ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Н. Д. Копачевский
Таврический национальный университет,
Симферополь, Украина

Рассмотрена задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t U_k(t,s)A_ku(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1,$$

для интегродифференцифльного уравнения второго порядка, обобщающего гиперболическое уравнение в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. При условиях, близких к стандартным, доказана теорема о сильной разрешимости на произвольном интервале времени. Изучена ассоциированная задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H}^{m+2}$. Сформулирована ассоциированная спектральная задача.

1. Введение.

В работе [1] при исследовании малых движений идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ возникла следующая задача Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0u - \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}A_1u(s)ds = f(t), \quad \gamma > 0, \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1. \tag{1}$$

Здесь операторные коэффициенты обладают свойствами

$$A_0 = A_0^* >> 0, \quad A_1 = A_1^* >> 0, \quad \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_1) \subset L_2(\Omega). \tag{2}$$

Естественным обобщением задачи (1) – (2) является задача Коши в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ для уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A_ku(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1, \tag{3}$$

$$0 << A_0 = A_0^*, \quad \mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(A_0), \quad \gamma_k > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4}$$

В частности, при

$$A_k = \alpha_k A_0, \quad \alpha_k < 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{5}$$

получаем различные модели релаксирующей жидкости, а при

$$\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{6}$$

– более сложные физические модели.

В работах [1], [2] доказаны теоремы о существовании обобщенных решений задачи (1), в [3, т.2, с. 398-401] изучались сильные решения задачи (3) – (4). В данной работе будет доказана теорема о сильной разрешимости задачи, более общей, чем задача (3) – (4).

Отметим, что в работе [4] изучена задача

$$\frac{du}{dt} + A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{7}$$

при тех же предположениях (4) и $A_k = A_k^* >> 0$, причем подробно рассмотрены как эволюционная, так и соответствующая спектральная задачи.

Заметим еще, что в [5] исследованы абстрактные интегродифференциальные уравнения второго порядка в произвольном банаховом пространстве. При определенных предположениях в этой работе установлено существование и единственность решений задачи Коши на отрезке $[-T, T]$ с достаточно малым $T > 0$.

2. Постановка задачи.

В произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t U_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1, \tag{8}$$

где операторы A_k удовлетворяют условиям (4), а $U_k(t, s)$ – оператор-функции t и s со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $k = 1, 2, \dots, m$. Ограничения на эти функции будут сформулированы позже (см. (18), (19)).

Отметим, что при условиях

$$A_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{9}$$

задача (8) превращается в стандартную задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения гиперболического типа

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1. \tag{10}$$

Хорошо известны (см., например, [6], с. 301; [7], с. 177) теоремы о разрешимости задачи Коши (10). Если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad f(t) \in C^1\left([0,T]; \mathcal{H}\right), \tag{11}$$

то задача (10) имеет единственное сильное решение $u = u_0(t)$ на отрезке $[0, T]$, выражаемое формулой

$$u_0(t) = \cos(tA_0^{\frac{1}{2}})u^0 + \sin(tA_0^{\frac{1}{2}})A_0^{-\frac{1}{2}}u^1 + \int_0^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) A_0^{-\frac{1}{2}} f(s) ds. \tag{12}$$

Если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad u^1 \in \mathcal{H}, \quad f(t) \in C\left([0,T]; \mathcal{H}\right), \tag{13}$$

то задача (10) имеет единственное слабое решение, также выражаемое формулой (12). Для сильного и слабого решений справедлив закон баланса полной энергии

$$\frac{1}{2}\|\frac{du}{dt}\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|A_0^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\|u^1\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|A_0^{\frac{1}{2}}u^0\|^2_{\mathcal{H}} + \mathrm{Re}\int_0^t \left(f(s), u(s)\right)_{\mathcal{H}} ds. \tag{14}$$

Здесь левая часть, т.е. полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия, является непрерывной функцией t.

3. О разрешимости задачи Коши для интегродифференциального уравнения.

Прежде чем перейти к выяснению условий разрешимости задачи (8), сформулируем теорему о разрешимости задачи (10), обобщающую приведенное выше классическое утверждение и следующее из монографии [8] (см. стр. 337 – 339): если взамен (11) выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad f(t) \in \mathcal{W}_p^1\left([0,T];\mathcal{H}\right), \quad p>1, \tag{15}$$

то задача (10) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Здесь под $\mathcal{W}_p^1\left([0,T];\mathcal{H}\right)$ понимается пространство функций $u(t)$ с нормой

$$\|u(t)\|_{\mathcal{W}_p^1([0,T];\mathcal{H})} := \sum_{k=0}^{1}\left(\int_0^T \|u^{(k)}(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{16}$$

плотным множеством в котором является $C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right)$.

