := \sum_{j=1}^{\varkappa} [x, e_j^+] e_j^+, \quad x_- := x - x_+. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$\Pi_- = \{x_- \in \mathcal{E} \mid x_- = x - \sum_{j=1}^{\varkappa} [x, e_j^+] e_j^+, \ x \in \mathcal{E}\}.$$

Так определенное множество Π_- является линейным и линейная оболочка Π_+ и Π_- совпадает с $\mathcal{E}$.

Докажем, что если $x_- \neq 0$, то

$$[x_-, x_-] < 0, \quad [x_-, y_+] = 0, \quad \forall y_+ \in \Pi_+. \tag{2.4}$$

В самом деле, если $y_+ = \sum_{j=1}^{\varkappa} \beta_j e_j^+$, то

$$[x_-, y_+] = [x - x_+, y_+] = \sum_{j=1}^{\varkappa} \overline{\beta}_j [x - x_+, e_j^+].$$

Однако согласно (2.3) имеем

$$[x - x_+, e_j^+] = [x, e_j^+] - [x_+, e_j^+] = 0,$$

и потому второе свойство (2.4) выполнено.

Докажем теперь первое свойство (2.4). Предположим, что Π_- содержит неотрицательный вектор $e_{\varkappa+1}^+$. Тогда квадратичная форма

$$\sum_{k,j=1}^{\varkappa+1} [e_j^+, e_k^+]\xi_j\overline{\xi_k} = \sum_{k=1}^{\varkappa} |\xi_k|^2 + [e_{\varkappa+1}^+, e_{\varkappa+1}^+]|\xi_{\varkappa+1}|^2$$

содержит $\varkappa + 1$ неотрицательных квадратов, что противоречит аксиоме (iii). □

Рассмотрим следующий типичный пример пространства с индефинитной метрикой.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{E} = \mathbb{C}^2$,

$$x = \{\xi_1; \xi_2\}, \quad y = \{\eta_1; \eta_2\}, \quad \xi_j,\, \eta_j \in \mathbb{C},\ j = 1, 2.$$

Введем на этом множестве обычное скалярное произведение

$$(x, y) := \xi_1\overline{\eta}_1 + \xi_2\overline{\eta}_2,$$

а также индефинитное скалярное произведение

$$[x, y] := \xi_1\overline{\eta}_1 - \xi_2\overline{\eta}_2. \tag{2.5}$$

Непосредственно проверяется, что $[\cdot, \cdot]$ — полутора-линейная форма. Ее индефинитность следует из того, например, что $x_+ = \{1; 0\}$ — положительный вектор: $[x_+, x_+] = 1 > 0$, $x_- = \{0; 1\}$ — отрицательный: $[x_-, x_-] = -1 < 0$, а $x_0 = \{1; 1\}$ — нейтральный: $[x_0, x_0] = 0$.

Проверим, что для $\{\mathbb{C}^2, [\cdot, \cdot]\}$ выполнены аксиомы (i)–(iv) из определения 2.3 пространства Понтрягина с $\varkappa = 1$. Нетрудно видеть, что если $[x_0, x] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^2$, то $x_0 = 0$. В самом деле, если $x_0 = \{\xi_{1,0}; \xi_{2,0}\}$, $x = \{\xi_{1,0}; -\xi_{2,0}\}$, то

$$[x_0, x] = |\xi_{1,0}|^2 + |\xi_{2,0}|^2 = 0 \Longleftrightarrow \xi_{1,0} = 0, \quad \xi_{2,0} = 0, \ \text{т.е.}\ x_0 = 0.$$

Введем линеал

$$\mathcal{L}_+ := \text{л.о.}\{\{1; 0\}\}, \quad \dim \mathcal{L}_+ = 1.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\mathbb{C}^2 = \Pi_\varkappa = \text{л.о.}\{\{1;0\}\}[\dot{+}]\text{л.о.}\{\{0;1\}\},$$

причем $\mathcal{L}_+$ является одномерным положительным подпространством.

Остальные свойства (i) – (iv) из определения 2.3 для случая $\Pi_\varkappa = \mathbb{C}^2 = \Pi_1$ предоставляем проверить читателю.

Рассмотрим подробнее описание подпространств (линеалов) из определения 2.2 применительно к разбираемому примеру и индефинитному скалярному произведению (2.5). Имеем для $x = \{\xi_1, \xi_2\}$:

$$[x,x] = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 > 0 \Longleftrightarrow |\xi_1| > |\xi_2|;$$

$$[x,x] = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow |\xi_1| \geqslant |\xi_2|;$$

$$[x,x] = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 < 0 \Longleftrightarrow |\xi_1| < |\xi_2|;$$

$$[x,x] = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \leqslant 0 \Longleftrightarrow |\xi_1| \leqslant |\xi_2|.$$

Если вместо $\mathbb{C}^2$ взять вещественное пространство $\mathbb{R}^2$, то легко построить на плоскости $\{\xi_1;\xi_2\}$ области, соответствующие выписанным неравенствам, а также "крест"(биссектрисы всех четырех квадрантов), отвечающий нейтральным векторам, расположенным на плоскости и идущим из начала координат (постройте эту картинку). $\square$

Продолжим обсуждение геометрических свойств пространства $\Pi_\varkappa$.

Лемма 2.1. Любое неотрицательное подпространство $\mathcal{L} \subset \Pi_\varkappa$ имеет размерность, не превышающую $\varkappa$.

Доказательство. Пусть, напротив, существует неотрицательное подпространство $\mathcal{L} \subset \Pi_\varkappa$ с $\dim \mathcal{L} = \varkappa + 1$ и пусть $\{f_j\}_{j=1}^{\varkappa+1}$ — базис этого подпространства. Как и выше, через $\{e_k^+\}_{k=1}^{\varkappa}$ обозначим ортонормированный в $\{\Pi_+, [\cdot,\cdot]\}$ базис. Проверим, что в $\mathcal{L}$ существует вектор $y \neq 0$ такой, что $[y, e_k^+] = 0$, $k = \overline{1,\varkappa}$. Каждый вектор из $\mathcal{L}$ представляется в виде: $y = \sum\limits_{j=1}^{\varkappa+1} \alpha_j f_j$. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{\varkappa+1} \alpha_j [f_j, e_k^+] = 0, \qquad k = \overline{1,\varkappa}.$$

Воспользуемся хорошо известным из линейной алгебры результатом: если в системе линейных однородных уравнений неизвестных больше, чем уравнений, то такая система имеет нетривиальное решение. Следовательно, существует искомый ненулевой вектор $y \in \mathcal{L}$. Далее, проводя рассуждения, аналогичные использованным в конце замечания 2.2, получим как и там противоречие с аксиомой (iii) определения 2.3. $\square$

Заметим, что до сих пор на линеале $\mathcal{E}$ никакой топологии (скалярного произведения, нормы) не вводилось. Введем определения слабой сходимости, слабой фундаментальности последовательности и приведем эквивалентную формулировку аксиомы (iv) определения 2.3 пространства $\Pi_\varkappa$.

Пусть $\{\mathcal{E}, [\cdot,\cdot]\}$ — пространство с индефинитной метрикой, для которого имеют место аксиомы (i)–(iii) определения 2.3.

Определение 2.4. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{E}$ слабо сходится в $\{\mathcal{E}, [\cdot,\cdot]\}$, если существует элемент $x_0 \in \mathcal{E}$ такой, что

$$[x_n - x_0, y] \longrightarrow 0, \quad \forall y \in \mathcal{E}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется слабо фундаментальной в $\{\mathcal{E}, [\cdot,\cdot]\}$, если

$$[x_n - x_m, y] \longrightarrow 0, \quad \forall y \in \mathcal{E}, \quad n, m \longrightarrow \infty. \quad \square$$

Вместо аксиомы (iv) в определении 2.3 пространства $\Pi_\varkappa$ введем следующую аксиому:

(iv'). Каждая слабо фундаментальная последовательность имеет слабый предел в $\Pi_\varkappa$.

Напомним еще раз, что линейное пространство $\mathcal{E}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ называется предгильбертовым. Если $\mathcal{E}$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением, то $\{\mathcal{E}, (\cdot,\cdot)\}$ — гильбертово пространство. Известно, что предгильбертово пространство $\mathcal{E}$ является гильбертовым, т.е. полным, тогда и только тогда, когда любая слабо фундаментальная последовательность имеет слабый предел: из условия $(x_n - x_m, y) \longrightarrow 0$, $\forall y \in \mathcal{E}$, $n, m \longrightarrow \infty$, следует существование такого вектора $x_0 \in \mathcal{E}$, что $(x_0 - x_n, y) \longrightarrow 0$, $\forall y \in \mathcal{E}$, $n \longrightarrow \infty$. Это утверждение является ключевым при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.1. При выполнении аксиом (i) – (iii), аксиомы (iv) и (iv′) эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнены аксиомы (i) – (iv). Докажем, что тогда справедливо утверждение аксиомы (iv′). Согласно предположению, $\mathcal{E}$ — пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$ и

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\dot{+}]\Pi_-,$$

где $\{\Pi_\pm, \pm[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертовы пространства. Пусть $\{x_n = x_n^+ + x_n^-\}$, $x_n^\pm \in \Pi_\pm$, — произвольная слабо фундаментальная последовательность в $\Pi_\varkappa$:

$$[x_n - x_m, y] \longrightarrow 0, \quad \forall y \in \Pi_\varkappa, \quad n, m \longrightarrow \infty. \tag{2.6}$$

Положим $y = y_\pm \in \Pi_\pm$. Тогда из (2.6) имеем

$$[x_n^+ - x_m^+, y_+] \longrightarrow 0, \quad \forall y_+ \in \Pi_+, \quad n, m \longrightarrow \infty,$$

$$-[x_n^- - x_m^-, y_-] \longrightarrow 0, \quad \forall y_- \in \Pi_-, \quad n, m \longrightarrow \infty,$$

а потому последовательности $\{x_n^\pm\}$ являются слабо фундаментальными в гильбертовых (согласно аксиоме (iv)) пространствах $\{\Pi_\pm, \pm[\cdot,\cdot]\}$. Следовательно, как отмечалось в начале доказательства, эти пространства слабо полны, т.е. существуют такие векторы $x_0^\pm \in \Pi_\pm$, что

$$\begin{aligned} [x_n^+ - x_0^+, y_+] &\longrightarrow 0, \quad \forall y_+ \in \Pi_+, \quad n \longrightarrow \infty, \\ -[x_n^- - x_0^-, y_-] &\longrightarrow 0, \quad \forall y_- \in \Pi_-, \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Положим $x_0 = x_0^+ + x_0^-$. Тогда

$$[x_n - x_0, y] \longrightarrow 0, \quad \forall y \in \Pi_\varkappa, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, x_0 — слабый предел $\{x_n\}$ в $\Pi_\varkappa$, а потому имеет место утверждение аксиомы (iv′).

Докажем теперь, что из $(i) - -(iii)$ и (iv') следует утверждение (iv). Согласно замечанию 2.2 имеет место разложение (2.1) и надо лишь доказать, что $\{\Pi_-, -[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертово пространство. Так как $\{\Pi_-, -[\cdot,\cdot]\}$ — предгильбертово, а согласно предположению (iv') всякая слабо фундаментальная последовательность в $\Pi_\varkappa$, в частности, в Π_-, сходится, то опять-таки согласно рассуждениям из начала доказательства данной теоремы, получаем, что Π_- — гильбертово пространство. □

Следующий шаг в исследовании геометрических свойств пространства $\Pi_\varkappa$ — это введение оператора канонической симметрии и с его помощью упрощение взаимосвязей между геометрическими объектами.

Опираясь на тот факт, что $\Pi_\kappa = \Pi_+[\dot{+}]\Pi_-$, а $\{\Pi_\pm, \pm[x,y]\}$ — гильбертовы пространства, введем в $\Pi_\varkappa$ гильбертову структуру, задав скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}(x,y) := [x_+,y_+] - [x_-,y_-], \quad \forall x = x_+ + x_-,\\ \forall y = y_+ + y_-, \quad x_\pm,\, y_\pm \in \Pi_\pm.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Предоставляем читателю проверить, что $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, а $\{\Pi_\varkappa, (\cdot,\cdot)\}$ — гильбертово пространство.
Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и порожденная им норма $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ называются каноническими (фундаментальными).

Пусть $P_\pm$ — взаимно-дополнительные проекторы на подпространства $\Pi_\pm$, соответственно, и $J := P_+ - P_-$. Проекторы $P_\pm$ называют *каноническими* (*фундаментальными*), а оператор J — *канонической* (*фундаментальной*) *симметрией.* По определению, для любого элемента $x = x_+ + x_- \in \Pi_\varkappa$ имеем:

$$Jx = x_+ - x_-. \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что справедливы формулы

$$(x,y) = [Jx,y], \quad [x,y] = (Jx,y), \quad \forall x,y \in \Pi_\varkappa. \tag{2.9}$$

В самом деле,

$$[Jx,y] = [x_+ - x_-, y_+ + y_-] = [x_+,y_+] - [x_-,y_-] = (x,y),$$

откуда следует первое свойство (2.9). Аналогично проверяется и второе равенство в (2.9).

Из определения (2.8) оператора J следует также, что

$$J^2 = I, \tag{2.10}$$

где I — единичный оператор, действующий в $\Pi_\varkappa$.

Упражнение 2.1. Докажите, что имеет место равенство

$$(Jx,y) = (x,Jy), \quad \forall x,y \in \Pi_\varkappa. \quad \square \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что $J = J^*$, т.е. J является самосопряженным оператором, действующим в пространстве $\{\Pi_\varkappa, (\cdot,\cdot)\}$. Более того, из (2.10) и (2.11) следует, что

$$J = J^{-1} = J^*. \tag{2.12}$$

Отметим еще, что *каноническая норма* в $\Pi_\varkappa$ определена теперь формулой: $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{[Jx,x]}$.

Упражнение 2.2. Доказать, что для скалярного произведения (2.7) справедливо следующее неравенство:

$$|[x,y]|^2 \leqslant (x,x)(y,y), \quad \forall x,y \in \Pi_\varkappa, \tag{2.13}$$

и для фиксированных элементов $x, y \in \Pi_\varkappa$ имеет аналог место неравенства Коши–Буняковского–Шварца:

$$|[x,y]|^2 \leqslant [x,x][y,y]$$

тогда и только тогда, когда линейная оболочка этих элементов — семидефинитное подпространство.

Указание. Воспользоваться второй формулой (2.9) и свойствами (2.10) и (2.11). □

В качестве замечания к проведенному ходу рассуждений, связанному с введением скалярного произведения (2.7) и оператора канонической симметрии J, отметим следующее обстоятельство. Часто в прикладных задачах скалярное произведение (x,y) в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определяется естественными физическими обстоятельствами, причем возникает также полуторалинейная форма, которая иногда имеет вид $[x,y] = (Jx,y)$, где J обладает свойствами (2.12), и даже более общий вид:

$$[x,y] = (Ax,y), \tag{2.14}$$

где A — ограниченный самосопряженный оператор. При условии, что спектр $\sigma(A)$ оператора A сосредоточен на положительной полуоси, за исключением, быть может, конечного числа (с учетом алгебраической кратности) $\varkappa \geq 0$ отрицательных собственных значений, и $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора $A : \lambda \in \rho(A)$, полутора-линейная форма (2.14) задает на $\mathcal{H}$ индефинитную метрику такую, что $\{\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]\}$ — пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$. Так будет, например, если $A = I + B$, где $B = B^*$ — компактный оператор,

$0 \in \rho(A)$. При этом $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{\min}(B) < -1$, где $\lambda_{\min}(B)$ — наименьшее собственное значение оператора B.

Рассмотрим теперь некоторые дополнительные факты из функционального анализа, которые ниже будут использованы при исследовании свойств пространства $\Pi_\varkappa$.

Пусть $\{\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\}$ — гильбертово пространство, а $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ — подпространство, т.е. замкнутый линеал в $\mathcal{H}$. Тогда, как известно, имеет место ортогональное разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp,$$

где $\mathcal{L}^\perp := \{y \in \mathcal{H} :\ (x,y) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}\}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathcal{L}$.

Коразмерностью подпространства $\mathcal{L}$ называется величина

$$\operatorname{codim} \mathcal{L} := \dim \mathcal{L}^\perp.$$

Для этой величины справедливы следующие утверждения:

а) если $\operatorname{codim} \mathcal{L} = m < \infty$ и $\mathcal{M} \cap \mathcal{L} = \{0\}$, $\dim \mathcal{M} = m$, то

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \dotplus \mathcal{M};$$

б) если $\operatorname{codim} \mathcal{L}_1 = m_1 < \infty$, $\operatorname{codim} \mathcal{L}_2 = m_2 < \infty$, то

$$\operatorname{codim}(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) \leqslant m_1 + m_2. \tag{2.15}$$

Пусть теперь $\mathcal{E}$ — банахово пространство и в нем заданы две нормы: $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Эти нормы называются *эквивалентными*, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

Ниже сформулируем и докажем известную теорему 2.3. При этом нам будет нужен следующий результат, который приведем без доказательства.

Теорема 2.2 (С. Банаха об эквивалентных нормах). Если $\mathcal{E}$ — банахово пространство по одной из норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и существует константа $c > 0$ такая, что

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

то нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ банахово по обеим нормам. $\square$

Теорема 2.3. Пусть банахово пространство $\{\mathcal{E}, \|\cdot\|\}$ допускает разложение в прямую сумму:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \dotplus \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{0\},$$

где $\mathcal{E}_i$ — подпространства, $i = 1, 2$. Рассмотрим в $\mathcal{E}$ наряду с нормой $\|\cdot\|$ нормы

$$\|x\|_p := (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{1/p}, \; p \geq 1, \quad x = x_1 + x_2, \quad x_i \in \mathcal{E}_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_p$ эквивалентны при каждом $p \geq 1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что по каждой из норм $\|\cdot\|_p, \; p \geq 1$, пространство $\mathcal{E}$ банахово. В самом деле, пусть $\{x_n = x_{n1} + x_{n2}, \; x_{nk} \in \mathcal{E}_k, k = 1, 2\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фундаментальная в норме $\|\cdot\|_p$ последовательность, т.е.

$$\|x_n - x_m\|_p = (\|x_{n1} - x_{m1}\|^p + \|x_{n2} - x_{m2}\|^p)^{1/p} \to 0, \text{ при } n, m \to \infty.$$

Отсюда следует, что последовательности $\{x_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_{n2}\}_{n=1}^{\infty}$ также фундаментальны в подпространствах $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, соответственно. Следовательно, они сходятся к некоторым векторам $x_{0k} \in \mathcal{E}_k, \; k = 1, 2$, что влечет сходимость исходной последовательности в норме $\|\cdot\|_p$ к вектору $x_0 = x_{01} + x_{02}$.

Так как $\|x\|_p \leq \|x\|_1, \; p \geq 1$, то по теореме 2.2 (Банаха) все эти нормы эквивалентны $\|\cdot\|_1$, а потому они эквивалентны и попарно. Для завершения доказательства достаточно отметить, что $\|x\| \leq \|x\|_1$ и опять воспользоваться теоремой Банаха. $\square$

На основе приведенных выше утверждений установим следующий важный топологический факт для пространства $\Pi_\varkappa$.

Теорема 2.4. Пусть

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\dotplus]\Pi_-, \quad \Pi_\varkappa = P[\dotplus]N \tag{2.16}$$

— два канонических разложения пространства $\Pi_\varkappa$,

$$(x, y) := [Jx, y], \quad (x, y)_1 := [J_1 x, y] \tag{2.17}$$

— соответствующие им скалярные произведения с каноническими симметриями J и J_1. Тогда нормы

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} \quad \text{и} \quad \|x\|_1 := \sqrt{(x, x)_1} \tag{2.18}$$

эквиваленты.

Доказательство. По условиям теоремы пространства

$$\{\Pi_\pm, \pm[x,y]\}, \quad \{P, [x,y]\}, \quad \{N, -[x,y]\}$$

— гильбертовы. В силу первого разложения (2.16) имеем $\mathrm{codim}\ \Pi_- = \dim \Pi_+ = \varkappa < \infty$. Аналогично в силу второго разложения (2.16) $\mathrm{codim}\ N = \dim\ P = \varkappa < \infty$. Отсюда по свойству (2.15) получаем, что

$$\mathrm{codim}\,(N \cap \Pi_-) \leqslant 2\varkappa < \infty.$$

Поэтому имеет место разложение

$$\Pi_\varkappa = (N \cap \Pi_-) \dotplus \mathcal{L}, \tag{2.19}$$

где $\mathcal{L}$ — некоторое подпространство с $\dim\ \mathcal{L} \leqslant 2\varkappa < \infty$.

Заметим теперь, что на подпространстве $N \cap \Pi_-$ канонические нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ совпадают, так как здесь совпадают скалярные произведения, поскольку

$$(x,y) = -[x,y], \quad \forall x,y \in \Pi_-, \quad (x,y)_1 = -[x,y], \quad \forall x,y \in N. \tag{2.20}$$

(В самом деле, (x,y) и $(x,y)_1$ задаются по одному и тому же закону

$$[x_+, y_+] - [x_-, y_-], \tag{2.21}$$

однако в первом случае $x_\pm \in \Pi_\pm$, а во втором $x_+ \in P$, $x_- \in N$. Если $x,y \in \Pi_-$ или $x,y \in N$, то из (2.21) следуют формулы (2.20).)

Значит,

$$(x,y) = (x,y)_1 = -[x,y], \quad x,y \in \Pi_- \cap N, \tag{2.22}$$

и потому $\|x\| = \|x\|_1$, $x \in \Pi_- \cap N$. Далее, на подпространстве $\mathcal{L}$ из (2.19) все нормы эквивалентны, так как $\dim \mathcal{L} \leqslant 2\varkappa < \infty$.

Учитывая эти факты, докажем, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ (см. (2.18)) эквивалентны.

В самом деле, для любого $x \in \Pi_\varkappa$ имеем в силу (2.19)

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in N \cap \Pi_-, \quad x_2 \in \mathcal{L}. \tag{2.23}$$

Если ввести норму

$$\|x\|_{\mathrm{I}} := \|x_1\| + \|x_2\|, \tag{2.24}$$

то по теореме 2.3 исходная норма $\|x\|$, порожденная скалярным произведением (x,y) (см. (2.17)), и норма (2.24) будут эквивалентны, т.е. найдутся такие положительные константы c_1 и c_2, что

$$c_1\|x\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \leqslant c_2\|x\|.$$

Аналогично рассуждая по отношению к норме, порожденной скалярным произведением $(x,y)_1$ (см. (2.17)), будем иметь (2.23) и норму

$$\|x\|_2 := \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1,$$

причем в силу (2.22), как уже упоминалось выше,

$$\|x_1\|_1 = \|x_1\|, \quad x_1 \in \Pi_- \cap N. \tag{2.25}$$

Здесь снова в силу теоремы 2.3 имеем

$$d_1\|x\|_1 \leqslant \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 \leqslant d_2\|x\|_1. \tag{2.26}$$

Поскольку нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ в (конечномерном) подпространстве $\mathcal{L}$ эквивалентны, то также получаем

$$a_1\|x_2\| \leqslant \|x_2\|_1 \leqslant a_2\|x_2\|, \quad x_2 \in \mathcal{L}. \tag{2.27}$$

Опираясь на соотношения (2.23)–(2.27), оценим норму $\|x\|_1$ через $\|x\|$. Имеем для любого $x \in \Pi_\varkappa$:

$$d_1\|x\|_1 \leqslant \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 \leqslant \|x_1\| + a_2\|x_2\| \leqslant b_1(\|x_1\| + \|x_2\|) \leqslant$$

$$\leqslant b_1c_2\|x\|, \quad b_1 := \max(1; a_2).$$

Отсюда по теореме Банаха получаем, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны. $\square$

Доказанная теорема позволяет нам в каждом конкретном случае использовать то каноническое разложение, которое является наиболее естественным для исследуемой проблемы.

Переходя к дальнейшему изучению геометрических свойств пространства $\Pi_\varkappa$, докажем следующий вспомогательный факт.

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{D}$ — плотный линеал в $\Pi_\varkappa$, т.е. замыкание $\mathcal{D}$ в любой канонической норме совпадает с $\Pi_\varkappa$. Тогда в $\mathcal{D}$ содержится хотя бы одно $\varkappa$-мерное положительное подпространство.

Доказательство. Опишем лишь идею доказательства сформулированного утверждения. Выберем в подпространстве Π_+, отвечающем каноническому разложению $\Pi_\varkappa = \Pi_+[\dotplus]\Pi_-$, ортонормированный базис $\{e_j^+\}_{j=1}^{\varkappa}$, т.е. $[e_j^+, e_k^+] = \delta_{jk}$, $j,k = \overline{1,\varkappa}$. Так как $\mathcal{D}$ плотно в $\Pi_\varkappa$, то для любого $\varepsilon > 0$ и элемента e_j^+ найдется элемент $f_j \in \mathcal{D}$ такой, что $\|e_j^+ - f_j\| < \varepsilon$, $j = \overline{1,\varkappa}$.

Можно установить, что если ε достаточно мало ($\varepsilon < 1/\varkappa$), то все элементы $\{f_j\}_{j=1}^{\varkappa}$, как и элементы $\{e_j^+\}_{j=1}^{\varkappa}$, линейно независимы, и тогда линейная оболочка

$$\text{л.о.}\{f_j\}_{j=1}^{\varkappa} \subset \mathcal{D}, \quad \dim\ \text{л.о.}\{f_j\}_{j=1}^{\varkappa} = \varkappa.$$

Если ε настолько мало, что $1 - 2\varepsilon\varkappa - 2\varepsilon^2\varkappa^2 > 0$, то л.о.$\{f_j\}_{j=1}^{\varkappa}$ является, как и л.о.$\{e_j^+\}_{j=1}^{\varkappa}$, положительным подпространством. $\square$

Замечание к лемме 2.2. Доказательство свойства линейной независимости элементов $\{f_j\}_{j=1}^{\varkappa}$ основано на соотношении

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j f_j = \sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j (f_j - e_j^+) + \sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j e_j^+,$$

в котором при любых фиксированных α_j первое слагаемое справа достаточно мало по норме, а потому равенство нулю левой части приводит к тому, что все $\alpha_j = 0$ ($j = \overline{1,\varkappa}$). В самом деле, пусть ε достаточно мало, $\|f_j - e_j^+\| < \varepsilon$ и $\sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j| \neq 0$. Так как $\| \sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j e_j^+ \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j|^2}$, то получим противоречие:

$$0 \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j|^2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j| > 0 \text{ при } \varepsilon < \inf \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j|^2}}{\sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j|} \leq 1.$$

Аналогичное рассуждения используются для того, чтобы показать положительность формы $[\sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j f_j, \sum_{k=1}^{\varkappa} \alpha_k f_k]$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, поскольку

$$\left[\sum_{j=1}^{\varkappa} \alpha_j e_j^+, \sum_{k=1}^{\varkappa} \alpha_k e_k^+ \right] = \sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j|^2 > 0$$

с произвольными α_j, $j = \overline{1,\varkappa}$, и $\sum_{j=1}^{\varkappa} |\alpha_j| \neq 0$. $\square$

Перед доказательством следующего результата напомним некоторые факты из геометрии гильбертовых пространств.

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство. Напомним еще раз (см. доказательство теоремы 2.1), что последовательность $\{x_n\}$ элементов из $\mathcal{H}$ *слабо сходится* к элементу $x_0 \in \mathcal{H}$, если

$$(x_n, y) \longrightarrow (x_0, y), \quad \forall y \in \mathcal{H}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ *сходится сильно* к элементу $x_0 \in \mathcal{H}$, если $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$. Как следует из неравенства Коши–Буняковского–Шварца, сильно сходящаяся последовательность является и слабо сходящейся. В бесконечномерном пространстве $\mathcal{H}$ обратное неверно (контрпример — произвольный ортонормированный базис, который слабо сходится к нулевому вектору, но сильно не сходится).

Известно, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ сильно сходится к $x_0 \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ сходится к x_0 слабо и $\|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$ $(n \longrightarrow \infty)$.

Другой критерий имеет следующую формулировку: $\{x_n\}$ сильно сходится к x_0 тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|, \quad (x_n, y) \longrightarrow (x_0, y), \quad \forall y \in Y \subset \mathcal{H}, \tag{2.28}$$

где Y — так называемое *тотальное множество*, т.е. такое, что замыкание его линейной оболочки совпадает с $\mathcal{H}$. В качестве Y можно взять, например, базис пространства $\mathcal{H}$.
Ниже мы приведем критерий сильной сходимости в $\Pi_\varkappa$ относительно любой из эквивалентных канонических норм в терминах индефинитной метрики.

Теорема 2.5. Последовательность $\{x_n\} \subset \Pi_\varkappa$ сходится к элементу $x_0 \in \Pi_\varkappa$ сильно относительно некоторой канонической нормы (а потому относительно любой) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$[x_n, y] \longrightarrow [x_0, y], \quad \forall y \in Y, \quad [x_n, x_n] \longrightarrow [x_0, x_0] \quad (n \longrightarrow \infty), \tag{2.29}$$

где Y — тотальное множество в $\Pi_\varkappa$.

Последовательность $\{x_n\} \subset \Pi_\varkappa$ фундаментальна в $\Pi_\varkappa$ относительно некоторой канонической нормы (а потому относительно любой) тогда и только тогда, когда

$$[x_n - x_m, y] \longrightarrow 0, \quad \forall y \in Y, \quad [x_n - x_m, x_n - x_m] \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty).$$

Доказательство. Убедимся в справедливости лишь первого утверждения, так как доказательство второго проводится по той же схеме.

