О МОДИФИЦИРОВАННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА И ЕЕ АБСТРАКТНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Войтицкий В.И.
Копачевский Н.Д.
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского

1. Задача Стефана с условиями Гиббса-Томсона ранее изучалась в полупространстве профессором Волевичем Л.Р. Результаты его исследований были представлены на Крымских осенних школах в 2004 и 2005 годах.
2. В [1] представлены результаты исследований спектральной задачи Стефана с условиями Гиббса-Томсона в ограниченной области с дополнительными краевыми условиями. Доказано, что спектр задачи дискретный, вещественный, с предельными точками на $\pm\infty$, собственные элементы образуют ортогональный базис в некотором гильбертовом пространстве. Особенностью спектральной задачи Стефана с условиями Гиббса-Томсона является присутствие спектрального параметра в уравнении и в краевом условии. Спектральные задачи подобного вида изучались ранее в работах [2 - 4].
3. Абстрактная спектральная задача Стефана является обобщением спектральной задачи Стефана с условиями Гиббса-Томсона для случая тройки абстрактных гильбертовых пространств (E, F, G) и абстрактного ограниченного оператора следа $\gamma : F \to G_+$. Считая, что пространства F и E, G_+ и G ограниченно вложены друг в друга, можно построить абстрактные дифференциальные выражения L и ∂, для которых справедлива абстрактная формула Грина (см. [5, 6])
$$\langle v, Lu \rangle_E = (v,u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \qquad \forall v,u \in F. \tag{1}$$
Абстрактная спектральная задача Стефана формулируется в виде
$$Lu = \lambda u(E), \qquad \partial u = \pm\lambda V\gamma u(G) \tag{2}$$
где V является ограниченным оператором в G.
4. В [7] задача (2) приводится к спектральной задаче для компактного самосопряжённого оператора в пространстве $H = E \oplus G$. При этом, для доказательства полноты и ортогональности системы собственных элементов $\hat{u} = (u; \gamma u) \in H$ в [7] использовано условие $\overline{Ker\gamma} = E$. Это условие не является необходимым при исследовании задачи (2) методом рассмотрения вспомогательных краевых задач, предлагаемом в данном сообщении. При таком подходе абстрактная спектральная задача Стефана сводится к задаче
$$\eta = \lambda(A^{-1} \pm B)\eta\,. \tag{3}$$
В этой задаче операторы A^{-1} и B являются компактными самосопряжёнными операторами, действующими в пространстве E, при условии компактности вложений F в E и G_+ в G.
5. Из теоремы Гильберта-Шмидта следует вещественность и дискретность спектра. Собственные элементы $u_k = A^{-1/2}\eta_k$ образуют ортонормированный базис в пространстве F. При этом, в случае знака «плюс» все собственные значения λ положительны, с предельной точкой $\lambda = \pm\infty$, а в случае знака «минус» имеются две ветви положительных и отрицательных собственных значений λ с предельными точками $\pm\infty$ (бесконечность также может являться собственным значением этой задачи). Эти свойства характерны и для спектральной задачи Стефана с условиями Гиббса-Томсона (см. [1]) в случае конкретных пространств (E, F, G), операторов γ и V, а также знака «минус» в уравнении (2).

6. Рассмотрены также эволюционные задачи, порождающие задачу (1). В случае знака «+» в уравнении (1) эволюционная задача является корректно поставленной задачей Коши. В противном случае, корректно разрешимой будет так называемая начально-финальная задача, когда на одной части пространства ставится условие при $t = 0$, а на другой – условие при $t = T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтицкий В.И. *Спектральная задача Стефана с условиями Гиббса-Томсона.* //Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и информатике (тезисы докладов), 27-28 апреля 2006, Симферополь, 16 – 19.
2. Odnoff J. *Operators generated by differential problem with eigen value parameter in equation and boundary condition,* Lund, (1959).
3. Барковский В.В. *Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях.* //УМЖ, Т.19, № 1, (1967).
4. Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. *Методы определения присоеденённых масс жидкости в подвижных областях.* Киев, «Наукова думка»*, (1969), 216 – 224.*
5. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи.* //Украинский матем. вестник, Т.1, № 1, (2004), 69 – 97.
6. Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса*. //Таврический вестник математики и информатики (ТВИМ), № 2, (2004), 52 – 80.
7. Войтицкий В.И. *Абстрактная спектральная задача Стефана.* //Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, Т.19(58), №1, (2006), 8 с. (в печати).