МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.И. Вернадского

Кафедра математического анализа

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ, В.П. СМОЛИЧ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО СПЕЦИАЛЬНОМУ КУРСУ

"ВВЕДЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ"

Симферополь, 2009

ББК 22.161
К65

Рекомендовано к печати научно-методической комиссией факультета математики и информатики ТНУ (протокол № 2 от 22.10.2009 г.)

Рецензенты :

Орлов И.В. – д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Закора Д.А. – к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д., Смолич В.П. ***Введение в асимптотические методы*****:** Специальный курс лекций. – Симферополь: ТНУ, 2009 – 52 с. – На русском языке.

В учебном пособии содержатся основные положения теории асимптотических методов для функций действительной переменной, рассматривается метод асимтотических итераций для решений трансцендентных уравнений, асимптотическое разложение интегралов, зависящих от параметра.

Для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области математики, а также прикладной и вычислительной математики.

Содержание

Предисловие

Настоящий спецкурс предназначен для студентов пятого семестра обучения, специализирующихся по кафедре математического анализа. Целью спецкурса является ознакомление студентов с основными идеями асимптотических методов теории функций действительной переменной. В курсе рассматривается метод асимптотических итераций для решения трансцендентных уравнений, асимптотическое разложение интегралов, зависящих от параметра (интегралы Френеля, Лапласа), метод Лапласа и метод стационарной фазы. Чтение спецкурса сопровождается практическими занятиями. Курс снабжен большим количеством примеров и упражнений для самостоятельного решения.

Введение

Часто бывает, что для вычисления некоторой величины можно использовать расходящийся бесконечный ряд, причем сама величина является в некотором смысле суммой ряда. Типичная ситуация такова: некоторая функция разлагается в функциональный ряд, причем приближение, даваемое несколькими первыми членами ряда, тем лучше, чем ближе независимая переменная к некоторому предельному значению (таким значением часто является ∞). Во многих случаях члены ряда сначала быстро убывают (тем быстрее, чем ближе независимая переменная к предельному значению), но потом члены ряда вновь начинают возрастать. В математической литературе такие ряды получили название асимптотических рядов (Пуанкаре, Стильтьес, 1886). Асимптотические ряды могут как сходиться, так и расходиться, но наибольший интерес представляют расходящиеся ряды. Мы увидим ниже, что с такими формально расходящимися рядами можно, хотя и с известной осторожностью, совершать все те же действия (складывать, умножать, интегрировать, дифференцировать), что и со сходящимися функциональными рядами. Чтобы понять типичную ситуацию, которая здесь возникает, рассмотрим несколько примеров.
1. Попытаемся вычислить интеграл

$$F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xt} \cos t dt \tag{0.1}$$

для положительных значений параметра x, разлагая $\cos t$ по степеням t и интегрируя полученный ряд почленно:

$$F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xt} \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \cdots .$$

Если $x > 1$, то последний ряд сходится к сумме

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} .$$

То, что попытка оказалась успешной, можно проверить, интегрируя (0.1) два раза по частям; ограничение $x > 1$ при этом заменяется

условием $x > 0$.
2. Проделаем ту же самую процедуру с интегралом

$$G(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt. \tag{0.2}$$

Мы получим

$$G(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xt}\big(1 - t + t^2 - \cdots\big)dt = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots\ . \tag{0.3}$$

Этот ряд расходится при всех значениях x, так как

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{x} \longrightarrow \infty\,(n \longrightarrow \infty)$$

и равенство (0.3), стало быть, не имеет смысла. Причину понять не трудно: разложение функции $(1+t)^{-1}$ расходится при $t \geq 1$. Попытаемся, однако, просуммировать ряд (0.3) численно для некоторого значения x, например, для $x = 10$. Первые четыре члена имеют вид

$$0.1000 - 0.0100 + 0.0020 - 0.0006$$

и соответствующая сумма равна 0.0914. Что удивительно, эта величина очень близка к истинному значению $G(10) = 0.09156\ldots$. Чтобы понять причину этого неожиданного успеха, рассмотрим разность $\varepsilon_n(x)$ между $G(x)$ и n-й частичной суммой ряда (0.3)

$$\varepsilon_n(x) = G(x) - g_n(x),$$

где

$$g_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\,.$$

Так как

$$\frac{1}{t+1} = 1 - t + t^2 - ... + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,,$$

подстановка этого выражения в (0.2) дает

$$\varepsilon_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}\, dt\,.$$

Очевидно, $|\varepsilon_n(x)| \le \int\limits_0^\infty t^n e^{-xt} dt = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, то есть частичные суммы ряда (0.3) приближают функцию $G(x)$ с ошибкой, численно меньшей первого отбрасываемого члена ряда. При фиксированном n этот член мал, если x достаточно велико. В нашем случае ($n = 4, \quad x = 10$) будет $\varepsilon_4(10) \le 0.00024$.

Таким образом, разложение (0.3) имеет скрытый смысл: его можно рассматривать, как последовательность приближений$\{g_n(x)\}$ к значению $G(x)$. В этом смысле оно аналогично сходящемуся разложению. Имеются, однако, два важных различия. Во-первых, ошибку $\varepsilon_n(x)$ нельзя представить как сумму членов остатка. Во-вторых, частичная сумма сходящегося ряда становится, по определению, произвольно близкой к сумме ряда, когда число членов неограниченно возрастает. В случае (0.3) это не так: при данном значении x последовательные члены ряда $\dfrac{(-1)^s s!}{x^{s+1}}$ монотонно убывают до тех пор, пока s не становится больше $[x]$, то есть целой части x. После этого они неограниченно возрастают. Поэтому частичные суммы $g_n(x)$ сначала приближают $G(x)$, но когда n проходит значение $[x]$, ошибки начинают расти, в конце концов, очень сильно осциллировать.

3. Установим разложение вида (0.3) для интегральной показательной функции

$$E(x) = \int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \qquad (x > 0). \tag{0.4}$$

Интегрируя $n+1$ раз по частям, получим

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left[1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{x^n}\right] +$$

$$+(-1)^{n+1}(n+1)! \int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt\,.$$

Ряд, так же, как и в (0.3), расходится. Оценим остаток:

$$|\varepsilon_n(x)| \leqslant (n+1)!\frac{1}{x^{n+2}}e^{-x}.$$

Видно, что частичные суммы ряда тем точнее приближают функцию $E(x)$ (при фиксированном n), чем больше x. При фиксированном же значении x

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_{n+1}(x) = \infty.$$

1 Символы Ландау

Чтобы описать поведение при $x \to \infty$ интересующей нас функции $f(x)$ в терминах известной функции $g(x)$, мы часто будем использовать обозначения, введенные Ландау.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, а $g(x)$ при $x \to \infty$ может стремиться к нулю, к бесконечности или вести себя как угодно.

Определение 1.1. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to \infty$, то мы пишем $f \sim g$ $(x \to \infty)$ и говорим, что f асимптотически приближается к g или g является асимптотическим приближением функции f.

Примеры.

$$(x+1)^2 \sim x^2 \quad (x \to \infty); \qquad \operatorname{sh} x \sim \frac{1}{2}e^x \quad (x \to +\infty).$$

Определение 1.2. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ при $x \to \infty$, то пишут $f = o(g)$ $(x \to \infty)$ и говорят, что порядок f меньше, чем порядок g.

Примеры.

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)\ (x \to \infty); \qquad \frac{1}{x} = o(1)\ (x \to \infty).$$

Определение 1.3. Если отношение $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ ограничено, то пишут $f = O(g)$ и говорят, что функция f имеет порядок, не превосходящий порядка g.

В этом случае, очевидно, $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что при $x \geqslant x_0$ будет выполняться неравенство $|f(x)| \leqslant c|g(x)| \quad (x \geqslant x_0)$.

Примеры.

$$\sin x = O(1)\ (x \in \mathbb{R}); \qquad \sin x = O(x)\ (x \in \mathbb{R}).$$

Замечание 1.1. *Символ „O“ иногда связывают не с предельной точкой ∞, а с интервалом $[a, \infty)$. Таким образом, соотношение $f = O(g)$ при $x \in [a, \infty)$ просто означает, что величина $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ ограничена в интервале $[a, \infty)$. Однако, ни один из символов $\sim$ или „o“ нельзя использовать таким образом.*

Замечание 1.2. *Переменная x не должна обязательно стремиться к ∞, она может стремиться к любой конечной точке c. Например, если $c \neq 0$, то при $x \to c$*

$$\frac{(x^2 - c^2)}{x^2} \sim \frac{2(x - c)}{c} = O(x - c) = o(1).$$

Точка c называется выделенной точкой асимптотического разложения.

Замечание 1.3. *Переменная x может быть дискретной, стремиться к ∞ по последовательности значений. Например, $\sin\left(\pi n + \dfrac{1}{n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty, n$ – целые числа).*

Примеры.

$$x^2 = O(x)\ (x \to 0); \qquad x = O(x^2)\ (x \to \infty); \qquad \ln x^{\frac{1}{x}} = O(1)\ (x \to \infty);$$

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = O(x)\ (x \to \infty); \qquad e^x = 1 + x + O(x^2)\ (x \to 0).$$

2 Операции с классами функций

Символы „O“ и „o“ можно также использовать для обозначения классов функций f со свойствами, которые даются в определениях

(1.2) и (1.3). Именно, символ $o(x)$ $(x \to \infty)$ может обозначать множество функций $f(x)$, удовлетворяющих условию: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ $(x \to \infty)$. Аналогично для $O(g)$. Например,

$$o(g) + o(g) = o(g),\ o(g) = O(g).$$

Следует отметить, что многие соотношения такого типа, включая второй пример, необратимы: равенство $O(g) = o(g)$ неверно. Вообще, во втором примере естественнее было бы писать $o(x) \subset O(g)$. Обратимы лишь соотношения с символом $\sim$.