Пусть $\mathcal{D}$ — линейная оболочка тотального множества Y. Тогда $\overline{\mathcal{D}} = \Pi_\varkappa$. Через Π_+ обозначим $\varkappa$-мерное положительное подпространство, расположенное в $\mathcal{D}$: существование такого подпространства гарантируется леммой 2.2. Тогда $\Pi_\varkappa$ допускает каноническое разложение

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+ [\dot{+}] \Pi_-. \tag{2.30}$$

Поскольку $\Pi_+ \subset \mathcal{D}$, то линеал $\mathcal{D}$ представим в виде

$$\mathcal{D} = \Pi_+[\dot{+}](\mathcal{D} \cap \Pi_-).$$

Отметим, что линеал $\mathcal{D} \cap \Pi_-$ плотен в Π_- и потому, в частности, является тотальным множеством в Π_-. Зафиксируем в $\Pi_\varkappa$ каноническую норму, отвечающую разложению (2.30).

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сильно сходится к x_0. Докажем, что тогда выполнены условия (2.29). В самом деле, из неравенства, упомянутого в упражнении 2.2:

$$|[x_n - x_0, y]|^2 \leqslant \|x_n - x_0\|^2 \cdot \|y\|^2, \quad \forall y \in Y,$$

следует, что выполнено первое свойство (2.29). Докажем теперь второе свойство. Имеем

$$\begin{aligned} |[x_n, x_n] - [x_0, x_0]| &= |[x_n - x_0, x_n] + [x_0, x_n - x_0]| \\ &\leqslant |[x_n - x_0, x_n]| + |[x_0, x_n - x_0]| \qquad (2.31) \\ &\leqslant \|x_n - x_0\| \cdot \|x_n\| + \|x_n - x_0\| \cdot \|x_0\|. \end{aligned}$$

Так как $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$, то $\|x_n\| \leqslant M$ для некоторого $M > 0$, а потому правая часть (2.31) стремится к нулю при $n \longrightarrow \infty$. Отсюда следует $[x_n, x_n] \to [x_0, x_0]$ при $n \to \infty$.

Проверим теперь обратное утверждение: если выполнены условия (2.29), то x_n сильно сходится к x_0.

Так как первое условие (2.29) выполнено для всех элементов y из тотального множества Y, то это же условие выполнено для элементов y из линейной оболочки множества Y, т.е. для y из $\mathcal{D}$: при любых $\alpha_j \in \mathbb{C}$

$$[x_n - x_0, \sum_j \alpha_j y_j] = \sum_j \overline{\alpha_j}\, [x_n - x_0, y_j] \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

поскольку $[x_n - x_0, y_j] \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ для каждого j.

Пусть

$$x_n = x_{n,+} + x_{n,-}, \quad x_0 = x_{0,+} + x_{0,-}, \quad x_{n,\pm}, x_{0,\pm} \in \Pi_\pm,$$

— разложение векторов x_n, x_0 относительно (2.30).

Так как $\Pi_+ \subset \mathcal{D}$, то, в частности, для элементов $y_+ \in \Pi_+$ и $y_- \in \mathcal{D} \cap \Pi_-$ имеем при $n \to \infty$:

$$[x_n - x_0, y_+] = [x_{n,+} - x_{0,+}, y_+] \longrightarrow 0, \tag{2.32}$$

$$[x_n - x_0, y_-] = [x_{n,-} - x_{0,-}, y_-] \longrightarrow 0, \tag{2.33}$$

Из (2.32) следует слабая сходимость в Π_+ векторов $x_{n,+}$ к вектору $x_{0,+}$. Так как по условию Π_+ — конечномерное подпространство, то $x_{n,+}$ сходятся к $x_{0,+}$ сильно. Поэтому в силу (2.28)

$$[x_{n,+}, x_{n,+}] \to [x_{0,+}, x_{0,+}], \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из второго условия в (2.29) имеем

$$[x_{n,-}, x_{n,-}] \to [x_{0,-}, x_{0,-}], \quad n \to \infty,$$

что в сочетании с (2.33) приводит к сильной сходимости (см. (2.28)) векторов $x_{n,-}$ к $x_{0,-}$ при $n \to \infty$.

Следовательно, векторы $x_n = x_{n,+} + x_{n,-}$ сходятся сильно к вектору $x_0 = x_{0,+} + x_{0,-}$. □

Рассмотрим снова пространство Понтрягина $\{\Pi_\varkappa, [\cdot,\cdot]\}$ с канонической нормой, определенной по скалярному произведению $(x, y) = [Jx, y]$, где J — оператор канонической симметрии. Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный линеал из $\Pi_\varkappa$, а $\mathcal{L}^{[\perp]}$ — J-ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$, т.е. ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ в смысле формы $[\cdot,\cdot]$:

$$\mathcal{L}^{[\perp]} := \{x \in \Pi_\varkappa : \ [x, y] = 0, \quad \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

Через $\mathcal{L}^\perp$ будем обозначать ортогональное дополнение в смысле гильбертова (в данном случае канонического) скалярного произведения:

$$\mathcal{L}^\perp := \{z \in \Pi_\varkappa : \ (z, y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

Наша ближайшая задача — выяснение взаимосвязи между ортогональными дополнениями $\mathcal{L}^{[\perp]}$ и $\mathcal{L}^\perp$, в частности, мы проверим следующие формулы:

$$\mathcal{L}^{[\perp]} = J\mathcal{L}^\perp, \quad \mathcal{L}^\perp = J\mathcal{L}^{[\perp]}. \tag{2.34}$$

Докажем эти соотношения. Пусть $x \in \mathcal{L}^{[\perp]}$, $y \in \mathcal{L}$. Тогда

$$[x, y] = (Jx, y) = 0.$$

Это означает, что $Jx \in \mathcal{L}^{\perp}$, т.е.

$$J\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{\perp}.$$

Обратно, при $y \in \mathcal{L}$, $z \in \mathcal{L}^{\perp}$, имеем

$$[Jz, y] = (z, y) = 0,$$

т.е. $Jz \in \mathcal{L}^{[\perp]}$:

$$J\mathcal{L}^{\perp} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}.$$

Так как $J^2 = I$, то отсюда следует, что

$$J^2\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} \subset J\mathcal{L}^{[\perp]},$$

и второе соотношение (2.34) установлено. Первая формула (2.34) доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь и другие свойства множеств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{[\perp]}$.

Лемма 2.3. Для любого линеала $\mathcal{L} \subset \Pi_{\varkappa}$ множество $\mathcal{L}^{[\perp]}$ замкнуто, т.е. является подпространством.

Доказательство. Пусть $x_n \in \mathcal{L}^{[\perp]}$ и $x_n \longrightarrow x_0 \in \Pi_{\varkappa} \quad (n \longrightarrow \infty)$. Тогда из неравенства (2.13) следует, что

$$[x_n - x_0, y] \longrightarrow 0, \quad \forall y \in \Pi_{\varkappa}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Если здесь положить $y \in \mathcal{L}$, то $[x_n, y] = 0$, и в пределе получаем, что $[x_0, y] = 0$, т.е. $x_0 \in \mathcal{L}^{[\perp]}$. $\square$

Лемма 2.4. Имеет место формула

$$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}^{[\perp]})^{[\perp]} =: \mathcal{L}^{[\perp][\perp]}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что формула

$$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}^{\perp})^{\perp}$$

хорошо известна для гильбертова пространства. Отсюда и из (2.34) тогда имеем

$$\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}^{\perp})^{\perp} = (J\mathcal{L}^{\perp})^{[\perp]} = J(J\mathcal{L}^{[\perp]})^{[\perp]} = J^2(\mathcal{L}^{[\perp]})^{[\perp]} = \mathcal{L}^{[\perp][\perp]}.$$

Здесь в предпоследнем переходе использовано соотношение

$$(J\mathcal{M})^{[\perp]} = J\mathcal{M}^{[\perp]}, \tag{2.35}$$

справедливое для произвольного линеала $\mathcal{M} \subset \Pi_{\varkappa}$. $\square$

Замечание к лемме 2.4. Для доказательства свойства (2.35) допустим, что $x \in (J\mathcal{M})^{[\perp]}$. Тогда для любого $y = Jz$, $z \in \mathcal{M}$, имеем

$$[x, y] = [x, Jz] = (x, z) = 0,$$

т.е. $x \in \mathcal{M}^{\perp} = J\mathcal{M}^{[\perp]}$. Обратное рассуждение также очевидно. $\square$

Опираясь на доказанные факты, приведем упражнения для самостоятельного решения.

Упражнение 2.3. Доказать, что для любого линеала $\mathcal{L} \in \Pi_{\varkappa}$

$$\mathcal{L}^{[\perp]} = \overline{\mathcal{L}}^{[\perp]}.$$

Упражнение 2.4. Доказать соотношение

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)^{[\perp]} = \mathcal{L}_1^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_2^{[\perp]}. \tag{2.36}$$

Упражнение 2.5. Доказать, что

$$(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^{[\perp]} = \overline{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}.$$

Если $\mathcal{L}$ — произвольный замкнутый линеал в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то, как известно, имеет место ортогональное разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\perp}, \quad \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\perp} = \{0\}.$$

Однако в пространстве $\Pi_{\varkappa}$ ситуация сложнее, так как может оказаться, что $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} \neq \{0\}$.

Введем обозначение

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} \tag{2.37}$$

и назовем $\mathcal{L}^0$ *изотропной частью* линеала $\mathcal{L}$, а векторы этого множества — изотропными векторами линеала $\mathcal{L}$. По определению, $\mathcal{L}^0$ — линеал, поскольку является пересечением линеалов. Более того, если $x \in \mathcal{L}^0$, то одновременно $x \in \mathcal{L}$ и $x \in \mathcal{L}^{[\perp]}$, а потому $[x, x] = 0$, т.е., $\mathcal{L}^0$ — нейтральный линеал. Определение (2.37) может быть переписано в эквивалентном виде:

$$\mathcal{L}^0 = \{x \in \mathcal{L} : \ [x, y] = 0, \quad \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

Упражнение 2.6. Пусть $\mathcal{L}$ — линеал в $\Pi_{\varkappa}$, $\mathcal{L}^0$ — его изотропная часть, а $\mathcal{M}$ — совокупность всех нейтральных элементов из $\mathcal{L}$, т.е.

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{L} : \ [x, x] = 0\}.$$

Доказать, что $\mathcal{L}^0 = \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ семидефинитно, т.е. либо $\mathcal{L} \geqslant 0$, либо $\mathcal{L} \leqslant 0$. $\square$

Определение 2.5. Если изотропная часть $\mathcal{L}^0$ линеала $\mathcal{L} \subset \Pi_\varkappa$ тривиальна, т.е. $\mathcal{L}^0 = \{0\}$, то говорят, что $\mathcal{L}$ — невырожденный линеал, в противном случае — вырожденный. □

В любом пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с $\varkappa > 0$ всегда существуют вырожденные линеалы, например, нейтральные линеалы. В качестве подтверждения этого факта рассмотрим следующий простой пример. Пусть $\Pi_\varkappa = \mathbb{C}^2$, $[x, y] := \xi_1\overline{\eta}_1 - \xi_2\overline{\eta}_2$ для $x = (\xi_1, \xi_2)^t$, $y = (\eta_1, \eta_2)^t$, $\mathcal{L} :=$ л.о.$\{(1,1)^t\}$, $e := (1,1)^t$ — нейтральный элемент. Очевидно, что $e[\perp]\mathcal{L}$, причем $\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{L} \neq \{0\}$.

Теорема 2.6. Если $\mathcal{L}$ — подпространство, т.е замкнутый линеал ($\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$) и $\mathcal{M}$ — его J-ортогональное дополнение ($\mathcal{M} = \mathcal{L}^{[\perp]}$), то равенство

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M}, \tag{2.38}$$

эквивалентно невырожденности $\mathcal{L}$.

Доказательство. Сперва отметим, что равенство (2.38) влечет невырожденность $\mathcal{L}$. В самом деле, если бы это подпространство было вырожденным, то так как векторы из $\mathcal{L}^0$ ортогональны как $\mathcal{L}$, так и $\mathcal{M}$, а потому — $\Pi_\varkappa$, то все пространство было бы вырожденным. Последнее противоречит аксиоме (i) определения 2.3 пространства Понтрягина.

Пусть теперь $\mathcal{L}$ невырождено. Тогда

$$\overline{\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M}} = \Pi_\varkappa. \tag{2.39}$$

В самом деле, согласно (2.34) и (2.36)

$$(\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M})^\perp = J(\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M})^{[\perp]} = J(\mathcal{L}^{[\perp]} \cap \mathcal{M}^{[\perp]}) = J(\mathcal{L}^{[\perp]} \cap \mathcal{L}) =$$

$$= J\mathcal{L}^0 = \{0\} \qquad (\mathcal{M} = \mathcal{L}^{[\perp]} \Longleftrightarrow \mathcal{L} = \mathcal{M}^{[\perp]}),$$

так как $\mathcal{L}$ — невырожденный линеал. Отсюда и следует (2.39).

Докажем теперь, что

$$\overline{\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M}} = \mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M}.$$

Пусть $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}$ — положительное подпространство максимальной в $\mathcal{L}$ размерности, а $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M}$ — положительное подпространство максимальной в $\mathcal{M}$ размерности. Согласно аксиоме (iii) определения 2.3 пространства Понтрягина $\Pi_\varkappa$ имеем $\dim \mathcal{L}_+ =: \varkappa_1 \leqslant \varkappa$,

$\dim \mathcal{M}_+ =: \varkappa_2 \leqslant \varkappa$. Тогда $\mathcal{L}$ (как и само $\Pi_\varkappa$) допускает разложение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \{0\}, \quad \mathcal{L}_+ > 0, \quad \mathcal{L}_- < 0,$$

и аналогично

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_-, \quad \mathcal{M}_+ > 0, \quad \mathcal{M}_- < 0, \quad \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}_- = \{0\}.$$

Отсюда имеем

$$\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M} = (\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+)[\dot{+}](\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-).$$

Так как размерность $\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+$ может быть не более $\varkappa$, то $\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+$ — конечномерное подпространство и потому

$$\overline{\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M}} = (\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+)[\dot{+}](\overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-}).$$

Докажем теперь, что подпространство $(\overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-})$ отрицательно. Предположив противное, допустим, что в нем существует ненулевой неотрицательный элемент: $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-}$. Так как $\mathcal{L}_-$ и $\mathcal{M}_-$ — отрицательные подпространства, то x_0 может быть лишь нейтральным. Но тогда $x_0[\perp](\overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-})$, как это следует из неравенства Коши – Буняковского:

$$|[x_0, y]|^2 \leqslant [x_0, x_0][y, y], \quad \forall y \in (\overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-}).$$

Итак, $x_0[\perp]\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+$ и $x_0[\perp]\overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-}$, т.е. всему пространству $\Pi_\varkappa$. Тогда (см. определение 2.3, аксиома (i)) получаем, что $x_0 = 0$, в противоречие с исходным предположением.

Проведенные рассуждения показывают, что имеет место разложение

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\dot{+}]\Pi_-, \quad \Pi_+ := \mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+, \quad \Pi_- := \overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-}. \tag{2.40}$$

Докажем, что в этом разложении

$$\dim \Pi_+ = \varkappa. \tag{2.41}$$

Предположив противное: $\dim \Pi_+ < \varkappa$. В силу аксиомы (ii) определения 2.3 найдется положительное подпространство $\mathcal{P}$ с $\dim \mathcal{P} = \varkappa$. Так как $\dim \Pi_+ < \dim \mathcal{P}$, то найдется такой ненулевой элемент $y_0 \in \mathcal{P}$, что $y_0[\perp]\Pi_+$ (аналогичное рассуждение уже проводилось при доказательстве леммы 2.1). Тогда $y_0 \in \Pi_-$ и $y_0 \neq 0$. Значит, $y_0 < 0$, в противоречии с предположением $y_0 > 0$.

Из доказанного факта (см. (2.41)) следует, что разложение (2.40) — каноническое, т.е.

$$\Pi_- := \{\overline{(\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-)}, -[\cdot,\cdot]\}$$

— гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(x,y) = -[x,y], \quad x,y \in \Pi_-. \tag{2.42}$$

Заметим теперь, что линеалы $\mathcal{L}_-$ и $\mathcal{M}_-$ замкнуты, т.е. являются подпространствами. В самом деле, это следует из того, что пересечение замкнутых множеств замкнуто: $\mathcal{L}_- = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_+^{[\perp]}$, учитывая, что $\mathcal{L}$ — подпространство по условию теоремы и $\mathcal{L}_+^{[\perp]}$ замкнуто по лемме 2.3. Принимая во внимание, что по Лемме 2.3 линеал $\mathcal{M}$ замкнут, из тех же соображений получаем замкнутость $\mathcal{M}_- = \mathcal{M}_+^{[\perp]} \cap \mathcal{M}$.

Таким образом, $\mathcal{L}_-$ и $\mathcal{M}_-$ — подпространства, а тогда

$$\mathcal{L}_- \oplus \mathcal{M}_- = \overline{\mathcal{L}_- \oplus \mathcal{M}_-} = \overline{\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-}.$$

Здесь при замене знака $\oplus$ на $[\dot{+}]$ использовано то обстоятельство, что для скалярного произведения (2.42) $(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $[x,y] = 0$, $x,y \in \Pi_-$.

Итак, окончательно имеем

$$\Pi_\varkappa = (\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{M}_+)[\dot{+}](\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{M}_-) = \mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{M} = \mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}.$$

$\square$

Приведем ряд следствий из этой теоремы.

Следствие 2.1. Любое невырожденное подпространство пространства Понтрягина $\Pi_\varkappa$ само является пространством Понтрягина. $\square$

Действительно, по ходу доказательства теоремы 2.6 было установлено разложение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-,$$

являющееся каноническим в смысле определения 2.3 пространства Понтрягина.

Следствие 2.2. Если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — невырожденные подпространства и $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$, то $\mathcal{L}[+]\mathcal{M}$ — также подпространство и

$$\mathcal{L}[+]\mathcal{M} = (\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-)[+](\mathcal{M}_+[+]\mathcal{M}_-) = (\mathcal{L}_+[+]\mathcal{M}_+)[+](\mathcal{L}_-[+]\mathcal{M}_-). \quad \square$$

Следствие 2.3. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство в $\Pi_\varkappa$. Тогда его можно разложить в прямую J-ортогональную сумму

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0[\dot{+}]\mathcal{L}^{(1)}, \tag{2.43}$$

где $\mathcal{L}^0 := \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ — изотропная часть $\mathcal{L}$, а $\mathcal{L}^{(1)}$ невырождено.

В самом деле, для этого достаточно положить $\mathcal{L}^{(1)} := (\mathcal{L}^0)^\perp \cap \mathcal{L}$, где ортогональность подразумевается в смысле канонического скалярного произведения (см. (2.7)). Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0[\oplus]\mathcal{L}^{(1)}$; в этом разложении J-ортогональность следует из того, что $\mathcal{L}^0$ — изотропная часть $\mathcal{L}$. Невырожденность $\mathcal{L}^{(1)}$ следует из того, что любой вектор x_0, изотропный в $\mathcal{L}^{(1)}$, будет изотропным и в $\mathcal{L}$, а потому принадлежал бы $\mathcal{L}^0$, будучи одновременно ортогональным этому подпространству. Следовательно, $x_0 = 0$, т.е. $\mathcal{L}^{(1)}$ — невырожденное подпространство. $\square$

В заключение сформулируем некоторые упражнения.

Упражнение 2.7. Доказать, что для любого линеала $\mathcal{L}$ его J-ортогональное дополнение $\mathcal{L}^{[\perp]}$ замкнуто, т.е. является подпространством. (Для невырожденного $\mathcal{L}$ этот факт доказан в теореме 2.6, поскольку все пространство невырождено.) $\square$

Упражнение 2.8. Доказать, что для любых подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$, имеет место свойство

$$\mathcal{L}[+]\mathcal{M} = \overline{\mathcal{L}[+]\mathcal{M}}. \quad \square$$

Упражнение 2.9. Доказать, что если $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ — невырожденные подпространства, $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$, то $\mathcal{L}[+]\mathcal{M}$ также невырождено, т.е. оно является само пространством Понтрягина. $\square$

3 Элементы теории операторов в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$

Рассмотрим, опираясь на предыдущие геометрические построения, элементы теории линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Пусть $\{\Pi_\varkappa, [\cdot,\cdot]\}$ — пространство Понтрягина, $(\cdot,\cdot)$ — его каноническое скалярное произведение,

$$\begin{aligned} &\Pi_\varkappa = \Pi_+[\dot{+}]\Pi_-, \quad J = P_+ - P_-, \\ &(x,y) = [Jx,y], \quad [x,y] = (Jx,y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Рассмотрим линейный непрерывный оператор A, действующий в $\Pi_\varkappa$, $A: \ \Pi_\varkappa \longrightarrow \Pi_\varkappa$, заданный на всем пространстве, т.е. его область определения $\operatorname{dom} A = \Pi_\varkappa$.

Определение 3.1. Оператор A^c называется J-сопряженным к оператору A, если

$$[Ax,y] = [x,A^c y], \quad \forall x,y \in \Pi_\varkappa. \quad \square \tag{3.2}$$

Зафиксируем какое-либо канонические разложение и связанное с ним каноническое скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$. Напомним, что гильбертов сопряженный к A оператор A^* по определению удовлетворяет тождеству

$$(Ax,y) = (x,A^* y), \quad \forall x,y \in \Pi_\varkappa. \tag{3.3}$$

Упражнение 3.1. Доказать, что A^c — ограниченный линейный всюду заданный оператор, т.е. dom $A^c = \Pi_\varkappa$, если A обладает этими свойствами.

Указание. Воспользоваться известной теоремой Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. $\square$

Из формул (3.1)–(3.3) следует, что операторы A^c и A^* связаны соотношением

$$A^c = JA^*J, \tag{3.4}$$

где J — каноническая симметрия. Действительно, для любых x и y из $\Pi_\varkappa$ имеем

$$[Ax,y] = (JAx,y) = (x,(JA)^*y) = [x,A^c y] = (Jx,A^c y) = (x,JA^c y),$$

что влечет
$$JA^c = (JA)^*.$$
Последнее эквивалентно формуле (3.4).

Формулу (3.4) примем за определение сопряженного оператора A^c для любого, не обязательно ограниченного, плотно заданного оператора A.

Напомним определение регулярной точки, спектра и классификацию точек спектра для линейного оператора, действующего в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В нашем случае это будет гильбертово пространство $\mathcal{H} = \{\Pi_\varkappa,\ (\cdot,\cdot)\}$.

Определение 3.2. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* оператора A, $\lambda \in \rho(A)$, если ядро оператора $A - \lambda I$ тривиально:
$$\ker(A - \lambda I) := \{x \in \Pi_\varkappa :\ (A - \lambda I)x = 0\} = \{0\},$$
и обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ задан на всем пространстве $\Pi_\varkappa$ и ограничен. $\square$

Функция $R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$ с областью определения $\rho(A)$ называется *резольвентой* оператора A. Одними из важных свойств резольвенты $R_\lambda(A)$ и множества регулярных точек $\rho(A)$ являются следующие:

1. Множество $\rho(A)$ открыто.

В самом деле, если $\lambda_0 \in \rho(A)$, то и все λ из круга $|\lambda - \lambda_0| < \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$ также являются регулярными точками этого оператора (проверить!)

2. Выполнено тождество Гильберта (проверить!):
$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A).$$

3. При каждом $x, y \in \mathcal{H}$ функция $(R_\lambda(A)x, y)$ является аналитической (голоморфной) на $\rho(A)$.

Это вытекает из тождества Гильберта.

4. Резольвента равномерно ограничена каждом замкнутом множестве $\Lambda \subset \rho(A)$:
$$\max_{\lambda \in \Lambda} \|(A - \lambda I)^{-1}\| < \infty. \tag{3.5}$$
Это следует из голоморфности резольвенты (проверить!)

Упражнение 3.2. Доказать: если A — линейный непрерывный оператор, $\operatorname{dom} A = \Pi_{\varkappa}$, то $\rho(A) \neq \emptyset$, более того, все точки плоскости, для которых $|\lambda| > \|A\|$, являются регулярными для оператора A. □

Напомним понятие спектра оператора и его классификацию.

Определение 3.3. *Спектром* $\sigma(A)$ оператора A называется дополнение к множеству регулярных точек: $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Говорят, что точка $\lambda \in \sigma(A)$ — собственное значение оператора A, $\lambda \in \sigma_p(A)$, если существует такой ненулевой элемент $x \in \Pi_{\varkappa}$, что $Ax = \lambda x$. Этот элемент называется собственным элементом (собственным вектором) оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Будем говорить, что точка $\lambda \in \sigma(A)$ принадлежит *непрерывному спектру* оператора A, $\lambda \in \sigma_c(A)$, если $\ker(A - \lambda I) = 0$ и область значений $\operatorname{ran}(A - \lambda I)$ оператора $A - \lambda I$ плотна в пространстве, но с ним не совпадает: $\operatorname{ran}(A - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)} = \Pi_{\varkappa}$, или, что равносильно, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, плотно задан и неограничен.

Дополнение в спектре к собственным значениям и непрерывному спектру называют остаточным спектром, или, что равносильно, $\lambda \in \sigma(A)$ принадлежит *остаточному спектру* оператора A, $\lambda \in \sigma_r(A)$, если $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, но оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ задан на неплотном линеале. □

Из определения спектра и его частей следует, что имеет место разложение

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A),$$

причем множества справа не пересекаются.

Выше мы видели, что множество регулярных точек ограниченного всюду заданного оператора не пусто. Также обстоит дело и со спектром такого оператора. Доказательство этого факта (см. ниже теорему 3.2) в стандартном курсе функционального анализа, как правило, опускается. В доказательстве теоремы о существовании спектра будет использована следующая ниже теорема Лиувилля, хорошо известная из курса теории функций комплексного переменного.

Теорема 3.1. (**Лиувилль**). Пусть $f(\lambda)$ — целая функция (т.е. аналитическая на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$). Если существует такая постоянная c, что функция f ограничена на множестве $|\lambda| > c$, то $f(\lambda) \equiv \text{const}$. □

Теорема 3.2. Пусть A — линейный непрерывный оператор, заданный на всем пространстве. Тогда $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Доказательство. Предположим $\sigma(A) = \emptyset$, т.е. $\rho(A) = \mathbb{C}$. Зафиксируем произвольные элементы $x, y \in \mathcal{H}$ и введем в рассмотрение функцию $f_{x,y}(\lambda) = (R_\lambda(A)x, y)$. Так как по сделанному предположению $\rho(A) = \mathbb{C}$, то $f_{x,y}$ — целая функция. Покажем, что при $|\lambda| > c := 2\|A\|$ эта функция ограничена. В самом деле,

$$|f_{x,y}(\lambda)| = |(R_\lambda(A)x, y)| \leq \|R_\lambda(A)\| \, \|x\| \, \|y\| \leq \frac{\|x\| \, \|y\|}{|\lambda| - \|A\|} < \frac{\|x\| \, \|y\|}{\|A\|}.$$

Следовательно, по теореме 3.1 функция $f_{x,y}$ постоянная. Но поскольку

$$|f_{x,y}(\lambda)| \leq \frac{\|x\| \, \|y\|}{|\lambda| - \|A\|} \to 0 \quad \text{при } |\lambda| \to \infty,$$

то $f_{x,y}(\lambda) \equiv 0$. Отсюда $R_\lambda(A) \equiv 0$, что невозможно. Получили противоречие, показывающее, что спектр ограниченного всюду заданного оператора не пуст. □

Выше, в упражнении 3.2 и в теореме 3.2, утверждалось, что $\rho(A) \neq \emptyset$ и $\sigma(A) \neq \emptyset$ в предположении, что A — ограниченный ($\equiv$ непрерывный) оператор. Рассмотрим примеры, подтверждающие важность этого ограничения.

Пример 3.1. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(0,1)$ и в нем оператор $A = d/dt$, оператор дифференцирования, определенный на линеале

$$\operatorname{dom} A = \{f(t) \in L_2(0,1) : \ df/dt \in L_2(0,1)\}. \tag{3.6}$$

Как известно (**проверить!**), $\operatorname{dom} A$ — плотное в $L_2(0,1)$ множество, но не совпадающее с ним. Так заданный оператор A замкнут (см. пример 1.3) и $\sigma(A) = \mathbb{C}$, более того, каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение оператора A. □

Пример 3.2. Рассмотрим в $L_2(0,1)$ тот же оператор дифференцирования, однако заданный на множестве функций, удовлетворяющих, кроме требований (3.6), дополнительному условию $f(0) = 0$. В этом случае $\sigma(A) = \emptyset$. □

Определение 3.4. Говорят, что точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является *точкой регулярного типа* для оператора A, $\lambda \in r(A)$, если $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$ и существует непрерывный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ (он может быть задан как на всем пространстве, так и не на всем пространстве $\Pi_\varkappa$). □

Таким образом, в множество $r(A)$ точек регулярного типа входят все регулярные точки и те точки остаточного спектра, для которых

$$\operatorname{ran}\,(A-\lambda I)=\overline{\operatorname{ran}\,(A-\lambda I)}\neq\Pi_\varkappa.$$

Таким образом,

$$r(A)\subset\rho(A)\cup\sigma_r(A).$$

Другое равносильное определение точки регулярного типа таково: найдется такое число $k>0$, что

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant k\|x\|,\quad \forall x\in\Pi_\varkappa. \tag{3.7}$$

Приведем важный результат о точках регулярного типа и регулярных точках оператора A.

Теорема 3.3 (М.А. Красносельский – М.Г. Крейн)**.** Пусть $\Lambda\subset\mathbb{C}$ — связное множество, $\Lambda\subset r(A)$. Если $\Lambda\cap\rho(A)\neq\emptyset$, то $\Lambda\subset\rho(A)$. $\square$

Приведем примеры операторов, имеющих точки регулярного типа, причем как регулярные, так и принадлежащие остаточному спектру.

