Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной диссипацией энергии.

О. А. Андронова, Н. Д. Копачевский.

УДК 517.9:532

Аннотация

В работе методами функционального анализа изучается линейная начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии, а также ее абстрактный аналог с использованием абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств. Рассматриваются также спектральные проблемы, порожденные этими задачами.

Содержание

1 Введение.

1.1 Об истории вопроса.

Авторы данной работы познакомились с проблемой исследования эволюции динамических систем с поверхностной диссипацией энергии на лекции профессора Чуешова И.Д. на 15 Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ — 2004, Ласпи-Батилиман), которая проводится ежегодно в сентябре. Эта тематика активно изучается многими авторами (см., например, работы [1] — [5]), в том числе и в линейном случае.

Так, в [4] исследован вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе. Работа [5] посвящена изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе.

Работа Чуешова И.Д. с соавторами и его монография (см. [1] — [3]) посвящены изучению бесконечномерных диссипативных динамических систем, в частности, систем с поверхностной диссипацией энергии. Так, в [1] исследуется проблема существования конечномерного аттрактора для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе области. В [3] изучается глобальные аттракторы для уравнения Кармана с нелинейной поверхностной диссипацией.

Отметим еще, что исследованием аттракторов (притягивающих множеств) динамических систем посвящены многие работы и монографии. Здесь упоминаем лишь монографию Бабина А.В. и Вишика М.И.(1992), работы Ладыженской О.А.(1985), Темама (1988).

1.2 О содержании работы.

В данной работе изучается линейная начально-краевая задача математической физики с поверхностной дисспацией энергии и порожденная ею спектральная проблема. Рассматриваются абстрактная начально-краевая и спектральная задачи, обобщающие задачи математической физики для гиперболического уравнения на основе использования абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа.

В параграфе 1 дается краткая история вопроса, излагается содержание работы и приводится абстрактная формула Грина.

Во втором параграфе дается постановка задачи математической физики и выводится закон баланса полной энергии динамической системы. Затем вводятся основные функциональные пространства и вспомогательные краевые задачи. Далее осуществляется переход от исходной начально-краевой задачи к задаче Коши для полного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, описываются свойства операторных коэффициентов этого уравнения.

Схема, проведенная в параграфе 2, реализуется затем в параграфе 3 для абстрактной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии. Предполагается, что операторы (абстрактные дифференциальные выражения), фигурирующие в постановке задачи, — это операторы, участвующие в абстрактной формуле Грина. После рассмотрения абстрактных вспомогательных краевых задач и их операторов осуществляется, как и в параграфе 2, переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка, а от нее — к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором сжимающей полугруппы операторов. Это позволяет, с использованием теории полугрупп, доказать теорему о существовании сильного решения исходной абстрактной начально-краевой задачи, а также первоначальной задачи математической физики.

В параграфе 4 изучаются спектральные задачи, порожденные начально-краевыми задачами с поверхностной диссипацией энергии. Сначала дается формулировка спектральной задачи математической физики, а также соответствующей абстрактной проблемы. Далее рассматриваются простейшие свойства спектра, а затем на примерах — одномерном, двумерном и в цилиндрических областях — обнаружено, что спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен. Выясняется, как этот спектр мигрирует в комплексной плоскости при изменении параметра диссипации от нуля до бесконечности. Приводятся примеры численных расчетов спектра на основе метода итераций. Далее в общей постановке исследуется спектральная задача. На основе одного общего результата, полученного Т. Я. Азизовым, доказывается, что в случае общего положения спектр задачи является дискретным с предельной точкой на бесконечности.

Наконец, в параграфе 5 приводятся задачи, которые являются частными случаями абстрактной начально-краевой и спектральной задач. Это, в частности, задачи с равномерно эллиптическим формально самосопряженным дифференциальным выражением, а также соответствующие системы уравнений, уравнения линейной теории упругости (уравнения Ламе). Кроме того, приводятся примеры задач сопряжения с поверхностной диссипацией энергии для случая, когда имеются две или более контактирующих сред, а диссипация происходит на границах контакта этих сред.

1.3 Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств.

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^m$ с достаточно гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Для произвольных функций $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ имеет место формула Грина для оператора Лапласа $\triangle := \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$:

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \triangle u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \tag{1.1}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ —производная по внешней нормали к Γ.

Если ввести в рассмотрение гильбертовы пространства $L_2(\Omega), \mathcal{H}^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ с соответствующими скалярными произведениями, то формулу (1.1) можно переписать в виде

$$(\eta, u - \triangle u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} - \left(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma\eta := \eta|_{\Gamma}. \tag{1.2}$$

Эта формула допускает обобщения, во-первых, на случай менее гладких функций $u(x)$, во-вторых, на случай липшицевой границы $\partial\Omega$, а в-третьих — на случай произвольной тройки гильбертовых пространств E, F и G и абстрактного оператора следа γ. Впервые такая абстрактная формула появилась в монографии([6] , с.46-47), и ее идея получения принадлежит С. Г. Крейну. Затем появились работы [7]-[9] где соответствующее утверждение было получено в наиболее общей формулировке и на основе этой формулы были рассмотрены абстрактные начально-краевые и спектральные задачи (см. [7], а также [13]).

Приведем формулировку соответствующего результата.

Теорема 1.1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств*

$$\{E, (\cdot,\cdot)_E\}, \{F, (\cdot,\cdot)_F\}, \{G, (\cdot,\cdot)_G\}$$

выполнены условия:

1. Пространство F плотно вложено в E, $F \subset\!\to E$, т.е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.3}$$

2.На пространстве F определен оператор γ (абстрактный оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G, $G_+ \subset\!\to G$, и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.4}$$

Тогда существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to G_- := (G_+)^*$, определяемые по E, F и G (с введенными скалярными произведениями), а также по оператору γ единственным образом, такие, что имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \qquad \forall \eta, u \in F. \tag{1.5}$$

Здесь символами $\langle \eta, \psi \rangle_E$ и $\langle \xi, \varphi \rangle_G$ обозначены линейные функционалы, построенные на элементах $\eta \in F$, $\psi \in F^*$, $\xi \in G_+$ и $\varphi \in G_-$ соответственно. Они являются соответствующими расширениями (по непрерывности) функционалов $(\eta, \psi)_E$ и $(\xi, \varphi)_G$ при переходе от $\psi \in E$ к $\psi \in F^* \supset E$, а также от $\varphi \in G$ к $\varphi \in (G_+)^*$, соответственно.

Если $E = L_2(\Omega)$, $F = \mathcal{H}^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, то из теоремы 1.1 получаем следующий результат.

Теорема 1.2. *Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ имеет место первая формула Грина для оператора Лапласа :*

$$\langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \qquad \forall \eta, u \in \mathcal{H}^1(\Omega), \tag{1.6}$$

причем

$$\triangle u \in \big(\mathcal{H}^1(\Omega)\big)^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in \big(H^{1/2}(\Gamma)\big)^*. \tag{1.7}$$

2 Начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии.

В этой части работы дается постановка линейной начально-краевой задачи математической физики с поверхностной диссипацией энергии, вводятся необходимые функциональные пространства, рассматриваются вспомогательные краевые задачи и на их основе осуществляется переход от исходной задачи к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.

2.1 Постановка задачи, вывод закона баланса полной энергии.

В произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(t, x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

при краевом условии

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x \in \Gamma,\ \alpha > 0, \tag{2.2}$$

а также начальных условиях:

$$u(0,x) = u^0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Здесь функция $u(t,x)$ является искомой, а функции $f(t,x), u^0(x), u^1(x)$ — заданными, а $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали.

Отметим, что граничное условие (2.2) содержит производную по t и потому это условие называют динамическим. Соответствующее слагаемое $\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\Gamma$ при $\alpha > 0$ порождает, поверхностную диссипацию полной энергии динамической системы. Поэтому при $\alpha > 0$ задача (2.1)-(2.3) перестает быть классической задачей гиперболического типа и преобразуется, как выясняется в данной работе, к задаче параболического типа.

Прежде, чем исследовать задачу (2.1)-(2.3), получим закон баланса полной энергии. Будем считать, что эта задача имеет классическое решение, а область Ω достаточно гладкая. Тогда, умножая обе части (2.1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$, интегрируя по Ω и используя краевое условие (2.2), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 d\Omega + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega + \int_\Gamma |u|^2\, d\Gamma\right]\right\} =$$

$$= -\alpha \int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 d\Gamma + \int_\Omega f \frac{\partial u}{\partial t}\, d\Omega. \tag{2.4}$$

Здесь слева в фигурных скобках стоит полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия динамической системы, и соотношение (2.4) показывает, что при свободных движениях системы, когда $f(t,x) \equiv 0$, происходит уменьшение полной энергии за счет первого слагаемого справа в (2.4), т.е. за счет поверхностной диссипации ($\alpha > 0$). Уже отсюда следует, что данная система не является консервативной, и при $\alpha > 0$ исследуемая задача не является гиперболической.

2.2 Основные функциональные пространства и вспомогательные краевые задачи.

Введем функциональные пространства, необходимые для исследования задачи (2.1)-(2.3).

1. Пространство $L_2(\Omega)$ со стандартным скалярным произведением

$$(u,v)_\Omega := \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,d\Omega. \tag{2.5}$$

2. Пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ со скалярным произведением (см. (2.4))

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,d\Omega + \int\limits_\Gamma u\cdot\overline{v}\,d\Gamma \tag{2.6}$$

и соответствующей нормой.

Из теорем вложения и теорем о следах для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ следует, что норма в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, т.е. норме

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\,d\Omega. \tag{2.7}$$

3. Пространство $L_2(\Gamma)$ со стандартной нормой и скалярным произведением

$$(u,v)_\Gamma := \int\limits_\Gamma u(x)\overline{v(x)}\,d\Gamma. \tag{2.8}$$

Отметим, что пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Далее, оператор следа $\gamma : \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ ограниченно действует (для области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega = \Gamma$) из $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ в $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) =: G_+$, а G_+ компактно вложено в $G := L_2(\Gamma)$.

Теорема 2.1. *Для тройки гильбертовых пространств* $L_2(\Omega), \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ *и* $L_2(\Gamma)$ *с введенными скалярными произведениями* (2.5), (2.6), (2.8) *и для оператора следа* $\gamma :\ \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, *определяемого по закону*

$$\gamma u := u|_\Gamma, \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \tag{2.9}$$

имеет место формула Грина

$$\langle \eta, -\triangle u\rangle_\Omega = (\eta, u)_{1,\Omega} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u\right\rangle_\Gamma, \qquad \forall \eta, u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \tag{2.10}$$

где

$$\triangle u \in \left(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)\right)^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in \left(\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\right)^*,\ \gamma u \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma),$$

а косыми скобками обозначены соответствующие функционалы.

Эта теорема есть прямое следствие введенных пространств, оператора следа (2.9), общей теоремы 1.1, а также формулы (1.1).

При исследовании задачи (2.1)-(2.3), а также ее абстрактного обобщения, будем использовать операторные методы, развитые для линейных задач гидродинамики в монографии [6] (см. также [14], [15]). В частности, будем использовать прием введения вспомогательных краевых задач и операторов, отвечающих этим задачам.

Первая вспомогательная задача (задача Ньютона для уравнения Пуассона): по функции $f(x)$, заданной в Ω, найти решение задачи

$$-\triangle v = f \quad (\text{в}\, \Omega), \qquad \frac{\partial v}{\partial n} + v = 0 \quad (\text{на}\, \Gamma = \partial\Omega). \tag{2.11}$$

Определение 2.1. *Назовем слабым решением задачи* (2.11) *такой элемент* $v \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$*, для которого выполнено тождество*

$$(\eta, v)_{1,\Omega} = \langle \eta, f \rangle_{\Omega}, \quad \forall \eta \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega). \tag{2.12}$$

Из формулы Грина (1.5) следует, что любое классическое решение задачи (2.11) является слабым.

Лемма 2.1. *При любом* $f \in \left(\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)\right)^*$ *существует единственное слабое решение* $v = A^{-1}f$ *задачи* (2.11)*. При этом оператор* A *задан на* $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$*, а его область значений* $\mathcal{R}(A) = \left(\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)\right)^*$*. Сужение оператора* A*, такое, что* $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$*, является неограниченным положительно определенным оператором, заданным на области определения* $\mathcal{D}(A) \subset \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$*, плотной в* $L_2(\Omega)$*. При этом* $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$ *и*

$$\langle \eta, Av \rangle_{\Omega} = (\eta, v)_{1,\Omega} = \left(A^{1/2}\eta, A^{1/2}v\right)_{\Omega}, \quad \forall \eta, v \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega). \tag{2.13}$$

Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *имеет дискретный положительный спектр* $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$ *и асимптотическим поведением*

$$\lambda_k(A) = c_A k^{2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \quad c_A = ... > 0. \tag{2.14}$$

Обратный оператор $A^{-1} : \left(\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)\right)^* \to \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$ *ограничен, а его сужение* $A^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *является компактным положительным оператором.*

Замечание 2.1. *Оператор* $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *называют оператором гильбертовой пары* $(\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega); L_2(\Omega))$ *(см. [6], с. 32-38). По нему можно построить шкалу пространств* E^{α}, $-\infty < \alpha < \infty$*, так, что* $E^0 = L_2(\Omega)$, $E^{1/2} = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $E^{-1/2} = \left(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)\right)^*$.

