Абстрактная формула Грина и задача Стокса.

Копачевский Н.Д.
(Симферополь, Украина).

Посвящается В. И. Юдовичу,
коллеге, старшему товарищу,
выдающемуся математику и механику.

Реферат.

Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G и оператора γ (оператора следа) выполнены следующие условия: а) F ограниченно вложено в E; б) оператор γ ограниченно действует из F в пространство G_+, ограниченно вложенное в G. Тогда существует однозначно определяемые операторы L и ∂ с $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) = F$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall\, \eta, u \in F,$$

причем $Lu \in F^*$, $\partial u \in (G_+)^*$.

Частными случаями этой формулы является первая формула Грина для оператора Лапласа (в области с липшицевой границей), формула Грина для бигармонического оператора, а также формула Грина для задачи Стокса, возникающей в известной проблеме С. Г. Крейна малых движениях и нормальных колебаниях тяжелой вязкой жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд.

1. Введение.

1. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^m$ с достаточно гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Для произвольных функций $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ хорошо известна формула

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \Delta u) d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u) d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma\,, \qquad (1)$$

которую называют первой формулой Грина для оператора Лапласа. Если ввести в рассмотрение гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ с соответствующими скаклярными произведениями и нормами, то формулу (1) можно переписать в виде

$$(\eta, u - \Delta u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - (\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n})_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma\eta := \eta\mid_{\Gamma}\,. \qquad (2)$$

Формула (2) допускает обобщения, во-первых, на случай менее гладких функций $\eta(x)$ и $u(x)$, во-вторых, на случай негладкой границы $\Gamma = \partial\Omega$, а в третьих – на случай произвольной тройки гильбертовых пространств E, F и G, связанных между собой определенным образом.

Идея получения такой абстрактной формулы Грина принадлежит С. Г. Крейну. При некоторых (достаточно ограничительных) условиях соответствующий результат был приведен в монографии [1], с.46-47. Затем появилась работа [2], где было получено обобщение результата из [1] и были рассмотрены абстрактные краевые и спектральные задачи.

В данной работе приводится новый вывод абстрактной формулы Грина при условиях, менее ограничительных, чем в работе [2]. На этой основе удается рассмотреть формулу Грина для задачи Стокса как частный случай абстрактной формулы Грина.

2. Напомним некоторые факты из функционального анализа, которые будут далее использованы (см.,например, [1]).

Пусть гильбертово пространство F плотно вложено в гильбертово пространство E ($F \subset_{\rightarrow} E$), т.е. F плотно в E и

$$\| u \|_E \leqslant a \| u \|_F , \quad \forall u \in F, \quad a > 0. \tag{3}$$

В этом случае говорят, что пространства F и E образуют гильбертову пару $(F; E)$. По паре $(F; E)$ однозначно определяется положительно определенный оператор A ($A \gg 0$), называемый порождающим оператором гильбертовой пары $(F; E)$. Для этого оператора $\mathcal{D}(A) \subset F$, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$ и

$$(u, v)_F = (A^{1/2} u, A^{1/2} v)_E , \quad \forall u, v \in F. \tag{4}$$

Если $v \in \mathcal{D}(A)$, то

$$(u, Av)_E = (u, v)_F , \quad \forall u \in F. \tag{5}$$

По оператору A можно построить шкалу гильбертовых пространств E^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, что $F = \mathcal{D}(A^{1/2}) = E^{1/2}$, $AE^{\alpha} = E^{\alpha - 1}$. По пространствам F и E можно построить оснащение (см. [3])

$$F \subset_{\rightarrow} E \subset_{\rightarrow} F^*, \tag{6}$$

где F^* – совокупность линейных функционалов на F. При этом любой функционал в F выражается через "скалярное"произведение в E:

$$l_v(u) := \langle u, v \rangle_E, \quad u \in F, \quad v \in F^*, \tag{7}$$

причем

$$| \, l_v(u) \, | = | \, \langle u, v \rangle_E \, | \leqslant \| u \|_F \cdot \| v \|_F^*. \tag{8}$$

Пусть A – порождающий оператор гильбертовой пары (F, E). Решения уравнения

$$Au = f, \quad u \in \mathcal{D}(A) \subset F, \tag{9}$$

при $f \in E$ называются обобщенными решениями. Для таких решений выполнено тождество

$$(v, u)_F = (v, f)_E , \quad \forall v \in F. \tag{10}$$

Если $f \in F^*$, то соответствующие решения задачи (9) называются слабыми решениями. Для них выполнено тождество

$$(v, u)_F = < v, f >_E , \quad \forall v \in F , f \in F^*; \tag{11}$$

при этом

$$\mathcal{D}(A) = F = E^{1/2} , \quad \mathcal{R}(A) = F^* = E^{-1/2}. \tag{12}$$

2. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств.

1. Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F и G выполнены следующие условия:

а) пространство F плотно вложено в E: $F \subset\!\!\!\to E$;

б) на пространстве F определен оператор γ (оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G: $G_+ \subset\!\!\!\to G$.

Обозначим через N ядро оператора γ:

$$N := \operatorname{Ker}\gamma = \{u \in F : \gamma u = 0\}. \tag{13}$$

В силу свойства $G_+ \subset\!\!\!\to G$ и неравенства

$$\| \gamma u \|_G \leqslant b \| u \|_F \,, \quad b > 0, \quad \forall\, u \in F, \tag{14}$$

N есть подпространство F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F:

$$F = N \oplus M. \tag{15}$$

Согласно свойству б) оператор $\gamma_M := \gamma\,|_M$ осуществляет взаимно однозначное отображение M на G_+. Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{16}$$

Можно показать, что

$$\| \varphi \|_{G_+} = \min_{\gamma_M u = \varphi} \| u \|_F. \tag{17}$$

Из (14) при $u \in M$, $\gamma_M u = \varphi \in G_+$ имеем

$$\| \varphi \|_G = \| \gamma u \|_G \leqslant b \| u \|_F = b \| \varphi \|_{G_+}, \tag{18}$$

откуда следует, что $(G_+; G)$ – гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств так, чтобы $G_+ = G^{1/2}$, $G = G^0$; тогда $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

Обозначим через T_M оператор, сопряженный к γ_M в смысле скалярного произведения в G. Так как γ_M изометрически отображает M на $G_+ = G^{+1/2}$, то T_M изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на M. Тогда

$$(\eta, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G \,, \quad \forall\, \eta \in M, \quad \forall\, \psi \in (G_+)^*. \tag{19}$$

Обозначим через ∂_M оператор, обратный к T_M. Тогда из (19) имеем

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G \,, \quad \forall\, \eta, w \in M, \quad \forall\, \gamma_M \eta \in G_+ \,, \quad \partial_M w \in (G_+)^*. \tag{20}$$

2. Построим по гильбертовой паре $(F; E)$ порождающий оператор A и по нему шкалу пространств E^α так, чтобы $F = E^{1/2}$, $E = E^0$, $F^* = E^{-1/2}$. Далее под A будем понимать оператор, заданный на $F = E^{1/2}$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A) = E^{-1/2} = F^*$. Тогда $A^{1/2}$ ограниченно действует из F на E и из E на $E^{-1/2} = F^*$ и имеет место тождество

$$(A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F = \langle \eta, Au \rangle_E \,, \quad \forall\, \eta, u \in F. \tag{21}$$

Пусть P_N и P_M – ортопроекторы на подпространства N и M из ортогонального разложения (15). Введем оператор

$$L := AP_N \,, \quad \mathcal{D}(L) = F, \tag{22}$$

ограниченно действующий из F в F^*. Очевидно,

$$Lw = 0\ , \quad \forall\ w \in M. \tag{23}$$

Введем оператор ∂, являющийся расширением оператора ∂_M с M на F. Рассмотрим неравенство

$$|\ \langle \eta, Lu \rangle_E\ | \leqslant \|\ Lu\ \|_{F^*} \cdot \|\ \eta\ \|_F = \|\ Lu\ \|_{F^*} \cdot \|\ \gamma_M \eta\ \|_{G_+}\ , \quad \forall\ \eta \in M, \quad \forall\ u \in N. \tag{24}$$

Из него следует, что величину $l_u(\eta) := \langle \eta, Lu \rangle_E$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал на G_+. Обозначим через $-\ \partial_N u$ элемент из $(G_+)^*$, представляющий этот функционал через скалярное произведение в G. Тогда

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = -\langle \gamma_M \eta, \partial_N u \rangle_G\ , \quad \forall\ \eta \in M, \quad \forall\ u \in N, \tag{25}$$

причем

$$\|\ \partial_N u\ \|_{G_+^*} \leqslant \|\ Lu\ \|_{F^*}. \tag{26}$$

По операторам ∂_M и ∂_N построим оператор $\partial : F \longrightarrow (G_+)^*$ по правилу

$$\partial u := \partial_N P_N u + \partial_M P_M u\ , \quad \forall\ u \in F. \tag{27}$$