Пример 3.3. Рассмотрим оператор сдвига V в гильбертовом пространстве l^2, состоящем из элементов $x=\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\|x\|^2:=\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^2<\infty$, и действие оператора определено по следующему закону:

$$y=Vx:=\{0,\xi_1,\xi_2,\ldots\}. \tag{3.8}$$

Из определения оператора V следует, что он *изометрический*, т.е. сохраняет норму: $\|Vx\|=\|x\|$. В частности, для него выполнено условие (3.7) с $k=1$ и $\lambda=0$, а потому точка $\lambda=0$ является точкой регулярного типа, т.е. $0\in r(V)$. Оператор V, как следует из (3.8), имеет ограниченный обратный оператор, однако этот оператор задан не на всем пространстве l^2, а только на тех элементах $x=\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ из l^2, у которых $\xi_1=0$. В частности, первый орт $e_1=(1,0,0,\ldots)$ не входит в область определения обратного оператора.

Таким образом, точка $\lambda=0$ является точкой регулярного типа для оператора A, но она не является регулярной точкой этого оператора (проверить, что все λ с $|\lambda|<1$ — точки регулярного типа оператора V, но не регулярные, а точки λ с $|\lambda|>1$ — регулярные). $\square$

Пример 3.4. Рассмотрим в $L_2(0,1)$ оператор дифференцирования (см. пример 3.1), однако заданный на множестве функций, удовлетворяющих, кроме требований (3.6), дополнительному условию $f(0) = f(1) = 0$. В этом случае $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \mathbb{C}$ и более того, все точки являются точками регулярного типа (**проверить!**). $\square$

Напомним понятия корневого линеала $\mathcal{L}_\lambda(A)$ оператора A, отвечающего собственному значению λ, нормального собственного значения $\lambda \in \widetilde{\sigma}_p(A)$ и нормальной точки $\lambda \in \widetilde{\rho}(A)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$. Тогда

$$\ker(A - \lambda I) \subset \ker(A - \lambda I)^2 \subset \ldots \subset \ker(A - \lambda I)^n \subset \ldots$$

Корневой линеал $\mathcal{L}_\lambda(A)$ определяется соотношением:

$$\mathcal{L}_\lambda(A) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(A - \lambda I)^n.$$

Вектор $x \in \mathcal{L}_\lambda(A)$ называют *корневым вектором* оператора A, отвечающим собственному значению λ. По определению ненулевой вектор $x \in \mathcal{L}_\lambda(A)$ тогда и только тогда, когда найдется такое $p \in \mathbb{N}$, что $(A - \lambda I)^p x = 0$. Будем предполагать, что степень p минимальна, т.е. $(A - \lambda I)^j x \neq 0$, $j = \overline{1, p-1}$.

Введем обозначения

$$x_0 := (A - \lambda I)^{p-1} x,\ x_1 := (A - \lambda I)^{p-2} x,\ \ldots,$$

$$x_j := (A - \lambda I)^{p-1-j} x,\ \ldots,\ x_{p-1} := x \neq 0.$$

Последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{p-1}$ называют *жордановой цепочкой*, состоящей из собственного элемента x_0 и присоединенных к нему элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Если последовательность ядер $\ker(A - \lambda I)^n$ стабилизируется, т.е. найдется такое $p \in \mathbb{N}$, что $\ker(A - \lambda I)^n = \ker(A - \lambda I)^p$ при $n \geq p$, то

$$\mathcal{L}_\lambda(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(A - \lambda I)^n = \ker(A - \lambda I)^p, \quad p \in \mathbb{N},$$

является подпространством (**проверить, что только в этом случае** $\mathcal{L}_\lambda(A)$ — подпространство). Если при этом $\ker(A - \lambda I)$ — конечномерное подпространство, то и корневой линеал является конечномерным (**проверить, что только в этом случае** $\mathcal{L}_\lambda(A)$ — конечномерное подпространство).

Отметим, что, как известно, корневые линеалы $\mathcal{L}_\lambda(A)$ конечномерны у любого оператора в конечномерном пространстве, а также у любого вполне непрерывного оператора в бесконечномерном пространстве при $\lambda \neq 0$.

Для любого оператора его корневые линеалы инвариантны:
$Ax \in \mathcal{L}_\lambda(A)$ если $x \in \mathcal{L}_\lambda(A)$. Если оператор непрерывен, то инвариантным подпространством для A будет и замыкание его корневого линеала. Это же выполняется и для неограниченных операторов при подходящем определении инвариантности, но сейчас мы на этом останавливаться не будем.

Определение 3.5. Говорят, что точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является *нормальным собственным значением* оператора A, $\lambda \in \widetilde{\sigma}_p(A)$, если выполнены следующие условия: а) $\lambda \in \sigma_p(A)$, т.е. λ является собственным значением оператора A; б) это собственное значение является изолированной точкой спектра оператора A; в) размерность $\dim \mathcal{L}_\lambda(A)$ *корневого линеала* оператора A, отвечающего собственному значению λ, конечна; г) все пространство (в данном случае $\Pi_\varkappa$) разлагается в прямую сумму

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_\lambda(A) \dotplus \mathcal{H}_1, \tag{3.9}$$

где $\mathcal{L}_\lambda(A)$ (корневой линеал) и $\mathcal{H}_1$ — подпространства, *инвариантные относительно оператора* A, т.е.

$$A\mathcal{L}_\lambda(A) \subset \mathcal{L}_\lambda(A), \quad A\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1,$$

причем $\lambda \in \rho(A|\mathcal{H}_1) : \lambda$ — регулярная точка для сужения оператора A на подпространство $\mathcal{H}_1$. $\square$

Примерами нормальных собственных значений являются собственные значения матриц (операторов в конечномерных пространствах), а также ненулевые собственные значения компактных (вполне непрерывных) операторов (доказать, используя теорему Гильберта – Шмидта).

Определение 3.6. Говорят, что точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является *нормальной точкой* для оператора A, $\lambda \in \widetilde{\rho}(A)$, если она является либо регулярной точкой оператора A либо его нормальным собственным значением, т.е.

$$\widetilde{\rho}(A) = \rho(A) \cup \widetilde{\sigma}_p(A). \quad \square$$

Обратимся к связи спектра, его частей и множества регулярных точек оператора и его сопряженного. Известно, что в гильбертовом пространстве существует симметрия этих составляющих. Поскольку гильбертов сопряженный и сопряженный в $\Pi_\varkappa$ унитарно подобны, то эти свойств сохраняются и в этом случае. Пусть Λ — произвольное множество из $\mathbb{C}$. Введем обозначение

$$\Lambda^* := \{\mu = \overline{\lambda} : \quad \lambda \in \Lambda\}.$$

Теорема 3.4. Имеют место соотношения

$$\begin{array}{rcl}
1^\circ\ \rho(A^c) & = & \rho^*(A);\\
2^\circ\ \sigma(A^c) & = & \sigma^*(A);\\
3^\circ\ \sigma_c(A^c) & = & \sigma_c^*(A)\\
4^\circ\ \sigma_p^*(A) & = & \{\lambda \in \sigma_p(A^c) : \ \overline{\mathrm{ran}\ (A^c - \lambda I)} \neq \Pi_\varkappa\} \cup \sigma_r(A^c);\\
5^\circ\ \sigma_r(A^c) & = & \{\lambda \in \sigma_p(A) : \overline{\mathrm{ran}\ (A - \lambda I)} = \Pi_\varkappa\}^*.
\end{array}$$

Доказательство. Справедливость утверждений немедленно следует из дефинитного аналога и формулы:

$$A^c - \overline{\lambda} I = J(A^* - \overline{\lambda} I)J.$$

□

Рассмотрим простейшие свойства J-сопряженного оператора $A^c = JA^*J$ к ограниченному оператору $A : \Pi_\varkappa \longrightarrow \Pi_\varkappa$, действующему в $\{\Pi_\varkappa, [\cdot,\cdot]\}$ с фиксированным $J := P_+ - P_-$.

1°. Непосредственно из определения (3.2) получаем,

$$(A+B)^c = A^c + B^c.$$

В самом деле, для любых x и y из $\Pi_\varkappa$ имеем

$$\begin{aligned}
[x,(A+B)^c y] = [(A+B)x, y] = [Ax, y] + [Bx, y] = \\
= [x, A^c y] + [x, B^c y] = [x, A^c + B^c y]
\end{aligned}$$

откуда и следует доказываемое равенство.

2°. Аналогично устанавливаем, что

$$(AB)^c = B^c A^c.$$

3°. Если $0 \in \rho(A)$, то

$$(A^{-1})^c = (A^c)^{-1}.$$

Лемма 3.1. Если подпространство $\mathcal{L} \subset \Pi_\varkappa$ инвариантно относительно оператора A, т.е. $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, то подпространство $\mathcal{L}^{[\perp]}$ инвариантно относительно оператора A^c: $A^c\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}$.
В частности, если $\mathcal{L} = \overline{\operatorname{ran}} A$, то $\mathcal{L}^{[\perp]} = \ker A^c$.

Доказательство этих утверждении аналогично случаю гильбертова пространства и прямо следует из равенства

$$[Ax, y] = 0 = [x, A^c y],$$

выполненного при всех $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{L}^{[\perp]}$, в первом случае, и для всех $x \in \Pi_\varkappa$, $y \in \ker A$ — во втором. $\square$

Перед доказательством следующей ниже теоремы 3.5 предлагается упражнение, альтернативное доказательство которого вытекает из названной теоремы и дано ниже как следствие 3.1.

Упражнение 3.3. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\mu \in \sigma_p(A^c)$, $\lambda \neq \overline{\mu}$. Тогда

$$\mathcal{L}_\lambda(A)[\perp]\mathcal{L}_\mu(A^c), \text{ т.е. } [x, y] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}_\lambda(A), \quad \forall y \in \mathcal{L}_\mu(A^c).$$

Указание: доказать это утверждение, используя метод математической индукции, для любых элементов цепочки, составленной из собственного и присоединенных к нему векторов. $\square$

Теорема 3.5. Пусть $\mathcal{L}$ — инвариантное подпространство оператора A: $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, а $\mathcal{M}$ — инвариантное подпространство J-сопряженного оператора A^c: $A^c\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Рассмотрим сужения $A_1 := A|\mathcal{L}$ и $B_1 := A^c|\mathcal{M}$. Если выполнено условие

$$\sigma(A_1) \cap \sigma^*(B_1) = \emptyset, \tag{3.10}$$

то $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$.

Доказательство. Рассмотрим при $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$ и $\lambda \in \rho(A_1)$ скалярную функцию

$$f_{x,y}(\lambda) := [(A_1 - \lambda I)^{-1}x, y],$$

аналитическую в области $\rho(A_1)$, а также функцию

$$g_{x,y}(\lambda) := [x, (B_1 - \overline{\lambda} I)^{-1}y], \quad \lambda \in \rho^*(B_1),$$

аналитическую в области $\rho^*(B_1)$.

Пусть $|\lambda| > 2\|A\|$. Тогда $|\lambda| > 2\|A_1\|, \quad |\lambda| > 2\|B_1\|$ поскольку

$$\|A\| = \|A^c\|, \quad A_1 = A|\mathcal{L}, \quad B_1 = A^c|\mathcal{M}.$$

Для этих значений λ имеем

$$f_{x,y}(\lambda) = [(A_1 - \lambda I)^{-1}x, y] = [-\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A_1}{\lambda}\right)^{-1} x, y]$$

$$= [-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A_1}{\lambda}\right)^j x, y] = [-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^j x, y]$$

$$= [x, -\frac{1}{\overline{\lambda}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A^c}{\overline{\lambda}}\right)^j y] = [x, -\frac{1}{\overline{\lambda}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{B_1}{\overline{\lambda}}\right)^j y] =$$

$$= [x, (B_1 - \overline{\lambda} I)^{-1} y] = g_{x,y}(\lambda).$$

Отсюда следует, что аналитические функции $f_{x,y}(\lambda)$ и $g_{x,y}(\lambda)$ совпадают в области $|\lambda| > 2\|A\|$, т.е. одна является аналитическим продолжением другой.

Если ввести функцию

$$h_{x,y}(\lambda) := \begin{cases} f_{x,y}(\lambda), & \lambda \in \rho(A_1), \\ g_{x,y}(\lambda), & \lambda \in \rho^*(B_1), \end{cases}$$

то $h_{x,y}(\lambda)$ будет аналитической в области

$$\rho(A_1) \cup \rho^*(B_1) = \mathbb{C},$$

поскольку выполнено условие (3.10). Таким образом, функция $h_{x,y}(\lambda)$ является целой. Повторяя далее рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.2, из теоремы Лиувилля получаем, что $h_{x,y}(\lambda) \equiv 0$, в частности, при $|\lambda_0| > 2\|A\|$ и произвольных векторах $u \in \mathcal{L}$, $v \in \mathcal{M}$ имеем

$$[u, v] = h_{(A-\lambda_0 I)u, v}(\lambda_0) = 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следствием доказанной теоремы является результат об ортогональности корневых линеалов оператора и его J-сопряженного.

Следствие 3.1. Пусть $\Lambda_1 \subset \sigma_p(A)$, $\Lambda_2 \subset \sigma_p(A^c)$,

$$\mathcal{L} := \text{з.л.о.}\{\mathcal{L}_\lambda(A): \ \lambda \in \Lambda_1\}, \qquad \mathcal{M} := \text{з.л.о.}\{\mathcal{L}_\mu(A^c): \ \mu \in \Lambda_2\}.$$

Если $\Lambda_1 \cap \Lambda_2^* = \emptyset$, то $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$.

Доказательство. Сперва докажем J-ортогональность корневых линеалов $\mathcal{L}_\lambda(A)$ и $\mathcal{L}_\mu(A^c)$ при $\lambda \in \Lambda_1$ и $\mu \in \Lambda_2$, т.е. $[x, y] = 0$ для произвольных $0 \neq x \in \mathcal{L}_\lambda(A)$ и $0 \neq y \in \mathcal{L}_\mu(A^c)$ при $\lambda \neq \mu$ (см. упражнение 3.3). Пусть p, q — минимальные натуральные числа такие, что $(A - \lambda I)^p x = 0$ и $(A^c - \mu I)^q y = 0$. Введем в рассмотрение жордановы цепочки:

$$\begin{aligned}
&x_0 := (A - \lambda I)^{p-1}x, \ x_1 := (A - \lambda I)^{p-2}x, \ \ldots, \\
&x_j := (A - \lambda I)^{p-1-j}x, \ \ldots, \ x_{p-1} := x. \\
&y_0 := (A^c - \mu I)^{q-1}y, \ y_1 := (A^c - \mu I)^{q-2}y, \ \ldots, \\
&y_j := (A^c - \mu I)^{q-1-j}y, \ \ldots, \ y_{p-1} := y.
\end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{L}_x = \text{л.о}\{x_j\}_{j=0}^{p-1}$, $\mathcal{M}_y = \text{л.о}\{y_j\}_{j=0}^{q-1}$. Эти подпространства конечномерны: $\dim \mathcal{L}_x = p$, $\dim \mathcal{M}_y = q$, подпространство $\mathcal{L}_x$ инвариантно относительно A, а подпространство $\mathcal{M}_y$ — относительно A^c. При этом $\sigma(A|\mathcal{L}_x) = \{\lambda\}$, а $\sigma(A^c|\mathcal{M}_y) = \{\mu\}$, $\lambda \neq \overline{\mu}$. В силу теоремы 3.5 подпространства $\mathcal{L}_x$ и $\mathcal{M}_y$ J-ортогональны, а потому и $[x, y] = 0$.

Из доказанного немедленно следует J-ортогональность линеалов

$$\mathcal{L}' = \text{л.о.}\{\mathcal{L}_\lambda(A) \mid \lambda \in \Lambda_1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{M}' = \text{л.о.}\{\mathcal{L}_\mu(A^c) \mid \mu \in \Lambda_2\},$$

а потому и их замыканий $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, соответственно: $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$. $\square$

Отметим, что условие $\lambda \neq \overline{\mu}$, обеспечивающее J-ортогональность (в $\Pi_\varkappa$) соответствующих корневых линеалов $\mathcal{L}_\lambda(A)$ и $\mathcal{L}_\mu(A^c)$, выполнено, если, например, $\lambda \neq \overline{\lambda}$, $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \sigma_p(A^c)$; можно выбирать также варианты $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, или $\lambda \neq \mu$ и они оба вещественны.

Целью дальнейших рассмотрений является изучение спектральных свойств J-самосопряженного оператора $A = A^c$, действующего в $\Pi_\varkappa$. Пусть

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[+]\Pi_-, \quad J = P_+ - P_-. \tag{3.11}$$

Представим операторы A и J в матричном виде, основываясь на разложении (3.11). Тогда любому элементу $x = x_+ + x_- \in \Pi_\varkappa$ можно поставить в соответствие вектор-столбец

$$x = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \in \Pi_+[+]\Pi_-,$$

оператору J — матрицу

$$J := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

а произвольному оператору A — матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+A|\Pi_+ & P_+A|\Pi_- \\ P_-A|\Pi_+ & P_-A|\Pi_- \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Отсюда

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}, \quad A^c = JA^*J = \begin{pmatrix} A_{11}^* & -A_{21}^* \\ -A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Здесь операторы A_{11}, A_{12} и A_{21} — конечномерные непрерывные и потому они компактны.

Из (3.12), (3.13) получаем, что $A = A^c$ тогда и только тогда, когда

$$A_{11} = A_{11}^*, \quad A_{22} = A_{22}^*, \quad A_{21} = -A_{12}^*, \quad A_{12} = -A_{21}^*. \tag{3.14}$$

Напомним, что если $A = A^*$ — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, то его спектр веществен: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Для оператора $A = A^c$, действующего в $\Pi_\varkappa$, спектр $\sigma(A)$ может быть и невещественным, как показывает следующий пример.

Пример 3.5. Пусть $\Pi_\varkappa = \mathbb{C}^2$,

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Тогда $A = A^c$ и $\sigma(A) = \{i; -i\}$.

Заметим, что из теоремы 3.4 следует, что множество регулярных точек и спектр J-самосопряженного оператора, действующего в $\Pi_\varkappa$, симметричны относительно вещественной оси:

$$\lambda \in \rho(A) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A), \quad \lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A). \tag{3.16}$$

Далее будет использован следующий полезный при изучении свойств спектра ограниченных операторов факт.

Теорема 3.6. (**Гохберг И.Ц.**). Пусть A — замкнутый оператор, Ω — связное открытое множество из $\rho(A)$ и пусть B — компактный оператор: $B \in \mathfrak{S}_\infty$.

Тогда

$$\Omega \cap \rho(A+B) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \Omega \subset \widetilde{\rho}(A+B),$$

т.е. если во множестве Ω есть хотя бы одна регулярная точка оператора $A+B$, то это множество состоит из регулярных точек и нормальных собственных значений оператора $A+B$. Отсюда, в частности следует, что нормальные собственные значения оператора $A+B$, расположенные в Ω, могут сгущаться только к границе Ω. $\square$

Следующая теорема описывает невещественный спектр J-самосопряженного оператора, действующего в $\Pi_\varkappa$.

Теорема 3.7. . Пусть $A : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$ — J-самосопряженный оператор, $\sigma_{nr}(A)$ — его невещественный спектр. Тогда:

(*i*) $\mathcal{L}_\pm =$ л.о.$\{\mathcal{L}_\lambda(A) \mid \lambda \in \mathbb{C}_\pm\}$ — нейтральный подпространство, в частности, корневые линеалы $\mathcal{L}_\lambda(A)$, отвечающие $\lambda \in \sigma_{nr}(A)$ нейтральны;

(*ii*) $\dim \mathcal{L}_\pm \leq \varkappa$;

(*iii*) $\sigma_{nr}(A)$ состоит из не более чем $\varkappa$ пар $\{\lambda; \overline{\lambda}\}$ нормальных собственных значений.

Доказательство. Сперва проверим, что $\sigma_{nr}(A)$ состоит из нормальных собственных значений.

Представим оператор $A = A^c$ в виде суммы двух операторов $A_1 = A^*$ и $A_2 \in \mathfrak{S}_\infty$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ -A_{12}^* & 0 \end{pmatrix} =: A_1 + A_2.$$

Так как здесь $A_{11} = A_{11}^*$, $A_{22} = A_{22}^*$, то $A_1 = A_1^*$, а так как $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $A_2 \in \mathfrak{S}_\infty$.

Обратимся к теореме 3.6. Возьмем в качестве связного множества Ω открытую верхнюю полуплоскость: $\Omega = \mathbb{C}_+$. Поскольку оператор A_1 самосопряжен, то $\Omega \subset \rho(A_1)$. Для оператора $A = A_1 + A_2$ найдутся точки $\lambda \in \mathbb{C}_+$ такие, что $\lambda \in \rho(A)$ (например, точки с $|\lambda| > \|A\|$). Следовательно, по теореме 3.6 получаем, что $\mathbb{C}_+ \subset \widetilde{\rho}(A)$, т.е. любая точка из $\mathbb{C}_+$ является либо регулярной точкой для $A = A^c$, либо нормальным собственным значением. Аналогичное утверждение справедливо и для точек из открытой нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

Теперь покажем справедливость утверждений (i) и (ii).

Рассмотрим инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$ оператора A, отвечающее собственным значениям, расположенным в верхней полуплоскости. Так как $A = A^c$ и $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, то $A^c\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ и $\sigma(A|\mathcal{L}_+) = \sigma(A^c|\mathcal{L}_+)$. Поэтому $\sigma(A|\mathcal{L}_+) \cap \sigma^*(A^c|\mathcal{L}_+) = \emptyset$. По теореме 3.5 имеем $\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_+$. Следовательно, для любого $x \in \mathcal{L}_+$ будет $[x,x] = 0$, т.е. $\mathcal{L}_+$ — нейтральное и потому неотрицательное подпространство. Из аксиомы (iii) определения 2.3 пространства $\Pi_\varkappa$ получаем, что $\dim \mathcal{L}_+ \leqslant \varkappa$. Аналогично проверяются утверждения для $\mathcal{L}_-$. Таким образом, (i) и (ii) доказано.

Отсюда и из (3.16) получаем, что если $\lambda \in \widetilde{\sigma}_p(A)$, то также $\overline{\lambda} \in \widetilde{\sigma}_p(A)$. Так как в $\mathbb{C}_+$ может быть не более $\varkappa$ (с учетом кратностей) собственных значений оператора A, то утверждение (iii) справедливо. $\square$

Дальнейшее исследование спектральных свойств операторов привлекает такие важные понятия, как интеграл Рисса и проектор Рисса. Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A имеет в комплексной плоскости изолированную часть σ и Γ_σ — жорданов контур (возможно не одно-связный), выделяющий (окружающий) эту часть. Тогда

$$\sigma(A) = \sigma \cup (\sigma(A) \backslash \sigma),$$

и оба множества справа замкнуты и не пересекаются. Поэтому контур Γ_σ можно выбрать так, что $\Gamma_\sigma \subset \rho(A)$.

Введем в рассмотрение интеграл (проектор) Рисса

$$P_\sigma := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \tag{3.17}$$

где $(A - \lambda I)^{-1} := R_\lambda(A)$ — *резольвента* оператора A, являющаяся аналитической функцией по λ при $\lambda \in \rho(A)$ или, что эквивалентно, скалярная функция $(R_\lambda(A)x, y)$ аналитична при каждой паре $x, y \in \Pi_\varkappa$. Оператор P_σ можно определить и через скалярное произведение:

$$(P_\sigma x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} ((A - \lambda I)^{-1} x, y) d\lambda$$

Напомним общие свойства оператора P_σ. Поскольку они, как правило, доказываются в стандартных курсах функционального анализа, мы опускаем доказательство следующей ниже теоремы 3.8.

Теорема 3.8. Имеют место следующие утверждения:

1° $P_\sigma^2 = P_\sigma$, т.е. P_σ – проектор;

2° $I - P_\sigma = P_{\sigma(A)\setminus\sigma}$, в частности, $P_{\sigma(A)} = I$, $P_\emptyset = 0$.

3° Если $\sigma \neq \sigma(A)$, то

$$\begin{gathered} \Pi_\varkappa = P_\sigma\Pi_\varkappa \dot{+} (I-P_\sigma)\Pi_\varkappa, \quad AP_\sigma\Pi_\varkappa \subset P_\sigma\Pi_\varkappa, \\ A(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa \subset (I-P_\sigma)\Pi_\varkappa, \end{gathered} \tag{3.18}$$

причем для сужений $A|P_\sigma\Pi_\varkappa$ и $A|(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$ оператора A на $P_\sigma\Pi_\varkappa$ и $(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$ выполнены соотношения

$$\sigma(A|P_\sigma\Pi_\varkappa) = \sigma, \quad \sigma(A|(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa) = \sigma(A)\setminus\sigma;$$

4° $P_{\sigma_1\cup\sigma_2} = P_{\sigma_1} + P_{\sigma_2}$, если $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$;

5° если $\lambda_0 \in \widetilde{\sigma}_p(A)$, т.е. λ_0 является нормальным собственным значением оператора A, и $\sigma = \{\lambda_0\}$, то $P_\sigma\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_{\lambda_0}(A)$; в этом случае в (3.9) имеем $\mathcal{H}_1 = (I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$;

6° Проектор P_σ не зависит от выбора контура Γ_σ, выделяющего σ и расположенного в $\rho(A)$.

□

Понятие проектора P_σ позволяет построить *функциональное исчисление*, т.е. построение функций от оператора A. Для произвольной непрерывной функции $f(\lambda)$ соответствующая функция от оператора A определяется по формуле

$$f(A) := -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\sigma(A)}} f(\lambda)(A-\lambda I)^{-1}d\lambda, \tag{3.19}$$

где $\Gamma_{\sigma(A)}$ — контур, выделяющий весь спектр оператора A. Из свойств интеграла Коши непосредственно следует справедливость этой формулы для многочленов от оператора A.

Рассмотрим вновь проектор Рисса

$$P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

где, напомним, σ — изолированная часть спектра оператора A, а Γ_σ — охватывающий ее контур, расположенный в $\rho(A)$.

Вычислим J-сопряженный к P_σ оператор P_σ^c. Из (3.17), использовав замену $\mu = \overline{\lambda}$, получим:

$$P_\sigma^c = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma^*}(A^c - \overline{\lambda}I)^{-1}d\overline{\lambda} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma^*}(A^c - \mu I)^{-1}d\mu$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\sigma^*}}(A^c - \mu I)^{-1}d\mu,$$

где в первом контурном интеграле обход совершается по часовой стрелке, а в остальных — против.

Если $\Gamma_\sigma = \Gamma_{\sigma^*}$ — симметричный относительно $\mathbb{R}$ контур и $A = A^c$, то

$$P_\sigma^c = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma}(A - \mu I)^{-1}d\mu = P_\sigma,$$

т.е. P_σ — J-самосопряженный проектор. Отсюда

$$[P_\sigma x, (I - P_\sigma)y] = [x, P_\sigma(I - P_\sigma)y] = 0, \quad \forall x, y \in \Pi_\varkappa,$$

и потому подпространства $P_\sigma\Pi_\varkappa$ и $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ являются J-ортогональными:

$$\Pi_\varkappa = P_\sigma\Pi_\varkappa[\dot{+}](I - P_\sigma)\Pi_\varkappa. \tag{3.20}$$

Следствие 3.2. Если $A = A^c$ и $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^*$, то подпространства $P_\sigma\Pi_\varkappa$ и $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ невырождены.

В самом деле, если, например, некоторый элемент $x_0 \in P_\sigma\Pi_\varkappa$ и ортогонален $P_\sigma\Pi_\varkappa$, то он в силу (3.20) ортогонален и $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$, а потому и всему $\Pi_\varkappa$. По аксиоме (i) определения 2.3 пространства Понтрягина $x_0 = 0$. $\square$

Следствие 3.3. Если $A = A^c$, $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$ и $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$, то подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_0}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$ невырождено и $\dim \mathcal{L}_{\lambda_0}(A) = \dim \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$.

Действительно, в силу теоремы 3.7(*iii*) точки λ_0 и $\overline{\lambda}_0$ являются нормальными собственными значениями, а потому — изолированными точками спектра оператора A. Следовательно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что окружность $\Gamma_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon\}$ состоит из регулярных точек оператора A, расположена в верхней полуплоскости и окружает только одну точку λ_0 спектра оператора A. Положим

$$\sigma = \{\lambda_0, \overline{\lambda}_0\}, \quad \Gamma_\sigma = \Gamma_{\lambda_0} \cup \Gamma_{\lambda_0}^*.$$

В силу следствия 3.2 подпространство $P_\sigma \Pi_\varkappa$ невырождено. Так как по свойствам интеграла Рисса

$$P_\sigma = P_{\lambda_0} + P_{\overline{\lambda}_0}, \quad P_\lambda \Pi_\varkappa = \mathcal{L}_\lambda(A), \quad P_{\overline{\lambda}} \Pi_\varkappa = \mathcal{L}_{\overline{\lambda}}(A),$$

то

$$P_\sigma \Pi_\varkappa = (P_{\lambda_0} + P_{\overline{\lambda}_0})\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_{\lambda_0}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$$

— невырожденное подпространство.