Вторая вспомогательная задача (задача Ньютона для уравнения Лапласа): по функции ψ, заданной на Γ, найти решение задачи

$$-\triangle w = 0 \quad (\text{в}\, \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} + w = \psi \quad (\text{на}\, \Gamma). \tag{2.15}$$

Определение 2.2. *Назовем слабым решением задачи* (2.15) *такой элемент* $w \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$, *для которого выполнено тождество*

$$(\eta, w)_{1,\Omega} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_\Gamma, \quad \forall \eta \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega). \tag{2.16}$$

Здесь снова отметим, что любое классическое решение задачи (2.15) является слабым. Заметим также, что определения слабых решений вспомогательных задач (2.11) и (2.15) непосредственно следуют из формулы Грина (2.10) и уравнений и краевых условий этих задач.

Лемма 2.2. *При любой* $\psi \in \left(\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\right)^*$ *существует единственное слабое решение* $w = V\psi \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ *этой задачи. При этом оператор* V *ограниченно действует из* $\left(\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\right)^*$ *в подпространство* $U^1(\Omega) \subset \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ *гармонических функций из* $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$.

Доказательства лемм 2.1 и 2.2 стандартные и потому здесь не приводятся.

Лемма 2.3. *Любой элемент* $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ *может быть представлен в виде суммы решений первой и второй вспомогательных краевых задач, т.е. в виде*

$$u = v + w = A^{-1}f + V\psi, \quad f = -\triangle u \in \left(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)\right)^*, \ \psi = \frac{\partial u}{\partial n} + u \in \left(\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\right)^*. \tag{2.17}$$

Этот факт будет установлен позже в более общей ситуации (см. лемму 3.3).

2.3 Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.

Опираясь на сформулированные утверждения, осуществим переход от исходной начально-краевой задачи (2.1) — (2.3) к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.

Будем считать, что в (2.1) — (2.3) искомая функция $u(t,x)$ является функцией переменной t со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$. Тогда, представляя решение $u(t)$ согласно лемме 2.3 в виде

$$u(t) = v(t) + w(t), \tag{2.18}$$

где $v(t)$ — решение первой вспомогательной задачи с правой частью $\widehat{f}(t) := f(t) - \dfrac{d^2u}{dt^2}$, а $w(t)$ — решение второй вспомогательной задачи с функцией $\widehat{\psi} := -\alpha \dfrac{d}{dt}(\gamma u)$, будем иметь

$$v(t) = A^{-1}\left(f(t) - \frac{d^2u}{dt^2}\right), \quad w(t) = -\alpha V \frac{d}{dt}(\gamma u). \tag{2.19}$$

Здесь A и V — операторы первой и второй вспомогательных задач, свойства которых описаны в леммах 2.1 и 2.2. Кроме того, производные $\partial/\partial t$ заменены на d/dt, а также введен оператор следа (2.9).

Из (2.18), (2.19) получаем, что если задача (2.1)-(2.3) имеет решение $u(t)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$, то эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha V \frac{d}{dt}(\gamma u) + u = A^{-1}f(t), \tag{2.20}$$

а также начальным условиям (2.3). Преобразуем это уравнение к симметричной форме, воспользовавшись тем, что $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ (лемма 2.1). Тогда $u(t)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$ допускает представление в виде

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t), \tag{2.21}$$

где $\eta(t)$ — функция переменной t со значениями в $L_2(\Omega)$.

После замены (2.21) для новой искомой функции $\eta(t)$ получаем уравнение

$$A^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-1/2}\eta(t)\right) + \alpha V \frac{d}{dt}\left(\gamma A^{-1/2}\eta(t)\right) + A^{-1/2}\eta(t) = A^{-1}f(t), \tag{2.22}$$

которое после формального применения слева оператора $A^{1/2}$ приобретает вид

$$A^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-1/2}\eta\right) + \alpha Q^* \frac{d}{dt}(Q\eta) + \eta = A^{-1/2}f(t), \tag{2.23}$$

$$Q := \gamma A^{-1/2} : L_2(\Omega) \to \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma), \quad Q^* := A^{1/2}V : \left(\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\right)^* \to L_2(\Omega). \tag{2.24}$$

Лемма 2.4. *Операторы Q и Q^* взаимно сопряжены и ограничены. Если считать, что $Q : L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, то Q компактен. Сужение $Q^*|L_2(\Gamma)$ — также компактный оператор. Поэтому*

$$B := Q^*Q : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \tag{2.25}$$

является неотрицательным (и потому самосопряженным) компактным оператором. При этом

$$\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}Q =: \mathcal{H}_0(\Omega) = A^{1/2}\widetilde{\mathcal{H}^1_0}(\Omega) :=$$

$$:= \left\{ \eta \in L_2(\Omega) :\, \eta = A^{1/2}u,\, u \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega), \gamma u = 0 \right\}, \tag{2.26}$$

а на ортогональном дополнении

$$\mathcal{H}_1(\Omega) := L_2(\Omega) \ominus \mathcal{H}_0(\Omega) \tag{2.27}$$

оператор $B|\mathcal{H}_1(\Omega)$ *положителен, его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений* $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой в нуле и асимптотическим поведением*

$$\lambda_k(B) = c_B \cdot k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)]\,(k \to \infty), \quad c_B > 0. \tag{2.28}$$

Доказательство. Так как $A^{-1/2} : L_2(\Omega) \to \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ и $\gamma : \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) \to \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ (в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$) являются ограниченными операторами, то $Q = \gamma A^{-1/2} : L_2(\Omega) \to \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ ограничен. Покажем, что Q^* — оператор, сопряженный с Q. Положим в тождестве (2.16) $\eta = A^{-1/2}\zeta$, $\zeta \in L_2(\Omega)$, $w = V\psi$. Тогда, с учетом (2.13), будем иметь

$$(\zeta, A^{1/2}V\psi)_\Omega = \langle \gamma A^{-1/2}\zeta, \psi\rangle_\Gamma,$$

т.е. тождество

$$(\zeta, Q^*\psi)_\Omega = \langle Q\zeta, \psi\rangle_\Gamma, \quad \forall \zeta \in L_2(\Gamma), \forall \psi \in \left(\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\right)^*. \tag{2.29}$$

Так как Q — ограниченный оператор, то Q^* также ограничен. Далее, поскольку оператор вложения из $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ компактен, то $Q : L_2(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ — компактный оператор. Поэтому и сужение $Q^*|L_2(\Gamma)$ также компактен. Тогда $B := Q^*Q : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — неотрицательный компактный оператор. Его ядро — это те элементы , для которых $\gamma A^{-1/2}\eta = 0$, т.е.

$$u := A^{-1/2}\eta \in \widetilde{\mathcal{H}}^1_0(\Omega) := \{u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) :\, u|_\Gamma = 0\} = \mathrm{Ker}\gamma. \tag{2.30}$$

Можно проверить, опираясь на формулу Грина (2.10), что ортогональное дополнение к $\widetilde{\mathcal{H}}^1_0(\Omega)$ в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ есть подпространство гармонических функций

$$\widetilde{\mathcal{H}}^1_h(\Omega) := \{w \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) : \triangle w = 0 \quad (\text{в}\,\Omega)\}, \tag{2.31}$$

откуда и следуют формулы (2.26), (2.27).

Наконец, задача на собственные значения для оператора $B|\mathcal{H}_1(\Omega)$, т.е. задача

$$Q^*Q\eta = \lambda\eta, \quad \eta \in \mathcal{H}_1(\Omega), \tag{2.32}$$

равносильна, как нетрудно видеть, задаче о спектре вариационного отношения

$$\int_\Gamma |w|^2\, d\Gamma \Bigg/ \left(\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\Omega + \int_\Gamma |w|^2\, d\Gamma \right), w \in \widetilde{\mathcal{H}}^1_h(\Omega). \tag{2.33}$$

В классической постановке это спектральная задача Стеклова

$$\triangle w = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \quad w = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial n} + w\right) \quad (\text{на}\,\Gamma). \tag{2.34}$$

Асимптотика спектра отношения (2.33), как следует из работы ([16], см. также [17]) имеет вид (2.28). $\square$

Итак, исходная задача (2.1)-(2.3) приведена к задаче Коши для уравнения (2.23). Свойства коэффициентов уравнения (2.23) описаны в леммах 2.1 и 2.4. Заметим, что это уравнение не является разрешенным относительно старшей производной, а коэффициент A^{-1} при $d^2\eta/dt^2$ хотя и обратим, но обратный является неограниченным оператором.

3 Абстрактная начально-краевая задача с поверхностной диссипацией энергии.

Построения, приведенные в параграфе 2, можно обобщить и рассмотреть не задачу (2.1) — (2.3), где имеется классическое волновое уравнение (2.1) и динамическое краевое условие типа Ньютона, а обобщение этой задачи на случай пространств у операторов, для которых справедлива формула Грина (1.5).

3.1 Формулировка задачи.

Пусть E, F и G, а также оператор $\gamma : F \to G$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 и потому существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to (G_+)^*$ такие, что справедлива формула Грина (1.5).

Формулировка абстрактной начально-краевой задачи имеет следующий вид. Необходимо найти функцию $u = u(t)$ со значениями в F такую, для которой выполнено гиперболическое уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Lu = f(t) \quad (\text{в}\,E), \tag{3.1}$$

граничное условие

$$\partial u + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0 \quad (\text{в}\,G\,), \quad \alpha > 0, \tag{3.2}$$

а также начальные условия

$$u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1. \tag{3.3}$$

Здесь L, γ и ∂ — операторы, фигурирующие в формуле Грина (1.5).

Напомним, что из теорем 1.1 и 2.1 следует, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и оператора следа γ имеет место формула Грина (2.10) и потому в этом случае

$$Lu = -\triangle u, \quad \partial u = \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u. \tag{3.4}$$

Следовательно, исходная задача (2.1) — (2.3) есть частный случай абстрактной задачи (3.1) — (3.3) при $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\gamma u := u|_\Gamma$.

Как и в пункте 2.1, выведем закон баланса полной энергии для тех решений задачи (3.1) — (3.3), для которых все слагаемые в (3.1), (3.2) являются непрерывными функциями t. Это можно сделать по той же схеме, и в итоге получаем тождество

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_E^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_F^2\right\} = -\alpha\left\|\frac{d}{dt}(\gamma u)\right\|_G^2 + \left(f(t), \frac{du}{dt}\right)_E. \tag{3.5}$$

Отсюда при $f(t) \equiv 0$ следует, что полная энергия системы, т.е.

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_E^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_F^2,$$

убывает за счет диссипативных процессов, проходящих в пространстве G (поверхностная диссипация).

3.2 Вспомогательные абстрактные краевые задачи.

Рассмотрим, как и пункте 2.2, вспомогательные краевые задачи, которые теперь являются абстрактными. Примеры таких задач, основанных на абстрактной формуле Грина, изучены в [7]-[9].

Первая вспомогательная задача (задача Неймана для уравнения Пуассона): по элементу f найти решение v задачи

$$Lv = f \quad (\text{в } E), \quad \partial v = 0 \quad (\text{в } G). \tag{3.6}$$

Определение 3.1. *Будем говорить, что элемент $v \in F$ является слабым решением задачи* (3.6)*, если имеет место тождество*

$$(\eta, v)_F = \langle \eta, f \rangle_E, \quad \forall \eta \in F. \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *При любом $f \in F^*$ существует единственное слабое решение $v = A^{-1}f$ задачи* (3.6). *Для этого слабого решения первое соотношение* (3.6) *выполнено не в E, а в $F^* \supset E$. Соответственно краевое условие* (3.6) *выполнено в $(G_+)^* \supset G$. Оператор A является оператором гильбертовой пары пространств $(F; E)$, для него $\mathcal{D}(A) = F$,*
$\mathcal{R}(A) = F^*$. Сужение оператора A, такое, что $\mathcal{R}(A) = E$, является неограниченным положительно определенным оператором, заданным на области определения, плотной в $F \subset E$. При этом $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$ и

$$\langle \eta, Av \rangle_E = (\eta, v)_F = \left(A^{1/2}\eta, A^{1/2}v\right)_E, \quad \forall \eta, v \in F. \tag{3.8}$$

Если F компактно вложено в E, то оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

Обратный оператор $A^{-1} : F^* \to F$ ограничен. Если F компактно вложено в E, то $A^{-1} : E \to E$ является компактным положительным оператором.