Определение 1. Назовем сильным решением задачи Коши (8) на отрезке $[0,T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, $t\in[0,T]$, для которой выполнены следующие свойства:
а) $u(t)\in\mathcal{D}(A_0)$ для любого $t\in[0,T]$ и $A_0u(t)\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$;
б) $u'(t)\in C\left([0,T];\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$;
в) $u''(t)\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$;
г) выполнены уравнение и начальные условия (8).

Заметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (8) являются условия

$$u^0\in\mathcal{D}(A_0), \quad f(t)\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right). \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (8) *выполнены условия* (4), (15)*, а также условия*

$$U_k(t,s)\in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\Big), \tag{18}$$

$$\frac{\partial U_k(t,s)}{\partial t}\in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\Big), \quad k=1,2,\ldots,m. \tag{19}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Перенесем в (8) интегральные слагаемые в правую часть и введем обозначение

$$\widehat{f}(t) := f(t) - \sum_{k=1}^{m}\int_0^t U_k(t,s)A_ku(s)ds. \tag{20}$$

Считая, что функция $\widehat{f}(t)$ известна, и используя формулу (12) решения задачи Коши (10) для гиперболического уравнения, приходим для искомой функции $u(t)$ к интегральному уравнению Вольтера второго рода:

$$u(t)+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t A_0^{-\frac{1}{2}}\sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)ds\int_0^s U_k(s,\xi)A_ku(\xi)d\xi = u_0(t). \tag{21}$$

Здесь $u_0(t)$ задана формулой (12) и строится по данным задачи (10), причем она в силу условий (15) является сильным решением задачи (8) без интегральных слагаемых, т.е. задачи (10). Это означает, в частности, что

$$u_0(t)\in C^2\Big([0,T];\mathcal{H}\Big)\cap C^1\left([0,T];\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})\right)\cap C\Big([0,T];\mathcal{D}(A_0)\Big). \tag{22}$$

Осуществим в повторных интегралах (21) замену порядка интегрирования:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)ds\int\limits_0^s U_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi = \\ = \int\limits_0^t\left(\int\limits_\xi^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)U_k(s,\xi)ds\right)A_k u(\xi)d\xi.\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь внутренний интеграл в силу (18), (19) преобразуется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}&\int\limits_\xi^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)U_k(s,\xi)ds = \\ &= \left|\begin{matrix}\sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)ds = dv(s), \quad v(s) = -A_0^{-\frac{1}{2}}\cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right), \\ U_k(s,\xi) = u(s), \quad du = \frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\end{matrix}\right| = \\ &= -A_0^{-\frac{1}{2}}\cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)U_k(s,\xi)\Big|_{s=\xi}^t + A_0^{-\frac{1}{2}}\int\limits_\xi^t \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds = \\ &= -A_0^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left((t-\xi)A_0^{\frac{1}{2}}\right)U_k(\xi,\xi) - U_k(t,\xi) + \int\limits_\xi^t \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\right) =: \\ &=: A_0^{-\frac{1}{2}}V_k(t,\xi), \quad V_k(t,t)\equiv 0.\end{aligned} \tag{24}$$

С учетом (23), (24) уравнение (21) преобретает вид

$$u(t) + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t A_0^{-1}V_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi = u_0(t), \tag{25}$$

где согласно (18), (19) операторные функции

$$V_k(t,\xi) \in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\Big). \tag{26}$$

Рассмотрим уравнение (25) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(A_0) = \mathcal{D}(A_0)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{H}(A_0)} := (A_0 u, A_0 v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall u,v \in \mathcal{D}(A_0), \tag{27}$$

порождающим норму, эквивалентную норме графика оператора A_0 (поскольку $A_0 >> 0$, см. (4)). В этом уравнении оператор-функции

$$W_k(t,\xi) := A_0^{-1}V_k(t,\xi)A_k, \quad k = 1,2,\ldots m, \tag{28}$$

обладают свойством

$$W_k(t,\xi) \in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H}(A_0))\Big), \quad k = 1,2,\ldots m. \tag{29}$$

В самом деле, в силу второго условия (4) оператор A_k ограниченно действует из $\mathcal{H}(A_0)$ в $\mathcal{H}$, функция $V_k(t,\xi)$ обладает свойством (26), а оператор A_0^{-1} ограниченно действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}(A_0)$.