Осталось проверить, что $m_+ := \dim \mathcal{L}_{\lambda_0}(A) = \dim \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A) =: m_-$. Предположим противное: $m_+ \neq m_-$, для определенности $m_+ < m_-$.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{m_+}$ — базис подпространства $\mathcal{L}_{\lambda_0}(A)$, а $\{f_j\}_{j=1}^{m_-}$ — базис подпространства $\mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$. Проверим, что в $\mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$ существует вектор $y \neq 0$ такой, что $[y, e_k] = 0$, $k = \overline{1, m_+}$. Каждый вектор из $\mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$ представляется в виде: $y = \sum\limits_{j=1}^{m_-} \alpha_j f_j$. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m_-} \alpha_j [f_j, e_k] = 0, \qquad k = \overline{1, m_+}.$$

Как и при доказательстве леммы 2.1, воспользуемся тем, что однородная система с количеством неизвестных большим, нежели количество уравнений имеет нетривиальное решение $y \in \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$. Но тогда y J-ортогонален не только $\mathcal{L}_{\lambda_0}(A)$, но и $\mathcal{L}_{\overline{\lambda}_0}(A)$, поскольку это подпространство нейтрально. Следовательно, y J-ортогонален и сумме этих подпространств, что противоречит доказанному выше. $\square$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — *все* различные собственные значения оператора $A = A^c$, расположенные в $\mathbb{C}_+$, т.е. $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, $j = \overline{1, p}$. Введем множества $\sigma_j := \{\lambda_j, \overline{\lambda}_j\}$ и окружающие их контуры Γ_{σ_j}, а также $\Gamma_\sigma = \Gamma_{\sigma_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\sigma_p}$. Через P_{σ_j} и $P_\sigma := \sum_{j=1}^p P_{\sigma_j}$ обозначим соответствующие проекторы Рисса. Тогда, как следует из предыдущих построений,

$$P_\sigma \Pi_\varkappa = (\mathcal{L}_{\lambda_1}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_1}(A))[+](\ldots)[+](\mathcal{L}_{\lambda_p}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_p}(A)),$$

$$\Pi_\varkappa = (\mathcal{L}_{\lambda_1}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_1}(A))[+](\ldots)[+](\mathcal{L}_{\lambda_p}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_p}(A))[+](I - P_\sigma)\Pi_\varkappa. \tag{3.21}$$

Поскольку каждое из подпространств $(\mathcal{L}_{\lambda_j}(A) \dot{+} \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_j}(A))$ является пространством Понтрягина с $\varkappa_j = \dim \mathcal{L}_{\lambda_j}(A)$, $j = \overline{1, p}$, положительными квадратами, то подпространство $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ также является пространством Понтрягина (с $\widetilde{\varkappa} = \varkappa - \sum_{j=1}^{p} \dim \mathcal{L}_{\lambda_j}(A)$ положительными квадратами). Так как все подпространства в (3.21) инвариантны относительно $A = A^c$ по построению (и по свойствам интеграла Рисса), то оператор A в матричной форме, отвечающей этому разложению, имеет диагональную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & A_p & \\ & 0 & & \widetilde{A} \end{pmatrix},$$

$$A_j := A|(\mathcal{L}_{\lambda_j}(A) \dotplus \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_j}(A)), \quad \widetilde{A} := A|(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa.$$

Замечание 3.1. В этом представлении $\sigma(\widetilde{A}) \subset \mathbb{R}$, так как все невещественные собственные значения $\lambda = \lambda_j(A)$ уже ранее были выделены, и им отвечают подпространства $\mathcal{L}_{\lambda_j}(A) \dotplus \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_j}(A)$, $j = \overline{1,p}$. $\square$

Рассмотрим далее структуру инвариантных подпространств, отвечающих вещественным собственным значениям оператора $A = A^c$. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для обычных самосопряженных операторов, как известно, $\mathcal{L}_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)$. Для J-самосопряженных операторов вещественным собственным значениям могут отвечать не только собственные, но и присоединенные элементы. Это показывает следующий пример.

Пример 3.6. Пусть $\Pi_\varkappa = \mathbb{C}^2$, $\quad J = J^{-1} = J^*$, $\quad [x, y] = (Jx, y)$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^c, \quad (JA)^* = JA.$$

Так как здесь оператор A является *жордановой клеткой*, отвечающей нулевому собственному значению, то A имеет присоединенный элемент. $\square$

Упражнение 3.4. Доказать, что у J-самосопряженного оператора, действующего в $\Pi_\varkappa$, остаточный спектр пуст. $\square$

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное значение оператора $A = A^c$ и $x \in \ker(A - \lambda I)$. Если найдется элемент y такой, что $(A - \lambda I)y = x$, то оператор A имеет в точке λ жорданову цепочку $\{x, y\}$ из собственного элемента x и присоединенного к нему элемента y. В этом случае

$$[x, x] = [(A - \lambda I)y, x] = [y, (A - \lambda I)x] = 0, \qquad (3.22)$$

т.е. $x \in \ker(A - \lambda I)$ — нейтральный элемент. Более того, элемент x является изотропным, так как для любого $z \in \ker(A - \lambda I)$ имеем

$$[x, z] = [(A - \lambda I)y, z] = [y, (A - \lambda I)z] = 0.$$

Представим $\ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{L}_\lambda(A)$ в виде (см. следствие 2.3)

$$\ker(A - \lambda I) = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}_1,$$

где $\mathcal{L}^0$ — изотропная часть этого ядра, а $\mathcal{L}_1$ — невырожденное подпространство. Заметим, что $\mathcal{L}_1$ — инвариантное подпространство оператора A: $A\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_1$, так как $\mathcal{L}_1 \subset \ker(A - \lambda I)$.

В силу невырожденности $\mathcal{L}_1$ по теореме 2.6 имеет место разложение

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_1[+]\mathcal{L}_1^{[\perp]}. \tag{3.23}$$

Здесь $\mathcal{L}_1^{[\perp]}$ — также инвариантное подпространство для A, так как по лемме 3.1 $\mathcal{L}_1^{[\perp]}$ — инвариантное подпространство относительно $A^c = A$, и тогда

$$A\mathcal{L}_1^{[\perp]} = A^c\mathcal{L}_1^{[\perp]} \subset \mathcal{L}_1^{[\perp]}. \tag{3.24}$$

Из установленных свойств следует, что оператор A в разложении (3.23) имеет матричное представление

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

где $\ker(A_1 - \lambda I)$ содержит только нейтральные элементы (в силу выбора $\mathcal{L}_1$). Тогда по аксиоме (iii) определения 2.3 имеем свойство $\dim\ \ker(A_1 - \lambda I) \leqslant \varkappa$.

Рассмотрим произвольную жорданову цепочку $x_0, \dots, x_{p-1}$, отвечающую собственному значению $\lambda = \overline{\lambda}$ оператора $A = A^c$: $(A - \lambda I)^p x = 0$, $(A - \lambda I)^{p-1}x \neq 0$, $x_j = (A - \lambda I)^{p-1-j}x$, $j = \overline{0, p-1}$, и введем линеал

$$\mathcal{L} := \text{л.о.}\{x_0, \dots, x_{[p/2]-1}\}, \tag{3.26}$$

где $[p/2]$ — целая часть числа $p/2$, $[p/2] \leqslant p/2$.

Докажем, что линеал $\mathcal{L}$ является нейтральным. В самом деле, при $j, k \leq [p/2] - 1$ имеют место свойства

$$\begin{gathered}[x_j, x_k] = [(A - \lambda I)^{p-j-1}x, \\ (A - \lambda I)^{p-k-1}x] = [(A - \lambda I)^{2p-(j+k)-2}x, x] = 0,\end{gathered} \tag{3.27}$$

так как при $j,k \le [p/2]-1$ будет $2p-(j+k)-2 \ge 2p-2\,[p/2] \geqslant p$. Поэтому линеал $\mathcal{L}$, элементы которого суть линейные комбинации элементов $\{x_k\}_{k=0}^{[p/2]-1}$, является нейтральным.

Упражнение 3.5. Доказать, что $\dim \mathcal{L}_\lambda(A) < \infty$, если $\ker(A-\lambda I)$ состоит из нейтральных элементов. □

Рассмотрим случай, когда собственному значению $\lambda = \overline{\lambda}$ оператора $A = A^c$ отвечает не одна, а несколько жордановых цепочек. Как мы видели выше, без ограничения общности можно считать, что $\dim \mathcal{L}_\lambda(A) < \infty$. Тогда оператор $A|\mathcal{L}_\lambda(A)$ конечномерен, а потому ему отвечает (в жордановом представлении) жорданов базис

$$\begin{array}{cccc} e_{10}, & e_{11}, & \dots, & e_{1,p_1-1}, \\ e_{20}, & e_{21}, & \dots, & e_{2,p_2-1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{s0}, & e_{s1}, & \dots, & e_{s,p_s-1}. \end{array} \tag{3.28}$$

Возьмем, как и выше, в качестве подпространства $\mathcal{L}$ линейную оболочку элементов (3.28), причем в первой строке — только первые $[p_1/2]$ элементов, во второй — соответственно $[p_2/2]$ элементов, и т.д., а в последней строке — $[p_s/2]$ элементов. Тогда рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены выше для одной цепочки (см. (3.26), (3.27)), устанавливаем, что линеал $\mathcal{L}$ является нейтральным и потому $\dim \mathcal{L} \leqslant \varkappa$ (см. определение 2.3, аксиома (iii)).

Возьмем теперь все вещественные собственные значения $\lambda = \mu_j$, $j = 1,\dots,q$, и соответствующие нейтральные подпространства $\mathcal{L}_j$, построенные по указанному выше принципу, выделив жордановы базисы (3.28) (с выбором длин цепочек до номера $[p/2]$). Заметим, что при $\mu_j \ne \mu_k$ будет $\mathcal{L}_{\mu_j}(A)[\perp]\mathcal{L}_{\mu_k}(A)$, а размерность любого $\mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}_{\mu_j}(A)$ не превышает $\varkappa$.

Так как все линеалы $\mathcal{L}_{\lambda_k}(A)$, $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$, и $\mathcal{L}_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, являются нейтральными, то они неотрицательны и потому согласно аксиоме (iii) определения 2.3 пространства Понтрягина справедлива следующая оценка:

$$\sum_{j=1}^{q} \dim \mathcal{L}_j + \sum_{k=1}^{p} \dim \mathcal{L}_{\lambda_k}(A) \leqslant \varkappa \quad (\operatorname{Im}\lambda_k > 0).$$

Рассмотрим теперь весьма важное понятие углового оператора. Такие операторы дают описание неотрицательных и неположительных подпространств в $\Pi_\varkappa$.

Итак, пусть задано $\{\Pi_\varkappa, [\cdot,\cdot]\}$ и его фиксированное разложение

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-, \quad J = P_+ - P_-, \quad (x,y) = [Jx,y], \quad [x,y] = (Jx,y).$$

Для любого $x \in \Pi_\varkappa$ имеем

$$x = x_+ + x_- = P_+x + P_-x, \quad [x,x] = \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2,$$

так как

$$[x,x] = [x_+ + x_-, x_+ + x_-] = (J(x_+ + x_-), x_+ + x_-) =$$

$$= (x_+ - x_-, x_+ + x_-) = (x_+, x_+) - (x_-, x_-),$$

поскольку $(x_+, x_-) = (x_-, x_+) = 0$.

Если элемент x неотрицателен, т.е. $[x,x] \geqslant 0$, то, очевидно, $\|x_+\| \geqslant \|x_-\|$.

Пусть $\mathcal{L} \geqslant 0$ — неотрицательный линеал и потому это конечномерное подпространство, $x = x_+ + x_- \in \mathcal{L}$. Введем отображение $K : \Pi_+ \supset P_+\mathcal{L} \longrightarrow P_-\mathcal{L} \subset \Pi_-$ по следующему закону:

$$Kx_+ = x_-, \quad x_\pm = P_\pm x, \quad x = x_+ + x_- \in \mathcal{L}. \tag{3.29}$$

Докажем, что это отображение является линейным оператором, действующим из Π_+ в Π_-. Прежде всего, $\operatorname{dom} K = P_+\mathcal{L} \subset \Pi_+$ и потому $\operatorname{dom} K$ — конечномерный линеал. Далее, для K выполнено свойство линейности:

$$K(\alpha x_+ + \beta y_+) = \alpha K x_+ + \beta K y_+, \quad x_+ \in P_+\mathcal{L}, \quad y_+ \in P_+\mathcal{L}. \tag{3.30}$$

В самом деле, если $x_+ \in P_+\mathcal{L}$, то существует $x \in \mathcal{L}$ такой, что $P_+x = x_+$, аналогично для $y_+ \in P_+\mathcal{L}$ существует $y \in \mathcal{L} :\ P_+y = y_+$. Так как $\mathcal{L}$ — подпространство, то $z := \alpha x + \beta y \in \mathcal{L}$ и $P_+z = \alpha x_+ + \beta y_+$, $P_-z = \alpha x_- + \beta y_-$. По определению (3.29) оператора K тогда имеем $K(P_+z) = P_-z$, т.е. свойство (3.30). Осталось лишь проверить, что K — линейный оператор, т.е. $K(0) = 0$.

Пусть $x = x_+ + x_-$, $x_+ = 0$, $x_- \neq 0$. Для неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ имеем $\|x_+\| \geqslant \|x_-\| = \|Kx_+\|$, откуда следует, что $x_- = 0$, т.е. $K(0) = 0$. Из этого же неравенства получаем, что $\|K\| \leqslant 1$, т.е. оператор K является *сжатием.*

Назовем для произвольного неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ сжатие K, определенное по правилу (3.29), *угловым оператором* этого подпространства. (Термин "угловой оператор"происходит из рассмотрения графика прямой $y = kx$ с угловым коэффициентом k, $|k| \leqslant 1$. Точки $(x; y)$, расположенные на графике, удовлетворяют условию $|x|^2 - |y|^2 \geqslant 0$, т.е. образуют (одномерное) неотрицательное подпространство во всей совокупности векторов на плоскости Oxy (с началом в нуле и концами в $(x; y)$)).

Для неположительных линеалов и подпространств $\mathcal{L}$ введем аналогично предыдущему оператор $Q : P_-\mathcal{L} \longrightarrow P_+\mathcal{L}$ по правилу:

$$Qx_- = x_+, \quad x = x_+ + x_- \in \mathcal{L}, \quad \|Q\| \leqslant 1,$$

и назовем его также угловым оператором для $\mathcal{L}$. Отметим, что, в отличие от неотрицательных, неположительные линеалы и подпространства могут быть бесконечномерными. Далее будет полезна следующая достаточно простая теорема.

Теорема 3.9. Пусть $\mathcal{L}$ — неположительный (неотрицательный) линеал, а $\mathcal{L}_- := P_-\mathcal{L}$ $\quad (\mathcal{L}_+ := P_+\mathcal{L})$ — его проекция на Π_- $\quad (\Pi_+)$. Тогда:

- (i) (непрерывный) оператор $P_-|\mathcal{L} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_-$ $\quad (P_+|\mathcal{L} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_+)$ непрерывно обратим и $\|(P_\pm|\mathcal{L})^{-1}\| \leq \sqrt{2}$;
- (ii) $\mathcal{L}$ — подпространство (замкнутый линеал) тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_-$ $(\mathcal{L}_+)$ — подпространство.

Доказательство. Рассуждения проведем для случая неположительного подпространства поскольку для неотрицательного оно аналогично и даже проще: в этом случае надо проверить лишь обратимость оператора $P_+|\mathcal{L}$.

(i) Пусть $\mathcal{L}$ — неположительный линеал. Сперва отметим, что оператор $(P_-|\mathcal{L})$ обратим. В самом деле, если $P_-x = 0$ при некотором $x \in \mathcal{L}$, то $x = P_+x \in \Pi_+ \cap \mathcal{L}$, что влечет $x = 0$.
Непрерывность же оператора $(P_-|\mathcal{L})^{-1}$ следует из того, что при $x \in \mathcal{L}$ имеем:

$$\|(P_-|\mathcal{L})^{-1}x_-\| = \|x\| = \|x_+ + x_-\| = \sqrt{\|x_+\|^2 + \|x_-\|^2} \leq \sqrt{2}\|x_-\|.$$

Следовательно, $\|(P_-|\mathcal{L})^{-1}\| \leq \sqrt{2}$.

(ii) Прямо следует из того, что отображение $P_-|\mathcal{L} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_-$ непрерывно и непрерывно обратимо. $\square$

Возьмем произвольный линеал $\mathcal{L}_+ \subset \Pi_+$, произвольное сжатие $K: \mathcal{L}_+ \longrightarrow \Pi_-$ ($\|K\| \leqslant 1$) и образуем линеал

$$\mathcal{L} := \{x = x_+ + Kx_+ : x_+ \in \mathcal{L}_+\}. \tag{3.31}$$

Так как $[x, x] = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\| \geqslant 0$, то $\mathcal{L}$ — неотрицательный линеал. Таким образом:

Соотношение (3.31) *устанавливает взаимно однозначное соответствие $\mathcal{L} \longleftrightarrow K$ между всеми линеалами $\mathcal{L} \geqslant 0$ и всеми сжатиями K, $\|K\| \leqslant 1$, определенными на линеалах $\mathcal{L}_+ \subset \Pi_+$ и действующими в Π_-.*

Пусть $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство и K — его угловой оператор. Предположим, что $\mathcal{L}$ — положительное подпространство, $\mathcal{L} > 0$. Тогда $\|x_+\| > \|Kx_+\|$ ($x_+ \neq 0$). Так как оператор K конечномерен и непрерывен, то он компактен, $K \in \mathfrak{S}_\infty$. Следовательно, найдется такой ненулевой вектор $x_+^0 \in \Pi_+$, $\|x_+^0\| = 1$, что $\|K\| = \|Kx_+^0\|$, а потому $\|K\| < 1$.
Обратно, если $\|K\| < 1$, то при $0 \neq x_+ \in \Pi_+$ и $x = x_+ + Kx_+ \in \mathcal{L}$ имеем:

$$[x, x] = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\|^2 \geq (1 - \|K\|^2)\|x_+\|^2 > 0.$$

Таким образом мы доказали следующий результат:

неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ с угловым оператором K положительно тогда и только тогда, когда $\|K\| < 1$. □

Следует обратить внимание, что аналогичный факт верен для неположительных подпространств (из тех же соображений), но не для неположительных линеалов (см. ниже упражнение 3.6).

Определение 3.7. Назовем неотрицательный (положительный, неположительный, отрицательный) линеал $\mathcal{L}$ из $\Pi_\varkappa$ *максимальным*, если не существует такого линеала $\widetilde{\mathcal{L}}$ того же класса, что $\mathcal{L} \neq \widetilde{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{L}}$. □

Так как каждое из семейств неотрицательных, неположительных, положительных и отрицательных линеалов образует частично упорядоченное множество по вложению и в каждом линейно упорядоченном подмножестве есть максимальный элемент (объединение всех линеалов, входящих в это линейно упорядоченное подмножество), то в силу известной из курса функционального анализа леммы Цорна в каждом из этих семейств существует максимальный элемент. Этот максимальный элемент, вообще говоря, может оказаться не подпространством, т.е. незамкнутым линеалом. Конечно, если речь идет о неотрицательных и положительных линеалах, то они конечномерны и потому это подпространства. Поскольку индефинитная метрика непрерывна, то замыкание неположительного линеала — неположительное подпространство. Поэтому и в этом случае максимальный элемент — подпространство. Что касается отрицательных линеалов, то предлагается выполнить следующее ниже упражнение 3.6, отвечающее сразу на 2 вопроса: для отрицательного линеала норма углового оператора не обязательно меньше единицы и максимальный элемент может оказаться незамкнутым линеалом.

Упражнение 3.6. Рассмотрим пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с $\varkappa = 1$. Пусть e — произвольный ненулевой нейтральный вектор, $\mathcal{L} = \{e\}^{[\perp]}$. Так как e — нейтральный вектор, то он принадлежит своему J-ортогональному дополнению. Пусть $f : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ — разрывный линейный функционал, такой что $f(e) \neq 0$. Обозначим $\mathcal{L}_1 := \ker f$. Доказать:

(i) Подпространство $\mathcal{L}$ является максимальным неположительным.

(ii) Линеал $\mathcal{L}_1$ является максимальным отрицательным.

(iii) Норма углового оператора отрицательного линеала $\mathcal{L}_1$ равна 1.

$\square$

Следующая ниже теорема 3.10 дает конструктивный ответ на вопрос о расширении подпространств указанных выше семейств до максимальных. При этом используются следующие обозначения: $\mathfrak{M}^+$ (соответственно $\mathfrak{M}^-$) — множество всех максимальных неотрицательных (неположительных) подпространств, соответственно.

Теорема 3.10. Всякое неотрицательное (положительное, отрицательное, неположительное,) подпространство $\mathcal{L} \subset \Pi_\varkappa$ допускает расширение до максимального подпространства $\widetilde{\mathcal{L}}$ того же класса; при этом $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^\pm$ тогда и только тогда, когда $P_\pm\widetilde{\mathcal{L}} = \Pi_\pm$, соответственно.

В частности, неотрицательные и положительные подпространства $\mathcal{L}$ максимальны тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{L} = \varkappa$.

Доказательство. Рассуждения проведем для неотрицательного подпространства, для остальных классов подпространств оно аналогично.

Пусть $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство, $P_+\mathcal{L}$ — его проекция на Π_+ и предположим, что $P_+\mathcal{L} \neq \Pi_+$. Тогда гильбертово пространство Π_+ допускает разложение в ортогональную сумму: $\Pi_+ = P_+\mathcal{L} \oplus (P_+\mathcal{L})^\perp$.

Обозначим через K угловой оператор для $\mathcal{L}$, $\|K\| \leqslant 1$, $K : P_+\mathcal{L} \longrightarrow \Pi_-$. Введем новый оператор $\widetilde{K}$, полагая

$$\widetilde{K}(x_+ + y_+) := Kx_+, \quad \forall x_+ \in P_+\mathcal{L}, \quad \forall y_+ \in (P_+\mathcal{L})^\perp.$$

Проверим, что $\|\widetilde{K}\| = \|K\|$. Действительно, $\|\widetilde{K}\| \geqslant \|K\|$ поскольку $\mathrm{dom}\ K \subset \mathrm{dom}\ \widetilde{K}$ и $\widetilde{K}|\mathrm{dom}\ K = K|\mathrm{dom}\ K$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{K}\|^2 = \sup\ &\frac{\|\widetilde{K}(x_+ + y_+)\|^2}{\|(x_+ + y_+)\|^2} = \\ &= \sup\ \frac{\|Kx_+\|^2}{\|x_+\|^2 + \|y_+\|^2} \leqslant \sup\ \frac{\|Kx_+\|^2}{\|x_+\|^2} = \|K\|^2,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\|\widetilde{K}\| \leqslant \|K\|$.

Таким образом, любое $\mathcal{L} \geqslant 0$ можно расширить до $\widetilde{\mathcal{L}} \geqslant 0$, $P_+\widetilde{\mathcal{L}} = \Pi_+$. Если исходное $\mathcal{L}$ было положительным, $\mathcal{L} > 0$, то $\widetilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}$ — также положительное подпространство, так как в этом случае $\|\widetilde{K}\| = \|K\| < 1$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $P_+\mathcal{L} = \Pi_+$, но $\mathcal{L}$ не является максимальным, $\mathcal{L} \notin \mathfrak{M}^+$. Тогда существует $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1 \geqslant 0$. Возьмем какой-либо элемент $x_0 \in \mathcal{L}_1 \backslash \mathcal{L}$, $x^0 \neq 0$, и рассмотрим $P_+x^0 = x_+^0$. Так как $P_+\mathcal{L} = \Pi_+$, то существует элемент $x \in \mathcal{L}$ такой, что $P_+x = x_+^0$. Заметим теперь, что $x^0 - x \neq 0$, так как здесь $x \in \mathcal{L}$, $x_0 \in \mathcal{L}_1 \backslash \mathcal{L}$, $x^0 \neq 0$, причем по построению $P_+(x^0 - x) = x_+^0 - x_+^0 = 0$. Последнее противоречит тому, что оператор $P_+|\mathcal{L}$ обратим (см. теорему 3.9).

Для доказательства последнего утверждения теоремы надо опять воспользоваться обратимостью оператора $P_+|\mathcal{L}$, тем, что для максимального неотрицательного и максимального положительного подпространств $P_+\mathcal{L} = \Pi_+$ и $\dim \Pi_+ = \varkappa$. $\square$

Введем в рассмотрение операторный шар радиуса 1:

$$\mathfrak{K}^+ := \{K : \Pi_+ \longrightarrow \Pi_- : \|K\| \leqslant 1\}.$$

Как показали предыдущие рассуждения, между множеством $\mathfrak{M}^+$ всех максимальных неотрицательных подпространств $\mathcal{L}$ из $\Pi_\varkappa$ и множеством $\mathfrak{K}^+$ всех сжатий $K : \Pi_+ \longrightarrow \Pi_-$ имеется взаимно однозначное соответствие: каждому $\mathcal{L} \geqslant 0$, $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, отвечает угловой оператор K этого подпространства, $K \in \mathfrak{K}^+$, и обратно.

Введем также операторный шар

$$\mathfrak{K}^- := \{Q : \Pi_- \longrightarrow \Pi_+ : \|Q\| \leqslant 1\}.$$

Тогда любому неположительному подпространству $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$ отвечает угловой оператор Q этого подпространства, $Q \in \mathfrak{K}^-$. Итак, имеем

$$\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \Longleftrightarrow \mathcal{L} = \{x = x_+ + Kx_+ \mid K \in \mathfrak{K}^+, \quad \forall x_+ \in \Pi_+\},$$

$$\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^- \Longleftrightarrow \mathcal{M} = \{y = y_- + Qy_- \mid \ Q \in \mathfrak{K}^-, \quad \forall y_- \in \Pi_-\}.$$

Теорема 3.11. Пусть подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ имеет угловой оператор K и $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$ — угловой оператор Q. Тогда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ J-ортогональны в том и только том случае, когда $K = Q^*$, или, что то же, $Q = K^*$.

Более того, подпространство $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$ с угловым оператором K^* совпадает с $\mathcal{L}^{[\perp]}$.

Доказательство. Пусть $x = x_+ + Kx_+ \in \mathcal{L}$, $y = Qy_- + y_- \in \mathcal{M}$ и $[x, y] = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= [x_+ + Kx_+, Qy_- + y_-] = (J(x_+ + Kx_+), Qy_- + y_-) \\ &= (x_+ - Kx_+, Qy_- + y_-) = (x_+, Qy_-) - (Kx_+, y_-), \end{aligned}$$

т.е.

$$\{[x, y] = 0 \quad \forall x \in \mathcal{L},\ y \in \mathcal{M}\} \Longleftrightarrow$$

$$\{(x_+, Qy_-) = (Kx_+, y_-), \quad \forall x_+ \in \Pi_+, \quad \forall y_- \in \Pi_-\}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда угловые операторы K и Q взаимно сопряжены: $Q = K^*$, $K = Q^*$.

Так как $\mathcal{L}$ — максимальное неотрицательное подпространство, то $\mathcal{L}^{[\perp]}$ — неположительное подпространство, содержащее максимальное неположительное подпространство $\mathcal{M}$ с угловым оператором K^*, а потому $\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{M}$. $\square$

Теорема 3.12. Если $\mathcal{L}_+$ — неотрицательное, а $\mathcal{L}_-$ — неположительное подпространство, то $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ и $\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}^-$ тогда и только тогда, когда

$$\dim\,(\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-) = \mathrm{codim}\,(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)\,. \tag{3.32}$$

В частности, $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- = \Pi_\varkappa$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \{0\}$ и $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ — семидефинитные подпространства, то (нейтральное подпространство)

$$\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- \ \subset\ \mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_-^{[\perp]} = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]}\,. \tag{3.33}$$

Отсюда,

$$\dim\,(\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-) \le \mathrm{codim}\,(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)\,. \tag{3.34}$$

Поскольку при расширении подпространства его коразмерность уменьшается, то из (3.32), с учетом теоремы 3.10 и неравенства (3.34), следует, что $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ и $\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}^-$.

Обратно, пусть $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ и $\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}^-$. Тогда имеем: $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$ и $\mathcal{L}_-^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^+$. Следовательно, в (3.33) подпространства $\mathcal{L}_\pm$ и $\mathcal{L}_\pm^{[\perp]}$ можно поменять местами, что позволяет заключить: $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_-^{[\perp]} = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]}$, а потому выполнено условие (3.32).

Последнее утверждение теоремы вытекает из доказанного с учетом того, что равенство $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- = \Pi_\varkappa$ равносильно условию $\mathrm{codim}\,(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) = 0$. $\square$

Пусть теперь подпространство $\mathcal{L}$ нейтрально. Тогда, очевидно, $\|Kx_+\| = \|x_+\|$, т.е. оператор $K:\ \Pi_+ \longrightarrow \Pi_+$ изометрический:

$$(Kx_+, Ky_+) = (x_+, y_+), \quad \forall x_+, y_+ \in \Pi_+.$$

Упражнение 3.7. Пусть $\dim \Pi_+ \le \dim \Pi_-$. Доказать, что любое нейтральное подпространство $\mathcal{L}$ допускает расширение до максимального неотрицательного подпространства $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+$ и такого, что $\widetilde{\mathcal{L}}$ — нейтральное. $\square$

Напомним теперь некоторые факты из функционального анализа, связанные с равномерной, сильной и слабой сходимостью операторов, действующих из гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$.

Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

— *равномерно* сходится к оператору A_0, $A_n \Longrightarrow A_0$, $n \to \infty$, если $\|A_n - A_0\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$;

— *сильно* сходится к оператору A_0, $A_n \longrightarrow A_0$, $n \to \infty$, если $\|(A_n - A_0)x\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty, \forall x \in \mathcal{H}_1)$;

— *слабо* сходится к A_0, $A_n \rightharpoonup A_0$, $n \to \infty$, если $((A_n - A_0)x, y) \longrightarrow 0$ $(\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2, n \longrightarrow \infty)$.

Как известно, из равномерной сходимости следует сильная сходимость, а из сильной — слабая, причем обратное неверно.