Доказательство. Оно приведено в работе [7], см. также [8]. □

Отметим еще, что по оператору A можно построить шкалу пространств E^{α}, $-\infty < \alpha < \infty$, таким образом, что $E^0 = E$, $E^{1/2} = F$, $E^{-1/2} = F^*$.

Заметим также, что при $f \in E$ решение $v = A^{-1}f$ задачи (3.6) называют обобщенным. При этом $\mathcal{R}(A) = E$, а $A^{-1}\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A)$ плотна в $F = \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Вторая вспомогательная задача (абстрактный аналог задачи Неймана для уравнения Лапласа): по элементу ψ найти решение задачи

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \qquad \partial w = \psi \quad (\text{в } G). \tag{3.9}$$

Определение 3.2. *Говорят, что элемент $w \in F$ является слабым решением задачи* (3.9), *если для него выполнено тождество*

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{3.10}$$

Отметим, что здесь, как и в пункте 2.2, определения слабых решений первой и второй вспомогательных задач непосредственно следуют из формулы Грина (1.5) и соотношений (3.6), (3.9).

Лемма 3.2. *При любом элементе $\psi \in (G_+)^*$ существует единственное слабое решение $w = V\psi \in F$. При этом оператор V ограниченно действует из $(G_+)^*$ в подпространство $M \subset F$ элементов, которые назовем L-гармоническими (для них $Lw = 0$).*

Доказательство. Оно основано на неравенстве (см. (1.4))

$$|\langle \gamma\eta, \psi\rangle_G| \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \left(b\,\|\psi\|_{(G_+)^*}\right) \cdot \|\eta\|_F$$

и на лемме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве F. $\square$

Лемма 3.3. *Любой элемент $u \in F$ может быть представлен в виде суммы решений первой и второй вспомогательных задач* (3.6) *и* (3.9), *т.е. в виде*

$$u = v + w = A^{-1}f + V\psi, \quad f = Lu \in F^*, \quad \psi = \partial u \in (G_+)^*. \tag{3.11}$$

Доказательство. Оно приведено в работе [8], см. теорему 2 и замечание 1 этой работы. $\square$

Отметим, что при $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ и $G = L_2(\Gamma)$ и из леммы 3.3 получаем утверждение леммы 2.3.

3.3 Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.

Такой переход от задачи (3.1) — (3.3) можно осуществить, формально повторяя преобразования, уже проведенные в пункте 2.3 для исходной задачи с поверхностной диссипацией энергии.

Именно, считая, что искомая функция $u(t)$ является функцией переменной t со значениями в F, и опираясь, согласно лемме 3.3, на формулы (3.11) и операторы A и V вспомогательных абстрактных краевых задач (3.6) и (3.9), будем иметь

$$u = v + w = A^{-1}\widehat{f} + V\widehat{\psi}, \quad \widehat{f} = Lu = f(t) - \frac{d^2u}{dt^2},$$

$$\widehat{\psi} = -\alpha\frac{d}{dt}(\gamma u).$$

Это приводит снова к уравнению вида

$$A^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha V\frac{d}{dt}(\gamma u) + u = A^{-1}f(t) \quad (\text{в } F), \tag{3.12}$$

а после замены (2.21), т.е.

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t), \tag{3.13}$$

и формального применения слева в (3.12) оператора $A^{1/2}$ — к уравнению

$$A^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-1/2}\eta\right)+\alpha Q^*\frac{d}{dt}\left(Q\eta\right)+\eta=A^{-1/2}f(t)\quad (\text{в } E), \tag{3.14}$$

$$Q:=\gamma A^{-1/2}:\,E\to G_+,\quad Q^*:=A^{1/2}V:\,(G_+)^*\to E, \tag{3.15}$$

и начальным условиям

$$\eta(0)=A^{1/2}u^0,\quad \eta'(0)=A^{1/2}u^1. \tag{3.16}$$

Как и выше, возникла абстрактная задача Коши для линейного полного (при $\alpha>0$) дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве E. При $\alpha=0$ она преобразуется в задачу Коши для гиперболического уравнения.

Лемма 3.4. *Операторы Q и Q^* взаимно сопряжены и ограничены. Если G_+ компактно вложено в G, то оператор $Q:\,E\to G$ компактен. Сужение $Q^*|G$ в этом случае - также компактный оператор. Поэтому*

$$B:=Q^*Q:\,E\to E$$

является неотрицательным (самосопряженным) оператором. При этом

$$\mathrm{Ker}B=\mathrm{Ker}Q=:E_0=A^{1/2}N:=\{\eta\in E:\,\eta=A^{1/2}u,u\in F,\gamma u=0\}, \tag{3.17}$$

а на ортогональном дополнении

$$E_1:=E\ominus E_0,\quad dimE_1=\infty,$$

оператор $B|E_1$ положителен. Если G_+ компактно вложено в G, то $B|E_1$ компактен и потому его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой в нуле.

Доказательство. Оно полностью повторяет схему доказательства леммы 2.4. Именно, так как $A^{-1/2}:\,E\to F$ и $\gamma:F\to G_+$ ограничены, то $Q=\gamma A^{-1/2}:\,E\to G_+$ ограничен. Далее с помощью тождества

$$(\zeta,Q^*\psi)_E=\langle Q\zeta,\psi\rangle_G,\quad \forall\,\zeta\in E,\forall\,\psi\in(G_+)^*, \tag{3.18}$$

убеждаемся, что Q и Q^* взаимно сопряжены и потому Q^* ограничен. Если G_+ компактно вложено в G, то $Q:\,E\to G$ является компактным оператором, а тогда сужение $Q^*|G$ тоже компактно.

Ядро оператора B, очевидно, это те элементы $\eta \in E$, для которых $\gamma A^{-1/2}\eta = 0$, т.е. $u = A^{-1/2}\eta \in N := \mathrm{Ker}\gamma$. Можно проверить, опираясь на формулу Грина (1.5), что имеет место ортогональное разложение

$$F = N \oplus M, \quad M := \{w \in F : \ Lw = 0\}, \tag{3.19}$$

откуда и следует (3.17).

Далее, если G_+ компактно вложено в G, то задача на собственные значения для оператора $B|E_1$, т.е. задача

$$Q^*Q\eta = \lambda\eta, \quad \eta \in E_1, \tag{3.20}$$

равносильна задача о спектре вариационного отношения

$$\|\gamma w\|_G^2 \,/\, \|w\|_F^2, \quad w \in M. \tag{3.21}$$

В "классической"постановке это абстрактная спектральная задача Стеклова (см. [16])

$$Lw = 0 \quad (\text{в}\, E), \quad \gamma w = \lambda \partial w \quad (\text{в}\, G). \qquad \square \tag{3.22}$$

Итак, исходная задача (3.1) — (3.3) приведена к задаче Коши (3.14) — (3.16), а свойства операторных коэффициентов уравнения (3.14) описаны в леммах 3.1 и 3.4. Именно эта задача и будет предметом дальнейших исследований.

3.4 Применение теории сжимающих полугрупп.

Осуществим переход от задачи (3.14)-(3.16) к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором сжимающей полугруппы. Это позволит доказать теорему о корректной разрешимости задачи (3.14) — (3.16), а затем и исходной задачи (3.1) — (3.3).

Преобразуем задачу (3.14) — (3.16), приведя ее к системе двух дифференциальных уравнений следующим образом. Введем новую искомую функцию $\zeta(t)$ соотношениями

$$-i\eta = \frac{d\zeta}{dt}, \quad \zeta(0) = 0, \tag{3.23}$$

а затем продифференцируем это уравнение. Тогда

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + i\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \zeta'(0) = -i\eta^0 = -iA^{1/2}u^0. \tag{3.24}$$

Запишем теперь (3.14) с учетом (3.23), (3.24) в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид

$$\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \left[\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} f \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Начальные условия для уравнения (3.25) таковы:

$$(\eta(0); \zeta(0))^t = \left(A^{1/2} u^0; 0\right)^t, \qquad (\eta'(0); \zeta'(0))^t = \left(A^{1/2} u^1; -iA^{1/2} u^0\right)^t, \tag{3.26}$$

символ $(\cdot;\cdot)^t$ означает транспонирование (в данном случае вектор-строки). Заметим, что первая строчка в (3.25) представляет собой не первое уравнение (3.14) с учетом замены (3.23), а уравнение

$$A^{-1/2} \frac{d^2}{dt^2} \left(A^{-1/2} \eta\right) + \alpha B \frac{d\eta}{dt} + i \frac{d\zeta}{dt} = A^{-1/2} f, \tag{3.27}$$

близкое к нему.

Введем в (3.25), (3.26) обозначения

$$y(t) := \left(\frac{d\eta}{dt}; \frac{d\zeta}{dt} \right)^t, \quad f_0(t) := (A^{-1/2} f; 0)^t, \tag{3.28}$$

$$\mathcal{A}^{-1/2} := \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Тогда задача (3.25), (3.26) принимает вид

$$\mathcal{A}^{-1/2} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{A}^{-1/2} y \right) + \mathcal{B} y = f_0(t), \tag{3.30}$$

$$y(0) = y^0 := (A^{1/2} u^1; -iA^{1/2} u^0)^t. \tag{3.31}$$

Осуществим здесь замену искомой функции по формуле

$$z(t) := \mathcal{A}^{-1/2} y(t). \tag{3.32}$$

После применения слева в (3.30) оператора $\mathcal{A}^{1/2}$ возникает задача Коши

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B} \mathcal{A}^{1/2} z(t) + \mathcal{A}^{1/2} f_0(t), \quad z(0) = (u^1; -iA^{1/2} u^0), \tag{3.33}$$

$$\mathcal{A}^{1/2} f_0(t) = (f(t); 0)^t. \tag{3.34}$$

Таким образом, проведенные формальные преобразования позволили перейти от задачи Коши (3.14) — (3.16) для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка, рассматриваемого в пространстве E и не разрешенного относительно старшей производной, к задаче Коши в пространстве $E^2 := E \oplus E$ для уравнения первого порядка с одним операторным коэффициентом — операторной матрицей

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} := \mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{1/2} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Это позволит, как сейчас будет выяснено, применить к задаче (3.33), (3.34) теорию сжимающих полугрупп операторов (см., например, [18], [19]).

Заметим сначала, что операторная матрица $\mathcal{B}$ из (3.29) является ограниченным и ограниченно обратимым оператором, так как оператор $B = Q^*Q$ ограничен и

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & \alpha B \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ из (3.35) имеет ограниченный обратный

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{-1} := \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1/2} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & \alpha B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

а потому он задан на всем пространстве E^2. Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{-1}), \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{-1}) = E^2. \tag{3.38}$$

Кроме того, оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ является аккретивным, т.е.

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}z, z)_{E^2} = \big(\alpha B(A^{1/2}z_1), (A^{1/2}z_1)\big)_E = \alpha\big\|QA^{1/2}z_1\big\|_E^2 \geqslant 0, \quad \forall z = (z_1; z_2)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}). \tag{3.39}$$

Из (3.38) и (3.39) следует, что оператор $-\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ является максимальным диссипативным оператором на области определения (3.38). Значит (см. [18], а также [19], с. 44-47), этот оператор — генератор сжимающей полугруппы операторов $U(t) := \exp(-t\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$, через которую можно выразить решение задачи (3.33), (3.34).

Далее понадобится следующий общий факт.

Теорема 3.1. *(Р.С. Филлипс). Пусть в задаче Коши*

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.40}$$

рассматриваемой для функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве E, оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы (C_0- полугруппы) операторов $U(t)$ и выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad f(t) \in C^1([0,T]; E). \tag{3.41}$$

Тогда задача (3.40) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *на отрезке* $[0,T]$, *и оно выражается формулой*

$$u(t) = U(t)u^0 + \int_0^t U(t-s)f(s)ds. \tag{3.42}$$

Отметим, что сильным решением задачи (3.40) на отрезке $[0,T]$ называют такую функцию $u(t)$, для которой все слагаемые в уравнении (3.40) являются непрерывными функциями t при $t \in [0,T]$.

Опираясь на теорему 3.1 и условия (3.41), сформулируем условия, обеспечивающие существование сильного решения задачи (3.33), (3.34). В силу (3.34) и второго условия (3.41) получаем требование

$$f(t) \in C^1([0,T];E) \tag{3.43}$$

для правой части уравнения (3.1). Далее, условие

$$z(0) = (u^1; -iA^{1/2}u^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{1/2}).$$

приводит к требованию

$$\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ -iA^{1/2}u^0 \end{pmatrix} \in E^2,$$

т.е. к соотношениям

$$A^{1/2}u^1 \in E, \quad \alpha BA^{1/2}u^1 + A^{1/2}u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Отсюда приходим к следующему выводу

Теорема 3.2. *Если выполнены условия:*

1^0. $f(t) \in C^1([0,T];E)$,

2^0. $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = F$,

3^0. $\alpha V\gamma u^1 + u^0 \in \mathcal{D}(A)$,

то задача Коши (3.33), (3.34) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

Замечание 3.1. *Условие* 3^0. *теоремы говорит о том, что начальные данные в задаче* (3.33), (3.34) *должны быть согласованы для того, чтобы существовало сильное решение этой задачи. Если воспользоваться, согласно лемме 3.3, представлением* $u^0 = v^0 + w^0$ *и вспомнить, что по непрерывности при* $t \to 0$ *должно быть* $w^0 = -\alpha V\gamma u^1$ *(см. начало п. 3.3), то требование* 3^0 *сводится к естественному условию*

$$u^0 - w^0 = v^0 \in \mathcal{D}(A). \tag{3.44}$$

3.5 Теорема о сильной разрешимости абстрактной начально-краевой задачи.

Рассмотрим сначала вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (3.14) — (3.16).

Определение 3.3. *Будем говорить, что задача* (3.14) — (3.16) *имеет на отрезке* $[0, T]$ *сильное решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$ *, если в уравнении* (3.14) *слагаемое* $A^{-1/2}\dfrac{d^2}{dt^2}(A^{-1/2}\eta)$ *и сумма* $\alpha Q^* \dfrac{d}{dt}(Q\eta) + \eta$ *являются непрерывными функциями* $t \in [0, T]$ *со значениями в* F*, выполнено уравнение* (3.14) *при* $t \in [0, T]$*, а также начальные условия* (3.16).

Из теоремы 3.2. получаем такой результат.

Теорема 3.3. . *Если выполнены условия* $1^0 - 3^0$ *теоремы 3.2, то задача* (3.14) — (3.16) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть выполнены условия $1^0 - 3^0$ теоремы 3.2. Тогда задача Коши (3.33), (3.34) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0, T]$. Это означает, что функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dz_1}{dt} + A^{1/2}(\alpha B A^{1/2} z_1 + i z_2) = f(t), \quad \frac{dz_2}{dt} + i A^{1/2} z_1 = 0, \tag{3.45}$$

и начальным условиям

$$z_1(0) = u^1, \;\; z_2(0) = -iA^{1/2}u^0. \tag{3.46}$$

При этом в уравнениях (3.45) все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0, T]$ со значениями в E , в частности,

$$\begin{array}{ll} z_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap (C^1[0, T]; E), & z_2(t) \in C^1([0, T]; E), \\ \alpha B A^{1/2} z_1(t) + i z_2(t) \in C([0, T]; E). & \end{array} \tag{3.47}$$

Осуществляя в (3.45) обратные замены (см. (3.32), (3.28)), т.е.

$$z_1(t) = A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}, \quad z_2(t) = \frac{d\zeta}{dt}, \tag{3.48}$$

будем иметь систему уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) + A^{1/2}\left(\alpha B \frac{d\eta}{dt} + i\frac{d\zeta}{dt}\right) = f(t), \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + i\frac{d\eta}{dt} = 0, \tag{3.49}$$

начальных условий (см. (3.16), (3.23), (3.24))

$$\eta(0) = A^{1/2}u^0,\ \zeta(0) = 0,\ \eta'(0) = A^{1/2}u^1,\ \zeta'(0) = -iA^{1/2}u^0. \tag{3.50}$$

Из второго уравнения (3.49) с учетом условий для $\eta(0)$ и $\zeta'(0)$ будем иметь

$$\frac{d\zeta}{dt} + i\eta(t) = 0, \qquad \zeta(t) \in C^2([0,T];E),\ \eta(t) \in C^1([0,T];E). \tag{3.51}$$

Подставляя $d\zeta/dt$ в первое уравнение (3.49), получим, что задача Коши

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) + A^{1/2}\left(\alpha B\frac{d\eta}{dt} + \eta(t)\right) = f(t),\ \eta(0) = A^{1/2}u^0,\ \eta'(0) = A^{1/2}u^1, \tag{3.52}$$

имеет единственное сильное решение $\eta(t)$, причем все слагаемые (3.52) являются элементами из $C([0,T];E)$. В частности,

$$\alpha B\frac{d\eta}{dt} + \eta(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})), \tag{3.53}$$

в то время как каждое слагаемое в этой сумме является, вообще говоря, элементом из $C([0,T],E)$.

Применяя слева в (3.52) (ограниченный) оператор $A^{-1/2}$, получим уравнение

$$A^{-1/2}\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) + \left(\alpha B\frac{d\eta}{dt} + \eta\right) = A^{-1/2}f(t), \tag{3.54}$$

где все слагаемые, в том числе и сумма в скобке, — это элементы из $C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})) = C([0,T];F)$.

Убедимся теперь, что решение $\eta(t)$ уравнения (3.54) является также решением со значениями в F задачи (3.14) - (3.16). Для этого достаточно убедиться, в силу равенства $B = Q^*Q$, что для функции $\eta(t)$ имеют место тождества

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt}\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}(A^{-1/2}\eta), \qquad Q\frac{d\eta}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(Q\eta). \tag{3.55}$$

.

Докажем эти свойства. Так как функция $\eta(t)$ непрерывно дифференцируема (см. (3.51)), а оператор $A^{-1/2}$ ограничен, то существует предел

$$A^{-1/2}\frac{d\eta}{dt} = A^{-1/2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{A^{-1/2}\eta(t+\Delta t) - A^{-1/2}\eta(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(A^{-1/2}\eta), \tag{3.56}$$

и поскольку левая часть непрерывно дифференцируема (см. (3.52)), то выполнено первое тождество (3.55). Аналогично убеждаемся, опираясь на ограниченность оператора $Q:\ E \to E$, что выполнено второе тождество (3.55).

Этим теорема полностью доказана. $\square$

Опираясь на этот результат, докажем основное утверждение, связанное с разрешимостью задачи (3.1) — (3.3).

Определение 3.4. *Будем говорить, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи* (3.1) - (3.3) *на отрезке* $[0,T]$, *если*

$$u(t) \in C^2([0,T];E) \cap C^1([0,T];F) \tag{3.57}$$

и для нее выполнено уравнение (3.1), *где каждое слагаемое является элементом из* $C([0,T];E)$, *граничное условие* (3.2), *где каждое слагаемое является элементом из* $C([0,T];G_+)$, *а также начальные условия* (3.3).

Теорема 3.4. *Если выполнены условия* $1^0 - 3^0$ *теоремы 3.2, то задача* (3.1) — (3.3) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть выполнены условия $1^0 - 3^0$ теоремы 3.2. Тогда справедливы утверждения теоремы 3.3, т.е. задача (3.14) — (3.16) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ в смысле определения 3.3.

Осуществим в (3.14) — (3.16) обратную замену (3.13), т.е. введем $u(t) = A^{-1/2}\eta(t)$. Тогда уравнение (3.14) приобретает вид

$$A^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\alpha A^{1/2}V\frac{d}{dt}(\gamma u) + A^{1/2}u\right) = A^{-1/2}f(t), \tag{3.58}$$

а начальные условия (3.16) переходят в условия

$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \tag{3.59}$$

так как, согласно (3.56),

$$u'(0) = \frac{d}{dt}(A^{-1/2}\eta(t))|_{t=0} = A^{-1/2}\frac{d\eta(0)}{dt} = A^{-1/2}A^{1/2}u^1 = u^1.$$

В уравнении (3.58) все слагаемые, в том числе и слагаемое в скобках, являются, как следует из доказательства теоремы 3.3, элементами из $C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2}))$. Поэтому $u(t) \in C^2([0,T];E)$. Кроме того, так как $\eta(t) \in C^1([0,T];E)$ (см. (3.51)), то $u(t) = A^{-1/2}\eta(t) \in C^1([0,T];F)$, т.е. для $u(t)$ выполнены свойства (3.57). Осталось лишь проверить, что для $u(t)$ выполнено уравнение (3.1) и граничное условие (3.2) со свойствами, сформулированными в определении 3.4.

Подействуем слева в (3.58) (ограниченным) оператором $A^{-1/2}$. Тогда придем к уравнению

$$A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\alpha V\frac{d}{dt}(\gamma u) + u\right) = A^{-1}f(t), \tag{3.60}$$

а все слагаемые, в том числе и сумма в скобках, являются элементами из $C([0,T];\mathcal{D}(A))$. Введем функции

$$v(t) := A^{-1}\left(f(t) - \frac{d^2u}{dt^2}\right),\ w(t) := -\alpha V\frac{d}{dt}(\gamma u). \tag{3.61}$$

Тогда из (3.60) следует, что, во-первых,

$$u(t) = v(t) + w(t), \tag{3.62}$$

во-вторых,

$$v(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A)),\ w(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2})). \tag{3.63}$$

Поэтому из соотношений (3.61) получаем, что для функций $f(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ справедливы связи (3.62) и

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Av = f(t),\ \partial w + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0. \tag{3.64}$$

Здесь первое соотношение получено путем применения оператора A, что возможно в силу первого свойства (3.63), а второе — в силу определения оператора V второй краевой задачи (см. (3.9) — (3.10)). Заметим теперь, что согласно определению оператора A (см. (3.6) — (3.8)), из первой формулы (3.64) следуют связи

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Lv = f(t),\ \partial v = 0. \tag{3.65}$$

Далее, для элемента w, кроме (3.64), имеем также соотношение

$$Lw = 0. \tag{3.66}$$

В первой формуле (3.65) каждое слагаемое, очевидно, является элементом из $C([0,T];E)$. Далее, во второй формуле (3.64) каждое слагаемое — элемент из $C([0,T];G_+)$. В самом деле, так как $u(t) \in C^1([0,T];F)$, то, согласно определению оператора γ, имеем $\gamma u \in C^1([0,T];G_+)$, а потому $d(\gamma u)/dt \in C([0,T];G_+)$.

Сложим теперь левые и правые части первой формулы (3.64) и формулы (3.66), а также вторых формул (3.64) и (3.65), а затем используем связь (3.62). Тогда для функции $u(t)$ приходим к выводу, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Lu = f(t), \tag{3.67}$$

где все слагаемые — элементы из $C([0,T];E)$, а также краевому условию

$$\partial u + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0, \tag{3.68}$$

где все слагаемые — элементы из $C([0,T];G_+)$. Это полностью доказывает теорему. $\square$

Опираясь на установленный общий факт, сформулируем итоговый результат исследования разрешимости исходной начально-краевой задачи математической физики с поверхностной диссипацией энергии. Как уже упоминалось выше, эта задача является частным случаем общей задачи (3.1) — (3.3) при $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\gamma u := u|_\Gamma$, $\Gamma = \partial\Omega$.

Теорема 3.5. *Пусть в начально-краевой задаче* (2.1) — (2.3)*, рассматриваемой в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ*, выполнены условия:*

1^0. $f(t,x) \in C^1([0,T];L_2(\Omega))$*;*

2^0. $u^1(x) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$*;*

3^0. $u^0(x) = v^0(x)+w^0(x)$, $v^0(x) \in \mathcal{D}(A) \subset \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$, $w^0(x) = -\alpha V\gamma u^1 \in \widetilde{\mathcal{H}}^1_h(\Omega)$ *(определение* $\widetilde{\mathcal{H}}^1_h$ *см. в* (2.31)*).*

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$*, т.е. такую функцию*

$$u(t,x) \in C^2([0,T];\, L_2(\Omega)) \cap C^1([0,T];\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)),$$

для которой выполнено уравнение (2.1)*, где каждое слагаемое является элементом из* $C([0,T];\, L_2(\Omega))$*, граничное условие* (2.2)*, где слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma))$*, а также начальные условия* (2.3)*.*

4 Спектральные проблемы, порожденные начально-краевыми задачами с поверхностной диссипацией энергии.

В этом параграфе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с исследованием спектральной задачи, порожденной начально-краевой задачей математической физики с поверхностной диссипацией энергии. Сначала изучаются простейшие задачи в одномерном, двумерном и общем случае, затем доказывается общая теорема о дискретности спектра.

4.1 Формулировки спектральных задач.

Рассмотрим однородную задачу (2.1) — (2.2) без начальных условий, т.е. задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \ \frac{\partial u}{\partial n} + u + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ (на } \Gamma). \tag{4.1}$$

Определение 4.1. *Будем говорить, по аналогии с задачами механики и гидродинамики, что функция вида*

$$u(t,x) = e^{-\lambda t}u(x),\ x \in \Omega, \tag{4.2}$$

является нормальным движением динамической системы (4.1), *если она удовлетворяет уравнению и краевому условию* (4.1) *при некотором* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $u(x) \neq 0$. *Функцию* $u(x)$ *будем называть амплитудной функцией, а число* λ *— комплексным декрементом затухания.*

Очевидно, для амплитудной функции $u(x)$ из (4.1) возникает спектральная задача

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \ (\text{ в } \Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} + u - \alpha\lambda u = 0 \ (\text{ на } \Gamma), \tag{4.3}$$

содержащая спектральный параметр λ в уравнении и краевом условии.

