Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 2 (2004) 2–18

УДК 517.984.4, 517.968.7

Д.А. Закора, Н.Д. Копачевский

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Постановка задачи

В произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{1}$$

$$A = A^* \gg 0, \quad A_k = A_k^* \geq 0, \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_k) \quad (k = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m. \tag{3}$$

Задача Коши вида (1) возникает при исследовании малых движений идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области [1]. В работе [2] исследована задача Коши более общая, чем (1). Из результатов работы [2] следует, как частный случай, теорема о сильной разрешимости задачи Коши (1) на произвольном интервале времени.

Настоящая статья посвящена исследованию так называемой ассоциированной спектральной задачи, связанной с уравнением (1).

По схеме работы [3] задачу для интегродифференциального уравнения (1) можно привести к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. А именно, введем новые неизвестные функции

$$v_k(t) := \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k^{1/2} u(s)\, ds, \quad v(0) = 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Если $u = u(t)$ — сильное решение задачи (1)-(3), то $v_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dv_k}{dt} = A_k^{1/2} u - \gamma_k v_k, \quad k = \overline{1,m}.$$

Вводя еще функцию $z(t) := u'(t)$, приходим взамен (1)-(3) к задаче Коши вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & -\widehat{I} & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & E & 0 \\ E^t & -\widehat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$u(0) = u^0, \quad \widehat{v}(0) = 0, \quad z(0) = u^1. \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \widehat{v} := (v_1; \ldots; v_m)^t, \quad \widehat{\gamma} := \operatorname{diag}(\gamma_1 I, \ldots, \gamma_m I), \\ \widehat{I} := \operatorname{diag}(\underbrace{I, \ldots, I}_{m \text{ раз}}), \quad E := (A_1^{1/2}; \ldots; A_m^{1/2}), \end{gathered} \tag{6}$$

а символом $(\ldots)^t$ обозначена операция транспонирования.

Задача (4)-(6) коротко может быть записана в виде

$$\widehat{\mathcal{J}} \frac{dy}{dt} + \widehat{\mathcal{A}}_0 y = \widehat{f}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{7}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Операторная блок-матрица $\widehat{\mathcal{A}}_0$, заданная на области определения*

$$\begin{gathered} \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_0) := \mathcal{D}(A) \oplus \left(\oplus_{k=1}^m \mathcal{D}(A_k^{1/2}) \right) \oplus \mathcal{H} \subset \widehat{\mathcal{H}}, \\ \widehat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus (\oplus_{k=1}^m \mathcal{H}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_k := \mathcal{H}, \end{gathered}$$

является симметричным и ограниченным снизу оператором; он допускает замыкание до самосопряженного ограниченного снизу оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. При этом

$$\widehat{\mathcal{A}} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \widehat{I}, I) \cdot \begin{pmatrix} I & (\widehat{Q}^t)^* & 0 \\ \widehat{Q}^t & -\widehat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(A^{1/2}, \widehat{I}, I),$$

$$\begin{gathered} \widehat{Q} := (A_1^{1/2} A^{-1/2}; \ldots; A_m^{1/2} A^{-1/2}), \\ \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) = \{ (u; \widehat{v}; z)^t \in \widehat{\mathcal{H}} \,|\, u + A^{-1/2} (\widehat{Q}^t)^* \widehat{v} \in \mathcal{D}(A) \} \supset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_0). \end{gathered}$$

Доказательство леммы проводится по схеме работы [2] и здесь не приводится.

Рассмотрим наряду с задачей Коши (7), связанной с проблемой (1)-(3), аналогичную задачу с замкнутым оператором $\widehat{\mathcal{A}}$:

$$\widehat{\mathcal{J}} \frac{dy}{dt} + \widehat{\mathcal{A}} y = \widehat{f}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{8}$$

Определение 1. Будем говорить, что задача (8) ассоциирована с задачей (7) и задачей (1)-(3).

Приведем без доказательства теорему из работы [2] о связи задач (1)-(3), (7) и (8).

Теорема 1. *При условиях $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H})$ задача* (1)-(3) *для интегродифференциального уравнения, а также задача* (7) *для векторно-матричного уравнения и ассоциированная задача* (8) *равносильны, т.е. из существования и единственности сильного решения любой из этих задач на отрезке $[0,T]$ следует существование и единственность сильного решения двух других задач.*

Рассмотрим решения однородной задачи (8), зависящие от t по закону

$$y(t) = \exp(-\lambda t)y, \quad y \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \widehat{\mathcal{H}}, \tag{9}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — неизвестный заранее комплексный параметр, а $y \neq 0$ — так называемый амплитудный элемент. Решения такого вида называют нормальными движениями, отвечающими проблеме (8), причем λ есть комплексный декремент затухания.

Для амплитудных элементов y получаем спектральную задачу

$$\widehat{\mathcal{A}}y = \lambda\widehat{\mathcal{J}}y, \quad y \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}), \tag{10}$$

в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathcal{H}}$.

Определение 2. Назовем задачу (10) спектральной задачей, ассоциированной с задачей (1)-(3) для интегродифференциального уравнения второго порядка.

Исследование задачи (10) и есть цель настоящей работы.

2. Вывод основного операторного пучка, локализация и асимптотика спектра

Запишем спектральную задачу (10) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} A^{1/2}(A^{1/2}u + (\widehat{Q}^t)^*\widehat{v}) = \lambda z, \\ \widehat{Q}^t A^{1/2}u - \widehat{\gamma}\widehat{v} = -\lambda\widehat{v}, \\ -z = \lambda u. \end{cases} \tag{11}$$

Осуществим в системе (11) замену $A^{1/2}u = \xi$, в результате придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \xi + (\widehat{Q}^t)^*\widehat{v} - \lambda A^{-1/2}z = 0, \\ \widehat{Q}^t\xi - \widehat{\gamma}\widehat{v} + \lambda\widehat{v} = 0, \\ z + \lambda A^{-1/2}\xi = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть $\lambda \neq \gamma_k$ $(k = \overline{1,m})$. Выразим из второго и третьего уравнений системы (12) $\widehat{v}$ и z соответственно:

$$\widehat{v} = -(\lambda\widehat{I} - \widehat{\gamma})^{-1}\widehat{Q}^t\xi, \quad z = -\lambda A^{-1/2}\xi.$$

Подставляя их в первое соотношение системы (12), получим

$$\xi - (\widehat{Q}^t)^*(\lambda\widehat{I} - \widehat{\gamma})^{-1}\widehat{Q}^t\xi + \lambda^2 A^{-1}\xi = 0. \tag{13}$$

После несложных преобразований задача (13) приводится к следующей спектральной задаче для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$\begin{gathered} L(\lambda)\xi := \left\{ I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k \right\} \xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}, \\ B_k := (A_k^{1/2}A^{-1/2})^*(A_k^{1/2}A^{-1/2}), \quad 0 \leq B_k = B_k^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad k = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{14}$$

Спектры задач (10) и (14) вне точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ совпадают. Далее будет показано, что точки $\lambda = \gamma_k$ $(k = \overline{1,m})$ при некотором условии на операторы B_k не принадлежат спектру задачи (10), и, таким образом, задачи (10) и (14) эквивалентны.

Введем следующее

Условие (a). Операторы B_k положительно определены: $B_k \gg 0$, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (a). Тогда спектр операторного пучка* $L(\lambda)$ *расположен симметрично относительно действительной оси. Для любого* $0 < \varepsilon < \gamma_1$ *и достаточно большого* $R > \gamma_m$ *справедливо включение*

$$\sigma(L(\lambda)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\sum_{k=1}^{m} \|B_k\| < \operatorname{Re}\lambda < 0,\;\; \operatorname{Im}\lambda \neq 0\} \cup (\gamma_1 - \varepsilon; R).$$

Доказательство. Покажем сначала, что справедливо включение

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \geq 0,\;\; \operatorname{Im}\lambda \neq 0\} \subset \rho(L(\lambda)). \tag{15}$$

Несложно проверить, что для пучка $L(\lambda)$ верно следующее представление:

$$L(\lambda) = \left\{ I + ((\operatorname{Re}\lambda)^2 - (\operatorname{Im}\lambda)^2)A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{Re}\lambda - \gamma_k}{|\lambda - \gamma_k|^2} B_k \right\} + \\ + i \cdot \operatorname{Im}\lambda \left\{ 2A^{-1}\operatorname{Re}\lambda + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|\lambda - \gamma_k|^2} B_k \right\}. \tag{16}$$

Из условия (3) на числа γ_k ($k = \overline{1, m}$), из положительной определенности операторов B_k (см. условие (a)) и представления (16) следует, что мнимая часть $\operatorname{Im} L(\lambda)$ операторного пучка $L(\lambda)$ есть знакоопределенный оператор, если только $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ($\operatorname{Im} L(\lambda) \gg 0$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im} L(\lambda) \ll 0$ при $\operatorname{Im}\lambda < 0$). Значит на указанном множестве пучок $L(\lambda)$ непрерывно обратим и, таким образом, включение (15) справедливо.

Покажем теперь, что для любого $0 < \varepsilon < \gamma_1$ и достаточно большого $R > \gamma_m$ верно включение

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda = 0,\; \operatorname{Re}\lambda \leq \gamma_1 - \varepsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda = 0,\; \operatorname{Re}\lambda \geq R\} \subset \rho(L(\lambda)). \tag{17}$$

В самом деле, если $\lambda \leq \gamma_1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \gamma_1$), то из условий (3) и (14) тривиально следует, что пучок операторов $L(\lambda)$ положительно определен, а значит ограниченно обратим. Далее, если $\lambda \geq R$ и $R > \gamma_m$ настолько велико, что

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R - \gamma_m} \|B_k\| < 1,$$

то пучок $L(\lambda)$ снова будет положительно определенным, поскольку оператор A^{-1} положителен. Таким образом, включение (17) справедливо.

Используя теорему об оценке нормы резольвенты самосопряженного оператора, можно получить следующую оценку:

$$\|(I + \lambda^2 A^{-1})^{-1}\| \leq \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Re}\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0. \tag{18}$$

Основываясь на оценке (18), покажем, что

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \leq -\sum_{k=1}^{m} \|B_k\|\} \subset \rho(L(\lambda)). \tag{19}$$

Итак, пусть λ из левого множества во включении (19). Для таких λ с учетом (18) оценим следующую норму:

$$\|(I+\lambda^2A^{-1})^{-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda-\gamma_k}B_k\| \le \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Re}\lambda|}\sum_{k=1}^{m}\frac{\|B_k\|}{|\lambda-\gamma_k|} < \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}\sum_{k=1}^{m}\|B_k\| \le 1. \quad (20)$$

Из оценки (20) и представления

$$L(\lambda)=(I+\lambda^2A^{-1})\left\{I-(I+\lambda^2A^{-1})^{-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda-\gamma_k}B_k\right\}$$

следует включение (19). Симметричность расположения спектра следует из самосопряженности операторного пучка $L(\lambda)$. Отсюда и из соотношений (15), (17) и (19) следует утверждение настоящей теоремы. □

Докажем теперь, что точки $\lambda=\gamma_k$ $(k=\overline{1,m})$ не принадлежат спектру задачи (10). Этим фактом будет установлена эквивалентность задач (10) и (14).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (a). Тогда точки* $\lambda=\gamma_k$ $(k=\overline{1,m})$ *не принадлежат спектру задачи* (10).

Доказательство. Все рассуждения проведем для $\lambda=\gamma_p$, где $1\le p\le m$. Покажем сначала, что точка $\lambda=\gamma_p$ не является собственным значением задачи (10). Допустим противное, т.е., что точка γ_p — собственное значение задачи (10) (или, что то же, задачи (12)). Тогда из (12) получим

$$\begin{cases}\xi+(\widehat{Q}^t)^*\widehat{v}-\gamma_pA^{-1/2}z=0,\\ A_p^{1/2}A^{-1/2}\xi=0,\\ A_k^{1/2}A^{-1/2}\xi+(\gamma_p-\gamma_k)v_k=0, \quad k=1,\dots,p-1,p+1,\dots,m,\\ z+\gamma_pA^{-1/2}\xi=0.\end{cases} \quad (21)$$

Из второго уравнения системы (21) следует, что $\xi=0$. Из последнего уравнения (21) получаем тогда, что $z=0$. Из третьего соотношения в (21), с учетом условия (3) на числа γ_k $(k=\overline{1,m})$, следует, что $v_k=0$, $k\ne p$. Из первого соотношения в (21) и полученных фактов получаем, что $v_p=0$. Таким образом, $\xi=v_1=\ldots=v_m=z=0$. Это противоречит тому, что γ_p — собственное значение задачи (12) (а значит и задачи (10)).

Докажем, что $\lambda=\gamma_p$ не является предельной точкой спектра задачи (10). Для этого достаточно показать, что пучок $L_p(\lambda):=(\lambda-\gamma_p)L(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности точки γ_p.

В самом деле, пучок $L_p(\lambda)$ можно записать в виде

$$L_p(\lambda)=-B_p+(\lambda-\gamma_p)B(\lambda), \quad B(\lambda):=I+\lambda^2A^{-1}-\sum_{k=1,\,k\ne p}^{m}\frac{1}{\lambda-\gamma_k}B_k.$$

Поскольку оператор-функция $B(\lambda)$ равномерно ограничена в окрестности точки $\lambda=\gamma_p$, а оператор B_p положительно определен, в силу условия (a), то из последнего представления следует, что операторный пучок $L_p(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой окрестности точки $\lambda=\gamma_p$. Теорема доказана. □

Введем следующее

Условие (b). Операторы B_k имеют вид $B_k := \alpha_k I + T_k$ $(k = \overline{1,m})$. Кроме того

$$A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 \le T_k \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Для дальнейших исследований введем скалярную функцию $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) := 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\lambda - \gamma_k} \equiv \frac{(\lambda-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\beta_m)}{(\lambda-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\gamma_m)}, \tag{23}$$

где β_k $(k = \overline{1,m})$ — нули функции $\varphi(\lambda)$, и определим операторный пучок $F(\lambda)$ равенством

$$F(\lambda)\xi := \varphi^{-1}(\lambda)L(\lambda)\xi = \left\{ I + \varphi^{-1}(\lambda)\left(\lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\lambda-\gamma_k}\right)\right\}\xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}. \tag{24}$$

Все нули β_k $(k = \overline{1,m})$ функции $\varphi(\lambda)$ действительны, положительны и чередуются с числами γ_k $(k = \overline{1,m})$: $0 < \gamma_1 < \beta_1 < \ldots < \gamma_m < \beta_m$, в чем легко убедиться непосредственно. Очевидно также, что вне точек γ_k и β_k $(k = \overline{1,m})$ спектры пучков $L(\lambda)$ и $F(\lambda)$ совпадают.

Из соотношения (24), определяющего операторный пучок $F(\lambda)$, и условия (22) (условия (b)) следует, что $F(\lambda) = I + \Phi(\lambda)$, где $\Phi(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$, т.е. пучок $F(\lambda)$ имеет вид фредгольмовой оператор-функции. Поскольку $F(\lambda)$ имеет регулярные точки (см. теорему 2), то спектр пучка $F(\lambda)$, а значит и пучка $L(\lambda)$, отличный от особенностей оператор-функции $\Phi(\lambda)$, дискретный. Возможными предельными точками спектра могут быть только особенности оператор-функции $\Phi(\lambda)$, т.е. бесконечно удаленная точка и нули функции $\varphi(\lambda)$ (из теоремы 3 следует, что точки $\lambda = \gamma_k$ $(k = \overline{1,m})$ не могут быть предельными).

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (b) (см. (22)). Зафиксируем номер p $(1 \le p \le m)$ и определим оператор A_p по формуле*

$$A_p := \psi_p(\beta_p)\left(\beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k}\right), \quad \psi_p(\lambda) := (\lambda - \beta_p)\varphi^{-1}(\lambda).$$

Пусть $\operatorname{Ker} A_p = \{0\}$ и оператор $A_p = A_p^*$ имеет степенную асимптотику положительных $\{\lambda_n^+(A_p)\}_{n=1}^\infty$ и отрицательных $\{\lambda_n^-(A_p)\}_{n=1}^\infty$ собственных значений. Тогда пучок $L(\lambda)$ имеет ветвь собственных значений, локализованную на действительной оси, с предельной точкой β_p. Эта ветвь разбивается на две: лежащую слева $\{\lambda_n^{(p-)}(L)\}_{n=1}^\infty$ и справа $\{\lambda_n^{(p+)}(L)\}_{n=1}^\infty$ от точки β_p соответственно. При этом справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n^{(p\pm)}(L(\lambda)) = \beta_p - \lambda_n^{\mp}(A_p)(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty). \tag{25}$$

Если количество отрицательных либо положительных собственных значений оператора A_p конечно, то из двух соотношений в (25) останется только одна формула, отвечающая бесконечной ветви (со знаком $-$ либо $+$ в левой части соответственно).

Доказательство. Оно основано на применении теоремы Маркуса-Мацаева [4] к операторному пучку $F(\lambda)$.

Пусть номер p $(1 \le p \le m)$ такой же, как в условии теоремы. Представим функцию $\varphi^{-1}(\lambda)$ в окрестности точки β_p в следующем виде:

$$\varphi^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \beta_p} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k)}{\prod\limits_{k=1,\, k\neq p}^{m} (\lambda - \beta_k)} =: \frac{1}{\lambda - \beta_p} \psi_p(\lambda), \tag{26}$$

где $\psi_p(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности точки β_p и $\psi_p(\beta_p) \neq 0$ (точнее, $\psi_p(\beta_p) > 0$, это можно заметить из определения (26) функции $\psi_p(\lambda)$ и условия (3) на числа γ_k $(k = \overline{1,m})$).

Как уже отмечалось, спектры пучков $L(\lambda)$ и $F(\lambda)$ вне точек γ_k, β_k $(k = \overline{1,m})$ совпадают, поэтому для получения асимптотики (25) воспользуемся пучком $F(\lambda)$. Для изучения окрестности точки β_p осуществим в задаче (24) замену спектрального параметра: $\lambda = \beta_p + \mu^{-1}$. В результате придем к задаче

$$F(\beta_p + \frac{1}{\mu})\xi = \left\{ I + \mu\psi_p(\beta_p + \frac{1}{\mu}) \left((\beta_p + \frac{1}{\mu})^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k + \mu^{-1}} \right) \right\} \xi = 0, \tag{27}$$

которую будем изучать в окрестности бесконечно удаленной точки.

Преобразуем задачу (27) с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
&\psi_p(\beta_p + \mu^{-1}) = \psi_p(\beta_p) + \psi_p'(\beta_p)\mu^{-1} + \mu^{-1}\varepsilon_0(\mu), \\
&\frac{1}{\beta_p - \gamma_k + \mu^{-1}} = \frac{1}{\beta_p - \gamma_k} - \frac{1}{(\beta_p - \gamma_k)^2}\frac{1}{\mu} + \mu^{-1}\varepsilon_k(\mu), \\
&\varepsilon_0(\mu) = O(\mu^{-1}), \quad \varepsilon_k(\mu) = O(\mu^{-1}), \quad \mu \to \infty, \quad k = \overline{1,m},
\end{aligned}$$

справедливых в окрестности бесконечно удаленной точки. После перегруппировки слагаемых получим следующую задачу:

$$F(\beta_p + \mu^{-1})\xi = \{ I + \mu A_p + Q_p + G_p(\mu) \} \xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}, \tag{28}$$

где

$$A_p := \psi_p(\beta_p) \left(\beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k} \right),$$

$$Q_p := \psi_p(\beta_p) \left(2\beta_p A^{-1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{(\beta_p - \gamma_k)^2} \right) + \psi_p'(\beta_p) \left(\beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k} \right),$$

$$\begin{aligned}
G_p(\mu) := {}& \psi_p(\beta_p) \left(\frac{1}{\mu} A^{-1} + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k(\mu) T_k \right) + \\
&+ \psi_p'(\beta_p) \left(\frac{2\beta_p}{\mu} A^{-1} + \frac{1}{\mu^2} A^{-1} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{(\beta_p - \gamma_k)^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k(\mu) T_k \right) +
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon_0(\mu)\left((\beta_p+\frac{1}{\mu})^2A^{-1}-\sum_{k=1}^{m}\frac{T_k}{\beta_p-\gamma_k+\mu^{-1}}\right).$$

Оператор A_p по условию теоремы есть полный самосопряженный компактный оператор, а его собственные значения имеют степенную асимптотику. Оператор Q_p, как видно из его определения, является компактным, в силу условия (22). Оператор-функция $G_p(\mu)$, определенная выше, очевидно, обладает следующим свойством: $G_p(\mu)\to 0$ при $\mu\to\infty$. Из этих фактов и теоремы Маркуса-Мацаева [4] следует, что у пучка $F(\beta_p+\mu^{-1})$ существует две ветви собственных значений, локализованных у действительной оси с предельными точками в бесконечности. Эти ветви имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\mu_n^{(\pm\infty)}(F(\beta_p+\mu^{-1}))=-\left[\lambda_n^{\mp}(A_p)\right]^{-1}(1+o(1))\quad(n\to+\infty).$$

Отсюда после обратной замены $\mu=(\lambda-\beta_p)^{-1}$ следует формула (25):

$$\lambda_n^{(p\pm)}(L(\lambda))=\lambda_n^{p\pm}(F(\lambda))=\beta_p-\lambda_n^{\mp}(A_p)(1+o(1))\quad(n\to+\infty).$$

Найденная ветвь собственных значений операторного пучка $L(\lambda)$ не только локализована у действительной оси, но и лежит на ней в силу теоремы 2. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие (b) (см.* (22)*). Зафиксируем номер* p $(1\le p\le m)$*. Пусть* $\operatorname{Ker}A_p\ne\{0\}$, $\dim(\operatorname{Ker}A_p)^{\perp}=+\infty$ *и выполнены все оставшиеся условия теоремы 4. Если* $-1\in\rho(P_2Q_pP_2)$*, где* Q_p *— оператор из соотношения* (28)*, а* P_2 *— это ортопроектор на* $\operatorname{Ker}A_p$*, то имеют место все выводы теоремы 4.*

Доказательство. Проводя рассуждения, как и в теореме 4, приходим к спектральной задаче (28), изучаемой вне круга достаточно большого радиуса. Теорему Маркуса-Мацаева применить теперь нельзя, так как $\operatorname{Ker}A_p\ne\{0\}$. Введем ортопроекторы P_1, P_2 на $(\operatorname{Ker}A_p)^{\perp}$, $\operatorname{Ker}A_p$ соответственно и представим ξ в виде $\xi=\xi_1+\xi_2$, где $\xi_j:=P_j\xi$, $j=1,2$. Подставим введенное представление для ξ в (28) и применим к левой и правой частям полученного выражения поочередно ортопроекторы P_1 и P_2. В результате получим два соотношения:

$$\begin{cases}\xi_1+\mu P_1A_p\xi_1+P_1Q_p(\xi_1+\xi_2)+P_1G_p(\mu)(\xi_1+\xi_2)=0,\\ \xi_2+P_2Q_p(\xi_1+\xi_2)+P_2G_p(\mu)(\xi_1+\xi_2)=0.\end{cases}\tag{29}$$

Запишем второе соотношение в следующем виде:

$$\{I_2+P_2Q_pP_2+P_2G_p(\mu)P_2\}\xi_2=-P_2Q_pP_1\xi_1-P_2G_p(\mu)P_1\xi_1,\tag{30}$$

где I_2 — единичный оператор в $\operatorname{Ker}A_p$. По условию теоремы $-1\in\rho(P_2Q_pP_2)$, поэтому оператор $I_2+P_2Q_pP_2$ непрерывно обратим в $\operatorname{Ker}A_p$. Оператор-функция $P_2G_p(\mu)P_2$ стремится к нулю при $\mu\to\infty$. Отсюда следует, что существует число $M>0$ такое, что оператор-функция, стоящая в левой части (30), обратима и обратная к ней ограничена при $|\mu|>M$. Пусть $|\mu|>M$; выразим ξ_2 из (30) и подставим полученное выражение в (29), будем иметь:

$$\begin{aligned}\{I_1+\mu P_1 A_p P_1 + P_1 Q_p P_1 - P_1 Q_p P_2 K_p^{-1}(\mu)(P_2 Q_p P_1 + P_2 G_p(\mu) P_1)+ \\ + P_1 G_p(\mu) P_1 - P_1 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu)(P_2 Q_p P_1 + P_2 G_p(\mu) P_1)\}\xi_1 = 0, \\ K_p(\mu) := I_2 + P_2 Q_p P_2 + P_2 G_p(\mu) P_2.\end{aligned} \tag{31}$$

Воспользовавшись просто проверяемой формулой

$$(P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} - K_p^{-1}(\mu) = (P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} P_2 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu),$$

преобразуем задачу (31) к виду

$$\begin{aligned}\{I_1 + \mu P_1 A_p P_1 + \widehat{Q}_p + \widehat{G}_p(\mu)\}\xi_1 = 0, \quad \xi_1 \in (\mathrm{Ker}\, A_p)^{\perp}, \\ \widehat{Q}_p := P_1 Q_p P_1 - P_1 Q_p P_2 (P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} P_2 Q_p P_1,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\widehat{G}_p(\mu) := P_1 Q_p P_2 (P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} P_2 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu) - P_1 Q_p P_2 K_p^{-1}(\mu)\times \\ \times P_2 G_p(\mu) P_1 + P_1 G_p(\mu) P_1 - P_1 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu)(P_2 Q_p P_1 + P_2 G_p(\mu) P_1).\end{aligned}$$

Из проведенных рассуждений следует, что спектры задач (28) и (32) совпадают вне круга радиуса M. Применение к задаче (32) теоремы Маркуса-Мацаева заканчивает доказательство теоремы. □

Из доказанных двух теорем следует, что если для каждого номера p $(1 \le p \le m)$ будут выполнены условия либо теоремы 4, либо теоремы 5, то пучок $L(\lambda)$ будет иметь m ветвей действительных собственных значений с предельными точками $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Из последующих рассуждений будет установлено, что ветвь с номером p $(1 \le p < m)$ лежит в интервале $(\gamma_p; \gamma_{p+1})$, а для номера $p = m$ — в интервале $(\gamma_m; R)$, где R достаточно велико (см. теорему 2). Таким образом, все m выделенных ветвей собственных значений между собой не пересекаются.

Осталось проверить, может ли пучок $L(\lambda)$ иметь ветви с бесконечно удаленной предельной точкой? Если эти ветви и есть, то они могут лежать только в области

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\sum_{k=1}^{m} \|B_k\| < \mathrm{Re}\,\lambda < 0,\ \ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0\}, \tag{33}$$

в соответствии с теоремой 2.

Далее понадобится следующая абстрактная теорема (см. [6]), опирающаяся на результат работы [7].

Теорема 6. *Пусть $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty$, причем собственные значения оператора C имеют степенную асимптотику. Введем обозначения:*

$$l(\lambda) := I + \lambda^2 C + G(\lambda), \quad T(\lambda) := (I - \lambda C^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda C^{1/2})^{-1},$$
$$\Lambda_{R,\varepsilon}^{\pm} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > R, \quad |\arg\lambda \pm \pi/2| < \varepsilon\}, \quad -\pi < \arg\lambda \le \pi.$$

Пусть оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в секторах $\Lambda_{R,\varepsilon}^{+}$ и $\Lambda_{R,\varepsilon}^{-}$, а оператор-функция $T(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию: $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda_{R,\varepsilon}^{\pm})$. Тогда операторный пучок $l(\lambda)$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_n^{(+i)}(l(\lambda))\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda_n^{(-i)}(l(\lambda))\}_{n=1}^{\infty}$ и

$$\lambda_n^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i \lambda_n^{1/2}(C^{-1})(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty).$$

С использованием теоремы 6 докажем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие (a), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ и собственные значения оператора A^{-1} имеют степенную асимптотику. Тогда у пучка $L(\lambda)$ имеется две комплексно сопряженные ветви собственных значений, локализованные в области Λ (см. (33)), со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda)) = \pm i\lambda_n^{1/2}(A)(1+o(1)) \quad (n \to +\infty). \tag{34}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий теоремы 6. Очевидно, в проверке нуждается лишь условие, связанное с оператор-функцией $T(\lambda)$, которая в данном случае принимает следующий вид:

$$T(\lambda) := (I - \lambda A^{-1/2})^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda-\gamma_k}B_k\right)(I+\lambda A^{-1/2})^{-1}.$$

Крайние сомножители в выражении для $T(\lambda)$ равномерно ограниченны в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, а значит $T(\lambda) \to 0$ ($\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon}$). Из теоремы 6 выводится асимптотическая формула (34). Локализация найденных двух ветвей в области Λ следует из теоремы 2. Теорема доказана. □

Рассмотрим частный случай пучка $L(\lambda)$, когда выполнено условие (b) и $T_k = 0$ ($k = \overline{1,m}$). О более точной локализации его комплексно сопряженных ветвей говорит следующая

Теорема 8. *Пусть выполнено условие (b), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, $T_k = 0$ ($k = \overline{1,m}$). Тогда у пучка $L(\lambda)$ имеется две комплексно сопряженные ветви собственных значений, локализованные в области Λ (см. (33)) и с асимптотикой (34), причем справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re}\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda)) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(\beta_k-\gamma_k). \tag{35}$$

Доказательство. Поскольку $T_k = 0$ ($k = \overline{1,m}$), то из (14) следует, что все собственные значения операторного пучка $L(\lambda)$ можно найти из следующей последовательности скалярных уравнений:

$$1 + \lambda^2\lambda_n(A^{-1}) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\lambda-\gamma_k} = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{36}$$

где $\lambda_n(A^{-1})$ — это собственные значения оператора A^{-1}. Легко установить графическим методом, что при каждом n уравнение из (36) имеет ровно m действительных корней. Наборы из этих m корней в совокупности образуют m ветвей собственных значений операторного пучка $L(\lambda)$, которые (ветви) лежат справа от своих предельных точек β_k ($k = \overline{1,m}$) и имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda)) = \beta_k - \psi_k(\beta_k)\beta_k^2\lambda_n(A^{-1})(1+o(1)) \quad (n\to\infty), \quad k = \overline{1,m}; \tag{37}$$

это следует из теоремы 4. Каждое уравнение из (36) имеет порядок $m+2$, следовательно, кроме m действительных корней каждое уравнение имеет по два комплексно сопряженных корня, которые и составляют две оставшиеся ветви. Формула (34) устанавливается непосредственно из (36), а принадлежность ветвей к области Λ по-прежнему следует из теоремы 2.

Преобразуем уравнения (36) к следующему виду:

$$(\lambda^2+\lambda_n^{-1}(A^{-1}))\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\gamma_k)-\lambda_n^{-1}(A^{-1})\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\prod_{j=1,\,j\neq k}^{m}(\lambda-\gamma_j)=0,\ \ n=1,2,\ldots.$$

Раскроем здесь скобки и соберем слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$\lambda^{m+2}-\lambda^{m+1}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k+\ldots=0,\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{38}$$

С другой стороны, уравнения (36) можно представить в следующем виде:

$$\left(\lambda-\lambda_n^{(+i)}(L(\lambda))\right)\left(\lambda-\lambda_n^{(-i)}(L(\lambda))\right)\prod_{k=1}^{m}\left(\lambda-\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))\right)=0,\quad n=1,2,\ldots, \tag{39}$$

где $\lambda_n^{(+i)}(L(\lambda))$ и $\lambda_n^{(-i)}(L(\lambda))$ — это комплексно сопряженные корни уравнений (36), а $\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))$ определены в (37). Собрав в (39) слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$\lambda^{m+2}-\lambda^{m+1}\left(2\,\mathrm{Re}\,\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda))+\sum_{k=1}^{m}\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))\right)+\ldots=0,\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{40}$$

Из (38) и (40) следует, что

$$\mathrm{Re}\,\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda))=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))-\gamma_k\right).$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $n\to+\infty$ и учитывая (37), получим (35). Теорема доказана. □

Следует отметить, что утверждение теоремы останется верным, если операторы A^{-1} и T_k $(k=\overline{1,m})$ имеют одинаковые собственные элементы. Доказательство при этом останется такое же, лишь с небольшими дополнениями в коэффициентах. Возможно, такая ситуация сохранится и в общем случае, когда операторы A^{-1} и T_k $(k=\overline{1,m})$ не коммутируют, однако это требует дополнительного исследования.

3. О свойствах базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединенных элементов

В этом параграфе будет доказано утверждение о базисности Рисса системы собственных элементов операторного пучка $L(\lambda)$, отвечающих каждой из m действительных ветвей собственных значений (при условии (b), см. (22)). А также получено свойство двукратной полноты системы собственных и присоединенных элементов, отвечающих двум комплексно сопряженным ветвям собственных значений (при условии (a)).

Введем обозначения для следующих интервалов: $\mathcal{J}_{p,\varepsilon} := (\gamma_p + \varepsilon; \gamma_{p+1} - \varepsilon)$ для номеров p таких, что $1 \le p < m$, и $\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R} := (\gamma_m + \varepsilon; R)$ при $p = m$.

Справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть выполнено условие (b) (см. (22)). Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ (и достаточно большого $R > \gamma_m + \varepsilon$) спектр операторного пучка $L(\lambda)$ в интервале $\mathcal{J}_{p,\varepsilon}$ ($\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R}$) состоит из точки β_p (β_m) и не более чем счетного множества собственных значений конечной кратности. Если это множество бесконечно, то оно имеет предельную точку β_p (β_m). Собственные элементы $L(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из $\mathcal{J}_{p,\varepsilon}$ ($\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R}$), образуют базис Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Доказательство опирается на теорему 30.12 из [8]. Согласно этой теореме достаточно проверить, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнены условия

$$L(\gamma_p + \varepsilon) \ll 0, \;\; L(\gamma_{p+1} - \varepsilon) \gg 0, \;\; L'(\lambda) \gg 0 \;\; (\lambda \in \mathcal{J}_{p,\varepsilon}), \;\; L(\beta_p) \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{41}$$

для номеров p с $1 \le p < m$, и условия

$$L(\gamma_m + \varepsilon) \ll 0, \;\; L(R) \gg 0, \;\; L'(\lambda) \gg 0 \;\; (\lambda \in \mathcal{J}_{m,\varepsilon,R}), \;\; L(\beta_m) \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{42}$$

для $p = m$, где $R > \gamma_m + \varepsilon$ — достаточно велико.

Из соотношения (14), определяющего операторный пучок $L(\lambda)$, и условия (22) на числа α_k ($k = \overline{1,m}$) найдем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $R > \gamma_m + \varepsilon$

$$L'(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(\lambda - \gamma_k)^2} + \left(2\lambda A^{-1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{(\lambda - \gamma_k)^2} \right) \gg 0, \;\; \lambda \in \mathcal{J}_{p,\varepsilon}(\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R}), \tag{43}$$

при $1 \le p < m$.

Далее, из (14), условия (22) и того факта, что точки β_p ($p = \overline{1,m}$) есть нули функции $\varphi(\lambda)$, определенной в (23), имеем:

$$L(\beta_p) = \beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad p = \overline{1,m}. \tag{44}$$

Проведем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} L(\gamma_p + \varepsilon) &= I + (\gamma_p + \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\gamma_p - \gamma_k + \varepsilon} (\alpha_k I + T_k) = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}(\alpha_p I + T_p) + I + (\gamma_p + \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\, k \ne p}^{m} \frac{1}{\gamma_p - \gamma_k + \varepsilon} (\alpha_k I + T_k). \end{aligned}$$

Это выражение можно записать более коротко:

$$\begin{aligned} & L(\gamma_p + \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}(\alpha_p I + T_p) + M_1(\varepsilon), \\ & M_1(\varepsilon) := I + (\gamma_p + \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\, k \ne p}^{m} \frac{1}{\gamma_p - \gamma_k + \varepsilon} (\alpha_k I + T_k). \end{aligned} \tag{45}$$

Оператор-функция $M_1(\varepsilon)$ равномерно ограничена при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$), а оператор $-(\alpha_p I + T_p)$ отрицательно определен. Отсюда следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $L(\gamma_p + \varepsilon)$ будет отрицательно определенным: $L(\gamma_p + \varepsilon) \ll 0$ $(p = \overline{1, m})$.

Далее, аналогично формуле (45), приходим к соотношениям

$$
\begin{aligned}
&L(\gamma_{p+1} - \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha_p I + T_p) + M_2(\varepsilon), \\
&M_2(\varepsilon) := I + (\gamma_{p+1} - \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\, k\neq p+1}^{m} \frac{1}{\gamma_{p+1} - \gamma_k - \varepsilon}(\alpha_k I + T_k).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Оператор-функция $M_2(\varepsilon)$, как можно видеть, равномерно ограничена при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon < \min_{1\leq r<s\leq m}(\gamma_s - \gamma_r))$, а оператор $(\alpha_p I + T_p)$ положительно определен. Отсюда следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $L(\gamma_{p+1} - \varepsilon)$ будет положительно определенным: $L(\gamma_{p+1} - \varepsilon) \gg 0$ $(p = \overline{1, m-1})$.

Наконец из (14) следует, что $L(R) \gg 0$, если только $R > \gamma_m$ достаточно велико.

Из (43), (44) и проведенных выше рассуждений следуют условия (41), (42). Применение теоремы 30.12 из [8] завершает доказательство настоящей теоремы. □

Из доказанного утверждения следует, в частности, что действительные ветви операторного пучка $L(\lambda)$ между собой не пересекаются.

Исследованию свойства кратной полноты части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $L(\lambda)$ предпошлем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть в круге радиуса r определен пучок, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:*

$$
\mathcal{L}(\lambda) := \lambda(I + C) - H - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k,
\tag{47}
$$

$$
\exists t \in (0, r): \quad \frac{\|H\|}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \|B_k\| < 1,
\tag{48}
$$

где $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty$, $C^* = -C \in \mathfrak{S}_\infty$, H — нормальный оператор, спектр которого лежит на конечном числе лучей, $\operatorname{Ker} H = \{0\}$, $H \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p \in (0, \infty)$. Тогда система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из круга радиуса t, полна в пространстве $\mathcal{H}$.

Доказательство. Предварительно покажем, что $\|(I + C)^{-1}\| \leq 1$. В самом деле, используя то, что $C^* = -C$, $-C^2 \geq 0$, вычислим квадрат нормы:

$$
\|(I + C)^{-1}\|^2 = \sup_{y\in\mathcal{H},\, y\neq 0} \frac{\|(I + C)^{-1}y\|^2}{\|y\|^2} = \sup_{y\in\mathcal{H},\, y\neq 0} \frac{((I - C^2)^{-1}y, y)_{\mathcal{H}}}{\|y\|^2} \leq 1,
$$

так как $I - C^2 \gg I$ и, следовательно, $(I - C^2)^{-1} \ll I$.

Из доказанной оценки следует, что условие (48) является достаточным для факторизации пучка $(I + C)^{-1}\mathcal{L}(\lambda) =: \mathcal{L}_C(\lambda)$. По теореме 23.4 из [8], с. 130, для пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$ справедливо представление $\mathcal{L}_C(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$, где оператор-функция $A_+(\lambda)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| < t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\lambda| < t$. В этой области задача для операторного пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$

сводится к задаче на собственные значения для оператора Z. Распишем подробно представление для пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$:

$$\lambda I - (I + C)^{-1}H - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (I + C)^{-1} B_k = \left(A_+(0) + \frac{A'_+(0)\lambda}{1!} + \dots\right) \cdot (\lambda I - Z). \quad (49)$$

Из равенства (49), приравнивая коэффициенты при нулевой степени λ, получим $-(I+C)^{-1}H = -A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z = A_+^{-1}(0)(I+C)^{-1}H \in \mathfrak{S}_p$. Приравнивая в (49) коэффициенты при первой степени λ, получим $A_+(0) = I-(I+C)^{-1}B_1 + A'_+(0)Z = I + S_1$, где $S_1 \in \mathfrak{S}_\infty$. Отсюда $A_+^{-1}(0) = (I + S_1)^{-1} = I + S_2$, где $S_2 \in \mathfrak{S}_\infty$. Из последнего соотношения следует, что $Z = (I + S_2)(I + C)^{-1}H = (I + S_3)H$, где $S_3 \in \mathfrak{S}_\infty$. Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение оператора H. Учитывая свойства оператора H и обратимость оператора $I + S_3$, по теореме 4.2 из [8], с. 20, получаем, что система корневых элементов оператора Z, а следовательно и пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$ в указанной области, полна в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Остается заметить, что собственные и присоединенные элементы пучков $\mathcal{L}_C(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающие одному и тому же собственному значению, совпадают. Теорема доказана. $\square$

Осуществим в задаче (14) замену $\lambda A^{-1/2}\xi = \eta$, в результате придем к системе двух уравнений, которые запишем в виде одного векторно-матричного уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Задачу (50) можно записать более коротко:

$$\mathcal{L}(\lambda)y := \left\{ \mathcal{I} + \lambda\mathcal{C} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} \mathcal{B}_k \right\} y = 0, \quad y := (\xi; \eta)^t \in \mathcal{H}^2. \quad (51)$$

Здесь оператор $\mathcal{C}$, очевидно, обладает свойством $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$ и его спектр лежит на прямой $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Дадим следующее

Определение 3. (см. [8], стр. 62) Пусть $y_\xi(\lambda)$ — векторный полином с коэффициентами из $\mathcal{H}$, причем $y_\xi(\lambda_0) \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_\xi(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля полинома $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $y_\xi(\lambda)$ называется производящим полиномом для цепочки из собственного и присоединенных к нему векторов $\{(j!)^{-1}y_\xi^{(j)}(\lambda_0)\}_{j=0}^{n-1}$ оператор-функции $L(\lambda)$. Число n будем называть рангом производящего полинома $y_\xi(\lambda)$.

Для выяснения связи собственных и присоединенных элементов операторных пучков $L(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ установим следующие две леммы.

Лемма 2. *Векторный полином $y(\lambda) := (y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t$ (с коэффициентами из $\mathcal{H}^2$) является производящим полиномом ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0 тогда и только тогда, когда $y_\xi(\lambda)$ является производящим полиномом ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и*

$$y_\eta(\lambda) = \lambda A^{-1/2} y_\xi(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \quad (52)$$

где $p(\lambda)$ — вектор-функция ($p(\lambda_0) \neq 0$).

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям леммы 12.3 из [8]. Начнем с достаточности. Пусть $y_\xi(\lambda)$ является производящим полиномом ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и выполнено соотношение (52). Поскольку $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, то из (14) получим:

$$\left\{ I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k \right\} y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \tag{53}$$

где $q(\lambda)$ — некоторая вектор-функция ($q(\lambda_0) \neq 0$). Подставим (52) в (53) и запишем полученное соотношение вместе с (52) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}^2$, после простых преобразований получим:

$$\mathcal{L}(\lambda)(y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t = (\lambda - \lambda_0)^n (q(\lambda) + \lambda A^{-1/2} p(\lambda); p(\lambda))^t.$$

Отсюда следует, что $y(\lambda) := (y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t$ есть производящий полином ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь векторный полином $y(\lambda) := (y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t$ является производящим полиномом ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0. Из (50) имеем

$$\mathcal{L}(\lambda) y(\lambda) = \begin{pmatrix} y_\xi(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\eta(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k)^{-1} B_k y_\xi(\lambda) \\ y_\eta(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\xi(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{54}$$

По условию $\mathcal{L}(\lambda)y(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, тогда из (54) получим

$$y_\xi(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\eta(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \tag{55}$$

$$y_\eta(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \tag{56}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые вектор-функции ($r(\lambda_0) \neq 0$, $p(\lambda_0) \neq 0$). Из (56) следует (52). Подставив (56) в (55), получим, что

$$L(\lambda) y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n (r(\lambda) - \lambda A^{-1/2} p(\lambda)).$$

Отсюда следует, что $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. Из этого факта и формулы (56), рассуждая как при доказательстве достаточности, получаем, что $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка n. Значит, $y_\xi(\lambda)$ есть производящий полином ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. □

Как следствие из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Набор векторов $y_k := (\xi_k; \eta_k)^t$ ($k = \overline{0, n-1}$) является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающей собственному значению λ_0,тогда и только тогда, когда ξ_k ($k = \overline{0, n-1}$) — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и*

$$\eta_0 = \lambda_0 A^{-1/2} \xi_0, \quad \eta_k = \lambda_0 A^{-1/2} \xi_k + A^{-1/2} \xi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{57}$$

Опираясь на теорему 10 и лемму 3, докажем следующую теорему о двукратной полноте части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $L(\lambda)$.