Приведем без доказательства следующий важный результат:

Теорема 3.13 (А.Н. Тихонов). Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства. Тогда операторный шар $\mathfrak{K} = \{K : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \mid \|K\| \le 1\}$ *слабо компактен*, т.е. для любой последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{K}$ найдется такая ее подпоследовательность $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что A_{n_k} слабо сходится к некоторому оператору $A_0 \in \mathfrak{K}$. $\square$

Пусть теперь снова $\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-$ и T — непрерывный линейный оператор, действующий в $\Pi_\varkappa$. Представим T в матричной форме, отвечающей этому ортогональному разложению,

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ с угловым оператором K:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : \ x_+ \in \Pi_+ \right\},$$

инвариантно относительно T, т.е.

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Longrightarrow Tx = y = \begin{pmatrix} y_+ \\ Ky_+ \end{pmatrix} \in \mathcal{L}.$$

Так как

$$Tx = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}x_+ + T_{12}Kx_+ \\ T_{21}x_+ + T_{22}Kx_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_+ \\ Ky_+ \end{pmatrix},$$

то

$$K(T_{11}x_+ + T_{12}Kx_+) = T_{21}x_+ + T_{22}Kx_+.$$

В силу произвольности $x_+ \in \Pi_+$ заключаем, что подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ инвариантно относительно оператора T тогда и только тогда, когда его угловой оператор K — решение уравнения

$$KT_{11} + KT_{12}K - T_{21} - T_{22}K = 0. \tag{3.35}$$

Аналогичные соображения показывают, что максимальное неположительное подпространство $\mathcal{M}$ с угловым оператором Q инвариантно относительно оператора T тогда и только тогда, когда

$$T_{11}Q + T_{12} - QT_{21}Q - QT_{22} = 0. \tag{3.36}$$

Продолжим рассмотрение вопроса об инвариантных подпространствах относительно оператора T, действующего в $\Pi_\varkappa$.

Теорема 3.14. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}$ равномерно сходится к оператору A в пространстве $\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-$. Если каждый из операторов A_n имеет $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_n$, то оператор A также имеет $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}$.

Если при этом существует такое открытое множество $\Omega \subset \mathbb{C}$, что $\sigma(A_n|\mathcal{L}_n) \subset \Omega$, то $\sigma(A|\mathcal{L}) \subset \overline{\Omega}$.

Доказательство. Запишем операторы A_n и A в матричном виде:

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{11}^{(n)} & A_{12}^{(n)} \\ A_{21}^{(n)} & A_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Так как A_n сходится к A равномерно, то и все элементы $A_{jk}^{(n)}$ тоже равномерно сходятся к A_{jk}. Действительно, проверим это, например, для матричных элементов $P_+A_nP_- = A_{21}^{(n)}$ и $P_+AP_- = A_{21}$, для остальных это доказывается аналогично:

$$\|A_{21}^{(n)} - A_{21}\| = \|P_+(A_n - A)P_-\| \leqslant \|A_n - A\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Пусть K_n — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}_n$. Так как $\{K_n\} \subset \mathfrak{K}^+$ и шар $\mathfrak{K}^+$ слабо компактен согласно теореме Тихонова (см. теорему 3.13), то найдется подпоследовательность $\{K_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что K_{n_m} слабо сходится к некоторому оператору $K \in \mathfrak{K}^+$, $\|K\| \leq 1$, и этому оператору отвечает неотрицательное подпространство

$$\mathcal{L} := \{x_+ + Kx_+ : \ \forall x_+ \in \Pi_+\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что слабо сходится исходная последовательность $\{K_n\}$.

Докажем, что $\mathcal{L}$ инвариантно относительно предельного оператора A, т.е. $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Или, что эквивалентно оператор K — решение уравнения

$$KA_{11} + KA_{12}K - A_{21} - A_{22}K = 0. \tag{3.35}$$

Для каждой пары A_n и K_n в силу (3.35) имеем:

$$K_nA_{11}^{(n)} + K_nA_{12}^{(n)}K_n - A_{21}^{(n)} - A_{22}^{(n)}K_n = 0.$$

Справедливость равенства (3.35) будет следовать предельным переходом из этой последовательности уравнений, если будут доказаны следующие утверждения:

1° . $K_nA_{11}^{(n)}$ слабо сходится к KA_{11};

2° . $K_nA_{12}^{(n)}K_n$ слабо сходится к $KA_{12}K$;

3° . $A_{21}^{(n)}$ слабо сходится к A_{21};

4° . $A_{22}^{(n)}K_n$ слабо сходится к $A_{22}K$.

Для доказательства утверждения 1° нужно проверить, что

$$\Big((K_nA_{11}^{(n)} - KA_{11})x, y\Big) \longrightarrow 0, \quad \forall x \in \Pi_+, \quad \forall y \in \Pi_-.$$

Поскольку

$$\Big((K_nA_{11}^{(n)} - KA_{11})x, y\Big) =$$

$$= \Big((K_n(A_{11}^{(n)} - A_{11}) + (K_n - K)A_{11})x, y \Big) =$$

$$= (K_n(A_{11}^{(n)} - A_{11})x, y) + ((K_n - K)A_{11}x, y),$$

то достаточно установить, что:

$$(K_n(A_{11}^{(n)} - A_{11})x, y) \longrightarrow 0, \quad \forall x \in \Pi_+, \quad \forall y \in \Pi_-,$$

$$((K_n - K)A_{11}x, y) \longrightarrow 0, \quad \forall x \in \Pi_+, \quad \forall y \in \Pi_-.$$

Первое их этих соотношений проверяется следующим образом:

$$|(K_n(A_{11}^{(n)} - A_{11})x, y)| \leqslant \|K_n\| \cdot \|A_{11}^{(n)} - A_{11}\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A_{11}^{(n)} - A_{11}\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

поскольку $\|K_n\| \leqslant 1$ и $\|A_{11}^{(n)} - A_{11}\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$.

Далее, остается отметить, что

$$((K_n - K)A_{11}x, y) \longrightarrow 0,$$

так как K_n слабо сходится к K, и тем самым свойство 1° установлено.

Аналогично доказываются 3° и 4°, причем 3° просто очевидно, так как из равномерной сходимости $A_{21}^{(n)}$ к A_{21} следует и сильная, и слабая сходимость.

Докажем теперь 2°. Предварительно напомним, что оператор является компактным тогда и только тогда, когда он переводит произвольную слабо сходящуюся последовательность векторов (или операторов) в сильно сходящуюся.

Проведем следующие преобразования:

$$K_n A_{12}^{(n)} K_n - K A_{12} K = K_n(A_{12}^{(n)} - A_{12})K_n + (K_n - K)A_{12}K +$$

$$+ K A_{12}(K_n - K) + (K_n - K)A_{12}(K_n - K).$$

Проверим, что каждое из 4-х слагаемых в выражении справа слабо стремится к нулю.

Поскольку

$$\|K_n(A_{12}^{(n)} - A_{12})K_n\| \leqslant \|A_{12}^{(n)} - A_{12}\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

то здесь сходимость равномерная, а потому и сильная, и слабая.

Далее,

$$(KA_{12}(K_n - K)x, y) = ((K_n - K)x, A_{12}^* K^* y) \longrightarrow 0$$

и

$$((K_n - K)A_{12}Kx, y) \longrightarrow 0,$$

так как K_n слабо сходится к K.

Осталось доказать, что $(K_n - K)A_{12}(K_n - K)$ слабо сходится к нулю. Напомним, что A_{12} — конечномерный непрерывный, а потому компактный оператор, и потому имеет место сильная сходимость $A_{12}K_n \longrightarrow A_{12}K$, $n \longrightarrow \infty$. Следовательно,

$$|((K_n - K)(A_{12}K_n - A_{12}K)x, y)| \leqslant \|K_n - K\| \cdot \|(A_{12}K_n - A_{12}K)x\| \cdot \|y\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|(A_{12}K_n - A_{12}K)x\| \cdot \|y\| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть существует такое открытое множество $\Omega \subset \mathbb{C}$, что $\sigma(A_n|\mathcal{L}_n) \subset \Omega$. Проверим, что $\sigma(A|\mathcal{L}) \subset \overline{\Omega}$.

Пусть K — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}$, т.е. $\mathcal{L} = \{x_+ + Kx_+ : \ x_+ \in \Pi_+\}$. Из инвариантности $\mathcal{L}$ относительно оператора A имеем:

$$A \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_+ + A_{12}Kx_+ \\ A_{21}x_+ + A_{22}Kx_+ \end{bmatrix} \in \mathcal{L}.$$

Согласно теореме 3.9 оператор $(P_+|\mathcal{L}) : \mathcal{L} \to \Pi_+$ является непрерывным и непрерывно обратимым. При этом $x = x_+ + Kx_+ = (P_+|\mathcal{L})^{-1}x_+$. Следовательно,

$$Ax = (P_+|\mathcal{L})^{-1}(Ax)_+ = (P_+|\mathcal{L})^{-1}(A_{11} + A_{12}K)(P_+|\mathcal{L})x, \quad x \in \mathcal{L},$$

т.е.

$$A|\mathcal{L} = (P_+|\mathcal{L})^{-1}(A_{11} + A_{12}K)(P_+|\mathcal{L}). \tag{3.37}$$

Таким образом, оператор $A|\mathcal{L}$ подобен оператору $A_{11} + A_{12}K$, а потому их спектры совпадают:

$$\sigma(A|\mathcal{L}) = \sigma(A_{11} + A_{12}K). \tag{3.38}$$

Соотношения (3.37) и (3.38) выполнены для любого оператора, в частности, для операторов A_n и соответствующих угловых операторов K_n их инвариантных подпространств $\mathcal{L}_n$:

$$A_n|\mathcal{L}_n = (P_+|\mathcal{L}_n)^{-1}(A_{11}^{(n)} + A_{12}^{(n)}K_n)(P_+|\mathcal{L}_n).$$

$$\sigma(A_n|\mathcal{L}_n) = \sigma(A_{11}^{(n)} + A_{12}^{(n)}K).$$

Так как последовательности $A_{11}^{(n)}$ и $A_{12}^{(n)}$ равномерно сходятся к A_{11} и A_{12}, соответственно, и K_n слабо сходится к K, то $A_{11}^{(n)} + A_{12}^{(n)}K_n$ слабо сходится к $A_{11} + A_{12}K$. Отсюда, с учетом того, что операторы $A_{11}^{(n)} + A_{12}^{(n)}K_n$ и $A_{11} + A_{12}K$ действуют в конечномерном ($\varkappa$-мерном) пространстве Π_+, следует и равномерная сходимость последовательности $A_{11}^{(n)} + A_{12}^{(n)}K_n$ к оператору $A_{11} + A_{12}K$.

Докажем, что в открытом множестве $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ нет точек спектра оператора $A|\mathcal{L}$, или что то же, нет точек спектра оператора $B := A_{11} + A_{12}K$. Пусть, напротив, найдется в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ нормальное собственное значение μ оператора B (других точек спектра в конечномерном пространстве быть не может). Пусть

$$\Gamma_\sigma := \{\lambda \mid |\lambda - \mu| = r\}, \quad \Gamma_\sigma \subset \rho(B) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}). \tag{3.39}$$

Так как по условию спектр операторов $B_n := A_{11}^{(n)} + A_{12}^{(n)}K_n$ расположен в Ω, то $\Gamma_\sigma \subset \rho(B_n)$.

Введем проекторы Рисса

$$P_{\sigma,n} := -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma} (B_n - \lambda I)^{-1}\,d\lambda, \quad P_\sigma := -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma} (B - \lambda I)^{-1}\,d\lambda.$$

Так как $\Gamma_\sigma \subset \rho(B_n)$, то из теоремы 3.8, свойство 2°, следует, что $P_{\sigma,n} = 0$ для любого n. Следовательно,

$$\|P_\sigma\| = \|P_{\sigma,n} - P_\sigma\| = \| -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma} \left((B_n - \lambda I)^{-1} - (B - \lambda I)^{-1}\right)\,d\lambda\|$$

$$= \| -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma} \left((B_n - \lambda I)^{-1}(B - B_n)(B - \lambda I)^{-1}\right)\,d\lambda\|$$

$$\leqslant r\|B - B_n\| \cdot \max_{\lambda\in\Gamma_\sigma} \|(B_n - \lambda I)^{-1}\| \cdot \max_{\lambda\in\Gamma_\sigma} \|(B - \lambda I)^{-1}\| \tag{3.40}$$

$$\leqslant r\|B - B_n\| \cdot \sup_n \left\{\max_{\lambda\in\Gamma_\sigma} \|(B_n - \lambda I)^{-1}\|\right\} \cdot$$

$$\cdot \max_{\lambda\in\Gamma_\sigma} \|(B - \lambda I)^{-1}\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Здесь мы воспользовались, с одной стороны, оценкой (3.5), примененной как к резольвенте оператора B, так и к резольвентам операторов B_n, а с другой стороны тем, что $B_n \Longrightarrow B$ и потому $\sup\limits_n \left\{\max_{\lambda\in\Gamma_\sigma} \|(B_n-\lambda I)^{-1}\|\right\} < \infty$ (проверить!). Из (3.40) следует $P_\sigma = 0$ — противоречие с тем, что $\mu \in \sigma(B)$ (см. теорему 3.8). $\square$

Теорема 3.15. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}$ равномерно сходится к оператору A в пространстве $\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-$. Если каждый из операторов A_n имеет максимальное неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{M}_n$, то оператор A также имеет максимальное неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{M}$.

Если при этом существует такое открытое множество $\Omega \subset \mathbb{C}$, что $\sigma(A_n|\mathcal{M}_n) \subset \Omega$, то $\sigma(A|\mathcal{M}) \subset \overline{\Omega}$.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.14, если в рассуждениях заменить уравнение (3.35) на (3.36). $\square$

Теоремы 3.14 и 3.15 будут ключевыми при доказательстве существования инвариантных $\varkappa$-мерных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств у операторов разных классов, действующих в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Теорема 3.16. У любого ограниченного J-самосопряженного в $\Pi_\varkappa$ оператора A существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ и максимальное неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{M}$ такие, что

$$\operatorname{Im} \sigma(A|\mathcal{L}) \geqslant 0, \text{ т.е. } \sigma(A|\mathcal{L}) \subset \overline{\mathbb{C}^+}. \tag{3.41}$$

$$\operatorname{Im} \sigma(A|\mathcal{M}) \leqslant 0, \text{ т.е. } \sigma(A|\mathcal{M}) \subset \overline{\mathbb{C}^-}. \tag{3.42}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем нахождение последовательности операторов A_n со свойствами, упомянутыми в теореме 3.14.

Определение 3.8. Оператор A, действующий в $\Pi_\varkappa$, называется *J-диссипативным*, если $\operatorname{Im}[Ax,x] \geq 0$, $\forall x \in \Pi_\varkappa$. и *равномерно J-диссипативным*, если

$$\operatorname{Im}[Ax,x] \geqslant k\|x\|^2, \quad k>0, \quad \forall x \in \Pi_\varkappa. \quad \square \tag{3.43}$$

Лемма 3.2. Если ограниченный оператор A равномерно J-диссипативен, то $\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Из неравенств (3.43) и (2.13) имеем

$$k\|x\|^2 \leqslant \mathrm{Im}[(A-\lambda I)x, x] \leqslant |[(A-\lambda I)x, x]| \leqslant \|(A-\lambda I)x\| \cdot \|x\|,$$

откуда следует, что $\|(A-\lambda I)x\| \geqslant k\|x\|$, $k>0$. Значит, $\lambda \in r(A)$ и потому $\mathbb{R} \subset r(A)$, т.е. все действительные числа являются точками регулярного типа для оператора A. Поскольку для любого ограниченного оператора A все точки λ с $|\lambda| > \|A\|$ принадлежат резольвентному множеству, то $\mathbb{R} \cap \rho(A) \neq \emptyset$. Из теоремы Красносельского–Крейна (теорема 3.3) с учетом того, что $\mathbb{R}$ связно, получаем: $\mathbb{R} \subset \rho(A)$. $\square$

Теорема 3.17. Пусть $\sigma = \sigma(A) \cap \mathbb{C}^+$ — часть спектра ограниченного равномерно J-диссипативного оператора A, расположенная в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Рассмотрим выделяющий его контур $\Gamma_\sigma \subset \rho(A)$, состоящий из полуокружности с центром в нуле, радиуса $a > \|A\|$ и расположенной в верхней полуплоскости, а также отрезка $[-a, a]$:

$$\Gamma_\sigma = [-a, a] \cup \{ae^{i\varphi} :\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}.$$

Пусть P_σ — отвечающий σ проектор Рисса:

$$P_\sigma := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (A-\lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Тогда:

1°. Подпространство $P_\sigma \Pi_\varkappa$ является $\varkappa$-мерным положительным инвариантным подпространством оператора A.

2°. Подпространство $(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$ — отрицательное инвариантное подпространство оператора A.

Доказательство. Тот факт, что $P_\sigma \Pi_\varkappa$ и $(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$ — инвариантные подпространства оператора A, уже был отмечен в утверждении 3° теоремы 3.8 (см. (3.18)). Остается проверить знаки этих подпространств.

Докажем сначала, что

$$[x, x] = [P_\sigma x, x] \geqslant 0, \quad \forall x \in P_\sigma \Pi_\varkappa.$$

Введем обозначение $A_\sigma = A | P_\sigma \Pi_\varkappa$. Из свойств проектора Рисса следует, что $\sigma(A_\sigma) = \sigma$ и при $x \in P_\sigma \Pi_\varkappa$

$$x = P_\sigma x = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (A_\sigma - \lambda I)^{-1} x d\lambda$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} (A_\sigma - \alpha I)^{-1} x d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (I - \frac{e^{-i\varphi}}{a} A_\sigma)^{-1} x d\,\varphi. \tag{3.44}$$

Так как

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (I - \frac{e^{-i\varphi}}{a} A_\sigma)^{-1} x d\,\varphi = \frac{1}{2} x,$$

то из (3.44) следует

$$\lim_{a\to+\infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} (A_\sigma - \alpha I)^{-1} x d\alpha = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A_\sigma - \alpha I)^{-1} x d\alpha = \frac{1}{2} x.$$

Отсюда, с учетом (3.44), получаем:

$$[x, x] = \mathrm{Re}[P_\sigma x, x] = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A_\sigma - \alpha I)^{-1} d\alpha\, x, x\right]$$
$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}[(A_\sigma - \alpha I)^{-1} x, x] d\alpha. \tag{3.45}$$

Положим $y = (A_\sigma - \alpha I)^{-1} x$. Тогда из (3.43), с учетом равенства $A_\sigma y = Ay$, следует

$$\mathrm{Im}[(A_\sigma - \alpha I)^{-1} x, x] = \mathrm{Im}[y, (A_\sigma - \alpha I) y] = \mathrm{Im}[y, A_\sigma y] = -\mathrm{Im}[Ay, y] \leqslant 0.$$

Остается воспользоваться (3.45) и тем, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен, а потому $[x, x] = [P_\sigma x, x] = \mathrm{Re}[P_\sigma x, x] \geqslant 0$, т.е. $P_\sigma \Pi_\varkappa$ — неотрицательное подпространство.

Докажем теперь, что $P_\sigma \Pi_\varkappa$ — положительное подпространство. Предположим противное: оно не является положительным. Тогда найдется ненулевой элемент $x_0 \in P_\sigma \Pi_\varkappa$ такой, что $[x_0, x_0] = 0$. Так как $P_\sigma \Pi_\varkappa$ — неотрицательное подпространство, то по неравенству Коши–Буняковского (2.13), которое в силу определения (2.7) канонического скалярного произведения можно записать и в виде

$$|[x, y]|^2 \leqslant [x, x] \cdot [y, y], \quad x, y \in P_\sigma \Pi_\varkappa,$$

приходим к выводу, что

$$[x_0, x] = 0, \quad \forall x \in P_\sigma \Pi_\varkappa.$$

Выберем здесь $x = Ax_0$. (Это можно сделать, так как $x_0 \in P_\sigma \Pi_\varkappa$ и это подпространство инвариантно для A). Следовательно, $[Ax_0, x_0] = 0$ и потому $\mathrm{Im}[Ax_0, x_0] = 0$. Так как оператор A равномерно диссипативный, то $x_0 = 0$, т.е. пришли к противоречию. Итак, подпространство $P_\sigma \Pi_\varkappa$ положительно.

Аналогично доказывается, что $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ — отрицательное инвариантное подпространство оператора A. Отсюда следует, что $\Pi_\varkappa$ разлагается в прямую сумму положительного $P_\sigma \Pi_\varkappa$ и отрицательного $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ подпространств (заметим, что это не обязательно каноническое разложение поскольку эти подпространства могут быть не J-ортогональны):

$$\Pi_\varkappa = P_\sigma \Pi_\varkappa \dot{+} (I - P_\sigma)\Pi_\varkappa. \tag{3.46}$$

Докажем, наконец, что $\dim P_\sigma \Pi_\varkappa = \varkappa$. (Метод доказательства этого факта уже встречался ранее, см. лемму 2.1.) Так как (по лемме 2.1) любое неотрицательное подпространство имеет размерность, не превышающую $\varkappa$, то, рассуждая от противного, предположим, что $\dim P_\sigma \Pi_\varkappa < \varkappa$. Тогда найдется (в силу аксиомы (ii) определения 2.3) положительный элемент $x_0 \in \Pi_\varkappa$, $x_0[\perp]P_\sigma \Pi_\varkappa$, причем в силу положительности x_0 имеем $x_0 \notin P_\sigma \Pi_\varkappa$. Тогда л.о.$\{P_\sigma \Pi_\varkappa, x_0\}$ — положительное подпространство. Пусть $x_0 = P_\sigma x_0 + (I - P_\sigma)x_0$ — разложение вектора x_0, соответствующее разложению (3.46) всего пространства, причем здесь x_0 и $P_\sigma x_0$ — положительные элементы. Так как $(I - P_\sigma)x_0 = x_0 - P_\sigma x_0 \in$ л.о. $\{x_0, P_\sigma \Pi_\varkappa\}$, то этот элемент положителен и принадлежит отрицательному подпространству $(I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ — противоречие, показывающее, что предположение $\dim P_\sigma \Pi_\varkappa < \varkappa$ неверно, т.е. $\dim P_\sigma \Pi_\varkappa = \varkappa$. □

Доказательство теоремы 3.16. Проверим утверждение для случая $\varkappa$-мерного неотрицательного подпространства, опираясь на теорему 3.14. Доказательство существования максимального неположительного инвариантного подпространства с указанным спектральным свойством мы опускаем, поскольку рассуждения отличаются лишь ссылкой на теорему 3.15 вместо ссылки на теорему 3.14.

Введем последовательность операторов $A_n := A + in^{-1}J$. Для этих операторов имеем

$$\mathrm{Im}[A_n x, x] = \mathrm{Im}[(A + in^{-1}J)x, x] = \mathrm{Im}[Ax, x] + \mathrm{Im}[in^{-1}Jx, x] = n^{-1}(x, x),$$

т.е. они равномерно J-диссипативные (см. (3.43)). Поэтому по теореме 3.17 существуют максимальные инвариантные неотрицательные подпространства $\mathcal{L}_n \in \mathfrak{M}^+$, $A_n\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_n$, $\sigma(A_n|\mathfrak{L}_n) \subset \mathbb{C}_+$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как последовательность операторов A_n сходится равномерно к оператору A, то по теореме 3.14 существует подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, инвариантное относительно A, $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, причем $\dim \mathcal{L} = \varkappa$. Если положить в условиях теоремы 3.14 $\Omega = \mathbb{C}_+$, то получим (3.41).

□

Полный аналог теоремы 3.16 справедлив и для J-диссипативных операторов с абсолютно идентичным обоснованием (проверить!).

Теорема 3.18. У любого ограниченного J-диссипативного в $\Pi_\varkappa$ оператора A существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ и максимальное неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{M}$ такие, что

$$\operatorname{Im} \sigma(A|\mathcal{L}) \geqslant 0, \text{ т.е. } \sigma(A|\mathcal{L}) \subset \overline{\mathbb{C}^+}.$$

$$\operatorname{Im} \sigma(A|\mathcal{M}) \leqslant 0, \text{ т.е. } \sigma(A|\mathcal{M}) \subset \overline{\mathbb{C}^-}.$$

□

Доказываемый ниже результат интересен тем, что неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ можно выбрать, в отличие от (3.41), таким образом, что $\sigma(A|\mathcal{L})$ может содержать как точки из $\mathbb{C}_+$, так и из $\mathbb{C}_-$.

Теорема 3.19. Пусть A — J-самосопряженный оператор в $\Pi_\varkappa$ и $\sigma_{\text{нев}}(A) := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_p\}$ — его невещественный спектр, $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$, $j, k = \overline{1, p}$. Пусть точки $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \sigma_{\text{нев}}(A)$ выбраны так, что $\mu_j \neq \overline{\mu}_k$, $j, k = 1, \ldots, p$. Тогда найдется $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ оператора $A : A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ такое, что

$$\sigma_{\text{нев}}(A|\mathcal{L}) = \{\mu_j\}_{j=1}^p.$$

Доказательство. Напомним (см. стр. 49), что пространство $\Pi_\varkappa$ допускает разложение (3.21) в J-ортогональную сумму инвариантных относительно A подпространств:

$$\Pi_\varkappa = (\mathcal{L}_{\lambda_1}(A) \dotplus \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_1}(A))[+] \ldots [+]$$

$$[+](\mathcal{L}_{\lambda_p}(A) \dotplus \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_p}(A))[+](I-P_\sigma)\Pi_\varkappa,$$

причем

$$(\mathcal{L}_{\lambda_j}(A) \dotplus \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_j}(A)) = \Pi_{\varkappa_j}, \quad \varkappa_j = \dim \mathcal{L}_{\lambda_j}(A) = \dim \mathcal{L}_{\overline{\lambda}_j}(A), \ j = \overline{1,p},$$

$$(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa = \Pi_{\widetilde{\varkappa}}, \quad \widetilde{\varkappa} = \varkappa - \sum_{j=1}^{p} \varkappa_j.$$

По построению $\sigma(A|(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa) \subset \mathbb{R}$. Следовательно, по теореме 3.16 у оператора $A|(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$, а потому и у оператора A, существует в $(I-P_\sigma)\Pi_\varkappa$ максимальное неотрицательное инвариантное подпространство $\widetilde{\mathcal{L}}$ размерности $\widetilde{\varkappa}$ и $\sigma(A|\widetilde{\mathcal{L}}) \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим подпространство

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mu_1}(A)[+]\ldots[+]\mathcal{L}_{\mu_p}(A)[+]\widetilde{\mathcal{L}},$$

являющееся J-ортогональной суммой подпространств, инвариантных относительно оператора A. Следовательно, подпространство $\mathcal{L}$ также инвариантно относительно этого оператора. Из нейтральности подпространств $\mathcal{L}_{\mu_j}(A)$, $j = \overline{1,p}$, и неотрицательности $\widetilde{\mathcal{L}}$ заключаем, что и подпространство $\mathcal{L}$ неотрицательно. Так как

$$\dim \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{L}_{\mu_j}(A) + \dim \widetilde{\mathcal{L}} = \varkappa,$$

то $\mathcal{L}$ — максимальное неотрицательное инвариантное подпространство оператора A и по построению $\sigma_{\text{нев}}(A|\mathcal{L}) = \{\mu_j\}_{j=1}^{p}$. $\square$

Рассмотрим более сложные вопросы из теории инвариантных подпространств в пространстве Понтрягина. Сперва введем необходимые понятия.

Определение 3.9. Пусть $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ — неотрицательное и неположительное подпространство, соответственно. Если они J-ортогональны друг другу, то пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ называется *дуальной парой* подпространств. $\square$

Пусть $\mathcal{L}_+ \geqslant 0$, $\mathcal{L}_- \leqslant 0$. Тогда

$$\mathcal{L}_+ = \{x_+ + Kx_+ : \ x_+ \in P_+\mathcal{L}_+\}, \quad \mathcal{L}_- = \{Qx_- + x_- : \ x_- \in P_-\mathcal{L}_-\},$$

где K и Q — соответствующие угловые операторы этих подпространств. Выясним, при каких условиях подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ являются J-ортогональными. Имеем

$$0 = [x_+ + Kx_+, Qx_- + x_-] = (x_+, Qx_-) - (Kx_+, x_-),$$
$$x_+ \in P_+\mathcal{L}_+, \quad x_- \in P_-\mathcal{L}_-.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_- \iff (Kx_+, x_-) = (x_+, Qx_-),$$
$$\forall x_+ \in P_+\mathcal{L}_+, \quad \forall x_- \in P_-\mathcal{L}_-. \tag{3.47}$$

Определение 3.10. Скажем, что дуальная пара $\{\mathcal{L}_+^{(1)}, \mathcal{L}_-^{(1)}\}$ является расширением дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, (или вторая является сужением первой), если $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+^{(1)}$, $\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-^{(1)}$.

Символически это определение можно переписать так:

$$\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} \subset \{\mathcal{L}_+^{(1)}, \mathcal{L}_-^{(1)}\} \iff \mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+^{(1)},\ \mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-^{(1)}. \tag{3.48}$$

Пусть K, Q — угловые операторы подпространств $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$, а K_1, Q_1 — угловые операторы подпространств $\mathcal{L}_+^{(1)}$, $\mathcal{L}_-^{(1)}$. Тогда соотношение (3.48) можно переписать в следующем виде (проверить!):

$$\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} \subset \{\mathcal{L}_+^{(1)}, \mathcal{L}_-^{(1)}\} \iff K \subset K_1,\ Q \subset Q_1. \tag{3.49}$$

Определение 3.11. Дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ называется максимальной дуальной парой, если не существует дуальной пары $\{\mathcal{L}_+^{(1)}, \mathcal{L}_-^{(1)}\}$, являющейся ее расширением и с ней не совпадающей:

$$\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} \subset \{\mathcal{L}_+^{(1)}, \mathcal{L}_-^{(1)}\} \implies \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} = \{\mathcal{L}_+^{(1)}, \mathcal{L}_-^{(1)}\}. \quad \square$$

Рассуждая аналогично тому, как мы делали на стр. 56 относительно максимальных семидефинитных подпространств, можно показать, что каждая дуальная пара допускает расширение до максимальной дуальной пары. Наша ближайшая цель — описать максимальные дуальные пары. Следующая ниже теорема 3.20, в части эквивалентности $(i) \iff (ii)$ принадлежащая Р.С. Филлипсу, дает полный ответ на вопрос, какие дуальные пары максимальны.