Преобразования, которые были проделаны в параграфах 2 и 3 и были связаны с переходом от исходных задач (2.1) — (2.3) и (3.1) — (3.3) к параболической задаче (3.33), можно повторить и для спектральной задачи (4.3), а также ее обобщения

$$Lu + \lambda^2 u = 0 \ (\text{ в } E),\ \partial u - \alpha\lambda\gamma u = 0 \ (\text{ в } G), \tag{4.4}$$

основанного на абстрактной формуле Грина (1.5). Действительно, задача (4.4) возникает из задачи (3.1) — (3.2), если при $f(t) \equiv 0$ ее решения искать в виде (4.2), т.е.

$$u(t) = e^{-\lambda t}u,\ u \in F,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Это замечание позволяет сразу сформулировать спектральные проблемы, эквивалентные исходным проблемам (4.3), (4.4). В частности, уравнение (3.14) порождает спектральную задачу

$$(\lambda^2 A^{-1} - \lambda\alpha B + I)\eta = 0, \qquad \eta = A^{1/2}u \in E, \tag{4.6}$$

где операторы A^{-1} и B обладают свойствами, описанными в леммах 3.1, 3.4 (в задаче (4.4)) и соответственно в леммах 2.1 и 2.4 (в задаче (4.3)). Наконец, эволюционной проблеме (3.33) отвечает спектральная задача

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}}z := \mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{1/2}z = \lambda z, \tag{4.7}$$

$$z = \mathcal{A}^{-1/2}y = -\lambda \begin{pmatrix} A^{-1/2}\eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda u \\ -iA^{1/2}u \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) \subset E \oplus E. \tag{4.8}$$

Задачи (4.3), (4.4), (4.6) и (4.7) и будут предметом исследования в данном параграфе.

4.2 Простейшие свойства решений спектральных задач.

Будем считать, что параметр диссипации α является неотрицательным и может принимать, в частности, значения $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$, и рассмотрим простейшие спектральные свойства решений задач (4.3) — (4.7).

1^0.Число $\lambda = 0$ не является собственным значением спектральных задач.

Этот факт очевиден для задачи (4.6); для задач (4.3), (4.4) он также формально следует из формул Грина (1.6) и (1.5) соответственно.

2^0.Все собственные значения спектральных задач расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси.

В самом деле, при $\lambda \neq 0$ из (4.6) имеем

$$\lambda||A^{-1/2}\eta||_E^2 - \alpha||B^{1/2}\eta||_E^2 + \lambda^{-1}||\eta||_E^2 = 0, \tag{4.9}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re}\lambda = \alpha||B^{1/2}\eta||_E^2 \Big/ (||A^{-1/2}\eta||_E^2 + |\lambda|^{-2}||\eta||_E^2) \geqslant 0. \tag{4.10}$$

Далее, так как квадратичный по λ операторный пучок

$$L_\alpha(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} - \lambda\alpha B + I,\ \alpha \geqslant 0, \tag{4.11}$$

отвечающий задаче (4.6), является самосопряженным, т.е. (в силу самосопряженности A^{-1} и B)

$$\big(L_\alpha(\bar{\lambda})\big)^* = L_\alpha(\lambda), \tag{4.12}$$

то спектр задачи (4.6) симметричен относительно вещественной оси.

3^0. Если F компактно вложено в E, а G_+ компактно вложено в G, то спектр задачи (4.6) может быть лишь дискретным, т.е. может состоять лишь из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = \infty$.

Действительно, если выполнены указанные условия вложения, то операторы A^{-1} и B в (4.6) компактны (см. леммы 3.1 и 3.4) и потому $L_\alpha(\lambda)$ является так называемым фредгольмовым операторным пучком (см. [20], с. 37-40), т.е. имеет структуру $I + \Phi(\lambda)$, где $\Phi(\lambda)$ принимает компактные значения. При этом $L_\alpha(0) = I$ имеет ограниченный обратный, а $\Phi(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} - \lambda\alpha B$ — аналитическая оператор-функция во всех конечных точках из $\mathbb{C}$. Отсюда и из теоремы И.Ц. Гохберга (см. [20], с. 39) и следует данное утверждение.

В частности, это утверждение справедливо для задачи (4.3), так как $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = F$ компактно вложено в $E = L_2(\Omega)$, а $G_+ = \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $G = L_2(\Gamma)$.

4^0. При $\alpha = 0$ спектр задачи находится на мнимой оси (гиперболический случай). Если F компактно вложено в E, то спектр состоит из конечнократных собственных значений

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty},\ \lambda_k = \pm i\lambda_k^{1/2}(A),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{4.13}$$

где $\lambda_k(A)$ — собственные значения оператора A, отвечающие абстрактной задаче Неймана

$$Lu = \lambda u \ (\text{ в } E),\ \partial u = 0 \ (\text{ в } G). \tag{4.14}$$

В частности, этот вывод справедлив для задачи Ньютона

$$Au := -\Delta u = \lambda u \ (\text{ в } \Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \ (\text{ на } \Gamma), \tag{4.15}$$

когда $\lambda_k(A)$ имеют асимптотику (2.14).

5^0. Пусть α формально равно ∞, т.е. рассматриваются предельные задачи

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \ (\text{ в } \Omega),\ u = 0 \ (\text{ на } \Gamma), \tag{4.16}$$

вместо (4.3) и соответственно

$$Lu + \lambda^2 u = 0 \ (\text{ в } E),\ \gamma u = 0 \ (\text{ в } G) \tag{4.17}$$

вместо (4.4).

Тогда если подпространство $N = \mathrm{Ker}\gamma \subset F$ компактно вложено в E , то спектр задачи Дирихле (4.17) дискретен, состоит из конечнократных собственных значений

$$\{\lambda_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}, \qquad \lambda_k^{\pm} = \pm i\lambda_k^{1/2}(A_0),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{4.18}$$

где A_0 - оператор Задачи Дирихле (4.17). В частности эти факты имеют место для задачи (4.16), так как $\widetilde{\mathcal{H}}_0^1(\Omega)$ (см. (2.26)) компактно вложено в $L_2(\Omega)$.

6^0. Как показывают примеры, рассмотренные ниже (и это можно доказать в общей ситуации), при возрастании α от нуля собственные значения $\lambda_k(\alpha)$, совпадающие с числами (4.13) при $\alpha = 0$, сдвигаются в комплексную правую полуплоскость перпендикулярно мнимой оси, а при $\alpha \to +\infty$ подходят к мнимой оси к предельным значениям (4.18) также по перпендикулярным траекториям.

Отсюда, в частности, следует такой вывод: для каждого k существует такое критическое значение $(\alpha_k)_* > 0$, после которого при возрастании α собственное значение $\lambda_k(\alpha)$ будет двигаться не от мнимой оси, а к ней, попадая на нее в пределе при $\alpha = +\infty$. В рассмотренных ниже примерах это критическое значение α_* оказывается одним и тем же для всех собственных значений λ, а весь спектр при этом α_* уходит в бесконечно удаленную точку комплексной плоскости.

Последнее свойство говорит о том, что спектральные задачи, описанные выше, достаточно своеобразны и потому требуют детального изучения.

4.3 Одномерная спектральная задача.

Рассмотрим одномерную спектральную задачу ($m = 1$) вида (4.3):

$$u''(y) - \lambda^2 u(y) = 0,\ 0 < y < 1,\ u(0) = 0,\ u'(1) = \alpha\lambda u(1). \tag{4.19}$$

Здесь краевое условие вида (4.3) задано не на всей границе Γ, которая в данном случае состоит из точек 0 и 1, а лишь в точке 1, в то время как в точке 0 задано условие Дирихле. Кроме того, вместо комбинации $\partial u/\partial n + u$ на Γ для простоты взято лишь выражение $(\partial u/\partial n)_\Gamma = u'(1)$. Как показывает рассмотрение этого примера, это не повлияет на общие качественные выводы о структуре спектра, а лишь упрощает задачу.

Очевидно, решение уравнения (4.19), удовлетворяющее условию Дирихле, имеет вид

$$u(y) = \mathrm{sh}(\lambda y). \tag{4.20}$$

Поэтому второе краевое условие приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda \,\mathrm{ch}\,\lambda = \alpha\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda. \tag{4.21}$$

Так как $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи и, кроме того, $\mathrm{sh}\,\lambda \neq 0$ (иначе было бы $\mathrm{ch}\,\lambda = 0$), то из (4.21) окончательно получаем уравнение

$$\mathrm{cth}\,\lambda = \alpha,\ 0 \leqslant \alpha < \infty. \tag{4.22}$$

Это уравнение имеет, как показывают простые рассмотрения, решения разного вида в диапазонах $0 < \alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Так, при $0 < \alpha < 1$ приходим к последовательности

$$\lambda = \lambda_p^-(\alpha) := c_-(\alpha) + i\pi(p - 1/2),\ c_-(\alpha) := \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha},\ p = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.23}$$

Собственно при $\alpha > 1$ имеем

$$\lambda = \lambda_p^+(\alpha) := c_+(\alpha) + i\pi p,\ c_+(\alpha) := \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha+1}{\alpha-1},\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{4.24}$$

Наконец, при $\alpha = 1$, как легко убедиться, не существуют конечные собственные значения задачи (4.19).

Из (4.23) и (4.24) следует, что при $\alpha \neq 1$ спектр задачи (4.19) дискретен, состоит из однократных собственных значений $\{\lambda_p^-(\alpha)\}_{p=-\infty}^{+\infty}$ при $0 < \alpha < 1$ и $\{\lambda_p^+(\alpha)\}_{p=-\infty}^{+\infty}$ при $\alpha > 1$. Эти собственные значения расположены на прямой $\mathrm{Re}\lambda = c_-(\alpha)$ (в первом случае) , либо на прямой $\mathrm{Re}\lambda = c_+(\alpha)$ (во втором случае). Траектории $\lambda_p^{\pm}(\alpha)$ при изменении α представляют собой прямые, параллельные вещественной оси, причем

$$\lambda_p^{-} \to \infty \ (\alpha \to 1-0), \ \lambda_p^{+}(\alpha) \to \infty \ (\alpha \to 1+0). \tag{4.25}$$

При $0 < \alpha < 1$ все собственные значения задачи (4.19) невещественные, при $\alpha > 1$ имеется одно вещественное и потому положительное собственное значение $\lambda_p^{+}(\alpha)$, которое при возрастании α движется влево и при $\alpha \to +\infty$ переходит в нуль. Для $p \neq 0$ собственные значения $\lambda_0^{+}(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$ стремятся к числам $\lambda_p^{+}(+\infty) = i\pi p$, которые являются решениями предельной спектральной задачи Дирихле:

$$u''(y) - \lambda^2 u(y) = 0, \ 0 < y < 1, \ u(0) = u(1) = 0. \tag{4.26}$$

Таким образом, этот простейший пример подтверждает свойства спектра, о которых говорилось выше в утверждении 6^0. п. 4.2; в данном примере критическое значение $\alpha_* = 1$.

4.4 Двумерная задача в прямоугольной области.

Рассмотрим в области

$$\Omega := \{(x,y) : 0 < x < \pi, \ 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{4.27}$$

с частью границы

$$\Gamma := \{(x,1) : 0 < x < \pi\} \tag{4.28}$$

и оставшейся частью $S = \partial\Omega \backslash \Gamma$ следующую спектральную задачу

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \ (\text{ в } \Omega), \ u = 0 \ (\text{ на } S), \ \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \alpha u = 0 \ (\text{ на } \Gamma). \tag{4.29}$$

Здесь, как и в задаче (4.19), динамическое краевое условие, связанное с поверхностной диссипацией энергии, задано не на $\partial\Omega$, а лишь на части $\Gamma \subset \partial\Omega$, а на $S = \partial\Omega \backslash \Gamma$ задано условие Дирихле. Кроме того, для простоты отброшено слагаемое $u|_{\Gamma}$, не влияющее на общие качественные выводы о структуре спектра задачи вида (4.3).

Форма области Ω и граничное условие на S позволяют разделить переменные в задаче (4.27) - (4.29) и искать ее решение в виде

$$u(x,y) = u_k(x,y) = \sin(kx) Y_k(y), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{4.30}$$

$$Y_k'' - (\lambda^2 + k^2) Y_k = 0, \ 0 < y < 1, \ Y_k(0) = 0, \ Y_k'(1) = \lambda \alpha Y_k(1). \tag{4.31}$$

Из (4.31) имеем

$$Y_k(y) = \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 + k^2}y), \tag{4.32}$$

а последнее динамическое условие приводит к уравнению

$$\operatorname{cth}\sqrt{\lambda^2 + k^2} = \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}},\ k = 1, 2, \dots,\ \operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2 + k^2} \geqslant 0. \tag{4.33}$$

Заметим, что это уравнение формально при $k = 0$ совпадает с уравнением (4.22) одномерной спектральной задачи и потому, видимо, должно иметь при $k \neq 0$ близкие свойства решений. Отметим еще, что в рассматриваемом примере $\sqrt{\lambda^2 + k^2} \neq 0$ (иначе $Y_k(y) \equiv 0$) и $\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 + k^2}) \neq 0$ (иначе $\operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2 + k^2} = 0$).

Нетрудно видеть, что при больших значениях $|\lambda|$ решения уравнения (4.33) при фиксированных k должны быть близки к решениям уравнения (4.22), так как

$$\operatorname{cth}\sqrt{\lambda^2 + k^2} - \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \sim \operatorname{cth}\lambda - \alpha \qquad (|\lambda| \to \infty).$$

Это дает основание для применения численных методов, в частности, применения метода итераций к уравнению, эквивалентному (4.33). Опишем, опираясь на построения в одномерной задаче (4.33), переход от (4.33) к равносильному уравнению, приспособленному к применению метода итераций при достаточно больших $|\lambda|$.

Введем функции

$$\zeta_1(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 + k^2} = \lambda\sqrt{1 + \frac{k^2}{\lambda^2}}, \qquad \zeta_2(\lambda) := \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{\lambda^2}}\right)^{-1}. \tag{4.34}$$

Тогда уравнение (4.33) можно записать в виде

$$\operatorname{cth}\zeta_1(\lambda) = \alpha\zeta_2(\lambda). \tag{4.35}$$

Будем разыскивать решения этого уравнения, близкие к решениям уравнения (4.19) при больших $|\lambda|$, в первом квадранте, т.е. при

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \qquad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0. \tag{4.36}$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 1$. Тогда из (4.35) имеем, с учетом того, что $\operatorname{Re}(\alpha\zeta_2(\lambda) - 1) > 0$ при больших $|\lambda|$, соотношение

$$\zeta_1(\lambda) = \frac{1}{2}\ln_0\frac{\alpha\zeta_2(\lambda) + 1}{\alpha\zeta_2(\lambda) - 1} + i\pi p,\ p = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.37}$$

где $\ln_0 z$ - главная ветвь функции $\ln z$. С учетом замен (4.34) приходим к уравнению

$$\lambda\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}} = \frac{1}{2}\ln_0\frac{\alpha+\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}}}{\alpha-\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}}} + i\pi p,\ p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.38}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\lambda = \varphi^+_{kp}(\lambda;\alpha) := \frac{1}{2}\ln_0\frac{\alpha+\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}}}{\alpha-\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}}} + i\pi p-$$

$$-\frac{k^2}{\lambda(1+\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}})},\ k = 1, 2, \ldots,\ p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.39}$$

уже приспособленному к применению метода итераций, так как при больших $|\lambda|$ функция $\varphi^+_{kp}(\lambda;\alpha)$, как показывает подсчет, имеет малую величину производной и потому является сжимающим отображением.

Будем решать уравнение (4.39) методом итераций по схеме

$$\lambda_{n+1} = \varphi^+_{kp}(\lambda_n;\alpha),\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.40}$$

взяв в качестве начального приближения

$$\lambda_0 = c_+(\alpha) + i\pi p = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha+1}{\alpha-1} + i\pi p,\ p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.41}$$

т.е. решения (4.24) уравнения (4.22).

Вычисления, проведенные с помощью математического пакета Maple 9, приводят к следующим выводам.

1^0. При фиксированном k и $\alpha > 1$ спектр задачи (4.39) дискретный, состоит из собственных значений $\{\lambda^+_{kp}(\alpha)\}_{p=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = \infty$ при $p \to \infty$. Все собственные значения $\{\lambda^+_{kp}(\alpha)\}_{p=1}^{\infty}$ расположены в полосе $0 < \mathrm{Re}\lambda < c_+(\alpha)$.

2^0. При $\alpha \to +\infty$ числа $\lambda^+_{kp}(\alpha)$ движутся по траекториям, близким к горизонтальным, и в пределе переходят на мнимую ось.

3^0.При $p \to +\infty$ имеет место свойство

$$\mathrm{Re}\lambda^+_{kp}(\alpha) - c_+(\alpha) \to 0.$$

Примеры расчетов чисел $\lambda^+_{kp}(\alpha)$ при $k = 2,\ p = 1, 2, \ldots, 8$ и для значений $\alpha = 1,2$ и $\alpha = 1,8$ приведены на рис.1. Соответствующие траектории $\lambda^+_{kp}(\alpha)$ при $1,01 < \alpha < 5$ (с шагом 0,05) для значений $k,\ p = 1, \ldots, 5$ приведены на рис.2.

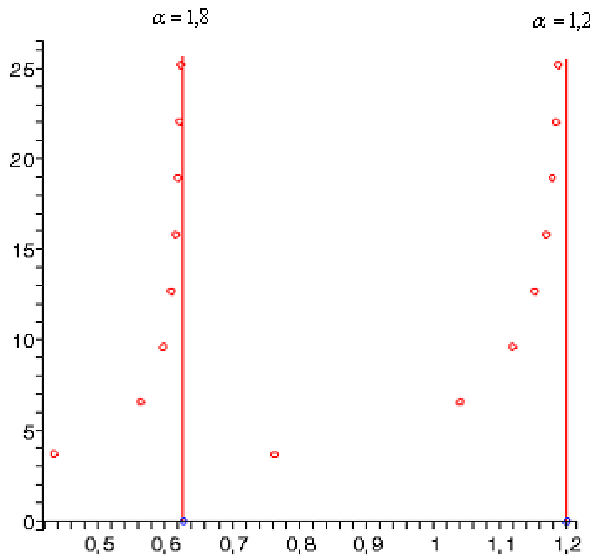

рис. 1
alpha>1

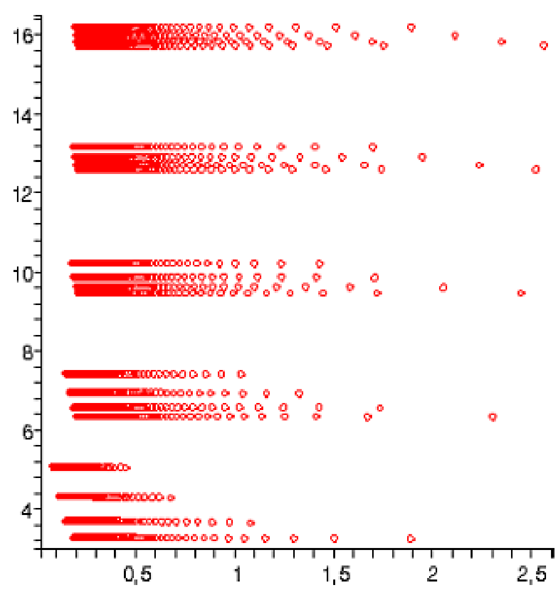

рис. 2

Случай $0 < \alpha < 1$ разбирается аналогично. Здесь вместо (4.37) возникает уравнение

$$\zeta_1(\lambda)=\frac{1}{2}\ln_0\frac{1+\alpha\zeta_2(\lambda)}{1-\alpha\zeta_2(\lambda)}-i\frac{\pi}{2}+i\pi p,\ p=1,2,\ldots, \tag{4.42}$$

где уже учтены условия (4.36) при больших $|\lambda|$. Это уравнение, как и выше, преобразуется к равносильному уравнению

$$\lambda=\varphi_{kp}^{-}(\lambda;\alpha):=\frac{1}{2}\ln_0\frac{\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}}+\alpha}{\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}}-\alpha}+i\frac{\pi}{2}(2p-1)-\frac{k^2}{\lambda(1+\sqrt{1+k^2\lambda^{-2}})}, \tag{4.43}$$

которое далее и решается численно методом итераций, т.е.

$$\lambda_{n+1}=\varphi_{kp}^{-}(\lambda_n;\alpha),\ n=0,1,2,\ldots,\qquad \lambda_0=c_-(\alpha)+i\pi(p-1/2). \tag{4.44}$$

Расчеты, проведенные с помощью пакета Maple 9, здесь приводят к таким выводам.

1^0. При фиксированном k и $0<\alpha<1$ спектр задачи (4.43) дискретный, состоит из собственных значений $\{\lambda_{kp}^{-}(\alpha)\}_{p=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda=\infty$ $(p\to\infty)$. Все собственные значения $\{\lambda_{kp}^{-}(\alpha)\}_{p=1}^{\infty}$ расположены правее прямой $\mathrm{Re}\lambda=c_-(\alpha)$.

2^0. При возрастании α от нуля собственные значения $\lambda_{kp}^{-}(\alpha)$ движутся по траекториям, близким к горизонтальным, отходя от мнимой оси при $\alpha=0$, а при $\alpha\to 1-0$ уходят на ∞.

3^0. При $p\to\infty$ имеет место свойство

$$\mathrm{Re}\lambda_{kp}^{-}(\alpha)-c_\alpha\to 0.$$

Примеры расчетов чисел $\lambda_{kp}^{-}(\alpha)$ при $k=2$ и $\alpha=0.7, 0.8$ и 0.9 для значений $p=1,2,\ldots,8$ показаны на рис. 3, а примеры траекторий собственных значений при возрастании α от 0 до 1 для значений $k=1..5$, $p=1..5$ представлены на рис. 4.

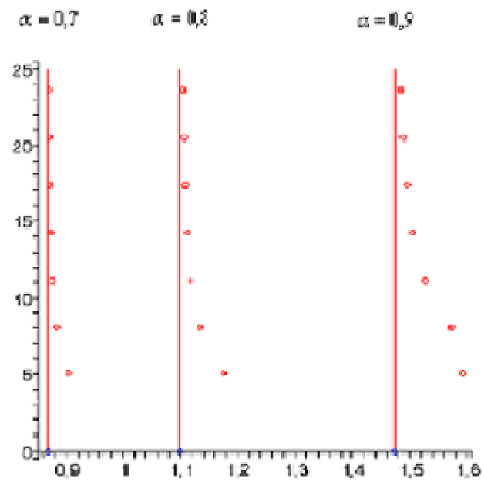

рис. 3

0< alpha<1

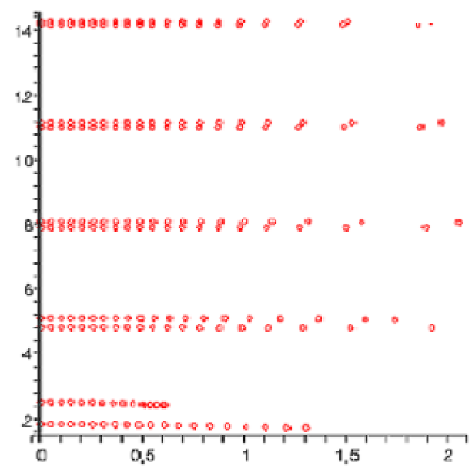

рис. 4

Отметим в заключение этого пункта, что в двумерной задаче (4.27) — (4.29), как и в одномерной задаче (4.19), критическое значение параметра диссипации $\alpha_* = 1$. При этом значении α спектр задачи состоит лишь из бесконечно удаленной точки.

4.5 Цилиндрические области в многомерном пространстве.

Пусть $\Omega = \Gamma \times (0,h)$ — цилиндрическая область в $\mathbb{R}^{m+1}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, S — ее боковая и нижняя поверхности, а Γ_h — верхняя поверхность.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0 \text{ (в } \Omega), \ u = 0 \text{ (на } S), \ \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda\alpha u = 0 \text{ (на } \Gamma_h), \tag{4.45}$$

где $u = u(x,y)$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Gamma$, $y \in (0,h)$, а поверхностная диссипация осуществляется лишь на Γ_h.

Эта задача допускает частичное разделение переменных в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \tag{4.46}$$

что приводит к двум задачам для функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$-\Delta_m X = \mu X, \ x \in \Gamma, \ X = 0, \ x \in \partial\Gamma, \tag{4.47}$$

$$Y'' - (\lambda^2 + \mu)Y = 0, \ y \in (0,h), \ Y(0) = 0, \ Y'(h) - \lambda\alpha Y(h) = 0. \tag{4.48}$$

Задача (4.47), как известно, является спектральной задачей Дирихле для оператора Лапласа $\Delta_m := \sum\limits_{j=1}^{m} \partial^2/\partial x_j^2$, т.е. задачей на собственные значения оператора A_0, который является неограниченным самосопряженным и положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Gamma)$ и имеющим дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_k \leqslant \ldots$, $\mu_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$. При $\mu = \mu_k$ задача (4.48) приводит к характеристическому уравнению

$$\operatorname{cth}(\sqrt{\lambda^2 + \mu_k}\, h) = \alpha \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu_k}}, \tag{4.49}$$

которое при $h = 1$ совпадает с уравнением (4.33) с точностью до замены k на μ_k. Так как $\mu_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то общие свойства решений уравнения (4.49) — те же, что и уравнения (4.33).

Таким образом, и для цилиндрических областей из $\mathbb{R}^{m+1}$ задача (4.45) имеет дискретный спектр, который мигрирует в $\mathbb{C}$ слева направо при возрастании α от 0 до 1 и справа налево при изменении α от 1 до ∞, а при $\alpha_* = 1$ спектр уходит в бесконечно удаленную точку.

4.6 Общая теорема о дискретности спектра.

Вернемся к рассмотрению общей спектральной задачи (4.6), т.е. к задаче о спектре операторного пучка (4.11):

$$L_\alpha(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} - \lambda\alpha B + I. \tag{4.50}$$

Наша цель — доказать, что в случае общего положения для параметра α спектр $L_\alpha(\lambda)$ дискретный с предельной точкой $\lambda = \infty$. Доказательству этого общего факта предпошлем некоторые предварительные рассуждения.

Осуществим в (4.50) замену спектрального параметра по формуле $\lambda = \mu^{-1}$ и рассмотрим вместо $L_\alpha(\lambda)$ операторный пучок

$$M_\alpha(\mu) := \mu^2 I - \mu\alpha B + A^{-1}, \tag{4.51}$$

который при такой замене должен иметь дискретный спектр с предельной точкой $\mu = 0$.

Отметим предварительно, что указанный факт зависит от свойств операторных коэффициентов в пучке $M_\alpha(\mu)$. Действительно, пусть Z — вольтерров оператор, действующий в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве E. (Напомним (см. [20], с.33), что оператор Z называется вольтерровым, если он вполне непрерывен и не имеет отличных от нуля собственных значений). Составим по оператору Z квадратичный самосопряженный операторный пучок

$$M_Z(\mu) := \mu^2 I + \mu B + C, \qquad B = Z + Z^*, \qquad C = Z^* Z. \tag{4.52}$$

Тогда

$$M_Z(\mu) = (\mu I + Z^*)(\mu I + Z), \tag{4.53}$$

откуда видно, что при любом $\mu \neq 0$ пучок $M_Z(\mu)$ обратим, поскольку при этом обратимы оба сомножителя. Отсюда следует, что $M_Z(\mu)$ имеет единственную точку спектра $\mu = 0$.

Заметим еще, что задача на собственные значения для $M_Z(\mu)$, т.е. задача

$$(\mu^2 I + \mu B + C)\varphi = 0,\ \varphi \in E, \tag{4.54}$$

равносильна при $\mu \neq 0$ задаче на собственные значения

$$\begin{pmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

в пространстве $E^2 = E \oplus E$. Оператор

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & -B \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

называют линеаризатором пучка (4.54). Проведенные рассуждения показывают, что линеаризатор $\mathfrak{A}$ пучка (4.54) является вольтерровым оператором, так как он вполне непрерывен и имеет вместе с (4.54) спектр, состоящий лишь из точки $\mu = 0$.

Дальнейшее исследование спектральной задачи для $L_\alpha(\lambda)$ из (4.50) и $M_\alpha(\mu)$ из (4.51) основано на одном общем утверждении, доказанном Т.Я. Азизовым после его обсуждения задачи (4.54) с авторами данной работы. Напомним (см. [20], с. 46, 120), что компактный (вполне непрерывный) оператор принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$, если его s-числа, т.е. собственные значения оператора $(A^*A)^{1/2}$, суммируются со степенью p:

$$\sum_{j=1}^{\infty}(s_j(A))^p = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\lambda_j\left(A^*A\right)^{1/2}\right)\right)^p < \infty.$$

(Здесь под p понимается инфимум тех степеней, при которых ряд сходится). Далее понадобится также следующая теорема В.И. Мацаева (см. [20], с.267).

Теорема 4.1. *Пусть A — вольтерров оператор. Если его мнимая компонента*
$A_J := (A - A^*)/(2i) \in \mathfrak{S}_p$ $(1 < p < \infty)$, *то и его вещественная компонента* $A_{\mathcal{R}} := (A + A^*)/2$ *также принадлежит* $\mathfrak{S}_p$, *и наоборот.*

Итак, докажем следующий абстрактный результат.

Теорема 4.2. *(Т.Я. Азизов). Рассмотрим операторный пучок*

$$L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda B + C^2,\ B = B^* \in \mathfrak{S}_\infty,\ C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{4.57}$$

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$B \in \mathfrak{S}_p,\ C \in \mathfrak{S}_q \backslash \mathfrak{S}_p\ (q > p > 1) \tag{4.58}$$

или

$$B \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{S}_q,\ C = \mathfrak{S}_q \quad (1 < q < p), \tag{4.59}$$

то операторный пучок $L(\lambda)$ имеет счетное множество ненулевых конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$.

Доказательство.

1. Рассмотрим линеаризатор пучка (4.57), т.е. оператор

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ -C & -B \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\mathfrak{A} + i\operatorname{Im}\mathfrak{A}, \tag{4.60}$$

$$\operatorname{Re}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & -iC \\ iC & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

Так как по условиям (4.58) - (4.59) $B \in \mathfrak{S}_p$ и $C \in \mathfrak{S}_q$, то $\operatorname{Re}\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}_p$ и $\operatorname{Im}\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}_q$. Из этих же условий следует, что

$$\operatorname{Im}\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}_q \backslash \mathfrak{S}_p \ (q > p) \ \text{ либо } \ \operatorname{Re}\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{S}_q \ (q < p).$$

Тогда по теореме 4.1 получаем, что в обоих случаях оператор $\mathfrak{A}$ не является вольтерровым. Поэтому у него имеются ненулевые конечнократные (т.е. нормальные (см. [20], с. 23)) собственные значения.

2. Предположим, что множество ненулевых собственных значений оператора $\mathfrak{A}$ конечно и состоит из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Рассмотрим линейную оболочку

$$\mathcal{L} := \text{л.о.}\{\mathcal{L}_{\lambda_j}(\mathfrak{A})\}_{j=1}^{s}, \tag{4.62}$$

где $\mathcal{L}_{\lambda_j}(\mathfrak{A})$- корневое подпространство (состоящее из собственных и присоединенных элементов) оператора $\mathfrak{A}$, отвечающее собственному значению $\lambda_j \neq 0$. Так как $\dim \mathcal{L}_{\lambda_j}(\mathfrak{A}) < \infty$, то $\dim \mathcal{L} < \infty$. Пусть

$$E^2 = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\perp}. \tag{4.63}$$

Так как $\mathcal{L}$ — инвариантное подпространство для $\mathfrak{A}$, то в ортогональном разложении (4.63) матричное представление оператора $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_{01} \\ 0 & \mathfrak{A}_1 \end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_p, \ \operatorname{Im}\, \mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_q \backslash \mathfrak{S} p \ (q > p), \tag{4.65}$$

либо

$$\operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{S}_q, \ \operatorname{Im}\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_q \ (q < p). \tag{4.66}$$

В самом деле, пусть P — ортопроектор на $\mathcal{L}^{\perp}$. Тогда

$$\operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_1 = P(\operatorname{Re}\, \mathfrak{A})|\mathcal{L}^{\perp}, \ \operatorname{Im}\, \mathfrak{A}_1 = P(\operatorname{Im}\, \mathfrak{A})|\mathcal{L}^{\perp}.$$

Из представлений

$$\operatorname{Re}\, \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{01} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{01}^* & \operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\, \mathfrak{A}_0 & \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{01} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{01}^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Im}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\mathfrak{A}_0 & \dfrac{1}{2i}\mathfrak{A}_{01} \\ -\dfrac{1}{2i}\mathfrak{A}_{01}^* & \operatorname{Im}\mathfrak{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Im}\mathfrak{A}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\mathfrak{A}_0 & \dfrac{1}{2i}\mathfrak{A}_{01} \\ -\dfrac{1}{2i}\mathfrak{A}_{01}^* & 0 \end{pmatrix},$$

и конечномерности вторых слагаемых в правых частях этих формул получаем, что

$$\operatorname{Re}\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_p,\ \operatorname{Im}\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_q,$$

причем

$$\operatorname{Im}\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_q \backslash \mathfrak{S}_p,\ (q > p) \tag{4.67}$$

либо

$$\operatorname{Re}\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{S}_q\ (q < p). \tag{4.68}$$

3. Опираясь на (4.67), (4.68), воспользуемся снова теоремой 4.1 и придем к выводу, что оператор $\mathfrak{A}_1$ не является вольтерровым. Тогда он имеет ненулевое нормальное собственное значение λ_0.

Если $\lambda_0 \neq \lambda_j,\ j = 1, \ldots, s$, то задача на собственные значения для оператора $\mathfrak{A}$, представимого в виде матрицы (4.64), т.е. задача

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0 - \lambda_0\mathfrak{I} & \mathfrak{A}_{01} \\ 0 & \mathfrak{A}_1 - \lambda_0\mathfrak{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.69}$$

имеет ненулевое решение. Действительно, из (4.69) следует, что $\varphi_1 \in \operatorname{Ker}(\mathfrak{A}_1 - \lambda_0\mathfrak{I})$,
$\varphi_0 = -(\mathfrak{A}_0 - \lambda_0\mathfrak{I})^{-1}\mathfrak{A}_{01}\varphi_1$. Возникло противоречие с тем, что $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ — все собственные значения оператора $\mathfrak{A}$.

Если λ_0 совпадает с одним из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, то это число λ_0 является собственным значением как оператора $\mathfrak{A}_1$, так и оператора $\mathfrak{A}_0$. Тогда если $\varphi_1 \neq 0$ — соответствующий собственный элемент оператора $\mathfrak{A}_1$, т.е. $(\mathfrak{A}_1 - \lambda_0\mathfrak{I})\varphi_1 = 0$, то можно проверить, что

$$(\mathfrak{A} - \lambda_1\mathfrak{I})^{p_1+1}(\mathfrak{A} - \lambda_2\mathfrak{I})^{p_2+1} \ldots (\mathfrak{A} - \lambda_s\mathfrak{I})^{p_s+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

где p_j — максимальная длина жордановой цепочки из собственного и присоединенных к нему элементов, отвечающей собственному значению $\lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, s$. Следовательно, элемент

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \in \text{ л.о. } \{\mathcal{L}_{\lambda_j}(\mathfrak{A})\}_{j=1}^{s} = \mathcal{L} \subset E^2 \tag{4.71}$$

и по выбору ортогонален этой линейной оболочке. Возникло противоречие с тем, что $\varphi_1 \neq 0$.

Это противоречие и предыдущее доказывают, что справедливо утверждение теоремы, т.е. при выполнении условий (4.58) или (4.59) операторный пучок $L(\lambda)$ из (4.57) имеет счетное множество ненулевых нормальных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$. $\square$

Замечание 4.1. *Свойство* (4.70) *следует из того, что в ортогональном разложении* (4.63)

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \perp \mathcal{L}, \qquad (\mathfrak{A} - \lambda_0 \mathfrak{I}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{01}\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}. \quad (4.72)$$

Из теоремы 4.2 получаем такое утверждение.

Следствие 4.1. *Если выполнены условия теоремы 4.2, то спектр операторного пучка*

$$M(\mu) := I + \mu B + \mu^2 C^2 \quad (4.73)$$

дискретен с предельной точкой $\mu = \infty$.

В самом деле,

$$M(\mu) = \lambda^{-2}(\lambda^2 I + \lambda B + C^2) = \lambda^{-2} L(\lambda), \ \lambda = \mu^{-1}, \quad (4.74)$$

а спектр $L(\lambda)$ дискретен с предельной точкой $\lambda = 0$.

Следующий результат характеризует свойства спектра пучка (4.50).

Теорема 4.3. *Пусть в операторном пучке* $L_\alpha(\lambda)$ *из* (4.50) *выполнены условия* $B \in \mathfrak{S}_p$, $A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_q \backslash \mathfrak{S}_p$ $(q > p > 1)$ *либо* $B \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{S}_q$, $A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_q$ $(1 < q < p)$. *Тогда спектр* $L_\alpha(\lambda)$ *дискретен с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *В частности, если собственные значения* $\lambda_j(A^{-1})$ *и* $\lambda_j(B)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_j(A^{-1}) = c_A j^{-\alpha}[1 + o(1)], \ \lambda_j(B) = c_B j^{-\beta}[1 + o(1)], \ 0 < \alpha, \ \beta < 1, \ j \to \infty, \quad (4.75)$$

причем выполнено условие

$$\alpha \neq 2\beta, \quad (4.76)$$

то спектр $L_\alpha(\lambda)$ *дискретен.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы получается из следствия 4.1 с заменой μ на λ, B на $-\alpha B$, C^2 на A^{-1}, т.е. $C = A^{-1/2}$.

Заметим теперь, что асимптотические формулы вида (4.75) являются типичными для операторов краевых задач математической физики. Из (4.75), в частности, следует, что $B \in \mathfrak{S}_p$ при $p > \beta^{-1}$, а $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q$ при $q > \alpha^{-1}$. Поэтому $A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_{2q}$, и для выполнения условий первой части теоремы необходимо и достаточно, чтобы имело место свойство (4.76). $\square$

Из этого утверждения для задачи (4.3) получаем следующий результат.

Теорема 4.4. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^m$ с кусочно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ (с ненулевыми внутренними и внешними углами), $m \geqslant 3$. Тогда задача* (4.3) *имеет дискретный спектр, состоящий и конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = \infty$.*

Доказательство. Так как задача (4.3) равносильна задаче на собственные значения для пучка $L_{\alpha(\lambda)}$ из (4.50), то в силу теоремы 4.3 достаточно убедиться, что выполнены условия этой теоремы.

Собственные значения $\lambda_j(A^{-1})$ оператора A^{-1} , как следует из формулы (2.14), имеют асимптотическое поведение вида (4.75) с показателем степени $\alpha = 2/m$. Соответственно собственные значения оператора B имеют вид (2.28), т.е. для него показатель степени $\beta = 1/(m-1)$. Отсюда видно, что при $m \geqslant 3$ будет $\alpha, \beta < 1$ и $2\beta \neq \alpha$. Это доказывает теорему. $\square$

5 Приложения и обобщения.

В этом параграфе будут приведены кратко те задачи с поверхностной диссипацией энергии, которые попадают в общую абстрактную схему, разобранную в параграфах 3 и 4.

5.1 Задачи с равномерно эллиптическим формально самосопряженным дифференциальным выражением.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ - ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(t,x) \text{ (в } \Omega), \ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ (на } \Gamma), \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = u^0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x), \ x \in \Omega. \tag{5.2}$$

Здесь

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c(x)u, \ c(x) \geqslant c > 0, \tag{5.3}$$

$$\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant c_0^2 \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2, \ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\widehat{\vec{n}, x_k}), \tag{5.5}$$

т.е. L является равномерно эллиптическим формально самосопряженным дифференциальным выражением, а $\partial u/\partial\nu$ - соответствующая производная по конормали.

Эта задача является частным случаем абстрактной задачи (3.1) — (3.3), когда

$$E = L_2(\Omega),\ G = L_2(\Gamma),\ \gamma u := u|_\Gamma,\ \partial u = \partial u/\partial\nu, \tag{5.6}$$

$$F = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u}{\partial x_k}} + c(x)|u|^2 \right) d\Omega < \infty \right\} \tag{5.7}$$

— пространство с нормой, эквивалентной норме $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Поэтому для задачи (5.1) — (5.2), а также для соответствующей спектральной проблемы справедливы общие утверждения, полученные в параграфах 3 и 4.

5.2 Эволюционные задачи, содержащие сильно эллиптическую подсистему дифференциальных выражений второго порядка.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_a u = f(t,x) \text{ (в } \Omega), \tag{5.8}$$

где $u = (u_1(x), \ldots, u_n(x))^t$ — искомый столбец высоты n,

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j [a_{jk}(x) \partial_k u(x)] + c(x)u(x),\ \partial_j = \partial/\partial x_j, \tag{5.9}$$

$$a_{jk}(x) = (a_{jk}^{rs})_{r,s=1}^{n},\ j,k = 1, \ldots, m, \tag{5.10}$$

матрицы, подчиненные условию симметрии:

$$a_{jk}^*(x) = a_{kj}(x) \Leftrightarrow\ a_{jk}^{rs}(x) = \overline{a_{kj}^{sr}(x)}, \tag{5.11}$$

матрица $c(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т.е. $c^*(x) = c(x) \gg 0$.

Пусть

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} \nu_j(x) a_{jk}(x) \partial_k u(x) \tag{5.12}$$

— производная по конормали, отвечающая дифференциальному выражению из (5.9), а $\nu = (\nu_1(x), \ldots, \nu_m(x))^t$ - единичный вектор внешней нормали к

Г. Тогда динамическое граничное условие на Г, отвечающее поверхностной диссипации энергии, имеет вид

$$\partial_{\nu_a} u + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ (на } \Gamma). \tag{5.13}$$

Можно доказать, опираясь, например, на работу [21], что при определенных дополнительных условиях задача (5.8) — (5.13) (вместе с соответствующими начальными условиями) также является частным случаем абстрактной задачи (3.1) — (3.3).

5.3 Уравнения линейной теории упругости.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Ламе.

Пусть $L = L(\partial_x)$ — оператор Ламе классической теории упругости, т.е. 3×3 матрица с элементами L_{jk}, являющимися дифференциальными выражениями вида

$$L_{jk} := \beta\delta_{jk}\Delta + (\varepsilon + \beta)\partial_j\partial_k, \ \partial_j := \partial/\partial x_j, \ j, k = 1, 2, 3, \tag{5.14}$$

где Δ — лапласиан в $\mathbb{R}^3$. Коэффициенты Ламе ε и β постоянны и удовлетворяют стандартным неравенствам

$$\beta > 0, \ 3\varepsilon + 2\beta > 0.$$

Рассмотрим уравнение классической теории упругости в форме

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \mathcal{L}\vec{u} = \vec{f}(t, x) \text{ (в } \Omega), \tag{5.15}$$

где $\vec{u} = \sum\limits_{k=1}^{3} u_k(t, x)\vec{e}_k$ — векторное поле смещений упругой среды, а

$$\mathcal{L}\vec{u} = \vec{u} - L(\partial_x)\vec{u}. \tag{5.16}$$

Введем матрицу напряжений $\mathcal{P}(\partial_x, \vec{e}(x))$ в направлении $\vec{e} = \vec{e}(x)$ с элементами

$$P_{jk} := \varepsilon e_j(x)\partial_k + \beta e_k(x)\partial_j + \beta\delta_{jk}\partial_{\vec{e}(x)} \tag{5.17}$$

и обозначим

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(\partial_x, \vec{n}(x)), \tag{5.18}$$

где $\vec{n}(x)$ — внешняя нормаль к Г. Тогда граничное условие на Г с поверхностной диссипацией энергии будет иметь вид

$$\mathcal{P}\vec{u} + \alpha \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma), \ \alpha > 0. \tag{5.19}$$

Можно доказать, опираясь на неравенство Корна, что начально-краевая задача (5.14) — (5.19) тоже является частным случаем задачи (3.1) — (3.3) и обладает теми же свойствами ее решений. Это утверждение относится также и к соответствующей спектральной проблеме.

5.4 Задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии.

Общий операторный подход, примененный в параграфах 3 и 4 для эволюционной и спектральной задачи с поверхностной диссипацией энергии, может быть использован также и в случае, когда рассматриваются две области (две среды), имеющие общую границу Γ, на которой осуществляется поверхностная диссипация энергии.

Рассмотрим для простоты лишь случай, когда эллиптическую часть задачи представляет оператор Лапласа.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — ограниченные области в $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей, причем область Ω_2 объемлет область Ω_1 и потому $\partial\Omega_1 = \Gamma,\ \partial\Omega_2 = \Gamma \cup S$, где S — внешняя граница $\Omega_2,\ \Gamma \cap \mathrm{S} = \oslash$.

Рассмотрим в областях Ω_1 и Ω_2 уравнения

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \Delta u_i = f_i(t,x) \ (\text{ в } \Omega_i),\ i = 1,2, \tag{5.20}$$

а также краевые условия

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} + u_1 + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0,\ u_1 = u_2 \ (\text{ на } \Gamma),\ u_2 = 0 \ (\text{ на } S). \tag{5.21}$$

Здесь $\vec{n}$ — орт внешней нормали к Ω_1, а $\alpha > 0$ — параметр поверхностной диссипации.

Можно доказать, что задача (5.20) — (5.21) является частным случаем абстрактной задачи (3.1) — (3.3), когда

$$E = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2),\ G = L_2(\Gamma),$$

F — подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega_1) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega_2)$ тех пар элементов $u := (u_1; u_2)$, для которых выполнены условия $u_1 = u_2$ на $\Gamma,\ u_2 = 0$ на S.

Задачу вида (5.20) — (5.21) можно обобщить, подобно задаче (3.1) — (3.3), на случай, когда имеются две формулы Грина для трех пространств $E_1,\ F_1$ и G, а также E_2, F_2 и G, и соответствующих операторов следа γ_1 и γ_2. Более подробно этот подход будет отражен в последующих публикациях авторов.

5.5 Стыковые задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии.

Задачи п. 5.4 можно обобщить также на случай, когда не две, а произвольное конечное количество ограниченных областей Ω_k, $k = 1, 2, \dots, p$, из $\mathbb{R}^m$ имеют общие части границ, на которых заданы динамические условия, обеспечивающие поверхностную диссипацию энергии. Для простоты рассмотрим лишь случай трех областей Ω_1, Ω_2 и Ω_3 из $\mathbb{R}^2$, имеющих общие части границ $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, $\Gamma_{13} = \Gamma_{31}$ и $\Gamma_{23} = \Gamma_{32}$, а также внешние части $\Gamma_{11} = S_1$, $\Gamma_{22} = S_2$ и $\Gamma_{33} = S_3$ соответственно.

Тогда соответствующая задача формулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \Delta u_i = f_i(t,x) \ (\text{ в } \Omega_i),\ u_i = 0 \ (\text{ на } S_i),\ i = 1,2,3, \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} + \frac{\partial u_j}{\partial n_{ji}} + u_i + \alpha \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \ (\text{ на } \Gamma_{ij}),\ u_i = u_j \ (\text{ на } \Gamma_{ij}),\ i = 1,2,3, \tag{5.23}$$

где n_{ij} - внешняя нормаль из Ω_i к Γ_{ij}.

Здесь в качестве E следует взять $E = \oplus_{j=1}^{3} L_2(\Omega_j)$, в качестве G — пространство $\oplus_{j<k} L_2(\Gamma_{jk})$, а в качестве F — подпространство пространства $\oplus_{j=1}^{3} \mathcal{H}^1(\Omega_j)$, для элементов которого выполнены последние условия (5.22) и (5.23).

Можно доказать, что задачи вида (5.22) — (5.23) попадают в разобранную выше операторную схему, т.е. для них также справедливы общие выводы параграфов 3 и 4.

Авторы благодарят Т.Я. Азизова и Д.А. Закору за обсуждение проблем, исследованных в данной работе, и совместное творчество.

Список литературы

[1] Chueshov,I., Eller,M., Lasiecka,I. Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation // Comunications in Partial Differential Equations, Vol. 29, № 11-12, pp. 1847-1876,2004.

[2] Chueshov,I. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. Kharkov: Acta. In: Russian, English translation: Kharkov: Acta, 2006. See also http://www.emis.de/monographs/Chueshov.

[3] Chueshov,I., Lasiecka,I.(2004). Global attractors for von Karman evolutions with a nonliner boundary dissipations. J. Diff. Equations 198: 196-231.

[4] Lagnese,J.(1983). Decay of the solution of the wave equation in a bounded region wiyh boundary dissipation. J. Diff. Equations 50: 163-182.

[5] Lasiecka,I., Tataru,D.(1993) Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation. Diff. Integral Equations 6: 507-533.

[6] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[7] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи//Украинский математ. вестник, Т.1, №1(2004), — с.69-97.

[8] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики(ТВИМ), Симферополь, №2, 2004. — с.52– 80.

[9] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина и задача Стокса // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред.

[10] Андронова О.А. Начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии // Таврическая научная конференция студентов и специалистов по информатике и математике — Симферополь, 2005.–с.3-7

[11] Андронова О.А. Начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии // Таврическая научная конференция студентов и специалистов по информатике и математике — Симферополь, 2006.–с.5-8

[12] Андронова О.А. Начально-краевые задачи математической физики с поверхностной диссипацией энергии (Выпускная работа магистра) // Таврический Национальный Университет им. В.И.Вернадского, Симферополь, 2006. — 60 с.(рукопись).

[13] Kopachevsky N.D. Abstract Creen's Formula. Abstract Spectral and Evolution Problems // The Fourth Intern. Conf. on Diff. and Functional-Diff. Eqs, Moscow, Russia, August 14-21, 2005, pp. 48-49 (Abstracts).

[14] Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol.1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001, 384 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol.128).

[15] Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol.2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2003, 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol.146).

[16] Вулис И.Л., Соломяк М.З. Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова // Вестник ЛГУ. — 1973. — №19. — с. 148-150.

[17] Каразеева Н.А., Соломяк М.З. Асимптотика спектра задачи типа Стеклова в составных областях // Проблемы матем. анализа. Вып.8. — Л.: Изд-во ЛГУ. — 1981. — с. 36-48.

[18] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[19] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989. — 347.

[20] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448с.

[21] Агранович М.С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей. // Успехи математических наук. 2002, Т.57, вып.5(347), с. 3-78.