Примеры.

$$x + o(x) = O(x); \quad O(\varphi)O(\psi) = O(\varphi\psi); \qquad O(\varphi)o(\psi) = O(\varphi\psi);$$

$$O(\varphi) + O(\psi) = O(|\varphi| + |\psi|); \qquad O(O(\varphi)) = O(\varphi);$$

$$O(o(\varphi)) = o(O(\varphi)) = o(o(\varphi)) = o(\varphi); \qquad O(\varphi)o(\psi) = o(\varphi)o(\psi).$$

3 Теорема об оценке остатка сходящегося степенного ряда

Теорема. *Пусть ряд* $\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s z^s$ *сходится при* $|z| < r$. *Тогда для фиксированного* n

$$R_{n-1}(z) := \sum_{s=n}^{\infty} a_s z^s = O(z^n)$$

в любом круге $|z| \leqslant \rho$, *где* $\rho < r$.

Доказательство. Пусть $\rho' \in (\rho, r)$. Тогда $a_s {\rho'}^s \to 0$ при $s \to \infty$. Следовательно, $\exists\, A$, что $|a_s| {\rho'}^s \leqslant A$ $(s = 0, 1, 2, ...)$. Поэтому

$$|R_{n-1}(z)| = \left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s z^s\right| \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} |a_s||z|^s = \sum_{s=n}^{\infty} |a_s| {\rho'}^s \left|\frac{z}{\rho'}\right|^s \leqslant$$

$$\leqslant A \cdot \left|\frac{z}{\rho'}\right|^n \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{\rho'}\right|} = A {\rho'}^{(1-n)} \cdot \frac{|z|^n}{\rho' - |z|} \leqslant \frac{A {\rho'}^{(1-n)}}{\rho' - \rho} |z|^n. \qquad \square$$

Примеры. 1. $e^x = 1 + x + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + O(x^2)\ (x \to 0)$

2. $\ln\{1 + O(x)\} = O(x)\,(x \to 0)$.

4 Дифференцирование и интегрирование асимптотических соотношений и отношений порядка

Асимптотические соотношения и отношения порядка можно, как правило, интегрировать при условии, что справедливы некоторые очевидные ограничения, касающиеся сходимости интегралов. Предположим, например, $f(x)$ — интегрируемая функция, причем $f(x) \sim x^{\vartheta}$ при $x \to \infty$; a — любое число. Тогда при $x \to \infty$ имеем

$$\int\limits_x^{\infty} f(t)\,dt \sim -\frac{x^{\vartheta+1}}{\vartheta+1} \qquad (\vartheta < -1), \tag{4.1}$$

$$\int\limits_a^{x} f(t)\,dt \sim \begin{cases} c, & \text{если } \vartheta < -1 \\ \ln x, & \text{если } \vartheta = -1 \\ \frac{x^{\vartheta+1}}{\vartheta+1}, & \text{если } \vartheta > -1 \end{cases}, \tag{4.2}$$

c — постоянная величина.

Докажем, например, третье соотношение из (4.2). Имеем $f(x) = x^{\vartheta}\{1 + \eta(x)\}$, где $|\eta(x)| < \varepsilon$, если $x \geqslant x_0 > 0$. Тогда для $x \geqslant x_0$ получим

$$\int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt + \frac{1}{\vartheta+1}\left(x^{\vartheta+1} - {x_0}^{\vartheta+1}\right) + \int\limits_{x_0}^{x} t^{\vartheta}\eta(t)\,dt\,,$$

и поэтому

$$\frac{\vartheta+1}{x^{\vartheta+1}}\int\limits_a^{x} f(t)\,dt - 1 = \frac{\vartheta+1}{x^{\vartheta+1}}\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt - \frac{{x_0}^{\vartheta+1}}{x^{\vartheta+1}} + \frac{\vartheta+1}{x^{\vartheta+1}}\int\limits_{x_0}^{x} t^{\vartheta}\eta(t)\,dt\,.$$

Первые два члена в правой части последнего равенства стремятся к нулю при $x \to \infty$, а третий член ограничен числом ε. Отсюда вытекает искомое соотношение.

Упражнение. Доказать оставшиеся соотношения 1, 2 из (4.2).

Дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка не всегда допустимы. Например, если $f(x) = x + \cos x$, то $f(x) \sim x$ при $x \to \infty$, но утверждение $f'(x) \sim 1$ неверно. Для того, чтобы дифференцирование было возможно, необходимы дополнительные условия. Для действительных переменных эти условия можно сформулировать в терминах монотонности производной.

Теорема. *Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $f(x) \sim x^p$ при $x \to \infty$, $p \geqslant 1$. Тогда, если $f'(x)$ — неубывающая функция при всех достаточно больших x, то $f\,'(x) \sim px^{p-1}$.*

Доказательство. Имеем $f(x) = x^p \{1 + \eta(x)\}$, где $|\eta(x)| \leqslant \varepsilon$ при $x \geqslant x_0$. Если $h > 0$, то $hf\,'(x) \leqslant \int\limits_x^{x+h} f\,'(t)\,dt = f(x+h) - f(x) =$
$= \int\limits_x^{x+h} p\,t^{p-1}dt + (x+h)^p\eta(x+h) - x^p\eta(x) \leqslant h\,p(x+h)^{p-1} + 2\varepsilon(x+h)^p.$
Положим $h = \varepsilon^{\frac{1}{2}}x$.Тогда

$$f\,'(x) \leqslant px^{p-1}\left\{(1+\sqrt{\varepsilon})^{p-1} + 2p^{-1}\sqrt{\varepsilon}\right\} \qquad \left(x > \frac{x_0}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Аналогично,

$$f\,'(x) \geqslant px^{p-1}\left\{(1-\sqrt{\varepsilon})^{p-1} - 2p^{-1}\sqrt{\varepsilon}\right\} \qquad \left(x > \frac{x_0}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right). \qquad \square$$

Упражнение. Пусть u и x лежат на $[1;\infty)$; показать, что

$$\int\limits_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2+t+u)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) + O\left(\frac{u^2}{x^3}\right).$$

5 Асимптотическое решение трансцендентных уравнений

1. *Решение уравнения $x + \operatorname{th} x = u$.*
Рассмотрим уравнение

$$f(x) = x + \operatorname{th} x = u, \tag{5.1}$$

в котором u — действительный параметр. Так как

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0,$$

то $f(x)$ — строго возрастающая функция, и уравнение (5.1) при любом $u \in \mathbb{R}$ имеет ровно один действительный корень (см. рис. 1). Каково

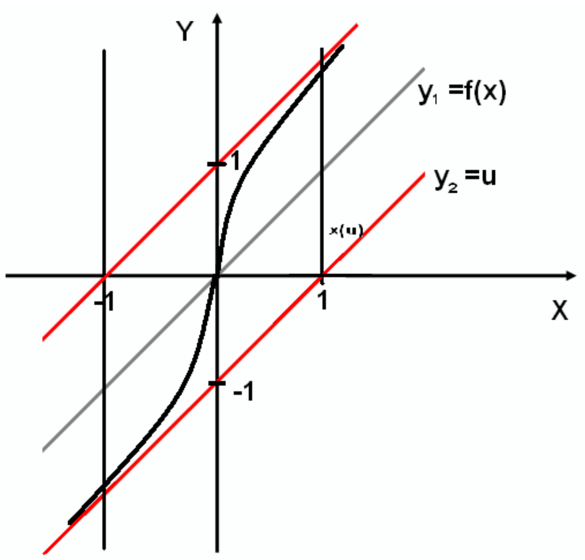

Рис. 1:

асимптотическое поведение $x(u)$ при больших положительных значениях u? Если x велико, то поведение левой части (5.1) определяется первым членом. Поэтому мы переносим $\operatorname{th} x$ в правую часть и рассматриваем его как "поправку":

$$x = u - \operatorname{th} x.$$

Так как $|\operatorname{th} x| < 1$, то отсюда следует, что

$$x(u) \sim u \qquad (u \to \infty).$$

Это – первое асимптотическое приближение для корня $x(u)$. Далее можно осуществить прием, который называется методом асимптотических итераций. Так как $\operatorname{th} x = 1 + o(1)$ $(x \to \infty)$, то

$$x(u) = u - 1 + o(1) \qquad (x \to +\infty). \tag{5.2}$$

Чтобы получить следующие приближения, мы разложим $\operatorname{th} x$ в ряд, удобный при больших x:

$$\begin{aligned}\operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \\ &= (1 - e^{-2x})\big[1 - e^{-2x} + e^{-4x} - e^{-6x} + O\big(e^{-8x}\big)\big] = \\ &= 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + O\big(e^{-8x}\big) \quad (x > 0),\end{aligned}$$

снова выразим x через u. Из (5.2) видно, что

$$e^{-2x} = O(e^{-2u}).$$

Отсюда с помощью теоремы об оценке остатка сходящегося ряда получаем

$$x = u - 1 + O\big(e^{-2x}\big) = u - 1 + O\big(e^{-2u}\big).$$

Следующая итерация дает

$$\begin{aligned}x &= u - 1 + 2\exp\big\{-2u + 2 + O\big(e^{-2u}\big)\big\} + O\big(e^{-4u}\big) = \\ &= u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u}).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Продолжение этого процесса дает последовательность приближений с ошибками, асимптотический порядок которых постоянно убывает. Сходимость этой последовательности при неограниченном возрастании числа шагов на основе проведенных рассуждений увидеть трудно, но численные возможности этого процесса можно оценить, взяв, например $u = 5$ и не учитывая ошибку $O(e^{-4u})$ в (5.3). Мы найдем, что $x = 4.0006709...$, в то время, как точное значение, полученное стандартными численными методами, равно 4.0006698.