Теорема 3.20. Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара. Тогда следующие условия эквивалентны:

(*i*) $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}^-$, т.е. $\mathcal{L}_+$, и $\mathcal{L}_-$ — максимальное неотрицательное и максимальное неположительное подпространство, соответственно.

(*ii*) $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная дуальная пара.

(*iii*) $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]}$.

Доказательство. $(i) \implies (ii)$ следует из определения максимальности дуальной пары (см. (3.48)).

$(ii) \implies (iii)$. Поскольку $\mathcal{L}_+$ — неотрицательное, а $\mathcal{L}_-$ — неположительное подпространства, то справедливо включение (3.33). В предположении (*ii*) допустим, что $\mathcal{L}_0 \neq (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]}$. Тогда найдется ненулевой вектор $x_0 \in (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]} \setminus \mathcal{L}_0$. Этот вектор не может быть дефинитным, в противном случае дуальная пара $\{\text{л.о.}\{\mathcal{L}_+, x_0\}, \mathcal{L}_-\}$ была бы расширением дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, если x_0 — положительный вектор, или дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \text{л.о.}\{\mathcal{L}_-, x_0\}\}$ была бы расширением дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, если x_0 — отрицательный вектор. Но x_0 не может быть и нейтральным, поскольку он по предположению не входит хотя бы в одно из подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$, а потому дуальная пара $\{\text{л.о.}\{\mathcal{L}_+, x_0\}, \text{л.о.}\{\mathcal{L}_-, x_0\}\}$ — расширение дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ с ней не совпадающее, что противоречит максимальности $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$.

$(iii) \implies (i)$ доказано в более общем случае в теореме 3.12. □

Следствие 3.4. Пусть $K : \operatorname{dom} K \subset \Pi_+ \to \Pi_-$ и $Q : \operatorname{dom} Q \subset \Pi_- \to \Pi_+$ — сжатия, удовлетворяющие условию:

$$(Kx_+, y_-) = (x_+, Qy_-), \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} K, \quad y \in \operatorname{dom} Q. \tag{3.50}$$

Тогда найдется такое расширение $\widetilde{K} \in \mathfrak{K}^+$ оператора K, что $\widetilde{K}^*$ — расширение оператора Q.

Доказательство. Рассмотрим неотрицательное $\mathcal{L}_+$ и неположительное $\mathcal{L}_-$ подпространства:

$$\mathcal{L}_+ = \{x = x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \operatorname{dom} K\},$$

$$\mathcal{L}_- = \{x = Qx_- + x_- \mid x_- \in \operatorname{dom} Q\}.$$

Их условия (3.50) следует, что подпространства $\mathcal{L}_\pm$ образуют дуальную пару. В силу теоремы 3.20 существует максимальная дуальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$, являющаяся расширением для $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$. Пусть $\widetilde{K}$ и $\widetilde{Q}$ — угловые операторы подпространств $\widetilde{\mathcal{L}}_+$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_-$, соответственно. Тогда $K \subset \widetilde{K}$, $Q \subset \widetilde{Q}$ и из теоремы 3.11 следует, что $\widetilde{Q} = \widetilde{K}^*$. □

Ниже будет доказан результат (теорема 3.21), являющийся в части инвариантности обобщением теоремы Понтрягина (теорема 3.16). Прежде введем некоторые определения. Будем говорить, что *дуальная пара* $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ *инвариантна* относительно оператора A, если $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$. Говорят, что дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ является *максимальной инвариантной дуальной парой*, если она не допускает нетривиальных расширений как инвариантная дуальная пара. Рассуждая так же, как относительно существования максимальных семидефинитных подпространств (см. стр. 56), для максимальных дуальных пар можно доказать (проверить!) с помощью леммы Цорна существование максимальной инвариантной дуальной пары. Отметим, что максимальная инвариантная дуальная пара не обязана быть максимальной дуальной парой, инвариантной относительно оператора. Наша цель доказать, что для J-самосопряженного оператора эти понятия совпадают.

Лемма 3.3. Изотропная часть $\mathcal{L}_0$ подпространства $\mathcal{L}$, инвариантного относительно J-самосопряженного оператора A, инвариантна относительно этого оператора: $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$.

Доказательство. В самом деле, если $x \in \mathcal{L}_0$, то из равенств

$$[Ax, y] = [x, Ay] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}_0, \quad \forall y \in \mathcal{L}$$

следует справедливость утверждения леммы. □

Теорема 3.21. . Пусть $A = A^c : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$ — J-самосопряженный оператор, пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, инвариантная относительно A. Тогда существует максимальная дуальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$ инвариантная относительно A и являющаяся расширением для исходной дуальной пары:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_+[\perp]\widetilde{\mathcal{L}}_- \quad \widetilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm, \quad A\widetilde{\mathcal{L}}_\pm \subset \widetilde{\mathcal{L}}_\pm.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная инвариантная дуальная пара и докажем, что она является инвариантной максимальной дуальной парой, т.е. $\mathcal{L}_\pm \subset \mathfrak{M}^\pm$.

Сперва проверим, что изотропные части подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ совпадают. В силу леммы 3.3 изотропные части $\mathcal{L}_{+,0}$ и $\mathcal{L}_{-,0}$ подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$, соответственно, инвариантны относительно оператора A. Следовательно, и их линейная оболочка $\mathcal{L}_0 =$ л.о.$\{\mathcal{L}_{+,0}, \mathcal{L}_{-,0}\}$, являющаяся нейтральным подпространством, также инвариантна относительно этого оператора. Тогда дуальная пара $\{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_- + \mathcal{L}_0\}$ инвариантна относительно A и является расширением для $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$. Поскольку $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная инвариантная дуальная пара, то $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_- + \mathcal{L}_0$. Отсюда, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, что возможно только при условии равенства $\mathcal{L}_{+,0} = \mathcal{L}_{-,0}$ изотропных частей подпространств, входящих в дуальную пару. Таким образом,

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{+,0} = \mathcal{L}_{-,0} = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-.$$

Рассмотрим подпространство $\mathcal{L} := (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]}$. Согласно лемме 3.1 подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно оператора A. В силу леммы 2.4 имеем $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp][\perp]}$ и потому $\mathcal{L}_0$ — изотропная часть как для $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$, так и для $\mathcal{L}$. Воспользуемся следствием 2.3 и разложим подпространство $\mathcal{L}$ в прямую сумму:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\dot{+}]\mathcal{L}^{(1)},$$

где $\mathcal{L}^{(1)}$ — невырожденное подпространство, а потому из следствия 2.1 — пространство Понтрягина $\Pi_{\varkappa_1} := \mathcal{L}^{(1)}$ с $\varkappa_1 \leq \varkappa$ положительными квадратами. Докажем, что $\Pi_{\varkappa_1} = \{0\}$. В самом деле, пусть P — проектор из $\mathcal{L}$ на $\Pi_{\varkappa_1}$, соответствующий разложению: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\dot{+}]\Pi_{\varkappa_1}$, $B := PA|\Pi_{\varkappa_1}$. Поскольку для произвольных векторов $x, y \in \Pi_{\varkappa_1}$, с учетом изотропности $\mathcal{L}_0$, имеет место цепочка равенств:

$$[Bx, y] = [PAx, y] = [Ax, y] = [x, Ay] = [x, PAy] = [x, By],$$

то B — самосопряженный оператор в $\Pi_{\varkappa_1}$. Сперва предположим, что $\varkappa_1 \neq 0$. В этом случае из теоремы 3.16 следует, что у оператора B существует $\varkappa_1$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_{+,1}$. Рассмотрим подпространство $\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1}$. По построению оно неотрицательно и J-ортогонально $\mathcal{L}_-$. Более того, оно инвариантно относительно оператора A. В самом деле, пусть $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1}$, где $x_1 \in \mathcal{L}_+$, $x_2 \in \mathcal{L}_{+,1}$. Отсюда, учитывая, что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_+$ инвариантны относительно оператора A, $(I - P)\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_+$ и подпространство $\mathcal{L}_{+,1}$ инвариантно относительно B, получим:

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 = Ax_1 + (I - P)Ax_2 + PAx_2 =$$

$$= Ax_1 + (I - P)Ax_2 + Bx_2 = y_1 + y_2 \in \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1} \tag{3.51}$$

$$\text{поскольку } y_1 = Ax_1 + (I - P)Ax_2 \in \mathcal{L}_+,\ y_2 = Bx_2 \in \mathcal{L}_{+,1}.$$

т.е. подпространство $\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1}$ инвариантно относительно оператора A. Но тогда дуальная пара $\{\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1}, \mathcal{L}_-\}$ инвариантна относительно A и является нетривиальным расширение дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, являющейся по условию максимальной инвариантной относительно A — противоречие, показывающее, что $\varkappa_1 = 0$. Таким образом, либо $\Pi_{\varkappa_1} = \{0\}$, либо $\Pi_{\varkappa_1}$ — отрицательное подпространство. Последнее невозможно по аналогичной аргументации как и выше: дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-[+]\Pi_{\varkappa_1}\}$ инвариантна относительно A и является нетривиальным расширение дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, являющейся по условию максимальной инвариантной относительно A — противоречие. Итак, $\Pi_{\varkappa_1} = \{0\}$, или, что эквивалентно,

$$\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-)^{[\perp]}.$$

Для заключения $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ остается воспользоваться теоремой 3.12, учитывая, что $\operatorname{codim}(\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-) = \dim(\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-)^{[\perp]}$. □

В следующей ниже теореме 3.22 мы остановимся на свойствах операторов специального класса, а именно, на свойствах J-неотрицательных операторов.

Определение 3.12. Будем говорить, что оператор A является J-неотрицательным, и обозначать кратко $A \overset{J}{\geqslant} 0$, если $[Ax, x] \geqslant 0$, $\forall x \in \Pi_\varkappa$. Соответственно назовем A оператором J-положительным, $A \overset{J}{>} 0$, если $[Ax, x] > 0$, $\forall x \neq 0$. □

Отметим, что J-неотрицательный оператор является J-самосопряженным и потому по теореме 3.7 его невещественный спектр состоит из не более, чем $\varkappa$ пар нормальных собственных значений, которым соответствуют нейтральные собственные векторы. Однако это общее положение можно уточнить для J-неотрицательных операторов.

Теорема 3.22. Пусть A — J-неотрицательный оператор в $\Pi_\varkappa$. Тогда:

(i) Собственные векторы x, соответствующие собственным значениям $0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$ дефинитны, более того, $\lambda[x,x] > 0$.

(ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(iii) Если $Ax = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, то у собственного вектора x нет присоединенных векторов.

(iv) Положительный спектр оператора A состоит из не более, чем $\varkappa$ (с учетом кратности) нормальных собственных значений. Если A — J-положительный оператор, то его положительный спектр состоит ровно (с учетом кратности) из $\varkappa$ нормальных значений.

(v) J-неотрицательный оператор A имеет инвариантную максимальную дуальную пару $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ и при этом $\sigma(A|\mathcal{L}_+) \subset [0,\infty)$ и $\sigma(A|\mathcal{L}_-) \subset (-\infty, 0]$.

Доказательство. (i). Пусть x_0 — собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ и $[x_0, x_0] = 0$. Наша цель доказать, что $\lambda = 0$. Предположим противное: $\lambda \neq 0$. Тогда $[Ax_0, x_0] = \lambda[x_0, x_0] = 0$. Поскольку по условию леммы $A \overset{J}{\geqslant} 0$, т.е. $[Ax, x] \geqslant 0$, $\forall x \in \Pi_\varkappa$, то к полуторалинейной форме $[Ax, y]$ применимо неравенство Коши-Буняковского

$$|[Ax, y]|^2 \leq [Ax, x][Ay, y].$$

Так как $[Ax_0, x_0] = 0$, то $\lambda[x_0, x_0] = [Ax_0, y] = 0$ при всех $y \in \Pi_\varkappa$, т.е., поскольку $\lambda \neq 0$, x_0 — изотропный вектор в $\Pi_\varkappa$. Но тогда по аксиоме (i) определения 2.3 пространства $\Pi_\varkappa$ получаем, что $x_0 = 0$ — противоречие, показывающее, что $\lambda = 0$.

Таким образом, если x — собственный вектор оператора A, соответствующее собственному значению $\lambda \neq 0$, то $[Ax, x] = \lambda[x, x] \neq 0$. Так как A — J-неотрицательный оператор, то отсюда имеем $\lambda[x, x] > 0$.

(ii). Согласно теореме 3.7 невещественный спектр J-самосопряженного оператора может состоять самое большее из конечного числа нормальных собственных значений, которым соответствуют нейтральные собственные векторы. Поскольку в силу (i) нейтральные собственные векторы отвечают только нулевому собственному значению, то $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(iii). Предположим, что собственному значению λ отвечает нетривиальная жорданова цепочка $x_0, x_1, \ldots, x_p$, $p \geq 1$. Тогда согласно (3.22) вектор x_0 нейтрален. В силу (i) имеем $\lambda = 0$.

(iv). Представим оператор A в матричной форме относительно канонического разложения $\Pi_\varkappa = \Pi_+[+]\Pi_-$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} =: A_1 + A_2.$$

По условию $A \overset{J}{\geqslant} 0$. Следовательно, при произвольном $x = x_+ + x_-$ имеем:

$$(A_1 x, x) = (A_{22} x_-, x_-) = -(-P_- A x_-, x_-) = -[A x_-, x_-] \leq 0.$$

Таким образом, J-неотрицательный оператор A есть возмущение неположительного оператора конечномерным, а потому компактным, оператором A_2. Так как открытое связное множество $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \subset \rho(A_1)$ и точки $\lambda > \|A\|$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, то по теореме И.Ц. Гохберга (теорема 3.6) получаем, что множество $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ состоит из нормальных собственных значений и регулярных точек оператора A. Поскольку у оператора A нет невещественных собственных значений, то во множестве $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ могут быть только положительные собственные значения. Таким образом, положительная полуось состоит из регулярных точек и нормальных собственных значений оператора A. В силу (ii) корневые линеалы оператора A, соответствующие положительным собственным значениям λ, совпадают с ядрами $\ker(A - \lambda I)$. Так как согласно следствию 3.1 эти ядра попарно ортогональны, а согласно (i) они положительны, то л.о.$\{\ker(A - \lambda I) \mid \lambda > 0\}$ положительна. Остается воспользоваться аксиомой (iii) определения 2.3 пространства Понтрягина и получить, что л.о.$\{\ker(A - \lambda I) \mid \lambda > 0\} \leq \varkappa$.

Если же оператор A является J-положительным, то у него нулевое ядро и потому $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство, существующее у A по теореме Понтрягина (теорема 3.16), состоит из линейной оболочки ядер операторов $A - \lambda I$ при $\lambda > 0$. Таким образом, $\dim$ л.о.$\{\ker(A - \lambda I) \mid \lambda > 0\} = \varkappa$.

(v). Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — инвариантная относительно A максимальная дуальная пара. Так как подпространство $\mathcal{L}_+$ конечномерно, то спектр $\sigma(A|\mathcal{L}_+)$состоит из собственных значений. В силу (i) этот спектр не может содержать отрицательные точки и потому $\sigma(A|\mathcal{L}_+) \subset [0, \infty)$. Рассмотрим $\sigma(A|\mathcal{L}_-)$. Это множество не содержит положительных собственных значений, иначе было бы противоречие с (i). Поскольку множество $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ состоит из нормальных точек оператора A, то остается один вариант — это множество состоит из точек регулярного типа оператора $A|\mathcal{L}_-$. Однако все точки λ с $|\lambda| > \|A\|$ — регулярные точки для $A|\mathcal{L}_-$. По теореме Красносельского-Крейна (теорема 3.3) имеем $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \subset \rho(A|\mathcal{L}_-)$, а потому $\sigma(A|\mathcal{L}_-) \subset (-\infty, 0]$. □

Далее мы будем исследовать вопрос о существовании общего инвариантного подпространства или даже инвариантной дуальной пары у семейства операторов. Для этого нам понадобится следующее определение. Здесь и далее символом Ω с индексом и без будем обозначать топологические множества.

Определение 3.13. Система топологических множеств $\{\Omega_\alpha\}_\alpha$ называется *центрированной*, если любой конечный набор множеств Ω_{α_1}, Ω_{α_2}, ..., Ω_{α_n} имеет непустое пересечение:

$$\cap_{k=1}^{n} \Omega_{\alpha_k} \neq \emptyset. \quad \square \tag{3.52}$$

Отметим следующий общий факт (теорема Тихонова): множество Ω является компактом тогда и только тогда, когда любая его центрированная система замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение, т.е.

$$\forall \, \{\Omega_\alpha\}_\alpha : \; \{\Omega_\alpha \subset \Omega, \; \Omega_\alpha = \overline{\Omega}_\alpha, \; \cap_{k=1}^{n} \Omega_{\alpha_k} \neq \emptyset\} \implies \{\cap_\alpha \Omega_\alpha \neq \emptyset\}. \tag{3.53}$$

В качестве такого множества Ω в дальнейших рассуждениях будут фигурировать операторные шары $\Omega = \mathfrak{K}^{\pm}$ и их замкнутые подмножества.

Лемма 3.4. Множество угловых операторов, соответствующих максимальным неотрицательным и максимальным неположительным инвариантным подпространствам оператора A, образуют замкнутые в слабой операторной топологии множества в $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, соответственно.

Доказательство. Проверим справедливость леммы для угловых операторов, соответствующих максимальным неотрицательным инвариантным подпространствам оператора A. Для угловых операторов, соответствующих максимальным неположительным инвариантным подпространствам оператора A, доказательство подобно.

Пусть K_n — угловые операторы максимальных неотрицательных инвариантных подпространств оператора A. Тогда они удовлетворяют равенству (3.35):

$$K_n A_{11} + K_n A_{12} K_n - A_{21} - A_{22} K_n = 0.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным ранее (см. стр. 62) показывают, что если K_n слабо сходятся к K_0, то K_0 — решение уравнения (3.35) и потому является угловым оператором максимального неотрицательного подпространства инвариантного относительно A. $\square$

Основным результатом этого раздела является сформулированная и доказанная ниже теорема Наймарка (теорема 3.23). Прежде докажем несколько вспомогательных предложений, каждое из которых, впрочем, имеет самостоятельный интерес, и напомним некоторые определения.

Определение 3.14. Говорят, что операторы A и B коммутируют, если они перестановочны: $AB = BA$. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $\mathcal{E}$ — m-мерное пространство, а $\{A_\alpha\}$ — семейство коммутирующих операторов. Тогда существует элемент $x_0 \in \mathcal{E}$, $x_0 \neq 0$, являющийся собственным вектором всех операторов семейства: $A_\alpha x_0 = \lambda_\alpha x_0, \quad \forall \alpha$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности пространства m. Если $\dim \mathcal{E} = 1$, то в качестве $x_0 \neq 0$ можно взять любой элемент из $\mathcal{E}$, так как в этом случае каждый из операторов — умножение на константу.

Пусть утверждение леммы доказано для пространства $\mathcal{E}$ с $\dim \mathcal{E} < m$. Докажем, что оно верно также и для случая $\dim E = m$. Заметим сначала, что если операторы A_α пропорциональны единичному, т.е. $A_\alpha = \lambda_\alpha I$, то, как и в случае $\dim \mathcal{E} = 1$, в качестве $x_0 \neq 0$ можно взять любой элемент из $\mathcal{E}$.

Пусть существует оператор A_{α_0}, который не является оператором умножения на константу и пусть λ_0 — его собственное значение.

Тогда его ядро $\ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)$ — инвариантное подпространство для всех операторов семейства:

$$(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)A_\alpha x = A_\alpha(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)x = 0, \quad \forall x \in \ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I),$$

и $\dim\ \ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I) < m$.

Рассмотрим операторы $A_\alpha|\ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)$, являющиеся сужениями операторов A_α на $\ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)$. Так как $\dim\ \ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I) < m$, то, по предположению индукции, найдется элемент $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)$, являющийся общим собственным элементом для всех операторов $A_\alpha|\ker(A_{\alpha_0} - \lambda_0 I)$, а потому и для операторов A_α. $\square$

Лемма 3.6. У любого конечного множества $\{A_k\}_{k=1}^n$ коммутатирующих J-самосопряженных операторов существует общий неотрицательный собственный вектор.

Доказательство. Вновь, как и при доказательстве леммы 3.5, используем метод математической индукции, но на этот раз по количеству операторов. Если $n = 1$, то по теореме Понтрягина (см. теорему 3.16) существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \subset \Pi_\varkappa$. Сужение $A_1|\mathcal{L}_+$ оператора A_1 на это подпространство является $\varkappa$-мерным оператором (ассоциируется с матрицей размером $\varkappa \times \varkappa$) и потому имеет ровно $\varkappa$ (с учетом кратностей) собственных значений и по крайней мере один собственный вектор $x_0 \neq 0$, который является неотрицательным: $x_0 \in \mathcal{L}_+$.

Пусть утверждение леммы доказано для $n-1$ операторов $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Докажем, что оно справедливо и для n операторов. У оператора A_n, как отмечалось выше, есть неотрицательный собственный вектор x_0. Пусть λ_0 — соответствующее собственное значение этого оператора: $A_n x_0 = \lambda_0 x_0$. Ядро оператора $A_n - \lambda_0 I$ инвариантно относительно операторов A_j, $j = \overline{1, n-1}$ и содержит хотя бы один неотрицательный вектор. Рассмотрим 2 случая:

(a) $\mathcal{L}_n := \ker(A_n - \lambda_0 I)$ — вырожденное подпространство;

(b) $\mathcal{L}_n$ — невырожденное подпространство.

Если $\mathcal{L}_n$ вырождено, то его изотропная часть $\mathcal{L}_n^0 = \mathcal{L}_n \cap \mathcal{L}_n^{[\perp]}$ нетривиальна, конечномерна и в силу леммы 3.3 инвариантна относительно всех операторов A_j, $j = \overline{1, n-1}$. По лемме 3.5 операторы $B_j := A_j|\mathcal{L}_n$, $j = \overline{1, n}$, а потому и A_j, $j = \overline{1, n}$, имеют общий собственный вектор, который в данном случае будет нейтральным.

Пусть $\mathcal{L}_n$ — невырожденное подпространство. Тогда оно является пространством Понтрягина с $\varkappa_1 : \ 0 < \varkappa_1 \leq \varkappa$, положительными квадратами. По предположению индукции, операторы B_j,

$j = \overline{1, n-1}$, имеют в $\mathcal{L}_n$ общий неотрицательный собственный вектор. Но по построению, этот вектор является собственным и для $B_n = \lambda_0 I$. Следовательно, операторы B_j, $j = \overline{1,n}$, а потому и A_j, $j = \overline{1,n}$, имеют общий неотрицательный собственный вектор. $\square$

Продолжим формулировку и доказательство вспомогательных утверждений, предшествующих доказательству теоремы Наймарка.

Лемма 3.7. Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная инвариантная дуальная пара для каждого оператора семейства $\{A_j\}_{j=1}^n$ коммутирующих J-самосопряженных операторов, действующих в $\Pi_\varkappa$.

Тогда $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ являются максимальным неотрицательным и максимальным неположительным подпространствами, соответственно: $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$.

Доказательство. В своих рассуждениях мы будем следовать доказательству теоремы 3.21, порой повторяя целые куски с чуть измененной аргументацией.

Поскольку $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная инвариантная дуальная пара для каждого оператора семейства, то также как и на стр. 75, имеем:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{+,0} = \mathcal{L}_{-,0} = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-,$$

где $\mathcal{L}_0 = $ л.о.$\{\mathcal{L}_{+,0}, \mathcal{L}_{-,0}\}$, а $\mathcal{L}_{+,0}$ и $\mathcal{L}_{-,0}$ — изотропные части подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$, соответственно.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{L} := (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp]}$. Согласно лемме 3.1 подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно каждого из операторов A_j, $j = \overline{1,n}$. В силу леммы 2.4 имеем $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)^{[\perp][\perp]}$ и потому $\mathcal{L}_0$ — изотропная часть как для $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$, так и для $\mathcal{L}$. Воспользуемся следствием 2.3 и разложим подпространство $\mathcal{L}$ в прямую сумму:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 [\dot{+}] \mathcal{L}^{(1)},$$

где $\mathcal{L}^{(1)}$ — невырожденное подпространство, а потому из следствия 2.1 — пространство Понтрягина $\Pi_{\varkappa_1} := \mathcal{L}^{(1)}$ с $\varkappa_1 \le \varkappa$ положительными квадратами. Докажем, что $\Pi_{\varkappa_1} = \{0\}$. В самом деле, пусть P — проектор из $\mathcal{L}$ на $\Pi_{\varkappa_1}$, соответствующий разложению: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 [\dot{+}] \Pi_{\varkappa_1}$, $B_j := PA_j | \Pi_{\varkappa_1}$. Поскольку для произвольных векторов $x, y \in \Pi_{\varkappa_1}$, с учетом изотропности $\mathcal{L}_0$, имеет место цепочка равенств:

$$[B_j x, y] = [PA_j x, y] = [A_j x, y] = [x, A_j y] = [x, PA_j y] = [x, B_j y],$$

то B_j, $j = \overline{1,n}$, — самосопряженный оператор в $\Pi_{\varkappa_1}$. Сперва предположим, что $\varkappa_1 \ne 0$. В этом случае из леммы 3.6 следует, что у оператора B_j, $j = \overline{1,n}$, существует общий неотрицательный собственный вектор x_0 и потому, положив $\mathcal{L}_{+,1} :=$ л.о.$\{x_0\}$, получим, что $\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1}$ — их общее неотрицательное инвариантное подпространство (см. (3.51)). Но тогда дуальная пара $\{\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_{+,1}, \mathcal{L}_-\}$ инвариантна относительно каждого A_j, $j = \overline{1,n}$, и является нетривиальным расширение дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, являющейся по условию максимальной инвариантной относительно семейства $\{A_j\}_{j=1}^n$ — противоречие, показывающее, что $\varkappa_1 = 0$. Таким образом, либо $\Pi_{\varkappa_1} = \{0\}$, либо $\Pi_{\varkappa_2}$ — отрицательное подпространство. Последнее невозможно по аналогичной аргументации как и выше: дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-[+]\Pi_{\varkappa_1}\}$ инвариантна относительно каждого A_j, $j = \overline{1,n}$, и является нетривиальным расширение дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, являющейся по условию максимальной инвариантной относительно всего семейства — противоречие. Итак, $\Pi_{\varkappa_1} = \{0\}$, или, что эквивалентно,

$$\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-)^{[\perp]}.$$

Для заключения $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ остается воспользоваться теоремой 3.12, учитывая, что $\operatorname{codim}(\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-) = \dim(\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-)^{[\perp]}$. □

Пусть далее $\mathfrak{A} := \{A\}$ — коммутативное семейство J-самосопряженных операторов: $A = A^c$, $A_1A_2 = A_2A_1$ для любых A, A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$. Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — инвариантная дуальная пара для семейства $\mathfrak{A}$: $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$ при любом $A \in \mathfrak{A}$. Обозначим через K угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$, а через Q — угловой оператор неположительного подпространства $\mathcal{L}_-$:

$$\mathcal{L}_+ = \{x_+ + Kx_+ : \, x_+ \in P_+\mathcal{L}_+\} \quad \mathcal{L}_- = \{Qx_- + x_- : \, x_- \in P_-\mathcal{L}_-\}.$$

Пусть $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$ — максимальная дуальная пара: $\widetilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, инвариантная относительно оператора A и являющаяся расширением исходной инвариантной дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$. Пусть $\widetilde{K}$ и $\widetilde{Q}$ — угловые операторы подпространств $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_-\}$, соответственно. Тогда (см. следствие 3.4) $K \subset \widetilde{K}$, $Q \subset \widetilde{Q}$, $\widetilde{Q} = \widetilde{K}^*$ и $\widetilde{K}$ удовлетворяет уравнению (3.35):

$$\widetilde{K}A_{11} + \widetilde{K}A_{12}\widetilde{K} + A_{12}^* - A_{22}\widetilde{K} = 0.$$

Множество всех таких операторов $\widetilde{K}$ обозначим $\Omega_A(K,Q)$:

$$\begin{aligned}\Omega_A(K,Q) := \{\widetilde{K} \in \mathfrak{K}^+ \mid K \subset \widetilde{K},\\ Q \subset \widetilde{K}^*,\, \widetilde{K}A_{11} + \widetilde{K}A_{12}\widetilde{K} + A_{12}^* - A_{22}\widetilde{K} = 0\}.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Отметим, что в силу теоремы 3.21 множество $\Omega_A(K,Q) \neq \emptyset$. Более того, если перефразировать лемму 3.7, то получим:

Лемма 3.7(1). Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара инвариантная относительно конечного семейства $\{A_j\}_{j=1}^n$ коммутирующих самосопряженных операторов, пусть K и Q — угловые операторы подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$, соответственно.

Тогда пересечение

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Omega_{A_j}(K,Q) \neq \emptyset. \tag{3.55}$$

Лемма 3.8. Множество $\Omega_A(K,Q)$ замкнуто в слабой операторной топологии.