Теорема 1. *Если для гильбертовых пространств E,F и G и оператора γ выполнены условия а) и б), то имеет место следующая абстрактная формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G\ , \quad \forall\ \eta, u \in F, \tag{28}$$

причем операторы L и ∂ заданы на F и определяются (по E,F и G и γ) единственным образом (формулами (20), (22), (25), (27)*).*

Доказательство теоремы основано на непосредственной проверке формулы (28) с учетом соотношений (15), (20) – (22), (25), (27).□

3. Рассмотрим абстрактную краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lu = f\ , \qquad \partial u = \psi. \tag{29}$$

Теорема 2. *Задача* (29) *имеет единственное слабое решение $u \in F$ тогда и только тогда, когда*

$$f \in F^*\ , \qquad \psi \in (G_+)^*. \tag{30}$$

Это решение имеет вид

$$u = A^{-1} f + T_M \psi, \tag{31}$$

где A и T_M – введенные выше операторы. □

Замечание 1. *Из теоремы 2 следует, что для любого элемента $u \in F$ имеет место его единственное представление в виде $u = v + w$, где v – слабое решение задачи*

$$Lv = f\ , \qquad \partial v = 0, \tag{32}$$

а w – слабое решение задачи

$$Lw = 0\ , \qquad \partial w = \psi.\square \tag{33}$$

Замечание 2. *В работе* [2] *формула* (28) *доказана при условиях а) и б), а также условии, что $N = \mathrm{Ker}\gamma$ плотно в E. При этом утверждалось, что $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F$, а формула* (28) *верна при $u \in \mathcal{D}(L)$.*□

3. Классические примеры.

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная область в R^m с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Введем пространтва $E = L_2(\Omega)$ с обычной нормой, $F = H^1(\Omega)$ со стандартной нормой

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega [| u |^2 + | \nabla u |^2] d\Omega, \tag{34}$$

а также пространство $G = L_2(\Gamma)$.

Нетрудно видеть, что для указанной тройки пространств выполнены условия а) и б) из параграфа 2, если оператор следа γ ввести по закону $\gamma u := u \,|_\Gamma$. Поэтому в качестве следствия из теоремы 1 приходим к такому выводу.

Теорема 3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ *и* $L_2(\Gamma)$, *определенных для области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* $\Gamma = \partial\Omega$, *имеет место следующая формула Грина*

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{35}$$

причем

$$\Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*.\square \tag{36}$$

Формула (35), *очевидно, обобщает формулу* (1) *на случай негладкой области* Ω *и менее гладких,чем в* (1), *функций* $\eta(x)$ *и* $u(x)$.

2. Пусть снова Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^m$, однако теперь будем считать, что $\Gamma = \partial\Omega$ – достаточно гладкая, для простоты – бесконечно гладкая граница. Для произвольных $\eta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ хорошо известна формула Грина для бигармонического оператора

$$\int\limits_\Omega \eta(\Delta^2 u + u) d\Omega = \int\limits_\Omega (\Delta\eta \cdot \Delta u + \eta u) d\Omega + \int\limits_\Gamma (\eta \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial \eta}{\partial n}\Delta u) d\Gamma. \tag{37}$$

Введем пространства $E = L_2(\Omega)$, $F = H^2(\Omega)$ с нормой

$$\| u \|^2_F = \| u \|^2_{H^2(\Omega)} := \int\limits_\Omega [| u |^2 + | \Delta u |^2] d\Omega, \tag{38}$$

эквивалентной стандартной норме протранства $H^2(\Omega)$, а также пространства $G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, введем оператор γ по закону

$$\gamma u := \{-u \,|_\Gamma; \frac{\partial u}{\partial n} \,|_\Gamma\}, \quad \forall\, u \in F = H^2(\Omega). \tag{39}$$

Теорема 4. *Для тройки пространств* $E = L_2(\Omega)$, $F = H^2(\Omega)$, $G = (L_2(\Gamma))^2$ *и оператором следа* (39) *имеет место следующая формула Грина*

$$\langle \eta, \Delta^2 u + u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^2(\Omega)} + \langle \eta, \frac{\partial}{\partial n}\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} - \langle \frac{\partial \eta}{\partial n}, \Delta u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\, \eta, u \in H^2(\Omega), \tag{40}$$

где

$$\Delta^2 u \in (H^2(\Omega))^*, \quad \eta \,|_\Gamma \in H^{3/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta u \in (H^{3/2}(\Gamma))^*,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \Delta u \in (H^{1/2}(\Gamma))^*.\Box$$

4. О формуле Грина для задачи Стокса.

1. При исследовании малых движений идеальной несжимаемой жидкости в частично заполненном сосуде Ω, ограниченном твердой стенкой S и горизонтальной поверхностью Γ, поле скоростей жидкости $\overrightarrow{u}$ считают элементом гильбертова пространства $\overrightarrow{L}_2(\Omega)$ и используют ортогональное разложение

$$\overrightarrow{L}_2(\Omega) = \overrightarrow{J}_0(\Omega) \oplus \overrightarrow{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \overrightarrow{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{41}$$

$$\overrightarrow{J}_0(\Omega) := \{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{L}_2(\Omega) : \ \mathrm{div}\overrightarrow{v} = 0 \ (\text{ в } \Omega\,), \ v_n := \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \ (\text{ на } \partial\Omega = S \cup \Gamma\,)\}, \tag{42}$$

$$\overrightarrow{G}_{h,S}(\Omega) := \{\overrightarrow{w} = \nabla\Phi : \ \Delta\Phi = 0 \ (\text{ в } \Omega\,), \ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } S\,), \ \int_\Gamma \Phi d\Gamma = 0\}, \tag{43}$$

$$\overrightarrow{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\nabla\varphi \in \overrightarrow{L}_2(\Omega) : \ \varphi = 0 \ (\text{ на } \Gamma\,)\}, \tag{44}$$

где все операции определены как обобщенные функции [1]. При этом

$$\overrightarrow{u} \in \ E := \ \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega) = \overrightarrow{J}_0(\Omega) \oplus \overrightarrow{G}_{h,S}(\Omega). \tag{45}$$

Для вязкой жидкости должна быть конечна скорость диссипации энергии, и тогда

$$\overrightarrow{u} \in F := \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega) := \{\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega) : \ \mathrm{div}\overrightarrow{u} = 0 \ (\text{ в } \Omega\,), \ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \ (\text{ на } S\,)\}. \tag{46}$$

Норма в $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ задается по формуле

$$\| \ \overrightarrow{u} \ \|^2_F = E(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\,) := \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,k=1}^3 |\ \tau_{ij}(\overrightarrow{u}\,)\ |^2 \, d\Omega, \ \tau_{ij}(\overrightarrow{u}\,) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \tag{47}$$

и эта норма эквивалентна стандартной норме в $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$.

Пространство $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ плотно вложено в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$ и потому $(F; E) = (\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega); \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega))$ – гильбертова пара пространств.

Теорема 5. *Оператор A гильбертовой пары пространств $(\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega); \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega))$ для области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega = S \cup \Gamma$ является оператором краевой задачи*

$$A\overrightarrow{v} := -P_{0,S}\Delta\overrightarrow{v} + \nabla p_v = \overrightarrow{f}, \quad \mathrm{div}\overrightarrow{v} = 0 \ (\text{ в } \Omega\,)\,, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \ (\text{ на } S\,), \tag{48}$$

$$\tau_{i3}(\overrightarrow{v}\,) - p_v\delta_{i3} = 0 \ (\text{ на } S\,), \ i = 1, 2, 3,$$

$$\Delta p_v = 0 \ (\text{ в } \Omega\,), \quad \frac{\partial p_v}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \Gamma\,),$$

где $P_{0,S}$ – ортопроектор на $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$.

Если эта задача имеет решение $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{H}^2(\Omega) \bigcap \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$, *то* $\nabla p_v \in \overrightarrow{G}_{h,S}(\Omega)$. *При любой* $\overrightarrow{f} \in (\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega))^*$ *задача* (48) *имеет единственное слабое решение; обратно, любой элемент* $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *является слабым решением этой задачи при некотором* $\overrightarrow{f} \in (\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega))^*$.□

2. Введем в пространстве $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ оператор следа по закону

$$\gamma\overrightarrow{u} := \overrightarrow{u}\,|_\Gamma,\ \forall\, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{49}$$

Этот оператор (для области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) ограниченно действует из $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространство

$$G_+ := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_\Gamma,\ H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \tag{50}$$

где $L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$. Пространство G_+ плотно (и компактно) вложено в

$$G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma} =: \overrightarrow{L}_2(\Gamma). \tag{51}$$

Поэтому для пространств $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$, $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $G = \overrightarrow{L}_2(\Gamma)$ и оператора γ выполнены условия а) и б) параграфа 2.

В частности

$$\overrightarrow{N}(\Omega) := \mathrm{Ker}\gamma = \{\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega):\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\ (\text{на } \Gamma)\} = \overrightarrow{J}^1_0(\Omega), \tag{52}$$

причем $\overrightarrow{N}(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{J}_0(\Omega)$ и в силу (45) не плотно в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$.(В этом состоит отличие гидродинамического случая от первого классического примера параграфа 3.)

3. При исследовании С.Г.Крейном проблемы малых движений жидкости в частично заполненном сосуде возникла следующая задача Стокса:

$$-P_{0,S}\Delta\overrightarrow{u} + \nabla p_u = \overrightarrow{f},\quad \mathrm{div}\overrightarrow{u} = 0\ (\text{в } \Omega),\quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\ (\text{на } S), \tag{53}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\tau_{i3}(\overrightarrow{u}) - p_u\delta_{i3})\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{\psi}\ (\text{на } \Gamma),\ \Delta p_u = 0\ (\text{в } \Omega),\quad \frac{\partial p_u}{\partial n} = 0\ (\text{на } S).$$

Теорема 6. *Если выполнены условия*

$$\overrightarrow{f} \in (\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega))^*, \overrightarrow{\psi} \in (\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma)^* := (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}_\Gamma)^*, \tag{54}$$

то задача (53) *имеет единственное слабое решение* $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$, *представимое в виде* $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, *где функция* $\overrightarrow{v}$ *является слабым решением задачи* (48), *а функция* $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{M}(\Omega) = \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega) \ominus \overrightarrow{N}(\Omega)$ *является слабым решением задачи*

$$-P_{0,S}\Delta\overrightarrow{w} + \nabla p_w = \overrightarrow{0},\quad \mathrm{div}\overrightarrow{w} = 0\ (\textit{в } \Omega),\quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}\ (\textit{на } S), \tag{55}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\tau_{i3}(\overrightarrow{w}) - p_w\delta_{i3})\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{\psi}\ (\textit{на } \Gamma),\ \Delta p_w = 0\ (\textit{в } \Omega),\quad \frac{\partial p_w}{\partial n} = 0\ (\textit{на } S).$$

Обратно, любое поле $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *представимо в виде суммы* $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, *где* $\overrightarrow{v}$ *и* $\overrightarrow{w}$ *– слабые решения задач* (48) *и* (55) *при некоторых* $\overrightarrow{f}$ *и* $\overrightarrow{\psi}$, *удовлетворяющих условиям* (54).□

4. Пусть выполнены условия

$$\overrightarrow{\eta}(x) \in \overrightarrow{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega), \ \overrightarrow{u}(x) \in \overrightarrow{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{56}$$

Тогда, как известно (см., например, [1]), для области Ω с горизонтальной (т. е. перпендикулярной орту $\overrightarrow{e_3}$) свободной границей Γ имеет место формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} \overrightarrow{\eta} \cdot (\nabla p - \Delta \overrightarrow{u}) d\Omega = E(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{u}) - \int\limits_{\Gamma} (\sum_{i=1}^{3} \eta_i (\tau_{i3}(\overrightarrow{u}) - p\delta_{i3}) d\Gamma, \tag{57}$$

где $E(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{u})$ – билинейный функционал, отвечающий (47).

Теорема 7. *Для любых функций* $\overrightarrow{\eta}$ *и* $\overrightarrow{u}$ *из* $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *имеет место следующая формула Грина для задачи Стокса (в области* Ω *с липшицевой границей* $\partial\Omega = \Gamma \cup S$*):*

$$\langle \overrightarrow{\eta}, -P_{0,S}\Delta \overrightarrow{u} + \nabla p_u + \nabla p \rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} = E(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{u}) - \langle \gamma \overrightarrow{\eta}, \sum_{i=1}^{3} (\tau_{i3}(\overrightarrow{u}) - (p_u + p)\delta_{i3}) \overrightarrow{e_i} \rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma)}, \tag{58}$$

где $p_u = p_v + p_w$ *– сответствующие поля давлений, возникающие в задачах* (48) *и* (55), *а* $\nabla p \in (\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega))^*$.□

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[2] Копачевский Н.Д., $\boxed{\text{Крейн С.Г.}}$ *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи*// Украинский матем. вестник, Т.1, №1 (2004).– с.69-97.

[3] Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.