Опираясь на свойства (29) и представляя (25) в виде интегрального уравнения

$$u(t)+\int\limits_0^t W(t,\xi)u(\xi)d\xi = u_0(t), \tag{30}$$

$$W(t,\xi) := \sum_{k=1}^m W_k(t,\xi) \in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{D}(A_0)\Big), \tag{31}$$

приходим к выводу, что оно имеет единственное решение

$$u(t)\in C\Big([0,T];\mathcal{D}(A_0)\Big), \tag{32}$$

поскольку заданная функция $u_0(t)$ обладает этим свойством, а $W(t,\xi)$ – свойством (31).

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства б) и в) из определения 1 сильного решения задачи (8).

Формальное дифференцирование обеих частей (25) приводит к формулам

$$u'(t) = u_0'(t) + \sum_{k=1}^m A_0^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \Bigg(\sin\left((t-\xi)A_0^{\frac{1}{2}}\right)U_k(\xi,\xi) + \\ + \int\limits_\xi^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\Bigg)A_k u(\xi)d\xi, \tag{33}$$

$$u''(t) = u_0''(t) + \sum_{k=1}^m \Bigg[\int\limits_0^t \cos\left((t-\xi)A_0^{\frac{1}{2}}\right)U_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)d\xi + \\ + \int\limits_0^t\Bigg(\int\limits_\xi^t \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\Bigg)A_k u(\xi)d\xi\Bigg]. \tag{34}$$

Так как

$$u_0'(t)\in C\Big([0,T];\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})\Big), \quad A_k u(t)\in C\Big([0,T];\mathcal{H}\Big), \tag{35}$$

то из (33), (18), (19), следует свойство б) из определения сильного решения. Далее, так как $u_0''(t)\in C\Big([0,T];\mathcal{H}\Big)$, то из (34) получаем условие в). Наконец, непосредственный подсчет на основе формул (31), (28), (24), (30), (33), (34) показывает, что функция $u(t)$, являющаяся решением уравнения (30), удовлетворят уравнению (8) на отрезке $[0,T]$. Кроме того, из (30) и (33) следует, что $u(0)=u_0(0)=u^0$, $u'(0)=u_0'(0)=u^1$. □

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Если в задаче* (3), (4) *выполнены условия* (15), *то уравнение* (3) *имеет сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Так как задача (3) есть частный случай задачи (8) с $U_k(t,s) := \exp\left(-\gamma_k(t-s)\right)I$, $k=1,2,\ldots,m$, то выполнены свойства (18), (19). □

Замечание 1. Из теоремы 2, в свою очередь, следует, что при условиях (15) задача (1), (2) имеет сильное решение на $[0,T]$.

Замечание 2. Как следует из доказательства теоремы 1, требование (19) в этой теореме можно ослабить и заменить его на условие

$$\int_{\xi}^{t} \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds \in C\bigg([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\bigg), \tag{36}$$

обеспечивающее свойство (26).

Замечание 3. Теорема 1 допускает обобщение на случай банахова пространства $\mathcal{E}$ при условии, что оператор A_0 представим в виде

$$A_0 = -B_0^2 + F, \quad \mathcal{D}(F) \supset \mathcal{D}(B_0), \quad 0 \in \rho(B_0), \tag{37}$$

где B_0 – генератор C_0-группы на $\mathcal{E}$ (см. [6], с. 299 – 301; [7], с. 165 – 172).

Замечание 4. Используя теорию операторных косинус- и синус-функций $C(t)$ и $S(t)$ (взамен $\cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ и $A_0^{-\frac{1}{2}}\sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)$), дающих решение задачи (10) в виде

$$u_0(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \tag{38}$$

обобщающем формулу (12), можно доказать аналог теоремы 1 для случая произвольного банахова пространства $\mathcal{E}$ при условиях (37), (18), (36), а также условиях

$$u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B_0), \quad f(t) \in \mathcal{W}_p^1\left([0,T];\mathcal{E}\right), \tag{39}$$

обобщающих (15). При этом, используя формулу

$$S(t)v = -A_0^{-1}C^{'}(t)v, \quad v \in C^1\left(\mathbb{R}_+,\mathcal{E}\right), \tag{40}$$

(см. [9], с. 26, формула 9^0), аналогично (21), (23) – (24) приходим снова к формуле (25), где теперь (вместо (24))

$$V_k(t,\xi) := C(t-\xi)U_k(\xi,\xi) - U_k(t,\xi) + \int_{\xi}^{t} C(t-s)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds. \tag{41}$$

4. Ассоциированные задачи Коши.