2. *Второй пример*, характеризующий тот же самый подход, касается отыскания больших положительных корней уравнения $x \operatorname{tg} x = 1$. Это уравнение можно обратить следующим образом :

$$x = n\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

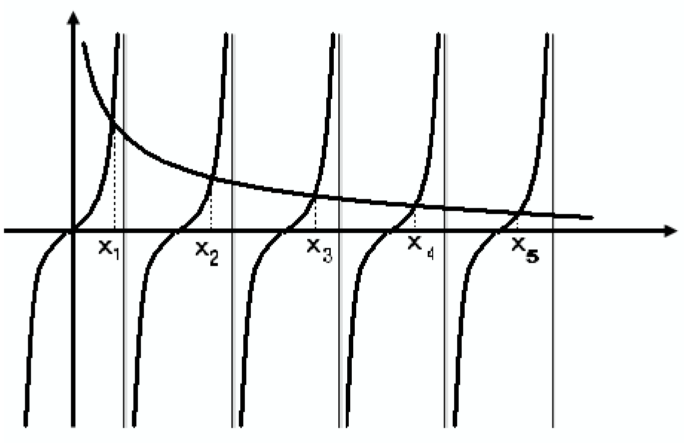

Рис. 2:

где n — целое, а арктангенс принимает главное значение. Так как в этом случае он изменяется в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, мы находим, что $x \sim n\pi$ при $n \to \infty$. Далее, если $x > 1$, то

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots .$$

Следовательно,

$$x = n\pi + O\left(\frac{1}{x}\right) = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Применяя метод асимптотических итераций еще два раза, найдем
$$x = \pi n + \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ и } x = \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{4}{3(\pi n)^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \text{ и т.д.}$$
3. В качестве *третьего примера* рассмотрим уравнение

$$f(x) := x^2 - \ln x = u, \tag{5.4}$$

в котором u — снова большой положительный параметр. Этот пример отличается от предыдущих тем, что "поправка" $\ln x$ не ограничена при $x \to 0$. Графическое рассмотрение показывает, что уравнение

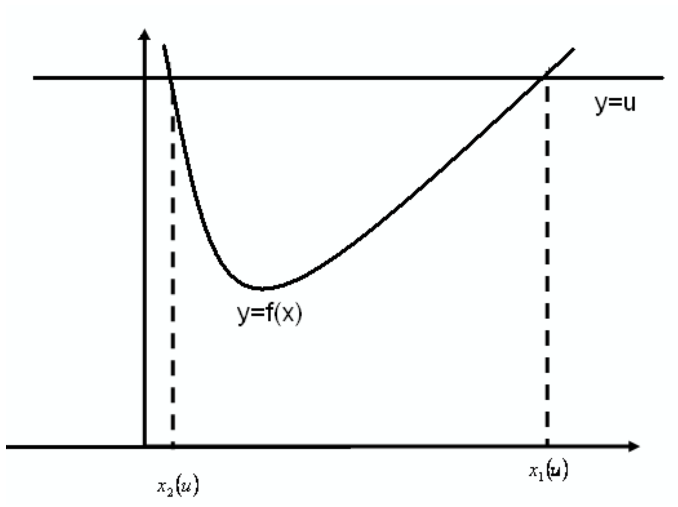

Рис. 3:

(5.4) имеет два решения: $x_1(u) \to +\infty, \quad x_2(u) \to +0$ при $u \to +\infty$. Чтобы выяснить асимптотическое поведение корней, установим следующий простой общий результат.

Теорема 5.1. (Теорема об асимптотическом поведении корня трансцендентного уравнения).
Пусть функция $g(\xi)$ непрерывна, строго возрастает в интервале $a < \xi < \infty$ и $g(\xi) \sim \xi \quad (\xi \to \infty)$. Обозначим через $\xi(u)$ корень уравнения $g(\xi) = u$, лежащий в интервале (a, ∞), когда $u > g(a)$. Тогда $\xi(u) \sim u \quad (u \to \infty)$.

Доказательство. Как видно из графика, на интервале (a, ∞) уравнение $g(\xi) = u$ имеет единственное решение $\xi(u)$, этот корень возрастает и неограничен при $u \to \infty$.
Так как $g(\xi) \sim \xi$, то уравнение $g(\xi) = u$ дает

$$\xi[1 + o(1)] = u$$

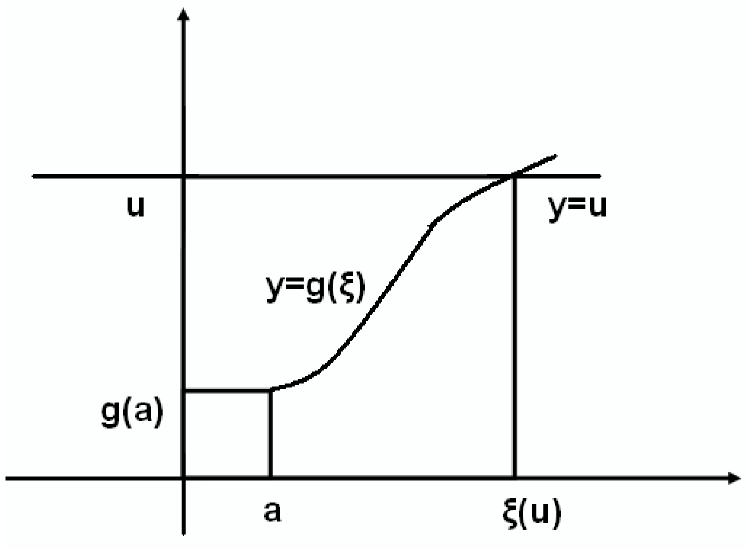

Рис. 4:

при $\xi \to \infty$, и поэтому также при $u \to \infty$. Отсюда имеем

$$\xi(u) = \frac{u}{1 + o(1)} = u[1 + o(1)] \quad (u \to \infty). \qquad \square$$

Вернемся к нахождению асимптотических решений уравнения

$$x^2 - \ln x = u.$$

а) При $x \to \infty$ в левой части уравнения главным будет первое слагаемое, т.к. $\dfrac{\ln x}{x^2} \to 0 \quad (x \to \infty)$. Поэтому

$$f(x) := x^2 - \ln x = x^2 \left[1 - \frac{\ln x}{x^2}\right] \sim x^2 \quad (x \to \infty).$$

После естественной замены $x^2 = \xi$ мы получим:
$f(\xi^{\frac{1}{2}}) = \xi - \dfrac{1}{2}\ln \xi = u$ или $\xi = u + \dfrac{1}{2}\ln \xi$.
Это основное уравнение для итераций. По теореме (5.1) имеем:

$$\xi(u) = u[1 + o(1)] \quad (u \to +\infty).$$

Применяя метод асимптотических итераций, получим:

$$\xi = u + \frac{1}{2}\ln\xi = u + \frac{1}{2}\ln\{u[1+o(1)]\} =$$
$$= u + \frac{1}{2}\ln u + \frac{1}{2}\ln[1+o(1)] = u + \frac{1}{2}\ln u + o(1) \quad (u\to+\infty).$$

Еще один шаг дает

$$\xi = u + \frac{1}{2}\ln\left\{u + \frac{1}{2}\ln u + o(1)\right\} =$$
$$= u + \frac{1}{2}\ln\left\{u\left[1 + \frac{\ln u}{2u} + o\left(\frac{1}{u}\right)\right]\right\} =$$
$$= u + \frac{1}{2}\ln u + \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{\ln u}{2u} + o\left(\frac{1}{u}\right)\right] =$$
$$= u + \frac{1}{2}\ln u + \frac{\ln u}{4u} + o\left(\frac{1}{u}\right) \quad (u\to+\infty).$$

Упражнение. Продолжить итерации еще 2 раза, получить уточненную асимптотическую формулу.

б) Рассмотрим теперь решение этого же уравнения при $x\to 0$. Здесь в функции $f(x) = x^2 - \ln x$ главным членом является второй. После замены $t = -\ln x$, т.е. $x = e^{-t}$, уравнение можно переписать в виде:

$$g(t) \equiv t + e^{-2t} = u \quad \text{или} \quad t = u - e^{-2t}. \tag{5.5}$$

Мы снова находимся в рамках применимости теоремы об асимптотике корня, поскольку

$$g(t) \sim t \qquad (t\to+\infty).$$

Упражнение. Применяя метод асимптотических итераций, выписать несколько членов разложения корня уравнения (5.5).

Упражнение. Доказать, что корень уравнения $x\,\mathrm{tg}\,x = u$, лежащий в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2}\left(1 - u^{-1} + u^{-2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{24}\right)u^{-3} + O\left(u^{-4}\right).$$

Упражнение. Показать, что большие положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$ даются асимптотической формулой

$$x = \mu - \mu^{-1} - \frac{2}{3}\mu^{-3} + O\big(\mu^{-5}\big) \quad (\mu \to \infty),$$

где $\mu = \big(n + \frac{1}{2}\big)\pi$, а n — положительное целое число.

6 Асимптотические разложения

Пусть $f(x)$ – функция действительной переменной $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ — формальный степенной ряд по степеням x (сходящийся или расходящийся), $R_n(x)$ — разность между $f(x)$ и n-й частичной суммой этого ряда $S_{n-1}(x)$. Таким образом,

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + R_n(x). \tag{6.1}$$

Определение 6.1. (Пуанкаре, 1886). Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ является асимптотическим разложение функции $f(x)$ и записывать в виде

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \qquad (x \to \infty), \tag{6.2}$$

если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(x) = O(x^{-n}) \quad (x \to \infty). \tag{6.3}$$

Замечание 6.1. *Если соотношение (6.3) выполняется только при $n \leqslant N$, то говорят, что (6.2) является асимптотическим разложением до N-го члена.*

Замечание 6.2. *В (6.2) знак $\sim$ употребляется в новом смысле. Чтобы избежать возможных недоразумений, в (6.2) используют символ $\approx$, оставляя знак $\sim$ для асимптотических приближений. Из теоремы об оценке остатка сходящегося степенного ряда (с заменой x на $\frac{1}{x}$) видно, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ сходится при всех достаточно больших x, то он является асимптотическим разложением его суммы. Естественно, однако, что наибольший интерес представляют* *асимптотические разложения, которые расходятся. Такие примеры мы уже рассматривали.*

При каких условиях заданная функция $f(x)$ имеет разложение вида (6.2)?

Теорема 6.1. *Для того, чтобы функция $f(x)$ обладала асимптотическим разложением вида (6.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a_0, \quad \lim_{x\to\infty} x^n \left\{ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^k} \right\} = a_n, \quad n = 1, 2, \ \dots \ . \qquad (6.4)$$

Доказательство.
Достаточность. Если выполняются условия (6.4), то

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^k} = \frac{a_n}{x^n}[1 + o(1)] \quad (x \to \infty),$$

то есть

$$R_n(x) = O(x^{-n}) \quad (x \to \infty).$$

Необходимость. Пусть имеется асимптотическое разложение вида (6.2). Тогда в силу оценки $R_n(x) = O(x^{-n})$ имеем :

$$x^n R_n(x) = x^n \left\{ \frac{a_n}{x^n} + R_{n+1}(x) \right\} = a_n + x^n R_{n+1}(x) = a_n + O\left(\frac{1}{x}\right) \ (x \to \infty).$$

Это соотношение эквивалентно (6.4). $\square$

Следствие 6.2. *(свойство единственности). Для заданной функции $f(x)$ и области $(a, \infty) \subset \mathbb{R}$ существует не более одного разложения вида (6.2).*

В самом деле, из формул (6.4) коэффициент асимптотического разложения (если оно существует) определяется однозначно.

Замечание 6.3. *Утверждение, обратное следствию, неверно: каждому асимптотическому разложению отвечает не одна функция, а целый класс функций.*

Контрпримеры.

Для функции $f(x) = e^{-x}$

$$a_0 = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad a_1 = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$$

и т.д.; таким образом,

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \dots + \frac{0}{x^n} + \dots \quad (x \to \infty).$$

Следовательно, если

$$g(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \quad (x \to \infty),$$

то $\quad g(x) + ke^{-x} \sim a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \dots + \dfrac{a_n}{x^n} + \cdots \quad$ для всех $k \in \mathbb{R}$.

Упражнение. Показать, что функции $\dfrac{1}{1+x}$, $\dfrac{1+e^{-x}}{1+x}$, $\dfrac{1}{1+e^{-\sqrt{x}}+x}$ имеют при $x \to \infty$ одно и то же асимптотическое разложение, именно

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{-(k+1)}.$$

Отсутствие единственности для функции, представленной асимптотическим разложением, находится в резком контрасте со свойством единственности суммы сходящегося ряда.

Может случится, что $f(x)$ не имеет асимптотического разложения вида (6.2), однако отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ – заданная функция, обладает таким разложением. Тогда пишут

$$f(x) \sim \varphi(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}.$$

Аналогичным образом, если разность $f(x) - \varphi(x)$ имеет асимптотическое разложение вида (6.2), то пишут

$$f(x) \sim \varphi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}.$$

Упражнение. Показать, что ни одна из функций $x^{-\frac{1}{2}}$, $\sin x$, $\ln x$ не имеет асимптотического разложения вида (6.2).

7 Операции над асимптотическими разложениями

1. Из асимптотических разложений можно составлять линейные комбинации. Если $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x^{-k}, \quad g(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k x^{-k}$, то $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda f_k + \mu g_k) x^{-k}.$$

2. Асимптотические разложения можно перемножать :

$$f(x)g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^{-k} \quad (x \to +\infty),$$

где $h_k = f_0 g_k + f_1 g_{k-1} + ... + f_k g_0$.
Действительно, если
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k x^{-k} + F_n(x), \quad g(x) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} g_m x^{-m} + G_m(x),$
$F_n(x) = O(x^{-n}), \quad G_n(x) = O(x^{-n}) \quad (x \to +\infty)$
и $f(x)g(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k x^{-k} = H_n(x)$, то

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k}{x^k} G_{n-k}(x) - g(x) F_n(x) = O(x^{-n}) \quad x \to \infty.$$

3. Асимптотические разложения можно делить друг на друга. Пусть $f_0 \neq 0$ и x достаточно велико (так, чтобы $|F_1(x)| < |f_0|$). Тогда
$\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f_0 + F_1(x)} = \dfrac{1}{f_0} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{F_1(x)}{f_0}} =$
$= \dfrac{1}{f_0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\dfrac{F_1(x)}{f_0} \right)^k + \dfrac{(-1)^k (F_1(x))^n}{{f_0}^n [f_0 + F_1(x)]} =$
$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{{f_0}^{k+1}} \left\{ \dfrac{f_1}{x} + \dfrac{f_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{f_{n-1}}{x^{n-1}} + F_n(x) \right\}^k + \dfrac{(-1)^k \{F_1(x)\}^n}{f_0 [f_0 + F_1(x)]}.$
Поскольку $F_1(x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и $F_n(x) = O\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$, то отсюда следует

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x \to \infty),$$

где коэффициенты h_k можно вычислять из рекуррентных соотношений

$$f_0 h_k = -(f_1 h_{k-1} + f_2 h_{k-2} + \cdots + f_k h_0), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

полученных из тождества $f(x)\dfrac{1}{f(x)} = 1$.

Упражнение. Провести аналогичные рассуждения (с необходимыми изменениями) в случае $f_0 = 0$.

4. Асимптотические разложения можно интегрировать.
Пусть

$$f(x) \sim f_0 + \frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x^2} + \cdots + \frac{f_n}{x^n} + \cdots \qquad (x \to \infty),$$

и $f(x)$ — непрерывная функция. Если не выполняется условие $f_0 = f_1 = 0$, то мы не можем интегрировать $f(t)$ в интервале $x < t < \infty$, поскольку получающиеся интегралы расходятся. Однако, выражение $f(t) - f_0 - \dfrac{f_1}{t}$ имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ при больших t и поэтому интегрируемо. Интегрируя остаточный член и используя результаты §4, находим, что

$$\int_x^\infty \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} \sim \frac{f_2}{x} + \frac{f_3}{2x^2} + \frac{f_4}{3x^3} + \cdots \quad (x \to \infty).$$

5. Дифференцирование асимптотического разложения возможно не всегда. Например, если $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, то

$$f(x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots \quad (x \to \infty).$$

Но $f'(x) = \cos e^x - e^{-x} \sin e^x$ осциллирует при $x \to \infty$ и поэтому не имеет асимптотического разложения. Дифференцирование допустимо, если известно, что $f'(x)$ — непрерывная функция и ее асимптотическое разложение существует. В самом деле, тогда можно проинтегрировать разложение для $f'(x)$ (свойство 4) и воспользоваться единственностью разложения в асимптотический ряд.

8 Обобщение определения асимптотического разложения по Пуанкаре

1. *Первое обобщение.* Прежде всего совсем не обязательно ограничиваться рассмотрением бесконечно удаленной точки. Аналогичные определения можно сформулировать и в случае, когда переменная x стремится к любой конечной точке c, если заменить $\dfrac{1}{x}$ на $(x-c)$. Например, пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ будет

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + \\ + a_{n-1}(x-c)^{n-1} + R_n(x)$$

и

$$R_n(x) = O((x-c)^n) \quad (x \to c),$$

тогда пишут

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \quad (x \to c).$$

Точка c называется выделенной точкой асимптотического разложения. Дело в том, что бесконечность является естественной выделенной точкой во многих физических приложениях и потому исторический случай $c = \infty$ рассматривался первоначально.
2. *Второе обобщение* приводит к рядам, отличным от степенных. Пусть последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определена в окрестности точки c.

Определение 8.1. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется асимптотической последовательностью (или шкалой), если $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x \to c).$$

Определение 8.2. Будем говорит, что $f(x)$ имеет асимптотическое разложение относительно шкалы $\{\varphi_n(x)\}$ и писать $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) + R_n(x), \;\; R_n(x) = O(\varphi_n(x)) \; (x \to c). \quad (8.1)$$

Многие свойства обычных разложений Пуанкаре справедливы и для разложений типа (8.1). Исключения составляют умножение и деление, так как бесконечное множество функций $\varphi_n(x)\varphi_m(x)$ с двумя индексами не всегда можно упорядочить так, чтобы оно образовало новую шкалу.

а) Одна и та же функция может иметь разложения в разных шкалах.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

а) Шкала $\left\{x^{-k-1}\right\}_{k=0}^{\infty} \quad (x \to +\infty)$.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \cdots\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{-k-1}.$$

б) Шкала $\left\{(1-x)x^{-2k-2}\right\}_{k=0}^{\infty} \quad (x \to +\infty)$.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{1-x^2} = -(1-x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= -\frac{1-x}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots\right) \sim -\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)x^{-2k-2}.$$

в) Шкала $\left\{(1-x+x^2)x^{-3k-3}\right\}_{k=0}^{\infty} \quad (x \to +\infty)$.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x+x^2}{1+x^3} = \frac{1-x+x^2}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^3}} =$$
$$= \frac{1-x+x^2}{x^3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{-3k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1-x+x^2}{x^{3k+3}}.$$

4. Могут ли быть наиболее предпочтительные шкалы?

Нельзя сделать вывод об эффективности разложения только по виду шкалы. Пусть, например,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}; \qquad \left\{x^{-k}\right\}_{k=0}^{\infty}, \qquad x \to +\infty. \tag{8.2}$$

Группируя члены ряда по два, получим:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_{2k}}{x^{2k}} + \frac{a_{2k+1}}{x^{2k+1}}\right). \tag{8.3}$$

Нельзя утверждать, что разложение (8.3) более сильное, чем (8.2), хотя его шкала

$$\varphi_k(x) = \frac{a_{2k}}{x^{2k}} + \frac{a_{2k+1}}{x^{2k+1}}$$

убывает быстрее, чем шкала для разложения (8.2): $\varphi_k(x) = o(x^{-k})$ при $x \to +\infty$.

Наконец, определение допускает разложения, не имеющие практического значения, если иметь в виду функции, которые они представляют. Например,

$$\frac{\sin x}{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \exp\left\{-\frac{k+1}{2k}x\right\}}{(\ln x)^k}.$$

Упражнение. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность положительных непрерывных функций, образующих шкалу при $x \to c \in \mathbb{R}$. Показать, что интегралы $\int\limits_c^x \varphi_n(t)dt$ образуют шкалу при $x \to c$ и что если $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая разложение $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_n(x)$ $(x \to c)$, то

$$\int\limits_c^x f(t)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_c^x \varphi_k(t)dt \quad (x \to c).$$

9 Асимптотическое разложение интегралов, зависящих от параметра

1. Простой и часто эффективный способ вывода асимптотических разложений интегралов, содержащих параметр, состоит в интегрировании по частям. Каждое интегрирование дает новый член разложения, а остаточный член получается явно в виде интеграла, который можно оценить. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие эту простую идею.

Пример 9.1. Во введении к нашему курсу мы рассматривали интеграл $G(x) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ и получали его разложение при $x \to +\infty$ "незаконным" способом, представляя функцию $\frac{1}{1+t}$ рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k$, который сходится лишь при $|t| < 1$. Применим теперь к этому интегралу метод интегрирования по частям. Интегрируя первый раз, получим:

$$G(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \left| \begin{matrix} e^{-xt} dt = dv, & v = -\frac{1}{x} e^{-xt} \\ \frac{1}{1+t} = u, & du = -\frac{1}{(1+t)^2} dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x} \frac{e^{-xt}}{(1+t)} \Bigg|_{t=0}^{t=\infty} - \int\limits_0^\infty \frac{1}{x} e^{-xt} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}\, dt}{(1+t)^2} =$$

$$= \frac{1}{x} + R_2(x).$$

Оценим остаток:

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{x} \int\limits_0^\infty e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} \frac{e^{-xt}}{(-x)} \Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{x^2}.$$

Осуществив в (9.1) интегрирование по частям еще два раза, мы получим (проверьте!):

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt = \\
&= \left| \begin{matrix} e^{-xt} dt = dv, & v = -\frac{1}{x} e^{-xt} \\ \frac{1}{(1+t)^2} = u, & du = -\frac{2}{(1+t)^3} dt \end{matrix} \right| = \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \left\{ -\frac{1}{x} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} \Bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{1}{x} e^{-xt} \frac{2}{(1+t)^3} dt \right\} = \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} \int \frac{e^{-xt}}{(1+t)^3} dt = \\
&= \left| \begin{matrix} e^{-xt} dt = dv, & v = -\frac{1}{x} e^{-xt} \\ \frac{1}{(1+t)^3} = u, & du = -\frac{3}{(1+t)^4} dt \end{matrix} \right| = \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} \left\{ -\frac{1}{x} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^3} \Bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{3e^{-xt}}{x(1+t)^4} dt \right\} =
\end{aligned} \tag{9.1}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2}{x^2}\left\{\frac{1}{x} - \frac{3}{x}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(1+t)^4}\right\} = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^3}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(1+t)^4}dt.$$

Уже из формулы (9.1) видно (и это можно проверить по индукции), что после интегрирования n раз по частям будет:

$$\begin{aligned} G(x) = &\int\limits_0^\infty e^{-xt}\frac{dt}{1+t} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+1}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(1+t)^{n+1}}dt. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Из (9.2) следует оценка для остатка:

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| = &\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{(1+t)^{n+1}} \le \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-xt}\,dt = \\ &= \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Таким образом, (9.2)–(9.3) приводит к классическому асимптотическому разложению по Пуанкаре:

$$G(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{1+t} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

Упражнение. Доказать, что для интеграла

$$F(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{1+xt} \quad (x \to +0)$$

асимптотическое разложение имеет вид

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{1+xt} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n \quad (x \to +0).$$

Упражнение. В теории вероятностей и и задачах теории теплопроводности важную роль играет интеграл вероятностей и дополнительный интеграл вероятностей, которые определяются соответственно формулами

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt, \qquad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

Множитель $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ введен для того, чтобы упростить связующее их соотношение

$$\operatorname{erf} x + \operatorname{erfc} x = 1.$$

Доказать асимптотическую формулу:

$$\operatorname{erfc} x \sim \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi} x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^n}, \qquad (x \to +\infty). \tag{9.4}$$

Убедиться также, что остаточный член (9.4) не превосходит по абсолютной величине первого отбрасываемого члена ряда и имеет тот же знак.
Указание. Осуществить в (9.4) замену $t^2 = u$ и применить метод интегрирования по частям.

Упражнение. Установить, что интеграл

$$\Gamma(n+1, x) = \int\limits_x^\infty e^{-t} t^n dt,$$

равный разности полной и неполной гамма-функций Эйлера

$$\Gamma(n+1, x) = \Gamma(n+1) - \gamma(n+1, x) := \int\limits_0^\infty e^{-t} t^n dt - \int\limits_0^x e^{-t} t^n dt,$$

имеет асимптотическое разложение

$$\Gamma(n+1, x) \sim e^{-x} x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)} x^{-k} \quad (x \to \infty) \ (n \notin \mathbb{Z}).$$

Пример 9.2. *Интегралы Френеля и аналогичные им.*
В физической оптике большую роль играют интегралы Френеля

$$\int_x^\infty \cos t^2 dt \quad \text{и} \quad \int_x^\infty \sin t^2 dt,$$

которые путем замены могут быть приведены к виду (с точностью до постоянного множителя)

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du.$$

Последние два интеграла в силу формулы Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ являются действительной и мнимой частью интеграла

$$F\left(x; \frac{1}{2}\right) := \int_{x^2}^\infty \frac{e^{iu}}{u^{\frac{1}{2}}} du\,, \tag{9.5}$$

сходящегося при $x \neq 0$.

Интегрируя (9.5) по частям получим:

$$\int_{x^2}^\infty \frac{e^{it}}{t^{1/2}}dt = \left| \begin{array}{ll} e^{it}dt = dv, & v = \frac{1}{i}e^{it} \\ \frac{1}{t^{1/2}} = u, & du = -\frac{1}{2}\frac{dt}{t^{3/2}} \end{array} \right| = \frac{1}{i}\frac{e^{it}}{t^{1/2}}\Big|_{t=x^2}^\infty + \int_{x^2}^\infty \frac{e^{it}}{2it^{3/2}}dt =$$

$$= i\frac{e^{ix^2}}{x} - \frac{i}{2}\int_{x^2}^\infty \frac{e^{it}}{t^{1+1/2}}dt = i\frac{e^{ix^2}}{x} - \frac{i}{2}F\left(x; \frac{3}{2}\right).$$

Повторяя этот же прием будем иметь (выведите эту формулу!)

$$\begin{aligned} &F\left(x; \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{ie^{ix^2}}{x}\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(ix^2)^k} + \frac{1}{i^{n+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}F\left(x; \frac{1}{2}+n+1\right). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Для последнего слагаемого (9.6) справедлива оценка

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left|\int\limits_{x^2}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^{n+1+1/2}}dt\right| \leqslant \left(\left|e^{it}\right|=1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{x^2}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+3/2}} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{2}{(2n+1)}\frac{1}{x^{2n+1}} = O\left(x^{-(2n+1)}\right)$$

при $x \to \infty$.

Мы пришли в выводу, что $F\left(x;\frac{1}{2}\right)$ имеет асимптотическое разложение

$$F\left(x;\frac{1}{2}\right) \sim \frac{ie^{ix^2}}{x}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(ix^2)^k} \quad (x\to\infty). \tag{9.7}$$

Отсюда получаем асимптотические разложения для интегралов Френеля (проверьте!)

$$\int\limits_{x}^{\infty}\cos t^2 dt \sim$$

$$\sim \frac{1}{2x}\left\{\cos x^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2m+\frac{3}{2}\right)(-1)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{4m+2}} - \sin x^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x^{4p}}\right\},$$

$$\int\limits_{x}^{\infty}\sin t^2 dt \sim$$

$$\sim \frac{1}{2x}\left\{\cos x^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2p+\frac{1}{2}\right)(-1)^p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x^{4p}} + \sin x^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2m+\frac{3}{2}\right)(-1)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^{4m+2}}\right\}$$

$$(x\to\infty).$$

Упражнение. Убедиться, что для интеграла

$$F\left(x^{\frac{1}{2}};a\right) = \int\limits_{x}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^a}dt \qquad (a>0)$$

имеет место асимптотическое разложение (ср. с (9.7))

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t^a} dt \sim \frac{ie^{ix}}{x^a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(ix)^k} \quad (x \to \infty).$$

2. *Интегралы Лапласа.* Один из общих типов интегралов, к которому применим метод интегрирования по частям, имеет вид:

$$J(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) dt,$$

где функция $J(x)$ предполагается бесконечно дифференцируемой в $[0; \infty)$ и кроме того,

$$q^{(n)}(t) = O(e^{\sigma t}), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Легко установить, что $J(x)$ сходится при $x > \sigma$. В самом деле,

$$|J(x)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) dt \right| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-xt} |q(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} e^{-xt} C e^{\sigma t} dt = C \int_0^{\infty} e^{-(x-\sigma)t} dt = \frac{C}{x-\sigma} \qquad (x > \sigma).$$

Повторное интегрирование по частям дает:

$$J(x) = \frac{q(0)}{x} + \frac{q'(0)}{x^2} + \cdots + \frac{q^{(n-1)}(0)}{x^n} + \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} e^{-xt} q^{(n)}(t) dt.$$

Оценим остаток $R_{n+1}(x) := \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} e^{-xt} q^{(n)}(t) dt$:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} e^{-xt} |q^{(n)}(t)| dt \leqslant \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} e^{-xt} C_n e^{\sigma t} dt =$$

$$= \frac{C_n}{x^n} \frac{1}{x-\sigma} = O\left(\frac{1}{x^{n+1}} \right) \qquad (x \to +\infty).$$

Мы пришли к асимптотическому разложению

$$J(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(k)}(0)}{x^{k+1}} \quad (x \to +\infty). \tag{9.8}$$

Это разложение можно получить другим способом — формальной подстановкой в интеграл ряда Маклорена:

$$q(t) = q(0) + tq'(0) + \frac{t^2}{2!}q''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}q^{(n)}(0) + \cdots .$$

В самом деле, тогда получим

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q^{(k)}(0) \int_0^{\infty} t^k e^{-xt} dt = (xt = \tau) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(k)}(0)}{k!} \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^{\infty} \tau^k e^{-\tau} d\tau.$$

Поскольку $\int_0^{\infty} \tau^k e^{-\tau} d\tau = \Gamma(k+1) = k!$, мы снова приходим к разложению (9.8).

Разложение (9.8) есть классическое асимптотическое разложение Пуанкаре по целым степеням x^{-1}. Нельзя ли получить аналогичный асимптотический результат почленным интегрированием и в случае, когда разложение $q(t)$ около точки $t = 0$ производится по нецелым степеням t? Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. (Ватсон, 1918). *Пусть*

$$q(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{(k+\lambda-\mu)/\mu} \quad (t \to 0),$$

где $\lambda, \mu > 0$. *Тогда*

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_k}{x^{(k+\lambda)/\mu}} \quad (x \to +\infty)$$

при условии, что интеграл слева сходится при достаточно больших x.
(Без доказательства).

Упражнение. Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch} t} q(t)dt \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1^2 3^2 5^2 ... (2k-1)^2}{k!(8x)^k}\,.$$

Указание. Осуществить в интеграле замену

$$\operatorname{ch} t = \tau + 1 \qquad 0 \le \tau < \infty$$

и затем воспользоваться теоремой Ватсона.

Упражнение. Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-x\operatorname{sh} t} q(t)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[(2k-1)!!]^2}{x^{2k+1}}\,.$$

10 Метод Лапласа

1. *Идея метода.* Этот метод применяется для получения асимптотического разложения интегралов вида

$$I(x) = \int_a^b e^{-xp(t)} q(t)dt \qquad (x \to +\infty), \tag{10.1}$$

где a, b, $p(t)$, $q(t)$ не зависят от положительного параметра x. Возникновение изложенного ниже метода связано с именем Лапласа (1820). Максимальное значение (пик) множителя $e^{-xp(t)}$ достигается в точке $t = t_0$, в которой $p(t)$ имеет минимум. Если x велико, то этот пик очень острый, и график подинтегрального выражения (сравните с функцией e^{-xt^2} в окрестности $t = 0$) подсказывает, что преобладающая часть вклада в интеграл определяется окрестностью точки t_0. Поэтому мы заменяем $p(t)$ и $q(t)$ главными членами их разложений в ряды по возрастающим степеням разности $(t - t_0)$, а затем, в зависимости от условий, мы расширяем пределы интегрирования до $-\infty$ или $+\infty$. Получающийся интеграл вычисляется явно и дает искомое приближение.

2. *Реализация идеи.*

а) Предположим, например, что $t_0 = a$, $p'(a) > 0$ и $q(a) \neq 0$. Тогда указанная процедура выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \int\limits_a^b e^{-x[p(a)+(t-a)p'(a)]} q(a)dt \sim \\ &\sim q(a)e^{-xp(a)} \int\limits_a^\infty e^{-xp'(a)(t-a)} d(t-a) = \frac{q(a)e^{-xp(a)}}{xp'(a)} \\ &\qquad (x \to +\infty). \end{aligned} \tag{10.2}$$

б) С другим общим случаем мы встречаемся, если $p(t)$ имеет простой минимум во внутренней точке t_0 интервала (a, b) и $q(t_0) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \int\limits_a^b \exp\left[-x\left\{p(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 p''(t_0)\right\}\right] q(t_0)dt \\ &\sim q(t_0)e^{-xp(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}xp''(t_0)(t-t_0)^2\right\} dt. \end{aligned}$$

Так как в точке простого минимума будет $p''(t_0) > 0$, то в последнем интеграле можно сделать замену $\tau = \sqrt{\dfrac{xp''(t_0)}{2}}(t - t_0)$. Вспоминая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$, получим окончательно:

$$I(x) \sim q(t_0)e^{-xp(t_0)} \left\{\frac{2\pi}{xp''(t_0)}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (x \to +\infty). \tag{10.3}$$

Замечание 10.1. *При построении приближений (10.2) и (10.3) предположение о том, что только окрестность пика играет важную роль, использовалось дважды: во-первых, при замене $p(t)$ и $q(t)$ главными членами их разложений по степеням $(t - t_0)$, и, во-вторых, при замене "b" на ∞ в (10.2) и (10.3) и "a" на $-\infty$ в (10.3).*

Все рассуждения в п.п.1,2 конечно же являются эвристически-ми. Строгие утверждения, которые будут сформулированы ниже, показывают, что при определенных условиях главные члены асимптотического разложения$I(x)$ действительно имеют вид (10.2) и (10.3).
3. *Основная теорема (о главном члене асимптотики).*
Будем считать, что значение "a" конечно; без потери общности полагаем, что минимум функции $p(t)$ достигается в точке $t = a$; в других случаях область интегрирования можно разбить на части точками минимума и максимума функции $p(t)$ и, если это необходимо, изменить знак t. Пусть "b" конечно или бесконечно, $p(t)$ – действительная, а $q(t)$ может быть комплекснозначной функцией. Кроме того, пусть выполнены следующие условия:
1) $p(t) > p(a)$ при $t \in (a, b)$ и для каждого $c \in (a, b)$

$$\inf_{t\in[c,b)} [p(t) - p(a)] > 0,$$

то есть $p(t)$ достигает минимума лишь в точке $t = a$.
2) $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны в окрестности точки $t = a$, исключая, возможно, саму точку $t = a$.
3) При $t \to a + 0$ будет $p(t) - p(a) \sim P(t - a)^{\mu}$, $q(t) \sim Q(t - a)^{\lambda-1}$, и первое из этих соотношений допускает дифференцирование. Здесь P, μ, λ — положительные постоянные, а $Q \neq 0$ — действительная или комплексная постоянная.
4) Интеграл

$$I(x) := \int\limits_a^b e^{-xp(t)} q(t)dt$$

абсолютно сходится во всей области интегрирования при всех достаточно больших x.

Теорема. (Эрдейи). *Если выполнены условия 1)-4), то*

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{-xp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \quad (x \to +\infty). \tag{10.4}$$

Замечание 10.2. *Прежде чем доказывать теорему, проверим, что формула (10.4) является обобщением формул (10.2) и (10.3). В самом* *деле, для случая а) п.2, когда минимум $p(t)$ достигается на конце $t_0 = a$, $p'(a) > 0$ и $q(a) \neq 0$, мы имеем согласно свойству 1):*

$$\mu = 1, \quad P = p'(a), \quad \lambda = 1, \quad Q = q(a).$$

Подставляя эти данные в (10.4) и используя равенство $\Gamma(1) = 1$, получим формулу (10.2).

В случае б), когда простой минимум $p(t)$ достигается во внутренней точке t_0, нужно взять

$$\mu = 2, \quad P = \frac{1}{2}p''(a), \quad \lambda = 1, \quad Q = q(t_0).$$

Подставляя эти значения в (10.4), учитывая равенство $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, получим результат в два раза меньший, чем правая часть (10.3) (почему так получилось?).

Доказательство. 1. Из условий 2) и 3) следует, что найдется такое число "c достаточно близкое к "a что в интервале $(a, c]$ функция $p'(t)$ непрерывна и положительна, а $q(t)$ – непрерывна. Так как $p(t)$ возрастает в $(a, c]$, то можно в качестве новой переменной интегрирования на этом интервале взять величину

$$\tau = p(t) - p(a).$$

Тогда $\tau(t)$ и $t(\tau)$ — непрерывные функции и

$$e^{xp(a)} \int\limits_a^c e^{-xp(t)} q(t) dt = \int\limits_0^d e^{-x\tau} f(\tau) d\tau, \tag{10.5}$$

где $d = p(c) - p(a)$, $f(\tau) = q(t)\dfrac{dt}{d\tau} = \left.\dfrac{q(t)}{p'(t)}\right|_{t=t(\tau)}$.

Очевидно, что значение d конечно и положительно, а $f(\tau)$ непрерывна при $t \in (0, d)$.

2. Согласно свойству 3) при $t \to a + 0$ мы имеем

$$\tau = p(t) - p(a) \sim P \cdot (t - a)^{\mu},$$

следовательно,

$$t - a \sim \left(\frac{\tau}{P}\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (\tau \to +0).$$

Отсюда

$$f(\tau) = \frac{q(t)}{p'(t)} \sim \frac{Q\left(\frac{\tau}{P}\right)^{\frac{(\lambda-1)}{\mu}}}{\mu P\left(\frac{\tau}{P}\right)^{\frac{(\mu-1)}{\mu}}} = \frac{Q\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \quad (\tau \to +0). \tag{10.6}$$

3. Используя соотношения (10.6), перепишем интеграл (10.5) в виде:

$$\begin{aligned}
&\int_0^d e^{-x\tau} f(\tau) d\tau = \\
&= \int_0^d e^{-x\tau} \frac{Q\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} d\tau + \int_0^d e^{-x\tau} \left[f(\tau) - \frac{Q\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \right] d\tau = \\
&= \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-x\tau} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau - \int_d^\infty e^{-x\tau} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau \right) + \\
&+ \int_0^d e^{-x\tau} \left[f(\tau) - \frac{Q\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \right] d\tau = \\
&= \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-x\tau} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau - \varepsilon_1(x) \right) + \varepsilon_2(x).
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Первый член справа в (10.7) уже дает искомую асимптотику (10.4). В самом деле, осуществляя в этом интеграле замену $x\tau = \xi$, получим (проверьте!):

$$\frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty e^{-x\tau} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau = \frac{Q}{\mu (Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\xi = \frac{Q}{\mu (Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right). \tag{10.8}$$

Отсюда и из (10.5), (10.7) получим результат (10.4).

4. Убедимся, что остальные слагаемые в правой части (10.7) имеют

порядок меньший, чем вычисленный главный член.
а) Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем d настолько малым, чтобы

$$\left| f(\tau) - \frac{Q\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \right| < \varepsilon \frac{|Q|\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \qquad (0 < \tau \leqslant d). \tag{10.9}$$

Очевидно, что для этого необходимо выбрать "c" достаточно близко к "a" и неравенство будет выполнено в силу (10.6).
б) Из (10.9), используя определение гамма-функции и выкладки (10.8) получим оценку:

$$|\varepsilon_2(x)| = \left| \int\limits_0^d e^{-x\tau} \left[f(\tau) - \frac{Q\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \right] d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^d e^{-x\tau} \varepsilon \frac{|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau \leqslant \varepsilon \frac{|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int\limits_0^\infty e^{-x\tau} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau = \varepsilon \frac{|Q|}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \ .$$

в) Функция $\varepsilon_1(x)$ может быть выражена через неполную гамма-функцию

$$\Gamma(\alpha; x) = \int\limits_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

в самом деле,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \int\limits_d^\infty e^{-x\tau} \tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\tau = \left| \begin{matrix} x\tau = \xi \\ d\tau = \frac{1}{x} d\xi \end{matrix} \right| = \\ &= \int\limits_{xd}^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\xi \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}} = \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}; xd\right). \end{aligned} \tag{10.10}$$

Упражнение. Методом интегрирования по частям установить, что

$$\Gamma(\alpha;x) = e^{-x}x^{\alpha-1} + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1;x) = \dots =$$
$$= e^{-x}x^{\alpha-1}\left(1 + \frac{\alpha-1}{x} + \dots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{x^{n-1}}\right) +$$
$$+ (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)\int\limits_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-n-1}dt \sim$$
$$\sim e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{x^k} \qquad (x\to\infty). \tag{10.11}$$

Опираясь на формулу (10.11), будем иметь из (10.10):

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}; xd\right) = O\left(\frac{e^{-xd}}{x}\right) \quad (x\to\infty). \tag{10.12}$$

г) Наконец, пусть x_0 — значение параметра x, при котором интеграл $I(x)$ абсолютно сходится. Обозначим

$$\eta := \inf_{[c,b)} \{p(t) - p(a)\}.$$

В силу условия (10.1) теоремы будет $\eta > 0$. Полагая $x \geqslant x_0$ имеем

$$xp(t) - xp(a) = (x-x_0)\{p(t)-p(a)\} + x_0\{p(t)-p(a)\} \geqslant$$
$$\geqslant (x-x_0)\eta + x_0p(t) - x_0p(a).$$

Учитывая это неравенство, получим оценку:

$$\left|e^{xp(a)}\int\limits_c^b e^{-xp(t)}q(t)dt\right| \leqslant \int\limits_c^b e^{-[(x-x_0)\eta + x_0p(t) - x_0p(a)]}|q(t)|dt =$$
$$= e^{-(x-x_0)\eta + x_0p(a)}\int\limits_c^b e^{-x_0p(t)}|q(t)|dt = O(e^{-x\eta}) \quad (x\to+\infty). \tag{10.13}$$

д) Учитывая (5) и (7), получаем:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int\limits_a^c e^{-xp(t)}q(t)dt + \int\limits_c^b e^{-xp(t)}q(t)dt = \\
&= e^{-xp(a)}\int\limits_0^d e^{-x\tau}f(\tau)d\tau + \int\limits_c^b e^{-xp(t)}q(t)dt = \\
&= e^{-xp(a)}\left\{\int\limits_0^d e^{-x\tau}f(\tau)d\tau + e^{xp(a)}\int\limits_c^b e^{-xp(t)}q(t)dt\right\} = \\
&= e^{-xp(a)}\left\{\frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left[\int\limits_0^\infty e^{-x\tau}\tau^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\tau - \varepsilon_1(x)\right] + \varepsilon_2(x) + e^{xp(a)}\int\limits_c^b e^{-xp(t)}q(t)dt\right\}.
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Для установления соотношения (10.4), как видно из (10.14), нужно проверить, что правые части (10.12) и (10.13) при больших x будут меньше $\varepsilon x^{-\frac{\lambda}{\mu}}$. Однако, это всегда возможно при больших x, так как числа d и η в этих соотношениях положительны и

$$e^{-x\eta} = o(x^{-\frac{\lambda}{\mu}}), \quad \frac{1}{x}e^{-xd} = o(x^{-\frac{\lambda}{\mu}}) \quad (x \to +\infty). \qquad \square$$

В основной теореме обосновывается лишь главный член асимптотики для интеграла $I(x)$. На ее основе может быть установлен и общий вид асимптотического разложения $I(x)$. Мы приведем без доказательства следующий результат.

Теорема. (об асимптотическом разложении $I(x)$). *Пусть выполнены условия 1), 2) и 4) предыдущей теоремы, а вместо условия 3) выполнены условия:*

$$p(t) \sim p(a) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t-a)^{k+\mu},$$

$$q(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t-a)^{k+\lambda-1} \qquad \text{при} \qquad t \to a+0,$$

где λ и μ – положительные постоянные. Допустим еще, что первое разложение дифференцируемо, то есть

$$p'(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)p_k(t-a)^{k+\mu-1} \qquad (t \to a+0).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b e^{-xp(t)}q(t)dt \sim e^{-xp(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_k}{x^{\frac{(k+\lambda)}{\mu}}} \quad (x \to +\infty),$$

где коэффициенты a_k некоторым образом выражаются через p_k и q_k.

Пример 10.1. Модифицированная функция Бесселя целого порядка имеет интегральное представление

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{x\cos t}\cos ntdt.$$

В наших обозначениях имеем:

$$p(t) = -\cos t = -1 + \frac{t^2}{2} + O\big(t^4\big) \quad t \to 0; \quad a = 0, \quad p(a) = -1;$$

$$q(t) = \frac{1}{\pi}\cos nt = \frac{1}{\pi} + O\big(t^2\big); \quad P = \frac{1}{2}, \quad \mu = 2, \quad Q = \frac{1}{\pi}, \quad \lambda = 1.$$

По теореме получаем для главного члена асимптотики:

$$I_n(x) \sim \frac{1}{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-x(-1)}}{\left(\frac{1}{2}x\right)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^x}{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (x \to +\infty).$$

Пример 10.2. Получим асимптотическое разложение интеграла

$$I(x) = \frac{1}{12}\int\limits_0^1 e^{-x\sqrt{t}}\sin tdt.$$

Здесь

$$p(t) = t^{1/2}, \quad q(t) = \frac{1}{12}\sin t \sim \frac{1}{12}t \qquad (t \to 0),$$

$$p(a) = 0, \quad a = 0, \quad P = 1, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad Q = \frac{1}{12}, \ \lambda = 2.$$

Из теоремы о главном члене асимптотики получим:

$$I(x) \sim \frac{1}{12}\cdot 2\cdot\Gamma(4)\cdot\frac{e^0}{x^4} = \frac{1}{x^4}, \quad x \to +\infty.$$

Зная, как выражаются коэффициенты a_k через p_k и q_k в теореме об асимптотическом разложении (по поводу этого см. [1], стр. 114), можно получить полное асимптотическое разложение интеграла $I(x)$.

Упражнения. Получить главный член асимптотики для интеграла

1. $I(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-xt} \mathrm{tg}^2 t \, dt.$

2. $I(x) = \int\limits_1^{\infty} e^{-xt^2} \sin t \, dt.$

3. $I(x) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-xt} \dfrac{\sin 2t}{t} \, dt.$

4. $I(x) = \int\limits_0^{2} e^{-x\left(t^2-2t-1\right)} \left(t^2+2t\right) dt.$

11 Метод стационарной фазы

1. *Идея метода.* Рассмотрим интегралы.

$$\int\limits_a^b \cos\,[xp(t)]q(t)dt, \quad \int\limits_a^b \sin\,[xp(t)]q(t)dt, \tag{11.1}$$

в которых a, b, $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от параметра x. Как установить асимптотическое поведение этих интегралов при $x \to \infty$? При больших x подинтегральные выражения быстро осциллируют, и колебания компенсируют друг друга в большей части области интегрирования. Однако такой компенсации не происходит в окрестностях следующих точек:
1) концевых точек "a" и "b" (если они конечны) вследствие отсутствия симметрии;
2) нулей $p'(t)$, поскольку $p(t)$ относительно медленно меняется около этих "стационарных точек". На этих простых соображениях основан метод стационарной фазы Кельвина.

2. *Реализация идеи.* Оба интеграла в (11.1) можно рассмотреть одновременно, объединяя их в интеграл

$$I(x) = \int\limits_a^b e^{ixp(t)} q(t)\, dt. \tag{11.2}$$

а) В окрестности точки "a" новое подинтегральное выражение приближенно равно

$$\exp\{ix[p(a) + p'(a)(t-a)]\}q(a),$$

а неопределенный интеграл от него имеет вид:

$$\frac{\exp\{ix[p(a) + p'(a)(t-a)]\}q(a)}{ixp'(a)}, \tag{11.3}$$

при условии, что $p'(a) \neq 0$. Нижний предел $t = a$ дает в $I(x)$ вклад

$$\frac{-e^{ixp(a)}q(a)}{ixp'(a)}\,.$$

Когда t удаляется от a, действительная и мнимая части (11.3) осциллируют около нуля, и поэтому есть основания пренебречь вкладом от (11.3). Аналогичные рассуждения указывают, что верхний предел $t = b$ дает асимптотический вклад

$$\frac{e^{ixp(b)}q(b)}{ixp'(b)}.$$

б) Пусть теперь $t_0 \in (a, b)$ — внутренняя стационарная точка функции $p(t)$, т.е.

$$p(t) = p(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 p''(t_0) + O\Big((t-t_0)^3\Big), \quad t \to t_0.$$

Около этой точки подинтегральное выражение в (11.2) приближенно равно:

$$\exp\left\{ix\left[p(t_0) + \frac{1}{2}p''(t_0)(t-t_0)^2\right]\right\}q(t_0)$$

при условии, что $p''(t_0)$ и $q(t_0)$ не равны нулю. Интегрируя эту функцию, мы следуем предположению, что лишь окрестность точки t_0 имеет значение, и расширяем пределы интегрирования до $-\infty$ и $+\infty$. Получившийся интеграл вычисляется в явном виде (см. лемму ниже). Мы имеем:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ix\left[p(t_0) + \frac{1}{2}p''(t_0)(t-t_0)^2\right]\right\}q(t_0)d(t-t_0) = \\
&= \exp\{ixp(t_0)\}q(t_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ix\frac{1}{2}p''(t_0)(t-t_0)^2\right\}d(t-t_0) = \\
&= \left|\left|\tfrac{x}{2}p''(t_0)\right|^{1/2}(t-t_0) = \tau\right| = \qquad (11.4)\\
&= \exp\{ixp(t_0)\}q(t_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\,\mathrm{sign}\,[xp''(t_0)]\,\tau^2\right\}\frac{d\tau}{\left|\frac{x}{2}p''(t_0)\right|^{1/2}} = \\
&= e^{ixp(t_0)}q(t_0)\sqrt{\frac{2}{|xp''(t_0)|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\tau^2}d\tau.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\tau^2}d\tau = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{\pm i\tau^2}d\tau = \left|\begin{matrix}\tau^2 = y \quad y > 0\\ 2\tau d\tau = dy\end{matrix}\right| = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{\pm iy}\frac{dy}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{\pm iy}y^{\frac{1}{2}-1}dy.$$

Лемма 11.1. *Пусть $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда*

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{\pm i\beta y}y^{\alpha-1}dy = \frac{e^{\pm\alpha\pi i/2}\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}.$$

Замечание 11.1. *Ограничение $0 < \alpha < 1$ необходимо, т.к. интеграл расходится на нижнем пределе при $\alpha \leqslant 0$ и на верхнем пределе при $\alpha \geqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\oint_L e^{i\beta z} z^{\alpha-1} dz$$

вдоль контура l, изображенного на рис. 5.