Теорема 11. *Пусть выполнено условие (a), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p \in (0, \infty)$, а $\xi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $y_k^{(l)} := (\xi_k^{(l)}; \eta_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $L(\lambda)$, лежащие в области Λ (см. (33)), а $\xi_k^{(l)}$ и $\eta_k^{(l)}$ связаны соотношениями (57) для каждого l, образует полную в $\mathcal{H}^2$ систему, если выполнено условие:*

$$a(\gamma_m - \gamma_1) + 2\sqrt{ab} < 1, \quad a := \|A^{-1/2}\|, \quad b := m \max_{k=\overline{1,m}} \|B_k\|.$$

Доказательство. В силу леммы 3 нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям из области Λ, полна в $\mathcal{H}^2$. Осуществим в задаче (51) замену спектрального параметра: $\lambda = R^2\mu^{-1} + R$, где $R > \gamma_m$ пока произвольно, а μ — новый спектральный параметр (эта замена переводит спектр, лежащий в области Λ в $\lambda-$плоскости в круг радиуса R с центром в начале координат в $\mu-$плоскости). Умножив правую и левую части полученного выражения на μ, придем к следующей спектральной задаче:

$$\mu\mathcal{L}(\frac{R^2}{\mu} + R)y \equiv \left\{\mu(\mathcal{I} + R\mathcal{C}) + R^2\mathcal{C} - \mu^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R^2 + \mu(R - \gamma_k)} \mathcal{B}_k\right\} y = 0. \tag{58}$$

Применив к правой и левой частям (58) оператор $(\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1}$ и воспользовавшись разложениями

$$\frac{1}{R^2 + \mu(R - \gamma_k)} = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^n \left(\frac{R - \gamma_k}{R^2}\right)^n, \quad |\mu| < \frac{R^2}{R - \gamma_k}, \quad k = \overline{1, m},$$

придем к спектральной задаче

$$\left\{\mu\mathcal{I} + R^2(\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1}\mathcal{C} - (\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1} \frac{\mu^2}{R^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mu^n \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R - \gamma_k}{R^2}\right)^n \mathcal{B}_k\right)\right\} y = 0 \tag{59}$$

в области $|\mu| < R^2(R - \gamma_1)^{-1}$.

Наша цель — установить, что пучок задачи (59) допускает факторизацию, т.е. что для него выполнено условие (48). Это позволит воспользоваться выводами теоремы 10.

Используя оценку $\|(\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1}\| \leq 1$ запишем условие (48), достаточное для факторизации пучка задачи (59):

$$\exists t \in (0, \frac{R^2}{R - \gamma_1}) : \quad \frac{R^2}{t}\|\mathcal{C}\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{R^2} \|\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R - \gamma_k}{R^2}\right)^n \mathcal{B}_k\| < 1. \tag{60}$$

Учитывая, что $\|\mathcal{C}\| \leq \|A^{-1/2}\|$, $\|\mathcal{B}_k\| = \|B_k\|$ $(k = \overline{1, m})$, условие (60) будет выполнено, если

$$\exists t \in (0, \frac{R^2}{R - \gamma_1}) : \quad \frac{R^2}{t}\|A^{-1/2}\| + \frac{m}{R^2} \max_{k=\overline{1,m}} \|B_k\| \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} \left(\frac{R - \gamma_1}{R^2}\right)^n < 1. \tag{61}$$

Просуммировав в (61) геометрическую прогрессию и проделав простые алгебраические преобразования найдем, что условие (61) эквивалентно следующему:

$$\exists t \in (0, \frac{R^2}{R-\gamma_1}): \quad t^2(b+(R-\gamma_1)) - tR^2(1+a(R-\gamma_1)) + aR^4 < 0, \tag{62}$$
$$a := \|A^{-1/2}\|, \quad b := m \max_{k=\overline{1,m}} \|B_k\|.$$

Дискриминант в квадратичном выражении из (62) будет положительным, если $R-\gamma_1 \notin [a^{-1}(1-2\sqrt{ab}), a^{-1}(1+2\sqrt{ab})]$. В этом случае меньший корень квадратичного выражения будет меньше, чем $R^2(R-\gamma_1)^{-1}$, если $a(R-\gamma_1) < 1$. Отсюда получаем, вспомнив условие $R > \gamma_m$, что R должно удовлетворять неравенствам $\gamma_m < R < \gamma_1 + a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$. Другими словами, число R можно выбрать так, чтобы было верно (62), если $\gamma_m < \gamma_1 + a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$, а это неравенство справедливо в силу условий теоремы.

Таким образом, пучок задачи (59) допускает факторизацию. Применение теоремы 10 к задаче (59) завершает доказательство теоремы. □

Література

[1] Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations.* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз., Симферополь, 1994, с. 41-42.

[2] Копачевский Н.Д. *Задача Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.* // Ученые записки ТНУ. - Симферополь, 2001. - Том 16(55), №1 - С.139-152.

[3] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости.* // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 6., 1998, с. 5-33.

[4] Маркус А.С., Мацаев В.И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* – Труды ММО. - 1982. - Т.45. - С. 133-181.

[5] Маркус А.С., Мацаев В.И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша.* – Матем. сборник. - 1984. - Т.123, вып. 3. - С. 391-406.

[6] Оразов М.Б. *Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи механики.* Дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ашхабат, 1982. - 290 с.

[7] Авакян В.А. *Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией.* // Функциональный анализ и его приложения. - 1978. - Т.12, №2. - С. 66-67.

[8] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* – Кишинев: Штиинца. - 1986. - 260 с.

УДК 517.984.4, 517.968.7

Закора, Д.А., Копачевский, Н.Д. **О спектральной задаче, связанной с интегродифференциальным уравнением второго порядка** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", № 2, 2 – 18.

Рассмотрена задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \;\; u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1.$$

Сформулирована ассоциированная спектральная задача. Для спектральной задачи установлена локализация спектра, получены асимптотические формулы для ветвей собственных значений, доказаны утверждения о базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединенных элементов.

Ключевые слова: спектральная задача.

Закора, Д.О., Копачевський, М.Д. **Про спектральну задачу, пов'язану з інтегродиференціальним рівнянням другого порядку** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", № 2, 2 – 18.

Розглянуто задачу Коші

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \;\; u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1.$$

Сформульована асоційована спектральна задача. Для спектральної задачі встановлена локалізація спектру, одержані асимптотичні формули для гілок власних значень, доведені твердження про базисність Риса і кратну повноту частини власних та приєднаних элементів.

Ключевые слова: спектральна задача.

Kopachevsky, N.D., Zakora, D.A. **On spectral problem connected with the second order integro-differential equation** //Uchenye zapiski TNU, 2004, series "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics"issue 2, 2 – 18.

The Cauchy problem

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \;\; u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1,$$

is considered. The associated spectral problem is formulated. Localization of a spectrum, asymptotic formulas for branches of eigenvalues are received.

Statements on Riesz basis property and multiple completeness of a part of eigenvalues and adjoint elements are proved.
Ключевые слова: spectral problem.