Рассмотрим частный случай задачи (8), обобщающий задачу (1):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}Bu(s)ds - \int_0^t e^{-\delta(t-s)}Cu(s)ds = f(t), \tag{42}$$

$$u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1, \quad 0 << A = A^*, \quad B = B^* \geq 0, \quad C = C^* \geq 0, \tag{43}$$

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B), \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C), \quad \gamma > 0, \quad \delta > 0. \tag{44}$$

Эту задачу для интегродифференциального уравнения можно привести к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств по схеме работы [4].

Введем новые неизвестные функции

$$v(t) := \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}B^{\frac{1}{2}}u(s)ds, \quad v(0) = 0, \tag{45}$$

$$w(t) := \int\limits_0^t e^{-\delta(t-s)} C^{\frac{1}{2}} u(s) ds, \quad w(0) = 0. \tag{46}$$

Если $u = u(t)$ – сильное решение задачи (42) – (44), то $v(t)$ и $w(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dv}{dt} = B^{\frac{1}{2}} u - \gamma v, \quad \frac{dw}{dt} = C^{\frac{1}{2}} u - \delta w. \tag{47}$$

Вводя еще функцию

$$z(t) := \frac{du}{dt}, \tag{48}$$

приходим взамен (42) – (44) к задаче Коши вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B^{\frac{1}{2}} & -C^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & -\gamma I & 0 & 0 \\ -C^{\frac{1}{2}} & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$u(0) = u^0, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad z(0) = u^1, \tag{50}$$

т.е. к задаче

$$\mathcal{J} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{51}$$

$$y := (u; v; w; z)^t, \quad f_0(t) := (f(t); 0; 0; 0)^t.$$

Здесь операторная матрица

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

очевидно, обладает свойствами

$$\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^2 = \mathcal{I}, \tag{53}$$

т.е. является канонической симметрией.

Что касается операторной матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & B^{\frac{1}{2}} & -C^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & -\gamma I & 0 & 0 \\ -C^{\frac{1}{2}} & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{54}$$

заданной на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^4, \tag{55}$$

то она обладает следующими свойствами.

1°. Оператор $\mathcal{A}_0$ задан на плотной в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H}^4 := \oplus_{k=1}^4 \mathcal{H}_k, \mathcal{H}_k := \mathcal{H}$, области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ из (55) и является симметричным вообще говоря неограниченным оператором.

Свойство симметрии оператора $\mathcal{A}_0$ очевидно из его определения. Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$ определен корректно на $\mathcal{D}(A_0)$, так как из (43), (44) следует, что

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}), \quad \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}, \tag{56}$$

и поэтому $\mathcal{A}_0 y \in \mathcal{H}^4$ при любом $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.

2°. Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает факторизацию с симметричными крайними множителями в следующей форме

$$\mathcal{A}_0 = \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I) \begin{pmatrix} I & Q_B^+ & -Q_C^+ & 0 \\ Q_B & -\gamma I & 0 & 0 \\ -Q_C & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I), \tag{57}$$

$$Q_B := B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad Q_C := C^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{58}$$

$$Q_B^+ := A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{D}(Q_B^+) := \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad Q_C^+ := A^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{D}(Q_C^+) := \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}). \tag{59}$$

Тождество (57) проверяется непосредственно, исходя из определений (54), (55), (58), (59).

3°. Операторы Q_B, Q_B^+, Q_C и Q_C^+ обладают свойствами

$$Q_B^+ = Q_B^* \mid \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad \overline{Q_B^+} = Q_B^*, \quad Q_C^+ = Q_C^* \mid \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}), \quad \overline{Q_C^+} = Q_C^*. \tag{60}$$

В самом деле, так как в силу (44) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$, то по известному неравенству Гайнца (см., например, [10], стр. 254)

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}), \tag{61}$$

и потому операторы Q_B и Q_C ограничены в $\mathcal{H}$. Далее, при любом $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}})$ имеем

$$(Q_B u, v) = (B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} u, v) = (u, A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} v) = (u, Q_B^+ v), \tag{62}$$

откуда следует первое свойство (60), а после замыкания - и второе. Эти же свойства для оператора Q_C^+ доказывается аналогично.

4°. Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает факторизацию в форме Шура-Фробениуса:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ Q_B A^{-\frac{1}{2}} & I & 0 & 0 \\ -Q_C A^{-\frac{1}{2}} & -Q_C Q_B^+ V_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{diag}(A, -V_2; V_3; -I) \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}} Q_B^+ & -A^{-\frac{1}{2}} Q_C^+ & 0 \\ 0 & I & -V_2 Q_B Q_C^+ & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{63}$$

$$V_2 := (\gamma I + Q_B Q_B^+)^{-1}, \quad V_3 := \delta I - Q_C Q_C^+ - Q_C Q_B^+ V_2 Q_B Q_C^+, \tag{64}$$

где в силу предыдущего оператор V_2 ограничен и положительно определен.