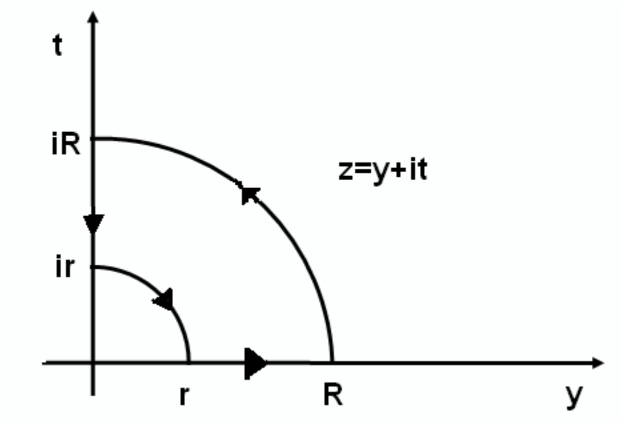

Рис. 5:

В силу теоремы Коши об интеграле по замкнутому контуру от аналитической функции этот интеграл равен нулю. С другой стороны,

$$\oint_L e^{i\beta z} z^{\alpha-1} dz = \int_r^R e^{i\beta y} y^{\alpha-1} dy + I_R + \int_r^R e^{i\beta(it)} (it)^{\alpha-1} d(it) + I_r,$$

где I_R и I_r — интегралы по дугам соответствующих окружностей. Отсюда

$$\int_r^R e^{i\beta y} y^{\alpha-1} dy = \int_r^R e^{-\beta t} t^{\alpha-1} dt \cdot i^\alpha - I_R - I_r. \tag{11.5}$$

Покажем, что

$$\lim_{r\to 0} I_r = 0, \qquad \lim_{R\to\infty} I_R = 0.$$

Действительно,

$$I_r = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \exp\left[i\beta r e^{i\varphi}\right] r^{\alpha} e^{i\varphi(\alpha-1)} \cdot i e^{i\varphi}\, d\varphi = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} i r^{\alpha} e^{\beta r(i\cos\varphi - \sin\varphi) + i\varphi\alpha} d\varphi.$$

Отсюда

$$|I_r| \leqslant r^{\alpha} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta r \sin\varphi} d\varphi \leqslant r^{\alpha} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2} r^{\alpha} \xrightarrow{r \to 0} 0.$$

Далее,

$$I_R = i \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[i\beta R e^{i\varphi}\right] R^{\alpha} e^{i\varphi\alpha} d\varphi = i R^{\alpha} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\beta R(i\cos\varphi - \sin\varphi) + i\varphi\alpha} d\varphi$$

и

$$|I_R| \leq R^{\alpha} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta R \sin\varphi} d\varphi.$$

Воспользовавшись неравенством $\sin\varphi \geqslant \dfrac{2}{\pi}\varphi$ (для $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$), получим:

$$e^{-\beta r \sin\varphi} \leqslant e^{-\beta r \frac{2}{\pi}\varphi}$$

и

$$|I_R| \leqslant R^{\alpha} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta r \frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi = R^{\alpha} \frac{e^{-\beta R \frac{2}{\pi}\varphi}}{-2\frac{\beta R}{\pi}} \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^{\alpha-1}}{2\beta}\left[1 - e^{-\beta R}\right] \to 0$$

$$(R \to +\infty),$$

так как $\alpha < 1$.

Учитывая, что $i^{\alpha} = e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}$, из (11.5) получаем, переходя к пределу при $r \to 0$ и $R \to +\infty$:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{i\beta y} y^{\alpha-1} dy = e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta t} t^{\alpha-1} dt = e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}}.$$

Чтобы получить утверждение леммы для нижнего знака, необходимо проинтегрировать функцию $e^{i\beta z}z^{\alpha-1}$ по контуру, симметричному с контуром L(см. рис. 5) относительно оси Oy (проверьте!).
Продолжим наши выкладки. Из леммы следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\tau^2}d\tau = e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}e^{\pm\frac{\pi i}{4}}.$$

Следовательно, из (11.4) будем иметь:

$$I(x) = \int\limits_a^b e^{ixp(t)}q(t)dt \sim e^{\pm\frac{i\pi}{4}}e^{ixp(t_0)}q(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{|xp''(t_0)|}} \quad (x\to\infty). \quad (11.6)$$

$\square$

Замечание 11.2. *1) Сравнивая результаты, полученные в пункте а), с формулой (11.6), видим, что интеграл (11.6) медленнее стремится к нулю (при $x\to\infty$), то есть влияние концов менее значительно, чем влияние внутренней стационарной точки функции $p(t)$.*
2) Аналогичные результаты можно установить также:
а) для стационарных точек более высокого порядка.
б) в некоторых случаях, когда $q_0 = 0$.
3) Приближенное значение $I(x)$ при больших x можно получить, суммируя выражения вида (11.6) по различным стационарным точкам (если их несколько) и добавляя вклады от концевых точек (в случае $a \neq -\infty, b \neq +\infty$).
4) Заметно очевидное сходство методов Лапласа и стационарной фазы. Это неудивительно, так как оба метода можно рассматривать, как частные случаи одного общего метода, основанного на применении теории функций комплексной переменной.

3. *Строгие утверждения.* Априорные соображения, связанные с получением формул пункта а) и формулы (11.6), пока строго не обоснованы. Так же, как и в методе Лапласа, можно сформулировать утверждение о главном члене асимптотики для интеграла (11.2) при некоторых условиях на функции $p(t)$ и $q(t)$. Мы приведем здесь одно

из утверждений, аналогичное соответствующей теореме в методе Лапласа.
Рассмотрим снова интеграл

$$I(x) = \int\limits_a^b e^{ixp(t)} q(t)dt$$

и будем считать, что выполнены следующие условия:
1) a – конечно, $p(t)$ – действительная, а $q(t)$ – действительная или комплексная функции. В $[a, b]$ единственной точкой, где $p'(t)$ обращается в нуль, является точка $t_0 = a$. Без потери общности можно взять x и $p'(t)$ положительными; случай, когда эти величины отрицательны, можно свести к данному изменением знака перед i в соответствующих местах.
2) В интервале (a, b) функции $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны, $p'(t) > 0$, а $p''(t)$ и $q'(t)$ имеют самое большое конечное число разрывов и точек, в которых они обращаются в нуль.
3) При $t \to a + 0$

$$p(t) - p(a) \sim P(t-a)^{\mu}, \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda - 1},$$

причем первое из этих соотношений дважды дифференцируемо, а второе – дифференцируемо. Здесь P, λ, μ — положительные постоянные, а Q – действительное или комплексное число.
4) Вариация $\bigvee\limits_c^b \{\frac{q(t)}{p'(t)}\}$ конечна при любом $c \in (a, b)$.
Напомним, что вариацию функции f на отрезке $[c, b]$ можно вычислить следующим образом:

$$\bigvee_c^b (f) = \int\limits_c^b |f'(x)|dx.$$

5) При $t \to b - 0$ величина $\dfrac{q(t)}{p'(t)}$ стремится к конечному пределу, и этот предел равен нулю, если $p(b) = \infty$.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия 1) – 5) и, кроме* *того,* $\lambda < \mu$. *Тогда*

$$I(x) \sim e^{\frac{\lambda\pi i}{2\mu}} \frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{ixp(a)}}{(Px)^{\lambda/\mu}}, \quad x \to +\infty.$$

Упражнения.

1. Показать, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin{(x\cos t)}dt = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to \pm\infty).$$

2. Показать, что при больших положительных x будет

$$\int\limits_1^{\infty} (1 - e^{1-t})e^{ixt(1-\ln t)}dt \sim \frac{i}{x}e^{ix}.$$

3. Показать, что при $x \to +\infty$ будет

$$\int\limits_0^{\infty} t\exp\left\{it^2(\ln t - x)\right\}dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{e}}\exp\left(x - \frac{1}{2}ie^{2x-1} + \frac{1}{4}\pi i\right).$$

Список литературы

[1] Олвер Ф. *Введение в асимптотические методы и специальные функции.* — М.: Наука, 1978. – 376 с.

[2] Де Брейн Н. Г. *Асимптотические методы в анализе.* — М.: Мир, 1966. – 248 с.

[3] Копсон Э. Т. *Асимптотические разложения.* – М.: Мир, 1966. – 160 с.

[4] Федорюк М. В. *Метод перевала.* — М.: Наука, 1977. – 368 с.

[5] Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции.* — М.: Наука, 1979. – 320 с.

[6] Эрдейи А. *Асимптотические разложения.* — М.: ФМ, 1962. – 128 с.

[7] Ильин А. М. *Асимптотические методы в анализе.* — Челябинск: б.и., 2007. – 135 с.

Введение в асимптотические методы

Специальный курс лекций
для студентов специальности "Математика"

Авторы:
Копачевский Николай Дмитриевич,
Смолич Владимир Павлович

Корректура: Газиев Э.Л.

Подписано к печати 30.10.2009г. Формат 70x84/16.

Бумага тип. ОП. Объем 2,4 п.л. Тираж 100.