Доказательство. Пусть $K_n \in \Omega_A(K,Q)$ и $\widetilde{K}_n$ сходится к $\widetilde{K}_0$ в слабой операторной топологии. Проверим, что $\widetilde{K}_0 \in \Omega_A(K,Q)$.

Из леммы 3.4 следует, что $\widetilde{K}_0$ — угловой оператор максимального неотрицательного подпространства, инвариантного относительно оператора A, а потому он удовлетворяет уравнению (3.35). Остается проверить, что $K \subset \widetilde{K}_0$ и $Q \subset \widetilde{K}_0^*$. Первое из этих включений вытекает из того, что при $x_+ \in \operatorname{dom} K$ и произвольном $y \in \Pi_-$ имеем

$$(Kx_+, y_-) = (\widetilde{K}_n x_+, y_-) \to (\widetilde{K}_0 x_+, y_-) = (Kx_+, y_-).$$

Второе включение следует из того, что оно эквивалентно равенству $(\widetilde{K}_0 x_+, y_-) = (x_+, Qy_-)$ при всех $x_+ \in \Pi_+$ и $y_- \in \operatorname{dom} Q$, а последнее следует из равенств $(\widetilde{K}_n x_+, y_-) = (x_+, Qy_-)$ при всех $x_+ \in \Pi_+$ и $y_- \in \operatorname{dom} Q$. □

Следующий результат показывает, что результат, аналогичный лемме 3.7, верен для произвольного семейства коммутирующих операторов.

Лемма 3.9. Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, инвариантная относительно семейства $\mathfrak{A} = \{A\}$ коммутирующих самосопряженных операторов, пусть K и Q — угловые операторы подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$, соответственно.

Тогда пересечение

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \Omega_A(K,Q) \neq \emptyset, \tag{3.56}$$

т.е. найдется оператор $\widetilde{K_0}$: $\widetilde{K}_0 \in \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \Omega_A(K,Q)$ такой, что максимальная дуальная пара

$$\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}: \quad \begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_+ &= \{x = x_+ + \widetilde{K}_0 x_+ \mid x_+ \in \Pi_+\} \\ \widetilde{\mathcal{L}}_- &= \{x = \widetilde{K}_0^* x_- + x_- \mid x_- \in \Pi_-\}, \end{aligned}$$

инвариантна относительно каждого оператора $A \in \mathfrak{A}$ и является расширением $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$.

Доказательство. Рассмотрим систему $\{\Omega_A(K,Q)\}_{A\in\mathfrak{A}}$ множеств $\Omega_A(K,Q) \subset \mathfrak{K}^+$. По лемме 3.8 множества $\Omega_A(K,Q)$ замкнуты в слабой операторной топологии. В силу леммы 3.7(1) множество $\{\Omega_A(K,Q)\}_{A\in\mathfrak{A}}$ центрировано, т.е. каждый конечный набор подмножеств имеет непустое пересечение. Для доказательства леммы остается воспользоваться компактностью $\mathfrak{K}^+$ и теоремой Тихонова (см. (3.53)). $\square$

Определение 3.15. Оператор A называется J-нормальным, если он коммутирует со своим J-сопряженным, или, что то же:

$$[Ax, Ay] = [A^c x, A^c y], \quad \forall x, y \in \Pi_\varkappa. \quad \square$$

Теорема 3.23 (М.А. Наймарк). Пусть $\mathfrak{A} = \{A\}$ — множество коммутирующих J-нормальных операторов, действующих в $\Pi_\varkappa$, обладающее тем свойством, что если $A \in \mathfrak{A}$, то и $A^c \in \mathfrak{A}$. Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, инвариантная относительно $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm, \quad \text{что означает} \quad A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm, \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда существует максимальная дуальная пара подпространств $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$, инвариантная относительно $\mathfrak{A}$ и являющаяся расширением исходной дуальной пары:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm, \quad \mathfrak{A}\widetilde{\mathcal{L}}_\pm \subset \widetilde{\mathcal{L}}_\pm, \quad \mathcal{L}_\pm \subset \widetilde{\mathcal{L}}_\pm. \quad \square$$

Доказательство. Введем для J-нормального оператора A множество $\Omega_A(K,Q)$ согласно определению (3.54). Тогда утверждение теоремы Наймарка о существовании максимальной дуальной пары $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$ для всего множества $\mathfrak{A}$ J-нормальных операторов равносильно тому, что выполнено условие (3.56):

$$\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \Omega_A(K,Q) \neq \emptyset.$$

Докажем это утверждение.

Представим любой J-нормальный оператор $A \in \mathfrak{A}$ в виде

$$A = \frac{1}{2}(A + A^c) + i\frac{A - A^c}{2i} = A_R + iA_I, \tag{3.57}$$

где A_R — вещественная часть A, а A_I — соответственно мнимая часть оператора A.

Предоставляем читателю проверить следующие простейшие свойства операторов A_R и A_I.

1°. Операторы A_R и A_I J-самосопряженные: $A_R = A_R^c$, $A_I = A_I^c$.

2°. Операторы A_R и A_I коммутируют: $A_R A_I = A_I A_R$.

3°. Любое подпространство инвариантно относительно A и A^c одновременно тогда и только тогда, когда оно инвариантно одновременно относительно A_R и A_I.

Последнее свойство позволяет в условиях теоремы множество J-нормальных операторов $\mathfrak{A} = \{A\}$ заменить на множество J-самосопряженных операторов:

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{A_R \mid A \in \mathfrak{A}\} \bigcup \{A_I \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

и для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 3.9. □

Приведем некоторые приложения этой теоремы.

Определение 3.16. Непрерывный линейный оператор U называется J-унитарным, если

$$[Ux, Uy] = [x, y], \ \forall x, y \in \Pi_\varkappa \ \text{ и } U\Pi_\varkappa = \Pi_\varkappa. \tag{3.58}$$

Упражнение 3.8. Доказать, что выполнение условий (3.58) достаточно, чтобы оператор U был J-унитарным, т.е. дополнительно линейным и непрерывным оператором. □

Из определения J-унитарного оператора U следует, что он обратим на всем пространстве и его обратный U^{-1} — также J-унитарный оператор. Кроме того, из определения следует, что оператор U J-унитарен тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$U^c U = U U^c = I, \ \text{ или, что равносильно, } \ U^c = U^{-1}. \tag{3.59}$$

откуда следует, что J-унитарный оператор является J-нормальным. Поскольку вместе с оператором J-нормальным является и его J-сопряженный, то и обратный оператор U^{-1} также J-нормальный.

Теорема 3.24. . Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — инвариантная дуальная пара J-унитарного оператора U, действующего в $\Pi_\varkappa$. Тогда существует максимальная дуальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$ также инвариантная относительно U и являющаяся расширением для исходной инвариантной дуальной пары.

Доказательство. Наша цель — свести доказательство к применению теоремы Наймарка (теорема 3.23). Рассмотрим множество $\mathfrak{U} = \{U^k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$. Множество $\mathfrak{U}$ состоит из J-унитарных, а потому из J-нормальных операторов и содержит с каждым оператором U^k его J-сопряженный оператор U^{-k}. Найдем дуальную пару $\{\mathcal{L}_{+,1}, \mathcal{L}_{-,1}\}$, являющуюся инвариантной относительно $\mathfrak{U}$ и расширением для $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$.

Поскольку $\mathcal{L}_+$ — конечномерное подпространство, то $U\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, а потому и для всех целых степеней имеем: $U^k\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$. Положим $\mathcal{L}_{+,1} = \mathfrak{L}_+$.

Так как $U\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$, то для натуральных k имеем:

$$\mathcal{L}_- \subset U^{-1}\mathcal{L}_- \subset U^{-2}\mathcal{L}_- \ldots U^{-k}\mathcal{L}_- \ldots .$$

Из J-унитарности оператора U^{-1} следует, что каждое из подпространств $U^{-k}\mathcal{L}_-$ является неположительным, а потому неположительным будет их объединение и его замыкание. Положим $\mathcal{L}_{-,1} = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U^{-k}\mathcal{L}_-}$. Поскольку

$$U \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U^{-k}\mathcal{L}_- = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U^{-k+1}\mathcal{L}_- = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U^{-k}\mathcal{L}_-,$$

то и $U\mathcal{L}_{-,1} = \mathcal{L}_{-,1}$, а потому это верно и для всех целых степеней оператора U, т.е. $\mathfrak{U}\mathcal{L}_{-,1} \subset \mathcal{L}_{-,1}$.

Осталось проверить, что $\mathcal{L}_{+,1}$ J-ортогонально $\mathcal{L}_{-,1}$. Для этого достаточно проверить, что $\mathcal{L}_+$ J-ортогонально $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U^{-k}\mathcal{L}_-$ и затем воспользоваться непрерывностью индефинитной метрики. Пусть $x \in \mathcal{L}_+$, $y \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U^{-k}\mathcal{L}_-$, т.е. существует такое $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $y = U^{-k}z$, $z \in \mathcal{L}_-$. Но тогда, с учетом того, что $U^k x \in \mathcal{L}_+$ и $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, имеем:

$$[x, y] = [x, U^{-k}z] = [U^k x, z] = 0.$$

Теперь к дуальной паре $\{\mathcal{L}_{+,1}, \mathcal{L}_{-,1}\}$ и коммутативному семейству $\mathfrak{U}$ применим теорему Наймарка (теорема 3.23) и получим существование искомой максимальной дуальной пары, которая, в частности, будет инвариантной и относительно оператора U. $\square$

Замечание 3.2. Способом, аналогичным приведенному при доказательстве теоремы 3.24, можно дуальную пару $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, инвариантную относительно любого семейства коммутирующих J-унитарных операторов, продолжить до максимальной дуальной пары, инвариантной относительно этого семейства операторов.

Ниже, в теореме 3.27, доказанный выше результат для J-унитарных операторов будет использован для доказательства существования специальных $\varkappa$-мерных неотрицательных инвариантных подпространств у, вообще говоря, неограниченного J-самосопряженного оператора.

Доказанная теорема 3.24 говорит о возможности расширения инвариантной относительно J-унитарного оператора U дуальной пары до максимальной дуальной пары, обладающей тем же свойством. В частности, если принять $\mathcal{L}_\pm = \{0\}$, то эта теорема утверждает существование максимальной дуальной пары, инвариантной относительно U. Однако, она ничего не говорит о спектре сужения оператора на эти инвариантные максимальные семидефинитные подпространства. Ниже, в теореме 3.15, этот пробел будет ликвидирован даже в более общем случае J-несжимающих операторов.

Пусть задано каноническое разложение пространства Понтрягина $\Pi_\varkappa$ и канонические проекторы $P_\pm$:

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-, \quad P_\pm \Pi_\varkappa = \Pi_\pm.$$

Определение 3.17. Всюду заданный оператор V называется J-несжимающим, если

$$[Vx, Vx] \geqslant [x, x], \quad \forall x \in \Pi_\varkappa. \quad \square \tag{3.60}$$

Пусть

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

— матричное представление J-несжимающего оператора V. Рассмотрим оператор:

$$P_- + P_+ V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Так как при $x_+ \in \Pi_+$ справедливы соотношения:

$$[Vx_+, Vx_+] = \|V_{11}x_+\|^2 - \|V_{21}x_+\|^2 \geq [x_+, x_+] = \|x_+\|^2,$$

то

$$\|V_{11}x_+\|^2 \geq \|V_{21}x_+\|^2 + \|x_+\|^2 \geq \|x_+\|^2,$$

а потому оператор V_{11} непрерывно обратим и обратный — оператор сжатия, т.е. $\|V_{11}^{-1}\| \leq 1$. Отсюда следует, что оператор $P_- + P_+V$ — обратим на всем пространстве и

$$(P_- + P_+V)^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11}^{-1} & -V_{11}^{-1}V_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для J-несжимающего оператора V корректно определено на всем пространстве *преобразование Потапова–Гинзбурга*:

$$T = (P_+ + P_-V)(P_- + P_+V)^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11}^{-1} & -V_{11}^{-1}V_{12} \\ V_{21}V_{11}^{-1} & V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12} \end{bmatrix}.$$

Проверим, что оператор T — сжатие, т.е. $(y, y) \geqslant (Ty, Ty)$ при любом $y \in \Pi_\varkappa$. В самом деле, представим $y = (P_- + P_+V)x$, а потому $Ty = (P_+ + P_-V)x$, и получим:

$$\begin{aligned} (y, y) - (Ty, Ty) &= ((P_- + P_+V)x, (P_- + P_+V)x) - \\ &\quad - ((P_+ + P_-V)x, (P_+ + P_-V)x) \\ &= [Vx, Vx] - [x, x] \geq 0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Из того, что T — сжатие, вытекает, что каждый из операторов $V_{11}^{-1}V_{12}$, $V_{21}V_{11}^{-1}$ и $V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}$ — также сжатия. Поэтому V_{12} и V_{21} — ограниченные операторы, и

$$\begin{aligned} V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{21}V_{11}^{-1}V_{12} \end{bmatrix} =: V_1 + V_2, \end{aligned} \tag{3.62}$$

где оператор V_1 является сжатием, а V_2 — компактный оператор, так как все элементы этой матрицы — ограниченные конечномерные, а потому компактные операторы.

Их (3.62) вытекает, в частности, нижеследующая теорема Бродского-Иохвидова об ограниченности J-несжимающего оператора, доказанная ими в гораздо более общем случае.

Теорема 3.25 (М.Л. Бродский, И.С. Иохвидов). J-несжимающий оператор, действующий в $\Pi_\varkappa$, является непрерывным оператором. $\square$

Отметим, что в определении J-унитарного оператора U можно было не требовать его непрерывности, она следует, как доказано выше, из условия $[Ux, Ux] = [x, x]$.

Определение 3.18. J-несжимающий оператор V называется равномерно J-несжимающим, если существует такое $k > 0$, что

$$[Vx, Vx] \geqslant [x, x] + k\|x\|^2. \quad \square \tag{3.63}$$

Из равенств (3.61) следует, что V — равномерно J-несжимающий оператор тогда и только тогда, когда его преобразование Потапова–Гинзбурга T — равномерное сжатие, т.е. $\|T\| < 1$. Повторяя рассуждения, примененные при доказательстве (3.62), получим, что равномерно J-несжимающий оператор представим в виде суммы равномерного сжатия V_1 и компактного оператора V_2. Поэтому по теореме Гохберга (см. теорему 3.6) все точки λ с $|\lambda| \geqslant 1$ являются нормальными точками, $\lambda \in \widetilde{\rho}(V)$, т.е. они либо регулярные ($\lambda \in \rho(V)$), либо являются нормальными собственными значениями ($\lambda \in \widetilde{\sigma}_p(V)$).

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность:

$$\mathbb{T} = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\},$$

и докажем, $\lambda \in \mathbb{T}$ не могут быть собственными значениями равномерно J-несжимающего оператора V, т.е. $\mathbb{T} \subset \rho(V)$. В самом деле, если $Vx = \lambda x$, $|\lambda| = 1$, то

$$[Vx, Vx] = |\lambda|^2[x, x] = [x, x] \geqslant [x, x] + k\|x\|^2.$$

Отсюда следует, что $k\|x\|^2 \leqslant 0$, $k > 0$, и потому $x = 0$.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3.10. Если V — равномерно J-несжимающий оператор, то $\sigma(V) \cap \mathbb{T} = \{\emptyset\}$.

Ниже нам понадобится *преобразование Кэли–Неймана.* Пусть $\lambda \neq \overline{\lambda}$ — регулярная точка оператора A. Тогда оператор V:

$$V = (A - \overline{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}$$

называется преобразованием Кэли–Неймана оператора A. Оператор A:

$$A = (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V - I)^{-1}$$

называется *обратным преобразованием Кэли–Неймана* оператора V.

Лемма 3.11. Пусть V — преобразование Кэли-Неймана оператора A в точке λ с $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Тогда:

(i) Оператор V является J-несжимающим тогда и только тогда, когда A — J-диссипативный оператор.

(ii) Оператор V является равномерно J-несжимающим тогда и только тогда, когда A — ограниченный равномерно J-диссипативный оператор.

(iii) Оператор V является J-унитарным тогда и только тогда, когда A — J-самосопряженный оператор.

Доказательство. Докажем (ii), остальные утверждения доказываются по той же схеме.

Так как $\lambda \in \rho(A)$, то произвольный вектор $x \in \Pi_\varkappa$ можно представить в виде: $x = (A - \lambda I)y$. Тогда $Vx = (A - \overline{\lambda} I)y$ и потому:

$$\begin{aligned} [Vx, Vx] - [x, x] &= [(A - \lambda I)y, (A - \lambda I)y] - [(A - \overline{\lambda} I)y, (A - \overline{\lambda} I)y] \\ &= 4 \operatorname{Im} \lambda \cdot \operatorname{Im}[Ay, y]. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Предположим, что V — равномерно J-несжимающий оператор: $[Vx, Vx] - [x, x] \geq k\|x\|^2$. Тогда по лемме 3.10 имеем $1 \in \rho(V)$ и потому $A = (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V - I)^{-1}$ — ограниченный оператор. Осталось показать, что A — равномерно J-диссипативный, т.е. существует $a > 0$: $\operatorname{Im}[Ay, y] \geq a\|y\|^2$. Из равенства $x = (A - \lambda)y$ следует неравенство: $\|x\| \geq \frac{\|y\|}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|}$. Из (3.64) следует, что $\operatorname{Im}[Ay, y] \geq \frac{k}{4 \operatorname{Im} \lambda \cdot \|(A-\lambda I)^{-1}\|^2} \|y\|^2$. Таким образом, A — ограниченный равномерно J-диссипативный оператор с $a = \frac{k}{4 \operatorname{Im} \lambda \cdot \|(A-\lambda I)^{-1}\|^2}$.

Обратно, пусть A — ограниченный равномерно J-диссипативный оператор: $\operatorname{Im}[Ay, y] \geq a\|y|^2$. Тогда из (3.64) следует, что

$$[Vx, Vx] - [x, x] \geq 4a \operatorname{Im} \lambda \|y\|^2 \geq \frac{4a \operatorname{Im} \lambda}{(\|A\| + |\lambda|)^2} \|x\|^2,$$

т.е. V — равномерно J-несжимающий оператор. $\square$

Следствием леммы 3.11 является следующее утверждение:

Лемма 3.12. У равномерно J-несжимающего оператора V существует $\varkappa$-мерное положительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$ и максимальное отрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_-$. При этом:

$$\lambda \in \sigma(V|\mathcal{L}_+) \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| > 1, \tag{3.65}$$

$$\lambda \in \sigma(V|\mathcal{L}_-) \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| < 1, \tag{3.66}$$

Доказательство. Согласно лемме 3.10 точка $1 \in \rho(V)$. Рассмотрим оператор A, являющийся обратным преобразованием Кэли-Неймана для оператора V:

$$A = (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V - I)^{-1}.$$

Из леммы 3.11, (ii), следует, что A — ограниченный равномерно J-диссипативный оператор. В силу теоремы 3.17 у оператора A существуют $\varkappa$-мерное положительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ := P_\sigma \Pi_\varkappa$ и максимальное отрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_- := (I - P_\sigma)\Pi_\varkappa$ и при этом (см. (3.46))

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-.$$

Относительно этого разложения, поскольку $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, оператор A представим в виде диагональной матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix},$$

где $A_\pm = A|\mathcal{L}_\pm$. Следовательно, и преобразование Кэли-Неймана $V = (A - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I)^{-1}$ этого оператора также представимо в виде диагональной матрицы:

$$V = \begin{bmatrix} (A_+ - \overline{\lambda} I)(A_+ - \lambda I)^{-1} & 0 \\ 0 & (A_- - \overline{\lambda} I)(A_- - \lambda I)^{-1} = \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_+ & 0 \\ 0 & V_- \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\mathcal{L}_\pm$ — инвариантные подпространства оператора V, а $V_\pm = V|\mathcal{L}_\pm$.

Поскольку $\operatorname{Im} \sigma(A_+) \geq 0$ и $\operatorname{Im} \sigma(A_-) \leq 0$ (см. теорему 3.17), то спектры $V_\pm$ удовлетворяют условиям (3.65) и (3.66). $\square$

Теорема 3.26. У любого J-несжимающего , в частности, J-унитарного, в $\Pi_\varkappa$ оператора V существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$ и максимальное неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_-$ такие, что

$$\lambda \in \sigma(V|\mathcal{L}_+) \implies |\lambda| \geq 1,$$
$$\lambda \in \sigma(V|\mathcal{L}_-) \implies |\lambda| \leq 1,$$

Доказательство. Пусть $\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-$ — каноническое разложение пространства Понтрягина. Представим оператор V в матричном виде относительно этого разложения:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

и введем в рассмотрение операторы $V_\varepsilon = VI_\varepsilon$, где I_ε — диагональный оператор: $I_\varepsilon = \operatorname{diag}\{\sqrt{1+\varepsilon}\,I; \sqrt{1-\varepsilon}\,I\}$, $0 < \varepsilon < 1$. Проверим, что операторы V_ε являются равномерно J-несжимающими:

$$[V_\varepsilon x, V_\varepsilon x] - [x,x] = [VI_\varepsilon, VI_\varepsilon] - [x,x] \geq [I_\varepsilon, I_\varepsilon] - [x,x] = \varepsilon\|x\|^2.$$

Так как $1 - \sqrt{1 \pm \varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\|I_\varepsilon - I\| \to 0$. Отсюда

$$\|V_\varepsilon - V\| \leq \|V\|\,\|I_\varepsilon - I\| \to 0, \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, операторы V_ε сходятся к V в равномерной операторной топологии. По лемме 3.12 у каждого из операторов V_ε существует $\varkappa$-мерное положительное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_{+,\varepsilon}$ и максимальное отрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_{-,\varepsilon}$. При этом:

$$\lambda \in \sigma(V_\varepsilon|\mathcal{L}_{+,\varepsilon}) \implies |\lambda| > 1,$$
$$\lambda \in \sigma(V_\varepsilon|\mathcal{L}_{-,\varepsilon}) \implies |\lambda| < 1,$$

Остается применить теоремы 3.14 и 3.15, положив в первом случае $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, а во втором — $\Omega = \mathbb{D}$, где $\mathbb{D} = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$. □

Теперь мы готовы доказать в полном объеме теорему Понтрягина, положившую начало теории инвариантных подпространств в пространствах с индефинитной метрикой. Предварительно напомним, что все невещественные точки являются регулярными для гильбертова самосопряженного оператора (не обязательно ограниченного) A и для его резольвенты $(A-\lambda I)^{-1}$ справедлива оценка:

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{3.67}$$

Теорема 3.27 (Л.С. Понтрягин). Пусть $A = A^c$ — вообще говоря неограниченный оператор, действующий в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$. Тогда у него существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$: $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ такое, что $\operatorname{Im}\sigma(A|\mathcal{L}_+) \geq 0$.

Доказательство. Прежде установим, что у J-самосопряженного оператора в $\Pi_\varkappa$ есть хотя бы одна регулярная точка в $\mathbb{C}^+$. Согласно лемме 2.2 можно без ограничения общности считать, что каноническое разложение

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-$$

выбрано так, что $\Pi_+ \subset \operatorname{dom} A$. Тогда оператор A можно представить в виде суммы $A = -AJ + 2AP_+$ самосопряженного оператора $A_1 := -AJ$ и конечномерного непрерывного $A_2 := 2AP_+$. Отсюда

$$A - \lambda I = (A_1 - \lambda I) + A_2 = (I + A_2(A_1-\lambda I)^{-1})(A_1 - \lambda I).$$

В силу (3.67) получаем, что $\lambda \in \rho(A)$ при $|\operatorname{Im}\lambda| > \|A_2\|$.

Пусть $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, и

$$V = (A - \overline{\lambda} I)(A-\lambda I)^{-1} = I + 2i\operatorname{Im}\lambda \cdot (A-\lambda I)^{-1} \tag{3.68}$$

— преобразование Кэли–Неймана J-самосопряженного оператора A. Согласно лемме 3.11,(iii), оператор V унитарен. По теореме 3.18 у оператора V существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$ такое, что

$$\lambda \in \sigma(V|\mathcal{L}_+) \implies |\lambda| \geq 1.$$

Из (3.68) следует, что $1 \notin \sigma_p(V)$ и потому

$$A = (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V - I)^{-1} = \lambda I + 2i \operatorname{Im}\lambda \cdot (V-I)^{-1}.$$

Отсюда следует, что $\varkappa$-мерное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+$ инвариантно относительно A и операторы $V_+ := V|\mathcal{L}_+$ и $A_+ := A|\mathcal{L}_+$ связаны преобразованием Кэли–Неймана:

$$V_+ = (A_+ - \overline{\lambda} I)(A_+ - \lambda I)^{-1}, \quad A_+ = (\lambda V_+ - \overline{\lambda} I)(V_+ - I)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_0 \in \sigma(A_+) \iff \mu_0 = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \overline{\lambda}} \in \sigma(V_+).$$

Поскольку по условию $\sigma(V_+) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, то $\operatorname{Im} \sigma(A_+) \geq 0$. $\square$

Замечание 3.3. Отметим, что исторически первой была доказана теорема Понтрягина, затем И.С. Иохвидов (1949), применив преобразование Кэли–Неймана, доказал, что у J-унитарного оператора в $\Pi_\varkappa$ существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство. Мы же применили другую схему.

4 Полнота и базисность корневых векторов

В этой части курса будут рассмотрены важные для теории и ее приложений вопросы полноты и базисности системы собственных и присоединенных (корневых) элементов J-самосопряженных операторов, действующих в $\Pi_\varkappa$.

Предварительно напомним некоторые определения.

Определение 4.1. Система элементов $\{g_j\}$ называется полной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если замыкание линейной оболочки этих элементов совпадает с $\mathcal{H}$, т.е. з.л.о.$\{g_j\} = \mathcal{H}$. Это равносильно тому, что если для элемента $x_0 \in \mathcal{H}$ выполнено условие $(x_0, g_j) = 0$ для всех j, то $x_0 = 0$. $\square$

Отметим, что для полной системы $\{g_j\} \subset \mathcal{H}$ при любом $x_0 \in \mathcal{H}$ можно так подобрать линейную комбинацию $x_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} g_j$ с коэффициентами $\alpha_j^{(n)}$, зависящими от n, что $x_n \longrightarrow x_0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Определение 4.2. Система элементов $\{e_j\} \subset \mathcal{H}$ называется базисом в пространстве $\mathcal{H}$, если для любого элемента $x_0 \in \mathcal{H}$ найдется единственная последовательность чисел α_j такая, что

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j g_j \longrightarrow x_0 \ (n \longrightarrow \infty) \ \left(\Longleftrightarrow \|x_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j\| \ \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty) \right).$$

$\square$

Упражнение 4.1. Пусть $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Доказать, что система элементов $\{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots\}$ полна в $\mathcal{H}$, но не является базисом. Более того, в этой системе можно выбросить любой ее элемент, и свойство полноты сохранится. $\square$

Пусть $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а T — непрерывный и непрерывно обратимый оператор. Образуем систему $\{g_j\} = \{Te_j\}$. Такая система элементов также является базисом в $\mathcal{H}$ и называется *базисом Рисса*. Докажем следующую известную лемму, на которую мы далее будем ссылаться.

Лемма 4.1. Система элементов $\{g_j\} \subset \mathcal{H}$ является базисом Рисса тогда и только тогда, когда в $\mathcal{H}$ существует эквивалентное скалярное произведение (т.е. скалярное произведение, порождающее эквивалентную норму) такое, что в этом скалярном произведении $\{g_j\}$ является ортонормированным базисом.

Доказательство. Пусть $\{g_j\}$ — базис Рисса в $\mathcal{H}$, т.е. $g_j = Te_j$, $j = 1, 2, \ldots$, оператор T ограничен и ограниченно обратим, а $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение:

$$(x, y)_1 := (T^{-1}x, T^{-1}y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{4.1}$$

Тогда

$$(g_j, g_k)_1 = (Te_j, Te_k)_1 = (e_j, e_k) = \delta_{jk}, \tag{4.2}$$

т.е. $\{g_j\}$ — ортонормированная система (и ортонормированный базис) в новом скалярном произведении.

Поскольку T — непрерывный и непрерывно обратимый оператор, то

$$\frac{1}{\|T\|}\|x\| \leq \|x\|_1 (= \|T^{-1}x\|) \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|x\|,$$

т.е. нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны.

Докажем теперь, что если $\{g_j\}$ — ортонормированный базис в новом скалярном произведении $(\cdot, \cdot)_1$, эквивалентном исходному $(\cdot, \cdot)$, то $\{g_j\}$ является базисом Рисса в $\mathcal{H}$, т.е. существует такая ортонормированная система $\{e_j\}$ и такой непрерывный и непрерывно обратимый оператор T, что $g_j = Te_j$, $j = \overline{1, \infty}$.

Так как скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)_1$ эквивалентны, то, согласно известной из курса функционального анализа теореме Лакса–Мильграма (ее доказательство основано на известной теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве), существует непрерывный равномерно положительно оператор S такой, что

$$(x, y)_1 = (Sx, y) = (S^{1/2}x, S^{1/2}y). \tag{4.3}$$

Так как $\{g_j\}$ — ортонормированный базис в скалярном произведении (4.1), то выполнены свойства (4.2) и из (4.3) имеем

$$(g_j, g_k)_1 = (S^{1/2}g_j, S^{1/2}g_k) = \delta_{jk}. \tag{4.4}$$

Если теперь ввести векторы $e_j = S^{1/2} g_j$, $j = 1, 2, \ldots$, то

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}, \tag{4.5}$$

т.е. $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в исходном скалярном произведении. Положив $T = S^{-1/2}$, получим

$$g_j = Te_j := S^{-1/2} e_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4.6}$$

где T — ограниченный и ограниченно обратимый оператор. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению вопросов базисности системы элементов в пространстве $\Pi_\varkappa$.