5°. Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает замыкание до самосопряженного оператора $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_0}$, имеющего представление в двух формах:

а) в виде (57) с заменой Q_B^+ на Q_B^* и Q_C^+ на Q_C^*, т. е.

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I) \begin{pmatrix} I & Q_B^* & -Q_C^* & 0 \\ Q_B & -\gamma I & 0 & 0 \\ -Q_C & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I); \tag{65}$$

б) в форме Шура-Фробениуса, следующей из (63):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = &\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ Q_B A^{-\frac{1}{2}} & I & 0 & 0 \\ -Q_C A^{-\frac{1}{2}} & -Q_C Q_B^* \widetilde{V}_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \\
&\cdot \operatorname{diag}(A, -\widetilde{V}_2; \widetilde{V}_3; -I) \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}} Q_B^* & -A^{-\frac{1}{2}} Q_C^* & 0 \\ 0 & I & -\widetilde{V}_2 Q_B Q_C^* & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{66}
$$

$$
\widetilde{V}_2 := (\gamma I + Q_B Q_B^*)^{-1}, \quad \widetilde{V}_3 := \delta I - Q_C Q_C^* - Q_C Q_B^* \widetilde{V}_2 Q_B Q_C^*. \tag{67}
$$

В самом деле, в (57) крайние множители совпадают и являются неограниченными самосопряженными операторами, заданными на области определения $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{H}^3$, плотной в $\mathcal{H}^4$; они имеют ограниченные обратные, заданные на всем пространстве. Средний множитель в (57) допускает замыкание с области определения $\mathcal{H} \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{H}$, плотной в $\mathcal{H}^4$, на всё пространство $\mathcal{H}^4$. Это замыкание состоит в замене Q_B^+ на Q_B^* и Q_C^+ на Q_C^*, причем после замыкания упомянутый средний множитель является ограниченным оператором.

Аналогичные рассуждения приводятся и в случае факторизации в форме (63). Здесь крайние множители, в силу их треугольной структуры, ограниченно обратимы и допускают замыкание на все пространство $\mathcal{H}^4$, а средний (диагональный) множитель также замыкаем на область определения $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{H}^3$, плотную в $\mathcal{H}^4$, причем V_2 после замыкания переходит в оператор $\widetilde{V}_2$, ограниченный и имеющий ограниченный обратный, а V_3 после замыкания переходит в оператор $\widetilde{V}_3$, ограниченный и заданный на всем $\mathcal{H}$.

6°. После замыкания оператор $\mathcal{A}$ задан на области определения

$$
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\, (u; v; w; z)^t \in \mathcal{H}^4 : \ u + A^{-\frac{1}{2}} Q_B^* v - A^{-\frac{1}{2}} Q_C^* w \in \mathcal{D}(A) \,\} \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \tag{68}
$$

и действует по закону

$$
\mathcal{A} y = \begin{pmatrix} A(u + A^{-\frac{1}{2}} Q_B^* v - A^{-\frac{1}{2}} Q_C^* w) \\ B^{\frac{1}{2}} u - \gamma v \\ -C^{\frac{1}{2}} u + \delta w \\ -z \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{69}
$$

Эти факты непосредственно следуют из (65) либо (66). Отметим только, что из (68) следует свойство $u \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ для элементов $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

7°. Оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным снизу самосопряженным оператором, заданным на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Для доказательства этого свойства рассмотрим оператор $\mathcal{A}_0 + c\mathcal{J}$ с достаточно большим положительным c. Такой оператор имеет факторизацию вида (57) со средним множителем

$$
\begin{pmatrix} I + cA^{-1} & Q_B^+ & -Q_C^+ & 0 \\ Q_B & (c-\gamma)I & 0 & 0 \\ -Q_C & 0 & (\delta + c)I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c-1)I \end{pmatrix}, \tag{70}
$$

который, во-первых, допускает замыкание (заменой Q_B^+ на Q_B^* и Q_C^+ на Q_C^*), а во вторых, после замыкания и при достаточно больших $c>0$ является положительно определенным оператором и потому имеющим ограниченный обратный оператор. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A} + c\mathcal{J} = \overline{\mathcal{A}_0 + c\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{A}_0} + c\mathcal{J}$ имеет ограниченный обратный, заданый на всем $\mathcal{H}^4$. Так как он положительно определен и область его значений совпадает со всем $\mathcal{H}^4$, то

$\mathcal{A}+c\mathcal{J}$ – самосопряженный оператор, а потому оператор $\mathcal{A}=(\mathcal{A}+c\mathcal{J})-c\mathcal{J}$ самосопряжен и ограничен снизу.

Опираясь на доказанные утверждения, рассмотрим проблему, более общую чем (42) - (44):

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2u}{dt^2}+Au+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}B_k u(s)ds-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t e^{-\delta_j(t-s)}C_j u(s)ds=f(t),\\
u(0)=u^0,\quad u^{'}(0)=u^1,\quad \gamma_k>0,\quad k=1,2,...,m,\quad \delta_j>0,\quad j=1,2,...,n,\\
\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(B_k),\quad k=1,...,m,\quad \mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(C_j),\quad j=1,...,n,\\
A=A^*>>0,\quad B_k=B_k^*\geq 0,\quad k=1,...,m,\quad C_j=C_j^*\geq 0,\quad j=1,...,n.
\end{gathered}
\tag{71}
$$

Преобразованиями, аналогичными (45), (46), ее можно привести к задаче Коши вида (49), (50). Полагая

$$
v_k:=\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}B_k^{\frac{1}{2}}u(s)ds,\quad v_k(0)=0,\quad k=1,...,m,
\tag{72}
$$

$$
w_j:=\int\limits_0^t e^{-\delta_j(t-s)}C_j^{\frac{1}{2}}u(s)ds,\quad w_j(0)=0,\quad j=1,...,n,
\tag{73}
$$

приходим после замены (48) к задаче, которая в векторно-матричной форме и в блочном виде принимает вид:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I\\ 0 & -\widehat{I}_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \widehat{I}_n & 0\\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u\\ \widehat{v}\\ \widehat{w}\\ z\end{pmatrix}+
$$

$$
+\begin{pmatrix} A & \widehat{B}^{\frac{1}{2}} & -\widehat{C}^{\frac{1}{2}} & 0\\ (\widehat{B}^{\frac{1}{2}})^t & \widehat{\gamma}\widehat{I}_m & 0 & 0\\ -(\widehat{C}^{\frac{1}{2}})^t & 0 & \widehat{\delta}\widehat{I}_n & 0\\ 0 & 0 & 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ \widehat{v}\\ \widehat{w}\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(t)\\ \widehat{0}_m\\ \widehat{0}_n\\ 0\end{pmatrix},
\tag{74}
$$

$$
u(0)=u^0,\quad \widehat{v}(0)=0,\quad \widehat{w}(0)=0,\quad z(0)=u^1.
\tag{75}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\widehat{I}_m:=\mathrm{diag}(\underbrace{I,...,I}_{m}),\quad \widehat{I}_n:=\mathrm{diag}(\underbrace{I,...,I}_{n}),\\
\widehat{v}:=(v_1;...;v_m)^t,\quad \widehat{w}:=(w_1;...;w_n)^t,\\
\widehat{B}^{\frac{1}{2}}:=(B_1^{\frac{1}{2}};...;B_m^{\frac{1}{2}}),\quad \widehat{C}^{\frac{1}{2}}:=(C_1^{\frac{1}{2}};...;C_n^{\frac{1}{2}}),\\
\widehat{\gamma}\widehat{I}_m:=\mathrm{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^m,\quad \widehat{\delta}\widehat{I}_n:=\mathrm{diag}(\delta_j I)_{j=1}^n,
\end{gathered}
\tag{76}
$$

а символом $(...)^t$, как и выше, обозначена операция транспонирования.

Задача (74) – (76) коротко может быть записана в виде

$$
\begin{gathered}
\widehat{\mathcal{J}}\frac{d\widehat{y}}{dt}+\widehat{\mathcal{A}}_0 y=\widehat{f}_0(t),\quad \widehat{y}(0)=\widehat{y}^0,\\
\widehat{y}:=(u;\widehat{v};\widehat{w};z)^t,\quad \widehat{f}_0(t):=(f(t);\widehat{0}_m;\widehat{0}_n;0)^t,
\end{gathered}
\tag{77}
$$

где оператор $\widehat{\mathcal{J}}$ снова обладает свойствами (53), а для $\widehat{\mathcal{A}}_0$, как и для оператора $\mathcal{A}_0$ из (54), справедливы общие свойства $1^\circ-7^\circ$, с соответствующими изменениями.

Рассмотрим наряду с задачами Коши (51), (77), связанными с проблемами (42) – (44) и (71) соответственно, аналогичные задачи с замкнутыми, а потому самосопряженными коэффициентами $\mathcal{A}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$:

$$\mathcal{J}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{78}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\frac{d\widehat{y}}{dt} + \widehat{\mathcal{A}}y = \widehat{f}_0(t), \quad \widehat{y}(0) = \widehat{y}^0. \tag{79}$$

Определение 2. Будем говорить, что задача (78) ассоциирована с задачей (51) и задачей (42) – (44), а задача (79) ассоциирована с задачами (77) и (71).

Опираясь на доказанные выше утверждения, установим следующий факт.

Теорема 3. *Задача* (42) – (44) *для интегродифференциального уравнения, а также задача* (51) *для векторно-матричного уравнения и ассоциированная задача* (78) *равносильны, т.е. из существования и единственности сильного решения любой из этих задач на отрезке [0, T] следует существование и единственность сильного решения двух других задач.*

Аналогичное утверждение имеет место и для задач (71), (77) и (79).

Доказательство. Пусть задача (42) – (44) имеет единственное сильное решение на [0,T]. Тогда из построений в начале п. 4, связанных с переходом от проблемы (42) – (44) к задаче Коши (49) – (50), а также (51), следует, что задача (51) имеет единственное сильное решение на отрезке [0,T]. При этом решение

$$y(t) = (u(t); v(t); w(t); z(t))^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

и $\mathcal{A}_0 y(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}^4\Big)$, поэтому наряду с (51) имеет место и уравнение (78), причем $\mathcal{A}y(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}^4\Big)$ и все слагаемые в (78) непрерывны по $t \in [0,T]$. Значит, задача (78) в этом случае имеет единственное сильное решение на отрезке [0,T].

Убедимся теперь, что из существования единственного сильного решения задачи (78) на отрезке [0,T] следует существование единственного сильного решения задачи (51). Отсюда, в свою очередь, будет следовать существование единственного сильного решения задачи (42) – (44).

Итак, пусть существует единственное сильное решение $y(t)$ задачи (78) на отрезке [0,T]. Тогда $y(t) = (u(t); v(t); w(t); z(t))^t \in \mathcal{D}(A)$ и выполнены уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} + A(u + A^{-\frac{1}{2}}Q_B^* v - A^{-\frac{1}{2}}Q_C^* w) = f(t), \quad z(0) = u^1,\\ &\frac{dv}{dt} + \gamma v = -B^{-\frac{1}{2}}u, \quad v(0) = 0,\\ &\frac{dw}{dt} + \delta w = -C^{-\frac{1}{2}}u, \quad w(0) = 0,\\ &\frac{du}{dt} = z, \quad u(0) = u^0, \end{aligned} \tag{80}$$

причем здесь все слагаемые принадлежат $C\Big([0,T]; \mathcal{H}\Big)$, а выражение в скобках в первом уравнении – пространству $C\Big([0,T]; \mathcal{D}(A)\Big)$. Установить равносильность задач (80) и (51), т.е. (49), (50), эквивалентно, в силу (57) – (59), (63) – (64), (65), (66) – (67), тому, что в первом уравнении (80) можно для решений заменить Q_B^* на Q_B^+, Q_C^* на Q_C^+ и раскрыть скобки. Докажем, что это можно сделать.

В самом деле, введем обозначение

$$u(t) + A^{-\frac{1}{2}}Q_B^* v(t) - A^{-\frac{1}{2}}Q_C^* w(t) =: \varphi(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{D}(A)\Big). \tag{81}$$

Из второго и третьего уравнений (80) получаем формулы (45), (46), причем $v(t)$ и $w(t)$ принадлежат $C^1\Big([0,T]; \mathcal{H}\Big)$, так как по предположению эти функции являются компонентами сильного решения $y(t)$ задачи (78). Подставляя эти формулы в (81), приходим к соотношению

$$u(t) + \int_0^t \Big(A^{-\frac{1}{2}}Q_B^* B^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma(t-s)} - A^{-\frac{1}{2}}Q_C^* C^{\frac{1}{2}} e^{-\delta(t-s)}\Big) u(s)ds = \varphi(t). \tag{82}$$

Введем, как в п. 3, гильбертово пространство $\mathcal{H}(A) = \mathcal{D}(A)$ со скалярным произведением вида (27) (с $A_0 = A$) и рассмотрим (82) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода для неизвестной функции $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}(A)$ и заданной функции $\varphi(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}(A)\Big)$.

При этом, как нетрудно видеть, ядро $V(t,s)$ интегрального оператора в (82) является непрерывной функцией $t-s$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(A))$. В самом деле, если $v \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}(A)$, то в силу (44) $B^{\frac{1}{2}}v \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, а потому, согласно свойству 3° (см. (60)), $Q_B^* B^{\frac{1}{2}} v = Q_B^+ B^{\frac{1}{2}} v = A^{-\frac{1}{2}} B v$. Поэтому

$$V(t,s)|\mathcal{H}(A) = A^{-1}\left(e^{-\gamma(t-s)}B - e^{-\delta(t-s)}C\right), \tag{83}$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Значит, интегральное уравнение (82) имеет единственное решение $u(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}(A)\Big)$. Тогда $v(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}})\Big)$, $w(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}})\Big)$, и в первом уравнении (80) можно заменить Q_B^* на Q_B^+, Q_C^* на Q_C^+ и раскрыть скобки.

Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы. Доказательство второго утверждения проводится аналогично. □

Следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Если выполнены условия* (15) *(для оператора A и функции $f(t)$), то каждая из задач* (42) – (44), (51) *и* (78), *а также каждая из задач* (71), (77) *и* (79) *имеют единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Достаточно заметить, что существование и единственность сильного решения задачи (42) – (44) следует из теоремы 1, так как наряду с условиями (15) в задаче (42) – (44) выполнены условия (18), (19). Аналогичное замечание относится и к задаче (71). □

5. Ассоциированные спектральные задачи.

Рассмотрим решения однородной задачи (78), зависящие от t по закону

$$y(t) = e^{-\lambda t}y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^4, \tag{84}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – неизвестный заранее комплексный параметр, а $y \neq 0$ – так называемый амплитудный элемент. Решения такого вида называют нормальными движениями, отвечающими проблеме (78), причем λ есть комплексный декремент затухания.

Для амплитудных элементов y получаем спектральную задачу

$$\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{J} y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{85}$$

где $\mathcal{J}$ и $\mathcal{A}$ – операторные матрицы (52), (65), (66), свойства которых описаны в п. 4. В частности, оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным снизу самосопряженным оператором, а $\mathcal{J}$ есть оператор канонической симметрии.

Для нормальных движений $\widehat{y}(t) = e^{-\lambda t}\widehat{y}$, $\widehat{y} \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$, отвечающих задаче Коши (79), приходим к аналогичной проблеме

$$\widehat{\mathcal{A}}\widehat{y} = \lambda \widehat{\mathcal{J}} \widehat{y}, \quad \widehat{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{86}$$

в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{H}$. Здесь общие свойства операторов $\widehat{\mathcal{J}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ – те же, что и в задаче (85).

Определение 3. Назовем задачу (85) спектральной задачей, ассоциированной с задачей (42) – (44) для интегродифференциального уравнения второго порядка. Соответственно задачу (86) назовем спектральной задачей, ассоциированной с задачей (71).

Отметим простые свойства решений задачи (85).

1°. Задача (85) есть задача на собственные значения $\mathcal{J}$ – самосопряженного оператора:

$$\mathcal{J}\mathcal{A}y = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{87}$$

2°. Спектр задачи (85) расположен симметрично относительно действительной оси.

Аналогичные свойства имеют место и для задачи (86). Детальное изучение свойств решений задач (85), (86) будет проведено в другой работе.

Список литературы

[1] Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations.* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз., Симферополь, 1994, с. 41 – 42.

[2] Azizov T.Ya., Kopachevsky N.D., Orlova (Bolgova) L.D. *Evolution and spectral problems generated by problems on small movements of a visco-elastic or relaxing fluid.* // IWOTA – 95, Final Programme and Book of Abstracts, Regesburg (Germany), 1995, p. 40.

[3] Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics.* – Basel; Boston; Berlin; Birkhauser.
Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid. – 2001, 384 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
Vol. 2. Not self-adjoint problems for a viscous fluid. – 2003 (to appear).

[4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости* // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 6., 1998, с. 5 – 33.

[5] Travis C.C., Webb G.F. *An abstract second order semilinear Volterra integrodifferential equation.* // SIAM J. Math. Anal., Vol. 10, No.2, March 1979, 412 – 424.

[6] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.

[7] Голдстейн Дж. *Полугруппы линейных операторов и их приложения.* – К.: Выща шк., 1989. – 347 с.

[8] Yakubov S., Yakubov Ya. *Differential-operator Equations.* Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman & Hall / CRC, Bora Raton, 2000, pp. 542.

[9] Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. *Дифференциально-операторные уравнения и некоторые задачи.* – М.: Наука, 1995. – 176 с.

[10] Крейн С.Г. *Функциональный анализ (справочное пособие группы авторов под общей редакцией С.Г. Крйна).* – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Mathematical Analysis Chair, Taurida National V. Vernadsky University, Vernadsky av., 4, Simferopol 95007, Crimea, Ukraine.