Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса

Копачевский Н.Д.

Резюме.

В работе устанавливается абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, обобщающая формулу, приведенную в [1] и несколько модернизированную в [2]. Рассматриваются приложения этой новой формулы к гидродинамическим уравнениям Стокса.

0 Введение

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Для функций $u = u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\eta = \eta(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$, хорошо известна формула

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \Delta u) d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u) d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n} dS, \tag{0.1}$$

которую называют первой формулой Грина для оператора Лапласа $\Delta := \sum\limits_{k=1}^{m} \partial^2/\partial x_k^2$.

Эта формула допускает обобщения, связанные с ослаблением требований на $\Gamma := \partial\Omega$ и функции $\eta(x)$ и $u(x)$. В частности, если Γ липшицева, то, как следует из [2], а также из данной работы, справедливо тождество

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \partial u/\partial n \rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{0.2}$$

где η, $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, $\gamma\eta := \eta\big|_\Gamma$, а символами $l_w(\eta) = \langle \eta, w \rangle_{L_2(\Omega)}$ и $l_\psi(\varphi) = \langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}$ обозначены линейные функционалы в „скалярном произведении" $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно для элементов $\eta \in H^1(\Omega)$, $w \in (H^1(\Omega))^*$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$.

В данной работе получена абстрактная формула Грина, обобщающая формулу (0.2) на случай произвольных гильбертовых пространств E, F и G и так называемого абстрактного оператора следа γ. При этом условия, которые накладываются на эти пространства и оператор, менее обременительные, чем соответствующие требования из [1, 2]. В частности, снимается требование плотности вложения ядра оператора γ в пространство E. Это позволяет как усилить результаты из [2], так и применить её для получения обобщённой формы формулы Грина для задачи Стокса.

Отметим, что известная формула Грина для задачи Стокса (см. (1.45), (1.54)) не является частным случаем абстрактной формулы Грина из [2], но, как выясняется в данной работе, является частным случаем полученной здесь формулы (2.21). Подробно об этом говорится в последнем параграфе работы.

1 Предварительные сведения

В этом параграфе приводятся необходимые сведения, используемые далее, они изложены например, в [1, 3, 4], см. также [2], §1.

1.1 Гильбертовы пары, оснащения и шкалы гильбертовых пространств

Будем говорить, что гильбертово пространство F плотно вложено в гильбертово пространство E, и обозначать $F \hookrightarrow E$, если F является плотным линейным подмножеством в E и существует такое $a > 0$, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.1}$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Если $u \in F$, $v \in E$, то

$$(u, v)_E = (u, Vv)_F, \tag{1.2}$$

где $V:\ E \to F$ — линейный ограниченный оператор, для которого

$$a^{-1}\|Vv\|_E \leqslant \|Vv\|_F \leqslant a\|v\|_E, \quad \forall v \in E.$$

Так как $F \hookrightarrow E$, то V, рассматриваемый как оператор из E в E, положителен, а если F компактно вложено в E (т.е. всякое множество, ограниченное в F, компактно в E), то $V:\ E \to E$ — компактен. Для обратного оператора $A := V^{-1}$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(V)$ и областью значений $\mathcal{R}(A) = E$ из (1.2) следует, что

$$(u, Av)_E = (u, v)_F, \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A) \subset F, \tag{1.3}$$

при этом

$$F = \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad (u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E, \quad \forall u, v \in F. \tag{1.4}$$

Оператор A называется порождающим оператором гильбертовой пары $(F; E)$; по паре (F, E) он определяется единственным образом.

Иногда пространство F состоит из элементов другой природы, чем E, но существует взаимнооднозначное отображение F в плотное в E множество, сохраняющее алгебраические операции. Тогда F можно отождествить с его образом, и если для образа снова выполнено неравенство (1.1), то вся конструкция построения гильбертовой пары проходит и в этом случае.

Пусть снова $F \hookrightarrow E$. При фиксированном $v \in E$ функционал $l_v(u) := (u, v)_E$, определённый на элементах $u \in F$, является в силу (1.1) линейным ограниченным функционалом на F. Поэтому элемент $v \in E$ можно отождествить с функционалом из F^*. После такого отождествления E будет плотным в пространстве F^*. Отсюда следует, что скалярное произведение $(u, v)_E$ при $u \in F$ можно расширить на тот случай, когда второй множитель принадлежит F^*. Если $v_n \in E$ и $v_n \to v$ в F^*, то возникает линейный ограниченный функционал

$$l_v(u) := \langle u, v\rangle_E := \lim_{n\to\infty}(u, v_n)_E, \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in F^*; \tag{1.5}$$

при этом справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|\langle u, v\rangle_E| \leqslant \|u\|_F \cdot \|v\|_{F^*}. \tag{1.6}$$

При выполнении (1.5), (1.6) говорят, что функционал $l_v \in F^*$ определён через „скалярное произведение в E", а тройку пространств

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^* \tag{1.7}$$

называют оснащением пространства E.

Если $(F; E)$ — гильбертова пара пространств, а A — соответствующий порождающий оператор, то по оператору A можно построить шкалу гильбертовых пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, таким образом, что при $\alpha > 0$ пространство $E^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$ и

$$(u, v)_{E^\alpha} := (A^\alpha u, A^\alpha v)_E, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A^\alpha). \tag{1.8}$$

При этом оказывается, что

$$F = \mathcal{D}(A^{1/2}) = E^{1/2}. \tag{1.9}$$

Для отрицательных индексов $\alpha = -\nu$, $\nu > 0$, на пространстве E вводится норма

$$\|u\|_{E^\alpha} := \|A^\alpha u\|_E, \quad \forall u \in E, \tag{1.10}$$

а затем E пополняется по этой норме.

Шкала E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами. При $\alpha < \beta$ пространство E^β плотно вложено в пространство E^α. При $\alpha > 1$ сужение оператора A на E^α взаимнооднозначно и непрерывно отображает E^α на $E^{\alpha-1}$. При

$\alpha \leqslant 1$ расширение по непрерывности оператора A отображает E^{α} на $E^{\alpha-1}$. В частности, $AE^{1/2} = AF = E^{-1/2} = F^*$. Аналогично действует и оператор $A^{1/2}$, в частности, он отображает $E^{1/2} = F$ на E, а E на $E^{-1/2}$. При этом оказывается, что $E^{-1/2}$ изометрически отождествляется с F^*. Отсюда и из (1.7), (1.9) следует, что

$$E^{1/2} = F \hookrightarrow E = E^0 \hookrightarrow F^* = E^{-1/2}. \tag{1.11}$$

1.2 Об обобщённых и слабых решениях операторных уравнений

Пусть A — порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$. Решения уравнения

$$Au = f, \quad u \in \mathcal{D}(A), \tag{1.12}$$

при $f \in E$ называются обобщёнными решениями. Так как оператор A имеет ограниченный обратный $A^{-1} = V$, то единственное обобщённое решение существует при любом $f \in E$, а совокупность всех обобщённых решений заполняют всю область определения $\mathcal{D}(A) = E^1$ оператора A. При этом

$$(v, u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = (v, f)_E, \quad \forall v \in F. \tag{1.13}$$

Решения уравнения (1.12) при $f \in E^{-1/2} = F^* \supset E$ называют слабыми решениями. Так как оператор A ограниченно действует из $E^{1/2} = F$ на $E^{-1/2} = F^*$, а обратный из F^* на F, то при $f \in F^*$ задача (1.12) имеет единственное слабое решение.

Таким образом, для слабых решений уравнения (1.12) имеем

$$\mathcal{D}(A) = F = E^{1/2}, \quad \mathcal{R}(A) = F^* = E^{-1/2}, \tag{1.14}$$

и выполнено тождество

$$(v, u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = \langle v, Au \rangle_E = \langle v, f \rangle_E, \quad \forall v, u \in F. \tag{1.15}$$

1.3 О полях скоростей идеальной жидкости в открытом сосуде

Информацию, изложенную в этом пункте, можно найти, например, в [1], §2.1 (см. также [5, 6]).

Учитывая приложения полученной ниже абстрактной формулы Грина к уравнениям Стокса, приведём некоторые сведения из линейной гидродинамики идеальной и вязкой жидкости.

Пусть идеальная однородная несжимаемая жидкость частично заполняет некоторую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$.

Если $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, — поле скорости частиц жидкости, то естественно считать, что кинетическая энергия жидкости конечна, и тогда

$$\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \quad \|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega |\vec{u}|^2 d\Omega < \infty. \tag{1.16}$$

В гильбертовом пространстве вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ (со скалярным произведением $(\vec{u}, \vec{v})$, порождающим норму (1.16)) выделяют потенциальные поля $\vec{v} = \nabla p$, $p \in H^1(\Omega)$. (Потенциалы p определены с точностью до константы, которую в различных задачах выбирают тем или иным способом.) Совокупность потенциальных полей образует замкнутое пространство $\vec{G}(\Omega)$ в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$. Совокупность потенциальных полей с потенциалами, обращающимися в нуль на $\partial\Omega$, т.е. с потенциалами из $H^1_0(\Omega)$, образует подпространство $\vec{G}_0(\Omega) \subset \vec{G}(\Omega)$.

Пусть $\vec{u}$ — произвольное поле из $\vec{L}_2(\Omega)$, $\nabla p \in \vec{G}_0(\Omega)$. Тогда выражение

$$\Phi_{\vec{u}}(p) := -(\nabla p, \vec{u}) = -\int_\Omega \nabla p \cdot \vec{u} d\Omega$$

является линейным ограниченным функционалом в $H^1_0(\Omega)$, т.е. элементом из $(H^1_0(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega)$. Если обозначить через $\operatorname{div} \vec{u}$ элемент из $H^{-1}(\Omega)$, порождающий этот функционал в скалярном произведении $L_2(\Omega)$, то

$$\Phi(p) = \langle p, \operatorname{div} \vec{u} \rangle_{L_2(\Omega)} = -(\nabla p, \vec{u}), \quad p \in H^1_0(\Omega), \quad \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega). \tag{1.17}$$

При этом

$$\operatorname{div} \vec{u} \in H^{-1}(\Omega), \quad \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Поле $\vec{u} \in L_2(\Omega)$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Из (1.18) следует, что совокупность $\vec{J}(\Omega)$ всех соленоидальных полей образует подпространство в $\vec{L}_2(\Omega)$ и

$$(\nabla p, \vec{u}) = 0, \quad \forall \nabla p \in \vec{G}_0(\Omega), \quad \vec{u} \in \vec{J}(\Omega). \tag{1.19}$$

Отсюда следует, что

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega). \tag{1.20}$$

Назовём оператором Лапласа Δ оператор, определённый формулой

$$\Delta p := \operatorname{div} \nabla p, \quad p \in H^1(\Omega). \tag{1.21}$$

По определению, он действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))^*$, при этом

$$\|\Delta p\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\operatorname{div} \nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|\nabla p\| \leqslant \|p\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.22}$$

Пусть поле $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ таково, что

$$\operatorname{div} \vec{u} \in (H^1(\Omega))^*, \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*. \tag{1.23}$$

Рассмотрим на $H^1(\Omega)$ функционал

$$F(p) := (\nabla p, \vec{u}) + \langle p, \operatorname{div} \vec{u} \rangle_{L_2(\Omega)}. \tag{1.24}$$

Из оценки

$$|F(p)| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\nabla p\| + \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{(H^1(\Omega))^*} \cdot \|p\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \big(\|\vec{u}\| + \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{(H^1(\Omega))^*}\big) \|p\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.25}$$

следует, что $F(p)$ является линейным ограниченным функционалом на $H^1(\Omega)$. Так как при $p \in H_0^1(\Omega)$ в силу (1.17) $F(p) = 0$, то $F(p)$ является линейным ограниченным функционалом на ортогональном дополнении к $H_0^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, т.е. на подпространстве $H_h^1(\Omega)$ гармонических функций из $H^1(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \quad \|p\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla p|^2 d\Omega, \quad \int_{\partial\Omega} p dS = 0. \tag{1.26}$$

Поскольку между элементами $H_h^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega)$ имеется взаимнооднозначное соответствие (и даже изометрия при специальном выборе нормы в $H^{1/2}(\Omega)$, см. [1], §1.3), то $F(p)$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал в $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Представим этот функционал через скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega)$ и отвечающий ему элемент из $H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$ обозначим через u_n. Тогда из (1.24) получаем формулу

$$F(p) = (\nabla p, \vec{u}) + \langle p, \operatorname{div} \vec{u} \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = \langle \gamma p, u_n \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \gamma p := p\big|_{\partial\Omega}. \tag{1.27}$$

Элемент $u_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ будем называть нормальной составляющей поля $\vec{u}$ на границе $\partial\Omega$. Из (1.25) вытекает неравенство

$$\|u_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \|\vec{u}\| + \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{(H^1(\Omega))^*} \tag{1.28}$$

Полагая в (1.27) $p(x) \equiv 1$, получаем формулу Остроградского

$$\langle 1, \operatorname{div} \vec{u} \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle 1, u_n \rangle_{L_2(\partial\Omega)} \quad \big(\operatorname{div} \vec{u} \in (H^1(\Omega))^*, \quad u_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)\big). \tag{1.29}$$

Для соленоидального поля из (1.28) имеем

$$\|u_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \|\vec{u}\|,$$

а формула (1.29) даёт

$$\langle 1, u_n \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{1.30}$$

Опираясь на формулу (1.27), получим формулу Грина для оператора Лапласа. Пусть $q \in H^1(\Omega)$ и $\Delta q \in (H^1(\Omega))^*$. Тогда $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$, $\operatorname{div} \nabla q \in (H^1(\Omega))^*$, и при $\vec{u} = \nabla q$ из (1.27) имеем

$$(p, q)_{H^1(\Omega)} + \langle p, \Delta q \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \gamma p, \frac{\partial q}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \tag{1.31}$$

где

$$\frac{\partial q}{\partial n} := (\nabla q)_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \left\| \frac{\partial q}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \|q\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta q\|_{(H^1(\Omega))^*}. \tag{1.32}$$

Если поле $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\vec{u} = \nabla q$, $\operatorname{div} \vec{u} = \Delta q = 0$. Такие поля естественно называть гармоническими. Совокупность всех гармонических полей образует подпространство $\vec{G}_h(\Omega)$ в пространстве всех соленоидальных полей:

$$\vec{G}_h(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \cap \vec{G}(\Omega). \tag{1.33}$$

Можно проверить (см. [1], с. 103), что

$$\vec{J}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega), \tag{1.34}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\}. \tag{1.35}$$

Отсюда и из (1.20) следует разложение Г.Вейля:

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega). \tag{1.36}$$

Пусть теперь идеальная несжимаемая жидкость находится в открытом сосуде и в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную твёрдой стенкой S и горизонтальной свободной поверхностью Γ: $\partial\Omega = \bar{S} \cup \Gamma$. При этом считаем, что $\partial\Omega$ — липшицева. При малых движениях жидкости в сосуде для поля скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$ на твёрдой стенке S должно выполняться условие непротекания:

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{1.37}$$

Однако на Γ такого условия нет. Поэтому пространство полей скоростей движения жидкости в открытом сосуде шире, чем $\vec{J}_0(\Omega)$ (см. (1.35)). Расширение этого множества можно провести лишь за счёт добавления потенциальных полей из $\vec{G}_h(\Omega)$. Заменяя для потенциальных полей нормировку (1.26) новым условием

$$\int_\Gamma p \, d\Gamma = 0, \tag{1.38}$$

приходим к разложению (см. [1], с. 106).

$$\vec{G}(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{1.39}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \vec{G}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega), \tag{1.40}$$

где $\vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega)$ — подпространство гармонических полей, у которых потенциалы обращаются в нуль на Γ, а

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \big\{\vec{u} = \nabla p : \quad \Delta p = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S)\big\}. \tag{1.41}$$

Разложение (1.36), а также формулы (1.39)–(1.41) порождают разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1.42}$$

используемое при исследовании малых движений идеальной жидкости в открытом сосуде.

1.4 О полях скоростей вязкой жидкости в открытом сосуде

(см.[1], с.106-119). Будем считать, что однородная несжимаемая жидкость, находящаяся в сосуде, является не идеальной, а вязкой жидкостью с коэффициентом динамической вязкости $\mu > 0$. Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии, скорость которой вычисляется по формуле

$$\mu E(\vec{u}, \vec{u}) := \frac{1}{2}\mu \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega, \quad \tau_{ij}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{1.43}$$

Очевидно, что

$$E(\vec{u}, \vec{u}) \leqslant 2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 d\Omega \leqslant 2\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \tag{1.44}$$

где $\vec{H}^1(\Omega)$ — совокупность векторных полей $\vec{u} = \sum\limits_{k=1}^{3} u_k \vec{e_k}$ с компонентами $u_k \in H^1(\Omega),\ k = 1, 2, 3.$

Подпространство пространства $\vec{H}^1(\Omega)$, состоящее из всех его соленоидальных полей, обозначим через $\vec{J}^1(\Omega)$.

Если $\vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1(\Omega)$, $\vec{v} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega})$, то имеет место следующая формула Грина для векторного оператора Лапласа (см.[6]):

$$-\int\limits_\Omega \triangle\vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega = E(\vec{u}, \vec{v}) - \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} \tau_{ik}(\vec{u}) n_k v_i dS, \quad \vec{n} = \sum_{k=1}^{3} n_k \vec{e_k}. \tag{1.45}$$

Если вязкая жидкость целиком заполняет неподвижный сосуд Ω, то на твердой стенке $S := \partial\Omega$ выполняется условие прилипания $\vec{u}|_S = \vec{0}$. В этом случае имеют место неравенства (см.[1], с.111)

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)} \leqslant E(\vec{u}, \vec{u}) \leqslant 2\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{1.46}$$

где норма в $\vec{H}^1(\Omega)$ выбрана в одной из эквивалентных форм:

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2 d\Omega + |\int\limits_{\partial\Omega} \vec{u} dS|^2. \tag{1.47}$$

Таким образом, при выполнении условия прилипания норма в подпрострпнстве

$$\vec{J_0}^{1}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{J}^1(\Omega) : \ \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega)\}, \tag{1.48}$$

определяемая по формуле

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{J}^1_0(\Omega)} := E(\vec{u}, \vec{u}), \tag{1.49}$$

эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$.

Пусть теперь вязкая жидкость заполняет открытый сосуд и занимает, как и в п. 1.3, область Ω, ограниченную твердой стенкой S и горизонтальной свободной поверхностью Γ, причем $\partial\Omega$ — липшицева.

Пусть $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$ — линейная совокупность полей из $\vec{J}^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности (каждое в своей) поверхности S. Оказывается (см.[1]), замыкание этой совокупности в $\vec{L}_2(\Omega)$ совпадает с $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Замыкание совокупности $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$ в норме $\vec{J}^1(\Omega)$ обозначим через $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, и тогда

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S)\}. \tag{1.50}$$

Это пространство играет основную роль при исследовании движений вязкой жидкости в открытом сосуде.

Норма в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ определяется, как и (1.49), по формуле

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)} := E(\vec{u}, \vec{u}). \tag{1.51}$$

Из неравенства Корна (см.[1], с.114)

$$E(\vec{u}, \vec{u}) \geqslant c\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \quad c > 0, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \tag{1.52}$$

которое имеется и для элементов из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, а также из (1.47) (с заменой $\partial\Omega$ на S) следует, что нормы (1.51) и (1.47) в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ эквивалентны.

Будем считать, что начало O декартовой системы координат выбрано на Γ, а область Ω расположена в полупространстве $x_3 > 0$. Тогда при любых

$$\vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\overline{\Omega}), \quad \vec{v} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \nabla p \in \vec{G}(\Omega), \tag{1.53}$$

из формулы Грина (1.45) имеем

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla p - \Delta \vec{u}) \cdot \vec{v} d\Omega = E(\vec{u}, \vec{v}) - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i=1}^{3} (\tau_{i3}(\vec{u}) - p\delta_{i3}) v_i d\Gamma. \tag{1.54}$$

2 Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств

В этом параграфе выводится абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа в предположениях, более общих, чем соответствующие предположения работы [2]. Рассматривается также классический пример и случай бигармонического оператора.

2.1 О формуле Грина из работы [2]

Предположим, что для гильбертовых пространств E, F и G выполнены следующие условия.

1^0. Пространство F плотно вложено в E:

$$F \subset\!\!\!\to E. \tag{2.1}$$

2^0. На пространстве F определен оператор γ (оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G:

$$\gamma : F \to G_+ \subset\!\!\!\to G. \tag{2.2}$$

3^0. Ядро $N := \mathrm{Ker}\gamma$ оператора γ плотно в E:

$$\overline{N} = E. \tag{2.3}$$

В работе [2] доказано (см. теорему 2.1, что в предположениях 1^0-3^0 существуют однозначно определяемые по E, F, G и γ операторы L и ∂, такие, что $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) \subset F$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = F$, и при любых $v \in F$, $u \in \mathcal{D}(L)$ справедливо тождество

$$\langle v, Lu \rangle_E = (v, u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \tag{2.4}$$

где символами $\langle v, w \rangle_E$ и $\langle \varphi, \psi \rangle_G$ обозначены линейные функционалы, отвечающие тройкам пространств $F \subset E \subset F^*$, $G_+ \subset G \subset (G_+)^*$ и элементам $v \in F,\ w \in F^*,\ \varphi \in G_+,\ \varphi \in (G_+)^*$.

Этот результат сейчас будет усилен в следующих позициях: а) во-первых, будет отброшено условие (2.3), б) во-вторых, в новом утверждении будет $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) = F,\ \mathcal{R}(L) \subset F^*$. Такое обобщение позволяет в последнем параграфе работы установить, что формула Грина (1.54) для задачи Стокса есть частный случай новой абстрактной формулы, хотя и не является частным случаем формулы Грина из работы [2].

2.2 Об абстрактном операторе следа

(см.[1], с.40-42, а также [2], п.1.3). Пусть для произвольных гильбертовых пространств F и G выполнено условие (2.2), т.е. существует оператор $\gamma : F \to G_+ \subset_{\to} G$, такой, что

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \ b > 0, \ \forall u \in F. \tag{2.5}$$

Обозначим через N ядро оператора γ:

$$N := \mathrm{Ker}\gamma = \{u \in F : \quad \gamma u = 0\}. \tag{2.6}$$

В силу (2.5) N есть подпространство пространства F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F:

$$F = N \oplus M. \tag{2.7}$$

В силу свойства (2.2) оператор $\gamma_M := \gamma|_M$ осуществляет взаимнооднозначное отображение M на G_+. Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{2.8}$$

Пусть $u \in F, \ \gamma u = \varphi \in G_+$. Тогда найдется такой элемент $w \in M$, что $\gamma w = \gamma_M w = \varphi$; при этом $\gamma u - \gamma_M w = \gamma(u - w) = 0$, т. е. $v := u - w \in N$.

Так как

$$\|u\|_F^2 = \|w + (u - w)\|_F^2 = \|w\|_F^2 + \|u - w\|_F^2,$$

то

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 = \|w\|_F^2 \leqslant \|u\|_F^2, \ \forall u \in F, \ \gamma u = \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min_{\gamma u = \varphi} \|u\|_F. \tag{2.9}$$

Из (2.5) при $\varphi = \gamma_M u \in G_+$ $(u \in M)$ имеем

$$\|\varphi\|_G = \|\gamma_M u\|_G \leqslant b\|u\|_F = b\|\varphi\|_{G_+}, \tag{2.10}$$

и так как согласно (2.2) G_+ плотно вложено в G, то $(G_+; G)$ — гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α так, чтобы $G_+ = G^{1/2}, \ G = G^0$, тогда $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

Обозначим через T_M оператор, сопряженный к γ_M в смысле скалярного произведения в G. Поскольку в силу (2.8) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на пространство $G_+ = G^{1/2}$, то оператор T_M изометрически отображает пространство $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на пространство M. Тогда, по определению T_M, имеем

$$(\eta, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \ \forall \eta \in M, \ \forall \psi \in G^{-1/2} = (G_+)^*. \tag{2.11}$$

Обозначим через ∂_M оператор, обратный к T_M. Тогда из (2.11) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G, \ \forall \eta, w \in M, \tag{2.12}$$

где $\gamma_M \eta \in G_+, \ \partial_M w \in (G_+)^*$.

При $\eta = T_M \varphi$ из (2.11) следует соотношение

$$(T_M \varphi, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G, \ \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*, \tag{2.13}$$

и потому оператор $C_M := \gamma_M T_M$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $G_+ = G^{1/2}$. Следовательно, его сужение на G является ограниченным в G оператором, самосопряженным и положительным. Поэтому оператор, обратный к этому сужению, является порождающим оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$.

2.3 Вывод абстрактной формулы Грина

Будем теперь считать, что выполнено условие (2.1), и рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$. Построим по порождающему оператору A этой пары шкалу пространств E^α так, чтобы $F = E^{1/2}, \ E = E^0, \ F^* = E^{-1/2}$. Оператор A ограниченно действует из E^α на $E^{\alpha-1}$, в частности, из $E^{1/2} = F$ на $E^{-1/2} = F^*$. При $f \in E^{-1/2} = F^*$ обратный к нему оператор дает слабое решение задачи $Au = f$ в форме $u = A^{-1} f \in F = E^{1/2}$.

Далее под A будем понимать оператор, заданный на $F = E^{1/2} = \mathcal{D}(A)$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A) = E^{-1/2} = F^*$. Тогда $A^{1/2}$ ограниченно действует из F на E и из E на $E^{-1/2} = F^*$ и имеет место тождество

$$(A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F = \langle \eta, Au \rangle_E, \ \forall \eta, u \in F. \tag{2.14}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M ортогонального разложения (2.7) и введём оператор

$$L := AP_N, \quad \mathcal{D}(L) = F, \tag{2.15}$$

ограниченно действующий, согласно установленному выше, из F в F^*. Так как подпространства N и M ортогональны, то, очевидно,

$$Lw = 0, \quad \forall w \in M. \tag{2.16}$$

Введём теперь оператор ∂, являющийся расширением оператора ∂_M с подпространства M на всё пространство $F = N \oplus M$. Рассмотрим неравенство

$$|\langle \eta, Lu \rangle_E| \leq \|Lu\|_{F^*} \cdot \|\eta\|_F = \|Lu\|_{F^*} \cdot \|\gamma_M \eta\|_{G_+}, \quad \forall \eta \in M, \quad u \in N. \tag{2.17}$$

Из него следует, что величину $l_u(\eta) := \langle \eta, Lu \rangle_E$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал на G_+. Обозначим через $-\partial_N u$ элемент из $(G_+)^*$, представляющий этот функционал через скалярное произведение в G. Тогда

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = -\langle \gamma_M \eta, \partial_N u\rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \;\; u \in N, \tag{2.18}$$

причём

$$\|\partial_N u\|_{(G_+)^*} \leq \|Lu\|_{F^*}. \tag{2.19}$$

По операторам ∂_M и ∂_N построим оператор $\partial : F \to (G_+)^*$ по следующему правилу:

$$\partial u := \partial_N P_N u + \partial_M P_M u, \; \forall u \in F. \tag{2.20}$$

Проведенные выше построения приводят к такому итоговому результату.

Теорема 1. Если для гильбертовых пространств E, F и G, а также оператора γ выполнены условия (2.1) и (2.2), то имеет место следующая абстрактная формула Грина

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.21}$$

причём операторы L и ∂ заданы на F и определяются единственным образом (по пространствам E, F, G и оператору γ) формулами (2.15) и (2.20).

Доказательство. Учтём предыдущие построения и заметим, что операторы A, P_N, P_M и ∂ находятся по пространствам E, F и G и оператору γ однозначно.

Для произвольных элементов η и u из F имеем

$$\eta = P_N\eta + P_M\eta =: \eta_N + \eta_M \in \; N \oplus M, \; u = P_N u + P_M u = u_N + u_M \in \; N \oplus M. \tag{2.22}$$

Далее, в силу (2.16) , (2.20), (2.7) получаем

$$Lu = Lu_N, \; \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M, \quad \gamma\eta = \gamma_M \eta_M; \tag{2.23}$$

кроме того, в силу (2.7) и (2.22),

$$(\eta, u)_F = (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F. \tag{2.24}$$

Вычислим, опираясь на (2.22),(2.23),(2.24), разность между левой и правой частями формулы (2.21), имеем:

$$\begin{gathered}\langle \eta, Lu\rangle_E - (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \eta_N, Lu_N\rangle_E + \langle \eta_M, Lu_N\rangle_E - (\eta_N, u_N)_F - \\ -(\eta_M, u_M)_F + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G = (\langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G - \\ -(\eta_M, u_M)_F) + (\langle \eta_N, Lu_N\rangle_E - (\eta_N, u_N)_F) + (\langle \eta_M, Lu_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G).\end{gathered} \tag{2.25}$$

Пользуясь формулой (2.12) для элементов η_M и u_M из M, приходим к выводу, что первая скобка справа в (2.25) равна нулю. Из (2.14) и (2.15) имеем:

$$\langle \eta_N, Lu_N \rangle_E = \langle \eta_N, Au_N \rangle_E = (\eta_N, u_N)_F,$$

и потому вторая скобка справа в (2.25) также равна нулю.

Наконец, из (2.18) следует, что

$$\langle \eta_M, Lu_N \rangle_E = -\langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G, \tag{2.26}$$

а тогда и третья скобка справа в (2.25) равна нулю. □

2.4 Об абстрактных краевых задачах

В работе [2] рассмотрены примеры абстрактных краевых задач, основанные на формуле Грина этой работы. Здесь приведен лишь один пример абстрактной краевой задачи, связанной с формулой (2.21).

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и потому имеет место абстрактная формула Грина (2.21). Рассмотрим абстрактную краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \qquad \partial u = \psi. \tag{2.27}$$

Теорема 2. Задача (2.27) тогда и только тогда имеет единственное слабое решение $u \in F$, когда выполнены условия:

$$f \in F^*, \qquad \psi \in G^*_+. \tag{2.28}$$

Это решение имеет вид

$$u = A^{-1} f + T_M \psi, \tag{2.29}$$

где $A : F \to F^*$ – порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$, а T_M– оператор, сопряжённый к $\gamma_M := \gamma \mid_M$ в смысле скалярного произведения в G, см. (2.11)

Доказательство.

1^0. Рассмотрим краевую задачу

$$Lv = f, \quad \partial v = 0. \tag{2.30}$$

Из формулы Грина (2.21) следует, что для её решений v выполнено тождество:

$$\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, v)_F, \ \forall \eta \in F, \tag{2.31}$$

служащее определением слабого решения. При любом $\eta \in F$ левая часть (2.31) представляет собой линейный ограниченный функционал $l_f(\eta)$ тогда и только тогда, когда $f \in F^*$. В этом случае существует единственное решение $v \in F$.

Задачу (2.30) можно переписать в виде

$$Av = f, \quad Av = Lv, \quad v \in \mathcal{D}(A) := \{v \in F : \quad \partial v = 0\}, \tag{2.32}$$

где $A : F \to F^*$ – линейный ограниченный оператор, который, как только что установлено, имеет ограниченный обратный: $v = A^{-1}f,\ A^{-1} : F^* \to F$. Из (2.31) следует, что

$$\langle \eta, Av \rangle_E = (\eta, v)_F, \quad \forall \eta, v \in F, \tag{2.33}$$

и потому согласно (1.15), оператор A из (2.32) – это порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$.

2^0. Рассмотрим теперь задачу

$$Lw = 0,\ \partial w = \psi. \tag{2.34}$$

Из формулы Грина (2.21) следует, что для её решений w выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.35}$$

служащее определением слабого решения. При любом $\eta \in F$ правая часть в (2.35) является линейным ограниченным функционалом $l_\psi(\eta)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (G_+)^*$. В этом случае существует единственное решение $w \in F$. Так как $Lw = 0$, то $w \in M \subset F$. Поэтому из (2.35) и из ортогональности подпространств N и M следует, что

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad w \in M. \tag{2.36}$$

Отсюда и из (2.11) получаем, что $w = T_M \psi$, где $T_M = \gamma_M^*$(см. (2.11)).

3^0. Введём элемент $\widetilde{u} := v + w$ и докажем, что он равен элементу u – решению задачи (2.27), которое, таким образом, будет определено единственным образом по $f \in F^*$ и $\psi \in (G_+)^*$.

Имеем, в силу предыдущего, следующие свойства

$$L\widetilde{u} = Lv = f = Lu, \quad \partial \widetilde{u} = \partial w = \partial_M w = \psi = \partial u. \tag{2.37}$$

Отсюда и из формул Грина (2.21), составленных для пар $(\eta; \widetilde{u})$ и $(\eta; u)$, имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, \widetilde{u})_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G. \tag{2.38}$$

Поэтому $(\eta, \widetilde{u} - u)_F = 0$, $\forall \eta \in F$, откуда получаем, что $u = \widetilde{u}$, и потому решение задачи (2.27) существует, единственно и представляется формулой (2.29). $\square$

Замечание 1. Из теоремы 2 следует, что для любого элемента $u \in F$ имеет место единственное представление его в виде

$$u = A^{-1}(Lu) + T_M(\partial u) := v + w. \tag{2.39}$$

Так как, с другой стороны, $u = u_N + u_M = P_N u + P_M u$ (см. теорему 1), то элементы v и w в представлении (2.39) находятся по элементам u_N и u_M однозначно.

В самом деле, в силу (2.27), (2.34), (2.37) имеем

$$\partial w = \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \partial_M = T_M^{-1}, \tag{2.40}$$

и потому

$$w = T_M(\partial w) = u_M + T_M \partial_N u_N. \tag{2.41}$$

Значит,

$$v = u - w = u_M + u_N - (u_M + T_M \partial_N u_N) = u_N - T_M \partial_N u_N. \tag{2.42}$$

Нетрудно видеть, что обратное соответствие между элементами v и w, а также элементами $u_N = P_N u$ и $u_M = P_M u$, тоже однозначно. Действительно, так как в (2.42) $u_N \in N$, $-T_M \partial_N u_N \in M$, то

$$u_N = P_N v, \quad u_M = P_M(v + w). \tag{2.43}$$

2.5 Классический пример

Рассмотрим в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ вещественное гильбертово пространство $E = L_2(\Omega)$ с обычной нормой

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega |u(x)|^2 d\Omega, \quad x = (x_1, \ldots x_m) \in \Omega, \tag{2.44}$$

а также пространство $F = H^1(\Omega)$ со стандартной нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) d\Omega, \tag{2.45}$$

где $\nabla u = \sum\limits_{k=1}^m \vec{e_k} \partial u / \partial x_k$ – градиент функции $u(x)$.

Нетрудно видеть, что $(F; E) = (H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ – гильбертова пара пространств. В самом деле, $H^1(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и выполнено неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.46}$$

т.е. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$. Более того, как следует из теоремы С. Л. Соболева, $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, т. е. соответствующий оператор вложения компактен.

Пусть A – порождающий оператор гильбертовой пары $\big(H^1(\Omega), L_2(\Omega)\big)$. Чтобы выяснить аналитическую природу оператора A, предположим, что граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, функция $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и выполнено тождество (1.15), т.е. в данном случае соотношение

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \eta(Au) d\Omega. \tag{2.47}$$

Используя формулу Грина (0.1), отсюда имеем

$$\int\limits_{\Omega} \eta(Au - u + \triangle u) d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{2.48}$$

Считая в этом тождестве $\eta(x)$ произвольной финитной функцией, приходим к формуле $Au = u - \triangle u$. Тогда из (2.48) следует, что $\int\limits_{\partial\Omega} \eta \partial u/\partial n dS = 0$, и потому (в силу плотности следов функций из $C^1(\overline{\Omega})$ в пространстве $L_2(\partial\Omega)$) приходим к граничному условию $\partial u/\partial n = 0$ (на $\partial\Omega$).

Таким образом, порождающий оператор A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ есть оператор краевой задачи

$$Au := u - \triangle u = f \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.49}$$

В области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ эта задача при $f(x) \in C(\overline{\Omega})$ имеет классическое решение $u(x) = A^{-1} f \in C^2(\overline{\Omega})$. Если $f(x) \in L_2(\Omega)$, а $\partial\Omega$ – липшицева, то задача (2.49) имеет обобщенное решение $u(x) \in \mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$, и для этого решения выполнено тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (f, u)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.50}$$

Наконец, при $f(x) \in (H^1(\Omega))^*$, задача (2.49) имеет слабое решение $u(x) = A^{-1} f \in H^1(\Omega)$. Для этого решения, согласно (1.15), справедливо тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.51}$$

При этом оператор A ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $(H^1(\Omega))^*$, а обратный оператор A^{-1} – из $(H^1(\Omega))^*$ на $H^1(\Omega)$. Сужение оператора A^{-1} на $L_2(\Omega)$ является компактным положительным оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

Для элементов $\eta \in H^1(\Omega)$ (с нормой (2.45)) введем оператор следа γ по закону

$$\gamma u := u|_{\partial\Omega}. \tag{2.52}$$

Тогда (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, см. [7]) оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\partial\Omega) = G_+$, причем $H^{1/2}(\partial\Omega)$ компактно вложено в $G = L_2(\partial\Omega)$.

Пространство $N = \mathrm{Ker}\gamma$ в рассматриваемом примере совпадает с пространством $H_0^1(\Omega)$:

$$N = \{u \in H^1(\Omega) : \; u = 0 \;\; (\text{на} \;\; \partial\Omega)\} =: H_0^1(\Omega). \tag{2.53}$$

Выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H_0^1(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$ со скалярным произведением, отвечающем норме (2.45).

Если $\eta \in H_0^1(\Omega) = N, \; u \in M$, то

$$\int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u) d\Omega = 0. \tag{2.54}$$

Так как $u \in H^1(\Omega)$, то $\nabla u \in \overrightarrow{L_2}(\Omega)$ и потому (см. (1.21), (1.22)) существует $\Delta u \in H^{-1}(\Omega) =: (H_0^1(\Omega))^*$. При этом для η и u выполнено свойство (1.17), т.е.

$$\int_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u \; d\Omega = -\langle \eta, \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta \in H_0^1(\Omega), \; u \in H^1(\Omega). \tag{2.55}$$

Из (2.54), (2.55) следует, что

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{2.56}$$

Так как $H_0^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и потому в $(H_0^1(\Omega))^*$, то отсюда приходим к выводу, что $u - \Delta u = 0 \in (H_0^1(\Omega))^*$, и поскольку $u \in H^1(\Omega)$, то $\Delta u = u \in H^1(\Omega)$. Окончательно имеем

$$M = H_h^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \; \Delta u = u\}. \tag{2.57}$$

Это подпространство, по аналогии со случаем (1.26) с эквивалентной нормой, также будем называть подпространством гармонических функций из $H^1(\Omega)$. Таким образом, при норме (2.45) снова имеем ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \tag{2.58}$$

где подпространства $H_0^1(\Omega)$ и $H_h^1(\Omega)$ определены в (2.53) и (2.57).

Установленные свойства пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\partial\Omega)$ и оператора γ показывают, что в этом случае выполнены требования 1^0 – 3^0 п.2.1 (см. (2.1) – (2.3)). Поэтому по теореме 1 для этих пространств справедлива формула Грина (2.21), т. е.

$$\langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u) d\Omega - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{2.59}$$

Здесь, согласно определениям (2.15), (2.49),

$$Lu = u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \tag{2.60}$$

причем $Lu = 0$, если $u \in H_h^1(\Omega)$.

Получим теперь выражение для ∂u из (2.59) и попутно установим разрешимость некоторых краевых задач, возникающих при построении абстрактной формулы Грина.

Оператор $\gamma_M = \gamma|_M$ отображает пространство $M = H_h^1(\Omega)$ изометрически на пространство $G_+ = H^{1/2}(\partial\Omega)$, в котором норма в соответствии с (2.9) введена по формуле

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \min_{\gamma\eta=\varphi} \|\eta\|_{H^1(\Omega)}, \quad \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.61}$$

Здесь минимум достигается на гармонической функции $u(x)$, для которой $\gamma u = \gamma_M u = \varphi$.

Из указанной изометрии между $H_h^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega)$ вытекает, что задача Дирихле

$$u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad u = \varphi \text{ (на } \partial\Omega), \tag{2.62}$$

имеет единственное решение $u \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Рассмотрим по аналогии с (2.34) задачу

$$w - \Delta w = 0 \;\text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \text{ (на } \partial\Omega). \tag{2.63}$$

Эта задача имеет слабое решение $w \in M = H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (H^{1/2}(\Omega))^*$; в этом случае выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = \langle \gamma\eta, \frac{\partial w}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{2.64}$$

Отсюда имеем

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M\eta, \frac{\partial w}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, w \in H_h^1(\Omega). \tag{2.65}$$

С другой стороны, из (2.12) в рассматриваемом случае получаем, что

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M\eta, \partial_M w \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, w \in H_h^1(\Omega) = M. \tag{2.66}$$

Из (2.65), (2.66) следует, что

$$\langle \gamma_M\eta, \partial_M w - \frac{\partial w}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in M, \tag{2.67}$$

и так как $H^{1/2}(\partial\Omega)$ плотно в $L_2(\partial\Omega)$ и в $(H^{1/2}(\partial\Omega))^*$, то из (2.67) приходим к выводу, что

$$\partial_M w = \frac{\partial w}{\partial n} \quad (\forall w \in M = H_h^1(\Omega)). \tag{2.68}$$

Определим теперь аналитическое выражение для оператора ∂_N. Пусть $\eta \in M = H_h^1(\Omega),\ v \in N \cap C^2(\overline{\Omega})$. Тогда по формуле Грина (0.1) имеем

$$\int\limits_\Omega \eta(v-\Delta v)d\Omega = \int\limits_\Omega (\eta v+\nabla\eta\cdot\nabla v)d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \gamma_M\eta\frac{\partial v}{\partial n}dS = -\int\limits_{\partial\Omega} \gamma_M\eta\cdot\frac{\partial v}{\partial n}dS. \tag{2.69}$$

Рассмотрим теперь последовательность элементов $v_k \in H_0^1(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$ такую, что $v_k \longrightarrow v \in H_0^1(\Omega)$, $\partial v_k/\partial n \longrightarrow \partial v/\partial n \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^*$. Тогда, подставляя элементы этой последовательности вместо v в (2.69) и переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$, будем иметь

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}(\eta, v_k - \Delta v_k)_{L_2(\Omega)} = -\langle\gamma_M\eta, \frac{\partial v}{\partial n}\rangle_{L_2(\partial\Omega)}. \tag{2.70}$$

Здесь $\Delta v_k \longrightarrow \Delta v$ в $(H_0^1(\Omega))^*$, см. (1.21), (1.22), и потому, в силу существования предела в правой части, заключаем, что левая часть равна функционалу $\langle\eta, v-\Delta v\rangle_{L_2(\Omega)}$, где $\eta \in H_h^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega),\ \Delta v \in (H^1(\Omega))^*$. Окончательно имеем тождество

$$\langle\eta, v-\Delta v\rangle_{L_2(\Omega)} = -\langle\gamma_M\eta, \frac{\partial v}{\partial n}\rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall\eta \in H_h^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.71}$$

С другой стороны, учитывая (2.15) и (2.49), приходим к выводу, что $v - \Delta v = Lv = Av$ для элементов из $H_0^1(\Omega)$, и тогда из (2.18) имеем

$$\langle\eta, v - \triangle v\rangle_{L_2(\Omega)} = -\langle\gamma_M\eta, \partial_N v\rangle_{L_2(\partial\Omega)},\ \forall\eta \in H_h^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.72}$$

Из (2.70) и (2.72) следует, что

$$\langle\gamma_M\eta, \partial_N v - \frac{\partial v}{\partial n}\rangle_{L_2(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall\eta \in H_h^1(\Omega), \tag{2.73}$$

поэтому, в силу произвольности $\gamma_M\eta$ в $G_+ = H^{1/2}(\partial\Omega)$, приходим к выводу, что

$$\partial_N v = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \forall v \in N = H_0^1(\Omega). \tag{2.74}$$

Теперь из (2.68) и (2.74) окончательно получаем:

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N = \frac{\partial}{\partial n}(u_M + u_N) = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.75}$$

Изометрия, которую осуществляет оператор $\partial = \partial_M = T_M^{-1}$ на подпространстве $M = H_h^1(\Omega)$ (см. (2.11) и утверждения перед этой формулой), показывает, что задача Неймана (2.63) имеет единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$.

Приведенные рассмотрения изучаемого здесь классического примера приводят к следующему окончательному выводу.

Теорема 3. Для тройки гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$, определенных для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшецевой границей $\partial\Omega$, а также для оператора следа γ (см. (2.52)) имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{2.76}$$

причем

$$\Delta u \in \left(H^1(\Omega)\right)^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*. \tag{2.77}$$

Формула (2.77) обобщает, таким образом, как формулу (0.1) на случай негладкой области Ω и менее гладких, чем в (0.1), функций $\eta(x)$ и $u(x)$, так и формулу (0.2), где дополнительно требовалось, чтобы $\Delta u \in \left(H^1(\Omega)\right)^*$. Здесь установлено, что это свойство имеет место при $u \in H^1(\Omega)$.

2.6 О формуле Грина для бигармонического оператора

Пусть теперь Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^2$, и будем считать, что $\Gamma := \partial\Omega$ – достаточно гладкая, для простоты – бесконечно гладкая граница Ω.

Для произвольных функций $\eta(x) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ и $u(x) \in C^4\left(\overline{\Omega}\right)$ хорошо известна формула Грина для бигармонического оператора

$$\int\limits_{\Omega} \left(\eta\Delta^2 u + \eta u\right) d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left(\Delta\eta\Delta u + \eta u\right) d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \left(\eta\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - \frac{\partial\eta}{\partial n}\Delta u\right) d\Gamma, \tag{2.78}$$

получающаяся из второй формулы Грина для оператора Лапласа.

Сейчас будет приведено обобщение формулы Грина (2.78) на случай менее гладких функций, и это обобщение связано с применением абстрактной формулы Грина (2.21).

Введем, как и в п.2.5, гильбертово пространство $E = L_2(\Omega)$ с нормой (2.44), а также пространство $F := H^2(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\| u \|_F^2 = \| u \|_{H^2(\Omega)}^2 = \int\limits_{\Omega} \left(| \Delta u |^2 + | u |^2\right) d\Omega, \tag{2.79}$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$. Отметим, что норма (2.79) эквивалентна стандартной норме пространства $H^2(\Omega)$ (см. [8], п.п.112 – 114). Поэтому $F = H^2(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega) = E$, и тогда $\left(H^2(\Omega); L_2(\Omega)\right)$ – гильбертова пара пространств.

Для выявления аналитической природы оператора A гильбертовой пары $\bigl(H^2(\Omega); L_2(\Omega)\bigr)$ воспользуемся тождеством (1.15) и формулой (2.78); имеем

$$\int\limits_{\Omega} \eta(Au)d\Omega = (\eta, u)_F = \int\limits_{\Omega} \left(\eta\Delta^2 u + \eta u\right) d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \left(\eta\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - \frac{\partial\eta}{\partial n}\Delta u\right) d\Gamma \quad (2.80)$$

при любых $\eta(x) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), u(x) \in C^4\left(\overline{\Omega}\right)$. При финитных $\eta(x)$ отсюда получаем, что

$$Au = \Delta^2 u + u \quad (\text{в } \Omega), \quad (2.81)$$

и тогда из 2.80 следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} \left(-\eta\frac{\partial\Delta u}{\partial n} + \frac{\partial\eta}{\partial n}\Delta u\right) d\Gamma = 0 \quad (2.82)$$

при любых $\eta \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Поэтому отсюда приходим к граничным условиям

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial n} = 0, \quad \Delta u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (2.83)$$

Таким образом, оператор A гильбертовой пары $\bigl(H^2(\Omega); L_2(\Omega)\bigr)$ является оператором краевой задачи

$$Au := \Delta^2 u + u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Delta u}{\partial n} = 0, \quad \Delta u = 0 \ (\text{на } \Gamma). \quad (2.84)$$

При $f(x) \in L_2(\Omega)$ эта задача имеет обобщеное решение $u(x) \in \mathcal{D}(A) \subset H^2(\Omega)$, а при $f(x) \in \bigl(H^2(\Omega)\bigr)^*$ – слабое решение из $H^2(\Omega)$. При этом для слабого решения $\Delta^2 u \in \bigl(H^2(\Omega)\bigr)^*$.

Введем пространство $G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$ с квадратном нормы, определяемым стандартным скалярным произведением в $L_2(\Gamma)$:

$$(\varphi, \psi)_{L_2(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} \varphi\psi d\Gamma. \quad (2.85)$$

Введем, далее, оператор следа γ по закону

$$\gamma u := \{-u\,|_{\Gamma}; \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma}\}, \quad \forall u \in F = H^2(\Omega). \quad (2.86)$$

Тогда

$$N = \operatorname{Ker}\gamma = \{u \in H^2(\Omega) : u\,|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma} = 0\} =: H_0^2(\Omega). \quad (2.87)$$

Найдем ортогональное дополнение $M = F \ominus N$ к подпространству ((2.87)). При гладких $\eta(x) \in H_0^2(\Omega)$ и $u(x) \in M$ из формулы Грина (2.78) получаем

$$(\eta, u)_F = \int\limits_{\Omega} (\Delta\eta\Delta u + \eta u)\, d\Omega = 0 = \int\limits_{\Omega} \eta\left(\Delta^2 u + u\right) d\Omega. \quad (2.88)$$

Отсюда следует, что

$$M := H_h^2(\Omega) := \{u(x) \in H^2(\Omega) : \Delta^2 u + u = 0 \ \ (\text{в} \ \ \Omega)\}. \qquad (2.89)$$

Заметим теперь, что в области Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$ оператор γ из (2.86) ограниченно действует из $F = H^2(\Omega)$ в пространство

$$G_+ := H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma), \qquad (2.90)$$

плотно (и даже компактно) вложенное в $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$. Так как, кроме того, $H_0^2(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ (множество финитных функций плотно в каждом из этих пространств), то для тройки пространств $E = L_2(\Omega), F = H^2(\Omega)$ и $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$ и оператора γ из (2.86) выполнены общие требования 1^0 – 3^0 п.2.1 и потому справедлива формула Грина (2.21). При этом

$$Lu = AP_N u = \Delta^2 u + u \in \left(H^2(\Omega)\right)^*, \quad \forall u \in H^2(\Omega). \qquad (2.91)$$

Опираясь на эти факты, получим аналитическое выражение для ∂u и установим разрешимость некоторых краевых задач, отвечающих бигармоническому оператору Δ^2.

Прежде всего, ввиду изометрии между $M = H_h^2(\Omega)$ и $G_+ = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, осуществляемой оператором $\gamma_M := \gamma \mid_M$, вытекает, что задача Дирихле

$$\Delta^2 u + u = 0 \quad (\text{в} \ \ \Omega), \quad u = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \qquad (2.92)$$

имеет единственное решение $u \in H_h^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi \in H^{3/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{1/2}(\Gamma). \qquad (2.93)$$

Рассмотрим теперь по аналогии с (2.34) задачу

$$w + \Delta^2 w = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \Delta w = \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta w = \psi \ \ (\text{на } \Gamma). \qquad (2.94)$$

Из формулы Грина (2.78) следует, что эта задача имеет слабое решение $w \in M = H_h^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ в том и только том случае, когда

$$\varphi \in \Big(H^{1/2}(\Gamma)\Big)^*, \quad \psi \in \Big(H^{3/2}(\Gamma)\Big)^*. \qquad (2.95)$$

При этом выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^2(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \{\frac{\partial \Delta u}{\partial n}; \Delta u\}\rangle_G = \langle \gamma\eta, \{\psi; \varphi\}\rangle_G, \quad \forall \eta \in H^2(\Omega). \qquad (2.96)$$

В частности,

$$(\eta, w)_{H^2(\Omega)} = \langle \gamma_M\eta, \{\frac{\partial \Delta u}{\partial n}; \Delta u\}\rangle_G, \quad \forall \eta, w \in H_h^2(\Omega) = M. \qquad (2.97)$$

Здесь справа стоит линейный функционал, обобщающий выражение из левой части (2.82) на случай, когда $\eta\mid_\Gamma \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial n}\mid_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial n}\Delta u\right)_\Gamma \in \left(H^{3/2}(\Gamma)\right)^*$, $(\Delta u)_\Gamma \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^*$, то есть правая часть в (2.97) равна

$$\langle -\eta, \frac{\partial\Delta u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle\frac{\partial\eta}{\partial n}, \Delta u\rangle_{L_2(\Gamma)}. \tag{2.98}$$

Эти рассуждения показывают, что

$$\partial_M u = \{\frac{\partial\Delta u}{\partial n}, \Delta u\}, \quad \forall u \in H_h^2(\Omega) = M. \tag{2.99}$$

Аналогично преобразованиям, осуществленным выше и приведшим к формулам (2.69) – (2.74), получаем, что для рассматриваемой задачи

$$\partial_N u = \{\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\mid_\Gamma; (\Delta u)_\Gamma\}, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega), \tag{2.100}$$

и поэтому окончательно

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N = \{\frac{\partial\Delta u}{\partial n}; \Delta u\} \in (G_+)^* = \left(H^{3/2}(\partial\Omega)\right)^* \times \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^* \tag{2.101}$$

при любой $u \in H^2(\Omega)$.

Итогом рассмотрения случая бигармонического оператора является

Теорема 4. Для тройки гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^2(\Omega)$ и $G = [L_2(\Gamma)]^2$, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma$, а также для оператора следа γ, определенного законом (2.86), справедлива следующая формула Грина:

$$\langle\eta, \Delta^2 u + u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^2(\Omega)} + \langle\eta, \frac{\partial}{\partial n}\Delta u\rangle_{L_2(\Gamma)} - \langle\frac{\partial\eta}{\partial n}, \Delta u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \forall\eta, u \in H^2(\Omega). \tag{2.102}$$

Здесь

$$\Delta^2 u \in \left(H^2(\Omega)\right)^*, \quad \eta\mid_\Gamma \in H^{3/2}(\Gamma),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta u\right)_\Gamma \in \left(H^{3/2}(\Gamma)\right)^*, \ \frac{\partial\eta}{\partial n}\mid_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma), \ \Delta u \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^*. \tag{2.103}$$

Формула (2.102) обобщает формулу (2.78) на случай, когда $\eta, u \in H^2(\Omega)$, а свойства (2.103) установлены в процессе доказательства теоремы.

3 О формуле Грина для задачи Стокса

Как и в п. 1.4, будем считать, что однородная вязкая несжимаемая тяжёлая жидкость заполняет в состоянии покоя сосуд $\Omega \in \mathbb{R}^3$, ограниченный твёрдой стенкой S и горизонтальной свободной поверхностью Γ, т.е. $\partial\Omega = \bar{S} \cup \Gamma$, причём $\partial\Omega$ — липшицева. При этом ось Ox_3 направлена вверх, $O \in \Gamma$, $x_3 < 0$ для точек из Ω. Тогда при любых $\vec{u} \in C^2(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $\vec{\eta} \in \vec{C}(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\nabla p \in \vec{G}(\Omega)$ (см. обозначения в п 1.4) справедлива формула Грина (1.54).

Сейчас будет получено обобщение этой формулы на случай произвольных полей $\vec{\eta}$ и $\vec{u}$ из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\nabla p \in \big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\big)^*$.

3.1 Оператор гильбертовой пары соленоидальных подпространств

Как указано в п. 1.4, гильбертово пространство $F := \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ плотно вложено в пространство $E := \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и потому эти пространства образуют гильбертову пару $(F; E) = \big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega)\big)$. Найдём порождающий оператор A этой гильбертовой пары.

Из (1.54) и определения (2.14) оператора A имеем для гладких функций $\vec{\eta}(x)$ и $\vec{u}(x)$ из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$:

$$E(\vec{\eta}, \vec{u}) = -\int_\Omega \vec{\eta} \cdot \Delta\vec{u} d\Omega + \int_\Gamma \Big(\sum_{i=1}^3 \eta_i \tau_{i3}(\vec{u})\Big) d\Gamma = \int_\Omega \vec{\eta} \cdot A\vec{u}\, d\Omega. \tag{3.1}$$

Для финитного поля $\vec{\eta}$ отсюда получаем, что

$$\int_\Omega \vec{\eta} \cdot (A\vec{u} + \Delta\vec{u}) d\Omega = 0.$$

Пусть $P_{0,S}$ – ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$. Тогда $\vec{\eta} = P_{0,S}\vec{\eta}$, и предыдущее соотношение переписывается в виде

$$\int_\Omega \vec{\eta} \cdot (A\vec{u} + P_{0,S}\Delta\vec{u}) d\Omega = 0, \quad \vec{\eta} \in \vec{J}_0(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega). \tag{3.2}$$

Так как $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \vec{J}_0(\Omega) = \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ (см. (1.42)), а совокупность финитных соленоидальных полей $\vec{\eta}(x)$ плотна в $\vec{J}_0(\Omega)$, то из (3.2) следует, что для гладких $\vec{u}(x)$

$$A\vec{u} = -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p, \quad \nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \tag{3.3}$$

При этом

$$\Delta p = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{на} \quad S). \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.1) выражение (3.3) для $A\vec{u}$, приходим к тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \vec{\eta}\cdot\nabla p\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \Big(\sum_{i=1}^{3} \eta_i \tau_{i3}(\vec{u})\Big) d\Gamma, \tag{3.5}$$

что даёт соотношение (с помощью формулы Гаусса–Остроградского)

$$\int\limits_{\Gamma} \Big(\sum_{i=1}^{2} \eta_i \tau_{i3}(\vec{u}) + \eta_3(-p + \tau_{33}(\vec{u}))\Big) d\Gamma = 0. \tag{3.6}$$

Покажем, что отсюда следуют граничные условия

$$\tau_{i3}(\vec{u}) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad -p + \tau_{33}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{на} \quad \Gamma), \tag{3.7}$$

связанные с заданием области определения оператора A.

Возьмём в качестве $\vec{\eta}$ в (3.6) поле вида

$$\eta_1 = \psi(x_3)\varphi(x_1, x_2), \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = -\Psi(x_3)\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \tag{3.8}$$

$$\Psi(x_3) = \int\limits_{-a}^{x_3} \psi(\xi) d\xi, \quad \psi(0) = 0, \quad \Psi(0) \neq 0.$$

Здесь a – достаточно малая положительная величина, $\varphi(x_1, x_2)$ произвольная финитная в Γ функция и Γ_0 – открытое множество, содержащее носитель функции φ и содержащееся вместе с замыканием внутри Γ. Если $C_a := \Gamma_0 \times [-a, 0]$ — цилиндр, лежащий при достаточно малом $a > 0$ в области Ω, а $\psi(x_3)$ — гладкая функция, то поле $\vec{\eta} = \vec{\eta}(x_1, x_2, x_3)$, определённое формулами (3.8), принадлежит пространству $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$.

Для такого поля $\vec{\eta}$ формула (3.6) даёт соотношение

$$\int\limits_{\Gamma} (-p + \tau_{33}(\vec{u}))\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} d\Gamma = 0. \tag{3.9}$$

Это означает, что обобщённая производная по x_1 от функции $-p + \tau_{33}(\vec{u})$ на Γ равна нулю. Аналогично устанавливается, что производная по x_2 также равна нулю. Поэтому

$$-p + \tau_{33}(\vec{u}) = \text{const} \quad (\text{на} \quad \Gamma). \tag{3.10}$$

Так как $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, то (см. (1.41))

$$\int\limits_{\Gamma} p d\Gamma = 0. \tag{3.11}$$

Можно проверить также (см. [1], с.115), что

$$\int\limits_{\Gamma} \tau_{33}(\vec{u})d\Gamma = 0. \tag{3.12}$$

Поэтому из (3.10) окончательно имеем третье условие (3.7).

Выберем теперь в качестве $\vec{\eta}$ в (3.6) поле вида (3.8) с $\psi(0) = 1$. Тогда с учётом (3.9) имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \tau_{13}(\vec{u})\varphi d\Gamma = 0.$$

Отсюда следует первое условие (3.7). Аналогично устанавливается, что выполнено второе условие (3.7).

Подводя итоги этим рассуждениям и опираясь на формулы (3.3), (3.4), (3.7), приходим к следующим выводам.

Теорема 5. (см. также [10]). Оператор A гильбертовой пары $\big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega)\big)$ является оператором краевой задачи

$$\begin{aligned}
&A\vec{u} := -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S),\\
&\tau_{i3}(\vec{u}) - p\delta_{i3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad i = 1, 2, 3,\\
&\Delta p = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Если эта задача имеет решение $\vec{u} \in \vec{H}^2(\Omega) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, то $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. При любой $\vec{f} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ задача (3.13) имеет единственное обобщённое решение $\vec{u}$ из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, причём $\vec{u} \in \mathcal{D}(A)$.

При любой $\vec{f} \in \big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\big)^*$ задача (3.13) имеет единственное слабое решение $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, обратно, любой элемент $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ является слабым решением задачи (3.13) при некотором $\vec{f} \in \big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\big)^*$. $\square$

Замечание 2. Так как $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, то в силу третьего граничного условия на Γ (а также последних двух соотношений (3.13)) поле ∇p однозначно определяется полем $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$. Поэтому коротко задачу (3.13) можно записать в виде

$$A\vec{u} = \vec{f}, \tag{3.14}$$

а оператор A, заданный первоначально на множестве $\vec{C}^2(\Omega) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, затем расширен по Фридрихсу до самосопряжённого оператора, действующего в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и заданного на соответствующей области определения $\mathcal{D}(A)$ (на совокупности обобщённых решений задачи (3.13)). Наконец, его дальнейшее расширение на всё $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ приводит к оператору, у которого $\mathcal{D}(A) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = F$, а $\mathcal{R}(A) = \big(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\big)^* = F^*$.

3.2 Оператор следа и подпространство „гармонических" вектор–функций

Переходя к дальнейшему применению абстрактных построений из параграфа 2 к задачам гидродинамики вязкой жидкости, введём оператор γ и рассмотрим связанные с ним проблемы.

Будем считать, что

$$\gamma\vec{u} := \vec{u}\big|_{\Gamma}, \quad \forall\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{3.15}$$

Так как выполнено условие

$$\int_{\Gamma} u_3 d\Gamma = 0, \tag{3.16}$$

а $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$, то, в силу теорем вложения в областях с липшицевой границей (см., например, [7]), оператор γ ограниченно действует из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространство

$$G_+ := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_{\Gamma}, \quad H^{1/2}_{\Gamma} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \tag{3.17}$$

где $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ (см. условие (3.16)). Очевидно, G_+ плотно и компактно вложено в пространство

$$G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}, \tag{3.18}$$

и потому для оператора γ из (3.15) выполнено общее условие (2.2) из п. 2.1.

В рассматриваемом случае

$$\mathrm{Ker}\gamma := \vec{N}(\Omega) = \left\{\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) : \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma)\right\} = \vec{J}^1_0(\Omega) \tag{3.19}$$

(см. (1.48)), причём $\vec{N}(\Omega)$ не плотно в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, т.е. не выполнено общее условие (2.3) из п. 2.1.

Таким образом, описываемая ситуация не отвечает случаю, разобранному в общем виде в работе [2], однако, поскольку выполнены условия (2.1) и (2.2), то справедлива теорема 1 применительно к пространствам $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $F = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$ и оператора γ из (3.15).

Найдём ортогональное дополнение

$$\vec{M}(\Omega) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \ominus \vec{N}(\Omega). \tag{3.20}$$

Если $\vec{\eta} \in \vec{N}(\Omega)$, $\vec{u} \in \vec{M}(\Omega)$, то $E(\vec{\eta}, \vec{u}) = 0$. Пусть $\vec{u}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $\vec{\eta}$ — непрерывно дифференцируемая. Тогда по формуле Грина (1.54)

$$0 = E(\vec{\eta}, \vec{u}) = -\int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot \Delta\vec{u} d\Omega = -\int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot P_0\Delta\vec{u} d\Omega, \tag{3.21}$$

где P_0 — ортопроектор на $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Так как $\vec{N}(\Omega)$ плотно в $\vec{J}_0(\Omega)$, то из (3.21) следует, что

$$-P_0\Delta\vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{u} \in \vec{M}(\Omega) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{3.22}$$

Уравнение (3.22) равносильно соотношению

$$-P_{0,S}\Delta\vec{u} + P_{h,S}\Delta\vec{u} =: -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_M = \vec{0}, \quad \nabla p_M \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{3.23}$$

где $P_{h,S}$ — ортопроектор на подпространство $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ из ортогонального разложения (1.22). В (3.23) левая часть имеет тот же вид, что и в первом уравнении задачи (3.13), причём ∇p_M однозначно находится по полю $\vec{u} \in \vec{M}(\Omega)$.

Теорема 6. Подпространство $\vec{M}(\Omega)$ состоит из элементов („гармонических" вектор–функций) вида

$$\vec{M}(\Omega) = \big\{\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega): \quad -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_M = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S)\big\}. \tag{3.24}$$

При этом оператор $(\gamma_M)^{-1} := (\gamma|_{\vec{M}(\Omega)})^{-1}$ даёт слабое решение задачи

$$\begin{gathered} -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_M = \vec{0}, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \gamma_M\vec{u} = \vec{u}\big|_\Gamma = \vec{\varphi} \in G_+, \end{gathered} \tag{3.25}$$

т.е. $\vec{u} = (\gamma_M)^{-1}\vec{\varphi} \in \vec{M}(\Omega) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$. Обратно, любая вектор–функция из $\vec{M}(\Omega)$ является слабым решением задачи (3.25) при некотором $\vec{\varphi} \in G_+$.

3.3 Оператор ∂ и связанные с ним краевые задачи

Получим теперь, опираясь на абстрактную схему пп. 2.2–2.3, выражение для операторов ∂_M и ∂_N, а потому и для оператора ∂ в рассматриваемом гидродинамическом случае.

Для гладких элементов $\vec{\eta}$ и $\vec{u}$ из $\vec{M}(\Omega)$, согласно определению (2.13) оператора ∂_M, формуле (1.54) и уравнению (3.23), имеем

$$E(\vec{\eta}, \vec{u}) = \int\limits_\Gamma \Big(\sum_{i=1}^3 (\gamma_M\vec{\eta})_i(\partial_M\vec{u})_i\Big)d\Gamma =$$

$$= -\int\limits_\Omega \vec{\eta}\cdot P_{0,S}\Delta\vec{u}d\Omega + \int\limits_\Gamma \Big(\sum_{i=1}^3 (\gamma_M\vec{\eta})_i\tau_{i3}(\vec{u})\Big)d\Gamma =$$

$$= -\int\limits_\Omega \vec{\eta}\cdot\nabla p_M d\Omega + \int\limits_\Gamma \sum_{i=1}^3 \big((\gamma_M\vec{\eta})_i\tau_{i3}(\vec{u})\big)d\Gamma. \tag{3.26}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Gamma}\sum_{i=1}^{3}(\gamma_M\vec{\eta})_i\big((\partial_M\vec{u})_i-\tau_{i3}(\vec{u})+p_M\delta_{i3}\big)d\Gamma=0,\quad\forall\vec{\eta}\in\vec{M}(\Omega).\tag{3.27}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше при выводе из тождества (3.6) соотношений (3.7) с использованием полей вида (3.8), устанавливается, что из (3.27) следует аналитическое выражение для оператора ∂_M:

$$\partial_M\vec{u}=\sum_{i=1}^{3}\big(\tau_{i3}(\vec{u})-p_M\delta_{i3}\big)\vec{e}_i,\tag{3.28}$$

где p_M — функция из уравнения (3.23) или задачи (3.25), связывающая элементы $\vec{u}$ из $\vec{M}(\Omega)$.

Следствием полученного результата (3.28) является такой вывод.

Теорема 7. Задача

$$\begin{gathered}-P_{0,S}\Delta\vec{u}+\nabla p_M=\vec{0},\quad \mathrm{div}\vec{u}=0\quad(\text{в }\Omega),\quad\vec{u}=\vec{0}\quad(\text{на }S),\\ \partial_M\vec{u}=\vec{\psi}\quad(\text{на }\Gamma),\end{gathered}\tag{3.29}$$

называемая второй вспомогательной задачей С.Г. Крейна (см. [1], с. 119), тогда и только тогда имеет единственное решение $\vec{u}$ из $\vec{M}(\Omega)\subset\vec{J}^{1}_{0,S}(\Omega)$, когда выполнено условие

$$\vec{\psi}\in(G_+)^*=(H^{1/2}(\Gamma))^*\times(H^{1/2}(\Gamma))^*\times(H_\Gamma^{1/2})^*.\qquad\square\tag{3.30}$$

С целью получения аналитического выражения для $\partial_N\vec{u}$ при $\vec{u}\in\vec{N}(\Omega)$ повторим рассуждения из общей схемы п. 2.4, приводящие к формуле (2.18). Если $\vec{\eta}\in\vec{M}(\Omega)$, $\vec{u}\in\vec{N}(\Omega)$, причём эти элементы гладкие, то, с учётом формул (2.15), (2.18), (1.54) и (3.13), получаем

$$\langle\vec{\eta},L\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\vec{\eta}\cdot(-P_{0,S}\Delta\vec{u}+\nabla p_N)d\Omega=E(\vec{\eta},\vec{u})-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\Big(\sum_{i=1}^{3}\eta_i(\tau_{i3}(\vec{u})-p_N\delta_{i3})\Big)d\Gamma=-\int\limits_{\Gamma}\Big(\sum_{i=1}^{3}\eta_i(\partial_N\vec{u})_i\Big)d\Gamma.\tag{3.31}$$

С учётом равенства $E(\vec{\eta},\vec{u})=0$ отсюда следует тождество

$$\int\limits_{\Gamma}\Big(\sum_{i=1}^{3}\eta_i\big((\partial_N\vec{u})_i-\tau_{i3}(\vec{u})+p_N\delta_{i3}\big)\Big)d\Gamma=0,\quad\forall\vec{\eta}\in\vec{M}(\Omega).\tag{3.32}$$

Так как для элементов $\vec{\eta}$ из $\vec{M}(\Omega)$ значения $\gamma_M\vec{\eta}$ могут быть произвольными элементами из G_+ (см. (3.15), (3.17) и (3.25)), то из (3.32) следует, что

$$\partial_N\vec{u} = \sum_{i=1}^{3}\big(\tau_{i3}(\vec{u}) - p_N\delta_{i3}\big)\vec{e}_i, \tag{3.33}$$

т.е. выражается такой же формулой, как (3.28).

Окончательно, для $\vec{u} = \vec{u}_M + \vec{u}_N$ получаем

$$\partial\vec{u} = \partial_M\vec{u}_M + \partial_N\vec{u}_N = \sum_{i=1}^{3}\big(\tau_{i3}(\vec{u}) - p\delta_{i3}\big)\vec{e}_i, \quad p := p_M + p_N. \tag{3.34}$$

Опираясь на эту формулу, а также абстрактную теорему 2, рассмотрим краевую задачу Стокса

$$\begin{gathered}
-P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u = \vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S),\\
\sum_{i=1}^{3}\big(\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u\delta_{i3}\big)\vec{e}_i = \vec{\psi} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \Delta p_u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S),
\end{gathered} \tag{3.35}$$

возникающую в проблеме движений вязкой жидкости в открытом сосуде.

Теорема 8. Если выполнены условия

$$\vec{f} \in (\vec{J}^1_{0,S}(\Omega))^*, \quad \vec{\psi} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* = (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}_{\Gamma})^*, \tag{3.36}$$

то задача (3.35) имеет единственное слабое решение $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, представимое в виде

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}, \quad \nabla p_u = \nabla p_v + \nabla p_w, \tag{3.37}$$

где функции $\vec{v}$ и $\vec{w}$ являются слабыми решениями задачи (первая вспомогательная задача С.Г. Крейна)

$$\begin{gathered}
A\vec{v} := -P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_v = \vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S),\\
\sum_{i=1}^{3}\big(\tau_{i3}(\vec{v}) - p_v\delta_{i3}\big)\vec{e}_i = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma),\\
\Delta p_v = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S),
\end{gathered} \tag{3.38}$$

и задачи (вторая вспомогательная задача С.Г. Крейна)

$$\begin{gathered}
-P_{0,S}\Delta\vec{w} + \nabla p_w = \vec{0}, \quad \mathrm{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} = \vec{0} \quad (\text{на } S),\\
\sum_{i=1}^{3}\big(\tau_{i3}(\vec{w}) - p_w\delta_{i3}\big)\vec{e}_i = \vec{\psi} \quad (\text{на } \Gamma),\\
\Delta p_w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_w}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S).
\end{gathered} \tag{3.39}$$

Обратно, любое поле $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ представимо в виде суммы (3.37), где $\vec{v}$ и $\vec{w}$ — слабые решения задач (3.38), (3.39) при некоторых $\vec{f}$ и $\vec{\psi}$, удовлетворяющих условиям (3.36). $\square$

3.4 Общий вид формулы Грина для задачи Стокса

Подведём итоги проведенным выше построениям в гидродинамическом случае, отвечающем пространствам $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $F = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $G = \vec{L}_2(\Gamma) = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$ и оператору следа $\gamma\vec{u} := \vec{u}\big|_\Gamma$.

Заметим прежде всего, что выражение $L\vec{u} = AP_N\vec{u}$ для любого поля $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ имеет вид (см. (3.13), (3.34))

$$L\vec{u} := -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u \in \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \tag{3.40}$$

причём $L\vec{w} = \vec{0}$ для элементов из $\vec{M}(\Omega)$. Представим согласно теореме 8 любой элемент $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в виде (3.37) и воспользуемся определениями (1.15), (2.12) слабых решений применительно к задачам (3.38), (3.39). Так как (3.38) коротко можно записать в виде

$$L\vec{v} = \vec{f}, \quad \partial\vec{v} = \vec{0},$$

а (3.39) — в виде

$$L\vec{w} = \vec{0}, \quad \partial\vec{w} = \vec{\psi},$$

то для этих задач имеем тождества (см. также (2.31), (2.35))

$$\begin{aligned} &E(\vec{\eta}, \vec{v}) = \langle \vec{\eta}, L\vec{v} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, L\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \\ &E(\vec{\eta}, \vec{w}) = \langle \gamma_M\vec{\eta}, \partial_M\vec{w} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)} = \langle \gamma_M\vec{\eta}, \partial\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{M}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Из второго тождества следует, что

$$E(\vec{\eta}, \vec{w}) = \langle \gamma\vec{\eta}, \partial\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{3.42}$$

Теорема 9. Пусть область Ω удовлетворяет сформулированным в начале параграфа условиям. Тогда для любых функций $\vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ имеет место следующая формула Грина для задачи Стокса:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\eta}, -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = E(\vec{\eta}, \vec{u}) - \\ - \langle \gamma\vec{\eta}, \sum_{i=1}^{3} (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u\delta_{i3})\vec{e}_i \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

причём

$$-P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u = L\vec{u} \in \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \quad \gamma\vec{\eta} = \vec{\eta}\big|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_\Gamma,$$

$$\partial\vec{u} = \sum_{i=1}^{3}(\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u\delta_{i3})\vec{e}_i \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^* \times \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^* \times \left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*.$$

Доказательство. Формула (3.43) следует из (3.37), (3.41) и (3.42), а также определений (3.40) и (3.34) выражений для L и ∂. $\square$

Замечание 3. В формуле (3.43) поле p_u связано с $\vec{u}$ (см. (3.37)). Иногда её записывают в форме, содержащей независимое от $\vec{u}$ поле p. Тогда она принимает вид

$$\langle\vec{\eta}, -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u + \nabla p\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = E(\vec{\eta},\vec{u}) -$$

$$-\langle\gamma\vec{\eta}, \sum_{i=1}^{3}\left(\tau_{i3}(\vec{u}) - (p_u + p)\delta_{i3}\right)\vec{e}_i\rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \qquad (3.44)$$

$$\forall\vec{\eta},\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \quad \forall\nabla p \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^*. \qquad (3.45)$$

В самом деле, если $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, то

$$\langle\vec{\eta}, \nabla p\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{\eta}, \nabla p)_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int_\Gamma \eta_3 p\, d\Gamma = \langle(\gamma\vec{\eta})_3, p\rangle_{L_2(\Gamma)} =$$

$$= -\langle\gamma\vec{\eta}, \sum_{i=1}^{3}(-p\delta_{i3})\rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}. \quad (3.46)$$

Здесь левая часть имеет смысл не только при $\nabla p \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, но и при $\nabla p \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^*$. Поэтому имеет смысл и правая часть (3.46) при таких ∇p. $\square$

Отметим в заключение, что в монографии [1] используется оператор следа не в форме (3.15), а оператор нормального следа, определяемый по закону

$$\gamma_n\vec{u} := (\vec{u}\cdot\vec{n})_\Gamma = u_3\big|_\Gamma. \qquad (3.47)$$

Для этого оператора можно ввести соответствующие подпространства $\vec{N}(\Omega)$ и $\vec{M}(\Omega)$. При этом оператор A будет тот же, а выражения L, ∂_M и ∂_N — другие. Однако формула Грина для задачи Стокса в форме (3.44), (3.45) снова имеет место.

Литература

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи. // Украинский матем. вестник, Т. 1, № 1 (2004). — с. 69–97.

[3] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[4] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.

[5] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

[6] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1961. — 204 с.

[7] Gagliardo E. Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in n variabili // Rend. Sem. mat. Univ. Padova. — 1957. — 27, p. 284–305.

[8] Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1960, т. 5. — 656 с.

[9] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

[10] Azizov T. Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R. On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container. Math. Nachr., **248**–**249**, 2003, pp. 3-39.