Определение 4.3. Система элементов $\{e_j\} \subset \Pi_\varkappa$ называется J-ортонормированной, если

$$[e_j, e_k] = \begin{cases} 0 & \text{если } \ j \neq k; \\ 1 & \text{если } \ j = k, \ e_j > 0; \\ -1 & \text{если } \ j = k, \ e_j < 0. \end{cases} \quad \square$$

Докажем следующий аналог свойства ортонормированных систем в гильбертовом пространстве.

Лемма 4.2. Полная J-ортонормированная система элементов в $\Pi_\varkappa$ является базисом Рисса в этом пространстве.

Доказательство. Рассмотрим подпространства

$$\mathcal{L}_+ := \text{л.о.}\{e_j : \ e_j > 0\}, \quad \mathcal{L}_- := \text{з.л.о.}\{e_j : \ e_j < 0\}, \tag{4.7}$$

и введем линеал $\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-$. Так как $\dim \mathcal{L}_+ < \infty$, то

$$\overline{\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-} = \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-,$$

т.е. $\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-$ — подпространство. Поскольку по условию $\{e_j\}$ — полная система, то линейными комбинациями элементов системы $\{e_j\}$ можно как угодно точно приблизить любой элемент из $\Pi_\varkappa$. Значит,

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-. \tag{4.8}$$

При этом элементы $e_j > 0$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{L}_+$ по отношению к скалярному произведению $(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]$, а элементы $e_j < 0$ — соответственно ортогональный базис в $\mathcal{L}_-$ по отношению к скалярному произведению $(\cdot,\cdot) = -[\cdot,\cdot]$. Объединение всей совокупности элементов $\{e_j\}$ образует ортогональный базис в $\Pi_\varkappa$ по отношению к каноническому скалярному произведению

$$(x,y) = [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \quad x = x_+ + x_-, \\ y = y_+ + y_-, \quad x_\pm, y_\pm \in \mathcal{L}_\pm, \tag{4.9}$$

отвечающему разложению (4.8).

Если в $\Pi_\varkappa$ было задано другое эквивалентное скалярное произведение, то, согласно лемме 4.1, система элементов $\{e_j\}$ будет базисом Рисса в $\Pi_\varkappa$ с заданным скалярным произведением. $\square$

Определение 4.4. Система элементов $\{e_j\} \subset \Pi_\varkappa$ называется почти J-ортонормированной, если ее можно представить как объединение

$$\{e_j\} = \{f_j\}_{j=1}^m \cup \{g_j\}_{j=1}^\infty \tag{4.10}$$

J-ортонормированной системы $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ и системы $\{f_j\}_{j=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, состоящей из конечного набора линейно независимых элементов f_j, $j = 1, \ldots, m$, причем

$$[f_j, g_k] = 0, \quad j = 1, \ldots, m; \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad \square \tag{4.11}$$

Теорема 4.1. Полная почти J-ортонормированная система является базисом Рисса в $\Pi_\varkappa$.

Доказательство. Введем подпространства

$$\mathcal{L}_: = \text{л.о.}\{f_j\}_{j=1}^m, \quad \mathcal{M} := \text{з.л.о.}\{e_j\}_{j=1}^\infty, \quad \mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}. \tag{4.12}$$

Так как $\dim \mathcal{L} < \infty$, то, как и при доказательстве леммы 4.2, имеем

$$\overline{\mathcal{L}[+]\mathcal{M}} = \mathcal{L}[+]\mathcal{M} = \Pi_\varkappa. \tag{4.13}$$

Тогда $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — невырожденные подпространства пространства $\Pi_\varkappa$, и потому

$$\mathcal{L} = \Pi_{\varkappa_1}, \quad \mathcal{M} = \Pi_{\varkappa_2}, \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa. \tag{4.14}$$

Пусть

$$\Pi_{\varkappa_1} = \Pi_{+,1}[\oplus]\Pi_{-,1}, \quad \Pi_{\varkappa_2} = \Pi_{+,2}[\oplus]\Pi_{-,2} \tag{4.15}$$

— соответствующие канонические разложения пространств $\Pi_{\varkappa_1}$ и $\Pi_{\varkappa_2}$. Тогда

$$\Pi_\varkappa = (\Pi_{+,1}[\oplus]\Pi_{+,2})[\oplus](\Pi_{-,1}[\oplus]\Pi_{-,2}) =: \Pi_+[\oplus]\Pi_- \tag{4.16}$$

— каноническое разложение пространства $\Pi_{\varkappa}$. Ему отвечают проекторы P_+ и P_-, оператор канонической симметрии $J = P_+ - P_-$ и каноническое дефинитное скалярное произведение

$$(x, y) := [Jx, y]. \tag{4.17}$$

Итак, имеем

$$\Pi_{\varkappa} = \Pi_+[\oplus]\Pi_- = \mathcal{L}[\oplus]\mathcal{M} = \Pi_{\varkappa_1}[\oplus]\Pi_{\varkappa_2}. \tag{4.18}$$

Так как элементы системы $\{f_j\}_{j=1}^m$ линейно независимы, то они образуют базис в $\Pi_{\varkappa_1} = \mathcal{L}$, так как $\mathcal{L}$ конечномерно: $\dim \mathcal{L} = m$. Как известно из линейной алгебры, в этом случае любой элемент x из $\mathcal{L}$ можно разложить как по базису $\{f_j\}_{j=1}^m$, так и по любому ортонормированному базису $\{e_j\}_{j=1}^m$, причем

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j = T_1 \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j, \tag{4.19}$$

где $T_1 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ — ограниченный и ограниченно обратимый оператор (матрица), связанный с переходом от ортонормированного базиса $\{e_j\}_{j=1}^m$ к базису $\{f_j\}_{j=1}^m$. Из (4.19) следует, что

$$f_j = T_1 e_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.20}$$

Далее, по построению система элементов $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ является J – ортонормированной и полной в $\mathcal{M} = \Pi_{\varkappa_2}$, поэтому, согласно теореме 4.1, она является базисом Рисса в $\mathcal{M}$. Значит, найдется ограниченный и ограниченно обратимый оператор $T_2 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ и ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=m+1}^\infty \subset \mathcal{M}$ такие, что $g_{j-m} = T_2 e_j$, $j = m+1, m+2, \ldots$.

По операторам T_1 и T_2 и ортонормированному разложению (4.18) пространства $\Pi_{\varkappa}$ введем оператор $T : \Pi_{\varkappa} \longrightarrow \Pi_{\varkappa}$, действующий по закону

$$Tx = T(x_1 + x_2) = T_1 x_1 + T_2 x_2, \quad x_1 \in \mathcal{L}, x_2 \in \mathcal{M}. \tag{4.21}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Te_j = T_1 e_j = f_j, \quad j = 1, \ldots, m; \\ Te_j = T_2 e_j = g_{j-m}, \quad j > m. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Так как здесь $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — J – ортонормированный базис в $\Pi_\varkappa$, а оператор T по построению ограничен и ограниченно обратим, то полная почти J – ортонормированная система элементов $\{f_j\}_{j=1}^{m} \cup \{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ является базисом Рисса в $\Pi_\varkappa$. □

Цель дальнейших рассмотрений — исследовать вопрос о полноте и базисности системы корневых векторов J-самосопряженного компактного оператора, действующего в $\Pi_\varkappa$. Эта теорема обобщает соответствующее утверждение для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, т.е. теорему Гильберта–Шмидта, которая гласит:

Теорема 4.2. Каков бы ни был компактный самосопряженный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, в этом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

□

Приведем простейшие примеры использования полных систем и базисов при решении линейных уравнений в пространстве $\Pi_\varkappa$, либо в обычном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть задан оператор $A : \Pi_\varkappa \longrightarrow \Pi_\varkappa$ и система $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ его собственных векторов, которая, по условию, полна в $\Pi_\varkappa$. Пусть $A_j g_j = \lambda_j g_j$, где λ_j — соответствующие собственные значения оператора A.

Рассмотрим уравнение $Ax = y$, где $y \in \Pi_\varkappa$ — заданный элемент. Если оператор A обратим, то $x = A^{-1}y$. Как найти приближенно решение x, используя полную систему собственных элементов оператора A и его собственные значения? Приблизим элемент y последовательностью элементов $y_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} g_k$ и будем искать приближенное решение x в виде $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} g_k$. Тогда

$$Ax_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} A g_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \lambda_k g_k = y_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} g_k.$$

Отсюда получаем, что $\alpha_k^{(n)} = \beta_k^{(n)} / \lambda_k$, т.е.

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k^{(n)}}{\lambda_k} g_k, \tag{4.23}$$

где $\beta_k^{(n)}$ — коэффициенты разложения элементов $y_n \longrightarrow y$ $(n \longrightarrow \infty)$.

Возникает вопрос о том, когда при $n \longrightarrow \infty$ приближенное решение сходится к точному. Если $0 \in \sigma(A)$, то либо λ_n могут стремиться к нулю при $n \longrightarrow \infty$, либо какие-то собственные значения равны нулю, т.е. в случае $0 \in \sigma(A)$ мы не можем гарантировать сходимость векторов x_n к решению x.

Если $0 \in \rho(A)$, то $|\lambda_n| \geqslant c > 0$, и сходимость x_n к решению есть.

Если $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g_k$, и тогда $\alpha_k = \beta_k/\lambda_k$, т.е. $x = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\beta_k}{\lambda_k} g_k$. Поэтому задача имеет решение тогда и только тогда, когда формальное решение x принадлежит пространству. При $0 \in \rho(A)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k$ сходится, а при $0 \in \sigma(A)$ сходимости может не быть. Если, в частности, $\lambda_j = 0$ при некотором j, то необходимо, чтобы $\beta_j = 0$. Это — необходимое условие разрешимости задачи.

Если $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис, то формально выписанное решение $x \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k/\lambda_k|^2 < \infty$.

Аналогичный подход с использованием собственных (корневых) элементов оператора A, обладающих свойством полноты либо базисности, применим и к вопросам разрешимости задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{4.24}$$

в гильбертовом либо банаховом пространстве.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству центральной спектральной теоремы данного курса лекций.

Теорема 4.3 (о полноте и базисности). Пусть J-самосопряженный оператор $A : \Pi_{\varkappa} \longrightarrow \Pi_{\varkappa}$ компактен, и $\mathcal{L}_{\lambda}(A)$ — его корневые линеалы. Обозначим

$$\mathcal{E}(A) := \text{з.л.о.}\{\mathcal{L}_{\lambda}(A) \mid \lambda \in \sigma_p(A)\}. \tag{4.25}$$

Тогда:

1°. Система корневых элементов оператора A полна тогда и только тогда, когда подпространство $\mathcal{L}_0(A)$ невырождено, т.е.

$$\{\mathcal{E}(A) = \Pi_{\varkappa}\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{L}_0(A) \cap \mathcal{L}_0(A)^{[\perp]} = \{0\}\}. \tag{4.26}$$

2°. Если $\mathcal{E}(A) = \Pi_\varkappa$, то

$$\Pi_\varkappa = \Pi'_\varkappa[+]\mathcal{H}, \tag{4.27}$$

где $\Pi'_\varkappa$ — пространство Понтрягина с тем же $\varkappa$, $\dim \Pi'_\varkappa < \infty$, а $\{\mathcal{H}; -[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертово пространство. При этом $\Pi'_\varkappa$ и $\mathcal{H}$ инвариантны относительно оператора A:

$$A\Pi'_\varkappa \subset \Pi'_\varkappa, \quad A\mathcal{H} \subset \mathcal{H}. \tag{4.28}$$

3°. Если $\mathcal{E}(A) = \Pi_\varkappa$, то в $\Pi_\varkappa$ существует почти J-ортонормированный базис, составленный из жордановых цепочек оператора A.

Доказательство. 1°. Сперва докажем, что $\mathcal{E}(A)$ — невырожденное подпространство тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_0(A)$ невырождено.

В самом деле, пусть $\mathcal{L}_0(A)$ вырождено и $x_0 \in \mathcal{L}_0(A) \cap \mathcal{L}_0(A)^{[\perp]}$. В силу следствия 3.1 вектор x_0 J-ортогонален всем корневым линеалам оператора A, а потому и $\mathcal{E}(A)$, т.е. x_0 — изотропный вектор в $\mathcal{E}(A)$.

Пусть теперь подпространство $\mathcal{E}(A)$ вырождено и $\mathcal{E}(A)^0$ — его изотропная часть. Поскольку $\dim \mathcal{E}(A)^0 \leq \varkappa$ и инвариантно относительно A, то $\mathcal{E}(A)^0$ содержит собственный вектор y_0 оператора A, отвечающий собственному значению λ_0. Так как x_0 — изотропный вектор в $\mathcal{E}(A)$, то он будет изотропным и в $\mathcal{L}_{\lambda_0}(A)$. Остается доказать, что $\lambda_0 = 0$. Последнее следует из следствия 3.2 с учетом того, что все собственные значения компактного оператора, кроме нуля, — нормальные собственные значения и потому соответствующие корневые линеалы невырождены.

Для завершения доказательства пункта 1° достаточно показать, что $\mathcal{E}(A) = \Pi_\varkappa$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(A)$ невырождено. В самом деле, если $\mathcal{E}(A)$ вырождено, то равенства быть не может.

Пусть $\mathcal{E}(A)$ невырождено. Тогда все пространство можно представить как J-ортогональную сумму инвариантных относительно A подпространств $\mathcal{E}(A)$ и его J-ортогонального дополнения:

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{E}(A)[\dot{+}]\mathcal{E}(A)^{[\perp]}.$$

Поскольку $\mathcal{E}(A)$ содержит существующее в силу теоремы 3.16 $\varkappa$-мерное неотрицательное (инвариантное) подпространство и $\mathcal{E}(A)$ невырождено, то оно содержит $\varkappa$-мерное положительное подпространство, что влечет отрицательность $\mathcal{E}(A)^{[\perp]}$. Следовательно, $\{\mathcal{E}(A)^{[\perp]}, -[\cdot,\cdot]\}$ — гильбертово пространство. Из теоремы 4.2 Гильберта–Шмидта следует, что самосопряженный компактный оператор $A|\mathcal{E}(A)^{[\perp]}$ имеет хотя бы один собственный вектор. Но это противоречит тому, что все собственные векторы оператора A лежат в $\mathcal{E}(A)$ и это подпространство невырождено. Таким образом, единственный возможный вариант — $\mathcal{E}(A)^{[\perp]} = \{0\}$, т.е. $\mathcal{E}(A) = \Pi_\varkappa$.

2°. Пусть $\mathcal{L}^0$ — изотропная часть ядра оператора A: $\mathcal{L}^0 = \ker A \cap \ker A^{[\perp]}$. Тогда $\ker A = \mathcal{L}^0 \oplus \mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_1$ — невырожденное подпространство (см. следствие 3.2). Рассмотрим разложение

$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}_1^{[\perp]}.$$

Подпространства $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_1^{[\perp]}$ невырождены и потому являются пространствами Понтрягина (см. следствие 2.1) с $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ положительными квадратами, соответственно, причем $\varkappa_0 + \varkappa_1 = \varkappa$. Обозначим $A_1 := A|\mathcal{L}_1^{[\perp]}$. По построению все корневые подпространства оператора A_1 конечномерны и из невырожденности $\mathcal{E}(A)$ следует, что они и невырождены. В самом деле, для ненулевых собственных значений конечномерность вытекает из того, что оператор A_1 компактен. Что касается $\lambda = 0$, то здесь надо воспользоваться упражнением 3.4 с учетом того, что $\ker A_1 = \mathcal{L}^0$ — конечномерное нейтральное подпространство. В силу следствия 3.1 оператор A_1 имеет конечное число собственных значений таких, что соответствующие корневые подпространства содержат хотя бы один неотрицательный вектор. Обозначим через $\Pi'_\varkappa$ линейную оболочку таких подпространств и любого положительного $\varkappa_0$-мерного подпространства из $\mathcal{L}_1$. По построению, $\Pi'_\varkappa$ — конечномерное пространство Понтрягина с $\varkappa$ положительными квадратами, инвариантное относительно A. Следовательно, его J-ортогональное дополнение $\mathcal{H}$ — отрицательное подпространство, также инвариантное относительно A.

3°. Утверждение этого пункта прямо следует из (4.27) с учетом того, что в конечномерном пространстве $\Pi'_\varkappa$ по любому оператору можно построить базис, состоящий из его жордановых цепочек (основная теорема алгебры), а также надо использовать, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ есть ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов самосопряженного компактного оператора $A|\mathcal{H}$ (теорема 4.2 Гильберта–Шмидта).

□

Следствием из теоремы 4.3 является следующее утверждение, доказательство которого предоставляем читателю. Впрочем, оно прямо следует из приведенных выше в доказательстве теоремы 4.3 построений.

Теорема 4.4. Система собственных элементов компактного J-самосопряженного оператора A, действующего в $\Pi_\varkappa$, образует J-ортонормированный базис в $\Pi_\varkappa$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1°. Невещественный спектр оператора A — пустое множество,

2°. Для всех вещественных собственных значений $\mu_k \neq 0$ выполнены свойства $\mathcal{L}_{\mu_k}(A) = \ker(A - \mu_k I)$.

3°. Подпространство $\ker A$ невырождено. □

5 Задача С.Г. Крейна

Обратим внимание на то, что индефинитная метрика может порождать пространство Понтрягина не только тогда, когда задано каноническое разложение. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, T — самосопряженный ограниченный оператор. Введем в $\mathcal{H}$ индефинитную метрику $[x, y] = (Tx, y)$. Предлагаем читателю самому доказать следующее утверждение.

Теорема 5.1. Индефинитное пространство $\{\mathcal{H}, [x, y] = (Tx, y)\}$ является пространством Понтрягина с $\varkappa$ положительными (отрицательными) квадратами тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора T: $0 \in \rho(T)$;
2. множество $\sigma(T) \cap (0, \infty)$ ($(-\infty, 0)$,соответственно) состоит из конечного числа $\varkappa$ собственных значений (с учетом кратности).

В частности, обратимые операторы вида $T = I + S$, где S — компактный оператор: $S \in \mathfrak{S}_\infty$, порождают пространство Понтрягина с конечным числом отрицательных квадратов, а обратимые операторы вида $T = -I + S$, где $S \in \mathfrak{S}_\infty$, порождают пространство Понтрягина с конечным числом положительных квадратов. □

В качестве иллюстрации того, как могут быть применены теоремы 4.3 и 4.4, рассмотрим известную спектральную проблему С.Г. Крейна, связанную с задачей о нормальных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде. Такая задача возникла в 1964 г. и породила многочисленные исследования как математиков–теоретиков, так и прикладников.

С использованием методов функционального анализа и уравнений в частных производных спектральная составляющая задачи о нормальных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде приводится к изучению спектральной задачи

$$x = \lambda P x + \lambda^{-1} Q x, \quad \lambda \neq 0, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{5.1}$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Операторы P и Q в (5.1) обладают свойствами

$$0 < P = P^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad 0 \leqslant Q = Q^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{5.2}$$

Введем в рассмотрение функцию по λ:

$$A(\lambda) = \lambda P + \lambda^{-1} Q, \quad \lambda \neq 0,$$

принимающую значения во множестве компактных операторов. Будем говорить, что точка λ_0 — регулярная точка для $A(\lambda)$, если $1 \in \rho(A(\lambda_0))$. В противном случае, λ_0 — точка спектра функции $A(\lambda)$. Число λ_0 называется собственным для $A(\lambda)$, с соответствующим собственным вектором x_0, если

$$x_0 = A(\lambda)x_0 = \lambda_0 P x_0 + \lambda_0^{-1} Q x_0.$$

векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются присоединенными к собственному вектору x_0, если выполнено следующее условие:

$$A(\lambda_0)x_k + \frac{1}{1!}\frac{\partial A(\lambda_0)}{\partial \lambda}x_{k-1} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(\lambda_0)}{\partial \lambda^k}x_0 = x_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Упорядоченное множество $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ называется жордановой цепочкой функции $A(\lambda)$, соответствующей собственному значению λ_0.

Образуем векторы специального типа:

$$Z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{\lambda_0^{j+1}} x_{k-j}. \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Говорят, что система жордановых цепочек функции $A(\lambda)$ *дважды полна* (*дважды базисна* в $\mathcal{H}$, если множество векторов специального типа полно в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (базисно в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, соответственно).

Таким образом, спектральная задача сводится к решению вопросов о полноте и о базисности векторов специального типа. Проблема полноты была решена сначала С.Г. Крейном (1964), а затем в более абстрактной форме в соавторстве с Н.К. Аскеровым и Г.И.Лаптевым (1968). Была произведена замена параметра:

$$\mu = \lambda + \lambda^{-1}$$

и в сдвоенном пространстве $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ построен оператор, обладающий полной системой корневых векторов и для которого векторы специального типа образуют жордановы цепочки.

Что касается базисности векторов специального типа, то эта проблема была решена, по-видимому, независимо В.Г. Гринли (W.H. Greenlee) (1971) и Е.А. Ларионовым (1972), которые следовали идее Аскерова–Крейна–Лаптева, но использовали чуть другую замену параметра и нашли компактный J-самосопряженный оператор $\mathfrak{A}$, действующий в $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, для которого векторы специального типа образуют жордановы цепочки, а корневой линеал в нуле совпадает с ядром оператора и дефинитен, а потому невырожден. Остается воспользоваться теоремой 4.3.

Более подробно об этом в следующей ниже теореме 5.3. Прежде напомним другую теорему Гохберга о компактных возмущениях.

Теорема 5.2 (И.Ц. Гохберг). Пусть $T(\lambda)$ — аналитическая функция, заданная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ и принимающая значения во множестве компактных операторов. Если существует такое $\lambda_0 \in \Omega$, что $1 \in \rho(T(\lambda_0))$, то $1 \in \rho(T(\lambda))$ для всех $\lambda \in \Omega$, за исключением, быть может, счетного множества, сгущающегося к границе множества Ω.

Теорема 5.3. Если P и Q — самосопряженные компактные операторы:

$$P = P^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad Q = Q^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $A(\lambda) = \lambda P + \lambda^{-1} Q$, то система жордановых цепочек функции $A(\lambda)$ дважды базисна в $\mathcal{H}$, т.е. в $\mathcal{H}^2$ существует базис Рисса, составленный из векторов специального типа (5.3).

Доказательство. Для простоты изложения дополнительно предположим, что

$$\pm 1 \in \rho(P + Q) \tag{5.4}$$

Если это было бы не так, то можно было бы произвести замену параметра $\lambda = \nu a$, $a > 0$, и перейти от операторов P, Q к операторам aP, $\frac{1}{a}Q$ с новым параметром ν. При этом a нужно выбрать так, чтобы $\pm 1 \in \rho(A(a))$. Такое положительное a существует в силу теоремы Гохберга 5.2. В самом деле, для этого достаточно положить $T(\lambda) = A(\lambda)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\lambda_0 = i$: $\pm 1 \in \rho(A(i))$.

Перепишем уравнение (5.1) в следующих двух формах:

$$x = (\lambda - \frac{1}{\lambda})Px + (P+Q)(\frac{1}{\lambda}x),$$

$$\frac{1}{\lambda}x = (P+Q)x - (\lambda - \frac{1}{\lambda})Q(\frac{1}{\lambda}x).$$

После замен

$$\mu := \lambda - \lambda^{-1}, \quad y := \lambda^{-1}x, \tag{5.5}$$

приходим к системе уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид

$$\begin{pmatrix} I & -(P+Q) \\ -(P+Q) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Введем в рассмотрение следующие матрицы и векторы в $\mathcal{H}^2$:

$$\begin{gathered} \mathcal{I} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} := -\begin{pmatrix} 0 & P+Q \\ P+Q & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A} := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{5.7}$$

и перепишем (5.6) в виде:

$$(\mathcal{I} + \mathcal{S})z = \mu\mathcal{A}z, \tag{5.8}$$

где $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}$ — компактные самосопряженные операторы в $\mathcal{H}^2$, $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}^2$. Из предположения (5.4) следует, что ядро оператора $\mathcal{I}+\mathcal{S}$ тривиально, а поскольку $\mathcal{S}$ — компактный оператор, то $\mathcal{I}+\mathcal{S}$ непрерывно обратим на всем $\mathcal{H}^2$. При этом, оператор

$$\mathcal{P} := (\mathcal{I}+\mathcal{S})^{-1} - \mathcal{I} = -\mathcal{S}(\mathcal{I}+\mathcal{S})^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty.$$

После замен

$$\mu = \nu^{-1}, \quad z = (\mathcal{I}+\mathcal{S})^{-1}v = (\mathcal{I}+\mathcal{P})v, \quad \mathfrak{A} = \mathcal{A}(\mathcal{I}+\mathcal{P}), \tag{5.9}$$

приходим к спектральной задаче

$$\mathfrak{A}v = \nu v, \quad v \in \mathcal{H}^2, \tag{5.10}$$

с компактным оператором $\mathfrak{A}$. Введем в рассмотрение индефинитную метрику:

$$[x,y] = ((\mathcal{I}+\mathcal{P})x,y), \quad x,y\in\mathcal{H}^2. \tag{5.11}$$

Согласно теореме 5.1, пространство $\{\mathcal{H}^2,[\cdot,\cdot]\}$ — пространство Понтрягина, а оператор $\mathfrak{A}$ самосопряжен относительно индефинитной метрики:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{A}x,y] &= ((\mathcal{I}+\mathcal{P})\mathcal{A}(\mathcal{I}+\mathcal{P})x,y) = \\ &= ((\mathcal{I}+\mathcal{P})x,\mathcal{A}(\mathcal{I}+\mathcal{P})y) = [x,\mathfrak{A}y].\end{aligned} \tag{5.12}$$

Так как $\mathfrak{A}$ — компактный оператор, то система его корневых элементов, согласно теореме 4.3, полна и базисна, если $\mathcal{L}_0(\mathfrak{A}) = \{0\}$.

Докажем, что выполнено даже более сильное свойство, а именно, что корневой линеал оператора $\mathfrak{A}$ в нуле совпадает с ядром этого оператора и это ядро положительно:

$$\mathcal{L}_0(\mathfrak{A}) = \ker\mathfrak{A} > 0. \tag{5.13}$$

Пусть $v\in\ker\mathfrak{A}$, т.е. $\mathcal{A}(\mathcal{I}+\mathcal{P})v = 0$, $v =\in\mathcal{H}^2$. Тогда

$$u := (\mathcal{I}+\mathcal{P})v \in \ker\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \quad \begin{matrix} x\in\ker P, \\ y\in\ker Q \end{matrix} \right\}. \tag{5.14}$$

Отсюда имеем

$$v = (\mathcal{I}+\mathcal{P})^{-1}u = (\mathcal{I}+\mathcal{S})u = \begin{pmatrix} I & -(P+Q) \\ -(P+Q) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x-(P+Q)y \\ -(P+Q)x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-Py \\ -Qx+y \end{pmatrix}, \qquad x\in\ker P, \quad y\in\ker Q.$$

Убедимся, что элемент v положителен, т.е. $[v,v]>0$.

Действительно,

$$\begin{aligned}[v,v] &= ((\mathcal{I}+\mathcal{P})v,v)_{\mathcal{H}^2} = \big((\mathcal{I}+\mathcal{P})(\mathcal{I}+\mathcal{P})^{-1}u,v\big)_{\mathcal{H}^2} = (u,v)_{\mathcal{H}^2} \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-Py \\ -Qx+y \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}^2} = (x,x)-(x,Py)+(y,-Qx)+(y,y) \\ &= (x,x)+(y,y) > 0,\end{aligned}$$

так как $P=P^*$, $Q=Q^*$ и $x\in\ker P$, $y\in\ker Q$.

Таким образом, свойство полноты и базисности системы корневых элементов задачи (5.10) доказано.

В связи с большой трудоемкостью мы опускаем доказательство того, что в каждом корневом линеале $\mathcal{L}_\nu(\mathfrak{A})$ существует базис, составленный из жордановых цепочек векторов специального типа (5.3). $\square$

Если же функция $A(\lambda)$ не имеет невещественных собственных значений, а вещественным собственным значениям отвечают лишь собственные элементы (а присоединенные отсутствуют), то система собственных элементов задачи (5.10), отвечающая всем вещественным собственным значениям, включая точку нуль, образует базис, ортонормированный относительно индефинитной метрики (5.11).

Отметим в заключение, что последняя ситуация реализуется в гидродинамической задаче (5.1) в случае, когда вязкость жидкости достаточно велика или, что равносильно, операторы P и Q достаточно малы по норме, например, если

$$4\|A\| \cdot \|B\| < 1. \tag{5.15}$$

Список литературы

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* — М.: Наука, 1986.

[2] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой.* Математический нализ // Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Математический анализ, т. 17, — М.: Наука, 1979.

[3] Гинзбург, Иохвидов И.С. *Исследования по геометрии бесконечномерных пространств.* // УМН, т. 17, № 4, 1962.

[4] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Линейные операторы в гильбертовом пространстве с G – метрикой.* // УМН, т. 26, № 4, 1971.

[5] Крейн М.Г. *Введение в геометрию индефинитных J–пространств и теорию операторов в этих пространствах.* II летняя математическая школа, т.1, Киев, 1965.

[6] Иохвидов И.С., Крейн М.Г. *Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* Труды ММО, I, 1956, т.5; II, 1959, т.8.

[7] Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H. *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric.* Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

Введение в теорию пространств Понтрягина

Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности "Математика"

Авторы:
Азизов Томас Яковлевич,
Копачевский Николай Дмитриевич

Редактор:

Корректура и верстка: Газиев Э.Л.

Подписано к печати 10.12.2008г. Формат 60x84/16.
Бумага тип. ОП. Объем п.л. Тираж 100. Заказ –

95007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского 4.
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского