Современная математика. Фундаментальные направления. Том (). С. 1–32

К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ.

© г. Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

Аннотация. В работе проводится подробное рассмотрение проблемы на основе новых результатов, полученных в последнее время автором. Сначала даётся постановка задачи. Затем осуществляется переход к системе операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Далее начально-краевая задача приводится к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения, и на этой основе доказывается теорема о её однозначной разрешимости. Затем исследуются нормальные колебания гидросистемы при условии статической устойчивости по линейному приближению. Доказаны утверждения о структуре спектра задачи и о базисности системы корневых (собственных и присоединенных) функций. Наконец, при невыполнении условия статической устойчивости доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

1.1. К истории вопроса. Задачи о малых движениях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости, когда требуется принимать во внимание действие капиллярных (поверхностных) сил, изучались в шестидесятые – восьмидесятые годы прошлого века в многочисленных статьях.

Библиографию по этой проблеме можно найти, например, в монографиях [1] – [3]. Операторный подход к исследованию задач подобного рода подробно описан сначала в [4], а затем в [5] – [6].

Особенностью этой начально-краевой проблемы является то обстоятельство, что при ее постановке производные по времени от решения входят не только в уравнение (Навье – Стокса), но и в граничное (кинематическое) условие . Кроме того, ввиду действия капиллярных сил порядок дифференциального оператора (Лапласа – Бельтрами) на равновесной поверхности жидкости – такой же, как и в основном уравнении. Эти обстоятельства усложняют исследование задачи. При этом соответствующая задача о нормальных движениях, т.е. решениях, зависящих от времени по закону $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, приводит к несамосопряженной спектральной проблеме, недостаточно исследованной и до настоящего времени.

Отметим еще, что до сих пор в основном изучались так называемые обобщенные (ослабленные) решения, а в спектральной проблеме устанавливались свойства полноты (а не базисности) системы корневых функций. В данной работе делается определенный шаг в доказательстве теоремы существования сильных решений, а кроме того – доказано свойство базисности (по Абелю – Лидскому) системы корневых функций.

В задачах механики систем с конечным числом степеней свободы хорошо известен следующий факт, который называется обращением теоремы Лагранжа об устойчивости. Пусть рассматриваются малые движения диссипативной системы (системы с трением) относительно некоторого стационарного режима движения (покоя, равномерного вращения). Если для данной системы матрица потенциальной энергии (она самосопряженная) имеет отрицательное собственное значение и потому система является статически неустойчивой по линейному приближению, то эта система является и динамически неустойчивой, т.е. найдутся такие малые движения системы относительно стационарного режима движения, которые экспоненциально возрастают со временем.

В задачах механики сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы, получение достаточных условий неустойчивости представляет собой зачастую довольно нетривиальную задачу. Здесь естественно, прежде всего, вместо теории матриц применять методы теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Кроме того, спектр оператора потенциальной энергии может оказаться не дискретным и потому исследование задачи динамики системы усложняется.

В данной работе указанная проблема изучается для случая малых движений капиллярной вязкой вращающейся жидкости, частично заполняющей некоторый контейнер. Даётся подробное доказательство обращения теоремы Лагранжа об устойчивости малых движений жидкости, близких к состоянию покоя либо равномерного вращения вокруг вертикальной оси. Первые публикации по этой проблеме содержатся в работах [7] – [10]. Более подробное, но далеко не полное доказательство имеется в параграфе 9.3 второго тома монографии [5] – [6]. Эти обстоятельства, а также многочисленные полезные обсуждения данного круга проблем с проф. В.А. Солонниковым побудили автора написать эту статью с подробными пояснениями. Автор благодарен также проф. В.А. Солонникову за приглашение в университет г. Феррара (Италия) в июне 2004 г.

Отметим еще, что если жидкость не вязкая, а идеальная, то кориолисовы (гироскопические) силы могут статически неустойчивую систему сделать устойчивой (эффект гироскопической стабилизации). Если таких сил нет, то для идеальной капиллярной жидкости обращение теоремы Лагранжа об устойчивости имеет место. Доказательство этого факта можно найти, например, в [1], с. 280–282, [2], с. 306–308, [4], с. 166, [5], с. 208.

1.2. О методах исследования и результатах данной работы. Естественной математической базой для исследования линейных начально-краевых задач гидродинамики являются методы функционального анализа, теории краевых и спектральных задач, теории линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, а также спектральной теории несамосопряженных операторов.

В параграфе 2 дается полная математическая постановка проблемы малых движений капиллярной вязкой жидкости в равномерно вращающемся частично заполненном сосуде. Затем вводятся необходимые функциональные пространства и их оснащения.

Далее приводится формулировка теоремы о наличии абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств, удовлетворяющих определенным связям, а также абстрактного оператора следа. Эта формула является далеко идущим обобщением обычной формулы Грина для оператора Лапласа. Здесь она находит применение при сведении исходной начально-краевой задачи к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений (п. 2.5).

В параграфе 3 рассматривается вопрос о разрешимости начально-краевой задачи. Доказывается, что при выполнении условия статической устойчивости по линейному приближению (см. (85)) эта задача приводится к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве (п. 3.1). На этой основе установлено существование и единственность сильного решения задачи Коши, ассоциированной с исходной начально-краевой задачей (теорема 6). Если решение обладает дополнительными свойствами гладкости по t (см. определение 4), то решения исходной начально-краевой задачи также обладают дополнительными свойствами гладкости (теорема 7).

Далее в параграфе 4 изучаются нормальные колебания гидросистемы при условии статической устойчивости по линейному приближению. Формулируется постановка спектральной задачи, дается определение базисности системы элементов по Абелю–Лидскому. Формулируется абстрактная теорема (теорема 8), дающая достаточные условия базисности (по Абелю–Лидскому) системы корневых элементов несамосопряженного оператора с дискретным спектром и позволяющая установить асимптотику характеристических чисел этого оператора. На этой основе в п. 4.3 доказан основной результат (теорема 9) о свойствах спектра задачи о нормальных колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости, базисности по Абелю–Лидскому системы корневых элементов и об асимптотическом поведении собственных значений (дискретного) спектра этой задачи. В частности, установлено, что если выполнено условие статической устойчивости по линейному приближению (т.е. потенциальная энергия системы в состоянии относительного равновесия имеет грубый минимум), то все нормальные движения гидросистемы являются асимптотически затухающими.

В параграфе 5 подробно рассматривается случай, когда условие статической устойчивости по линейному приближению не выполнено и оператор потенциальной энергии имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение. Сначала (в п.5.1) исследутся задача для невращающейся жидкости. Предварительно устанавливается некоторые вспомогательные утверждения (теоремы 10 – 11, леммы 7 – 11), а затем доказываются основные утверждния для невращающейся жидкости (теоремы 12 – 13). Следствием этих утверждений является обращение теоремы Лагранжа об устойчивости (теорема 14) при $\omega_0 = 0$. Далее в п.5.2 рассматривается случай вращающейся жидкости ($\omega_0 \neq 0$) и также доказывается обращение теоремы Лагранжа об устойчивости (теорема 15).

Отметим в заключение,что при доказательствах этих теорем дважды применен метод продолжения решений по параметру (по вязкости жидкости и по искусственно введенному параметру ε, см. доказательства теорем 13 – 15).

2. Математическая постановка задачи и переход к системе операторных уравнений

2.1. Физическая и математическая постановки задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ частично заполняет произвольный контейнер (сосуд) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в невозмущенном состоянии равномерно вращается вместе с ним с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3. Будем считать, что система координат $Ox_1x_2x_3$ жестко связана с сосудом, а внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т.е. $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

В состоянии относительного равновесия давление $P_0(x)$ в жидкости распределено по закону

$$P_0(x) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + c \quad (\text{в } \Omega), \quad c \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

т.е. определяется действием гравитационных и центробежных сил. Если гравитационные силы достаточно велики, т.е. жидкость можно считать тяжелой, то на равновесной поверхности Γ выполняется условие

$$(P_0)_\Gamma = p_a, \tag{2}$$

где p_a — внешнее постоянное давление. Отсюда и из (1) заключаем, что в этом случае Γ является параболоидом вращения, уравнение которого имеет вид

$$x_3 = \frac{1}{2g}\,\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{c - p_a}{\rho g}. \tag{3}$$

Постоянная c в (3) находится из условия равенства объема области Ω, занятой жидкостью при твердотельном вращении, заданному значению V:

$$\int_\Omega d\Omega = V. \tag{4}$$

В слабом гравитационном поле и при медленном вращении системы жидкость следует считать капиллярной, т.е. учитывать действие поверхностных сил. Тогда форма равновесной поверхности Γ определяется не из (3), (4), а из условия Лапласа для скачка давлений:

$$(P_0)_\Gamma - p_a = -\sigma(k_1 + k_2) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{5}$$

где $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе „жидкость – газ", а k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ.

С учетом (1) условие (5) приводит к соотношению

$$-\sigma(k_1 + k_2) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\,\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + c - p_a, \tag{6}$$

которое представляет собой нелинейное уравнение в частных производных для функции $x_3 = f(x_1, x_2)$, задающей уравнение свободной поверхности Γ. На её границе $\partial\Gamma$ должно выполняться краевое условие Дюпре – Юнга

$$\sigma\cos\delta = \sigma_1 - \sigma_0, \tag{7}$$

где δ — краевой угол (угол смачивания), $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$, $\sigma_1 \geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе „газ – твердое тело", а $\sigma_0 \geqslant 0$ — такой же коэффициент на границе „жидкость – твердое тело".

Уравнение (6), краевое условие (7) и дополнительное условие (4) позволяет в принципе определить по заданному объему жидкости V, характеристикам трех сред (σ, σ_1 и σ_0) на линии контакта $\partial\Gamma$ и интенсивности гравитационного поля g конфигурацию области Ω, занятой жидкостью, в частности, найти уравнение равновесной поверхности Γ. В общем случае это сложная нелинейная задача. Если сосуд, содержащий жидкость, осесимметричен и его ось симметрии совпадает с осью вращения, то задача о нахождении равновесного состояния системы существенно упрощается. Достаточно подробно она рассматривается в первых частях монографий [1] — [3].

Будем считать, что статическая задача решена, и рассмотрим движения жидкости в сосуде, близкие к твердотельному вращению. Представим давление $P(t,x)$ в жидкости в виде

$$P(t,x) = P_0(x) + p(t,x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \tag{8}$$

где $p(t,x)$ — динамическое давление. Тогда для искомого поля $\vec{u}(t,x)$, описывающего движение жидкости в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с равномерно вращающимся сосудом, и динамического давления $p(t,x)$ имеем следующую систему линеаризованных уравнений Навье – Стокса (см., например, [4], с. 313, 356 – 357):

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - 2\omega_0\vec{u}\times\vec{e}_3 + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\Delta\vec{u} + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{9}$$

где $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, а $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле $-\vec{g}\vec{e}_3$. Обозначим через S твердую стенку сосуда Ω, контактирующую с жидкостью в состоянии относительного равновесия. Тогда граница $\partial\Omega$ состоит из (замыкания) S и Γ, а на S для вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания:

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S). \tag{10}$$

Кинематические и динамические условия на Γ удобно записать в криволинейной системе координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$, в которой уравнение Γ принимает вид $\xi^3 = 0$, коэффициент Ламе $h_3\big|_\Gamma \equiv 1$, а нормаль $\vec{n}$ направлена вне Ω. Тогда, считая, что свободная движущаяся поверхность $\widetilde{\Gamma}(t)$ имеет уравнение

$$\xi^3 = \zeta(t, \widehat{\xi}), \quad \widehat{\xi} := (\xi^1, \xi^2) \in \Gamma, \tag{11}$$

приходим к кинематическому условию

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{12}$$

Динамические условия на Γ состоят в равенстве нулю касательных напряжений и в равенстве нормального напряжения скачку давлений, возникающего вследствие действия гравитационных, капиллярных и центробежных сил. Если через $u_{i,k}$ обозначить ковариантную производную ковариантного вектора u_i по переменной ξ^k, то указанные условия на Γ будут выглядеть следующим образом:

$$\rho\nu(u_{i,3} + u_{3,i}) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

$$-p + 2\rho\nu u_{3,3} = -\mathcal{L}_\sigma \zeta := \sigma \Delta_\Gamma \zeta - a_\Gamma \zeta, \tag{14}$$

$$a_\Gamma := -\sigma(k_1^2 + k_2^2) + \rho g \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}) - \rho\omega_0^2 r \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_r}), \tag{15}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа – Бельтрами, определенный на функциях, заданных на Γ, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а $\vec{e}_r$ — орт вдоль оси Or цилиндрической системы координат $Or\theta x_3$, введенной по декартовой системе $Ox_1x_2x_3$.

Для полной постановки начально-краевой задачи о малых движениях вращающейся капиллярной жидкости следует еще добавить два соотношения и начальные условия. Именно, так как на твердой стенке S не только скорости, но и перемещения частиц жидкости равны нулю, то будем считать по непрерывности, что на контуре $\partial\Gamma$, т.е. на линии пересечения поверхностей Γ и S, выполнено условие

$$\zeta(t, \widehat{\xi}) = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma). \tag{16}$$

Кроме того, функция $\zeta(t, x)$ должна удовлетворять условию сохранения объема при колебаниях. Это условие получается вариацией соотношения (4) и принимает вид

$$\int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0. \tag{17}$$

Наконец, при $t = 0$ следует задать начальные условия

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad x \in \Omega; \quad \zeta(0, \widehat{\xi}) = \zeta^0(\widehat{\xi}), \quad \widehat{\xi} \in \Gamma. \tag{18}$$

Таким образом, искомые функции $\vec{u}(t, x)$, $p(t, x)$ и $\zeta(t, \widehat{\xi})$ должны являться решениями уравнений (9), краевых условий (10), (12) – (16), интегральной связи (17) и начальных условий (18). При этом физические параметры системы и функция $a_\Gamma(\widehat{\xi})$ из (15) считаются заданными, так же, как и функции $\vec{f}(t, x)$, $\vec{u}^0(x)$ и $\zeta^0(\widehat{\xi})$. Эта задача рассматривается в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей: равновесной поверхности Γ, которую можно считать достаточно гладкой (бесконечно дифференцируемой), а также твердой стенки S, которую будем считать липшицевой. Кроме того, полагаем, что двугранный угол δ между Γ и S (он постоянен в силу (7)) удовлетворяет условиям

$$0 < \delta < \pi. \tag{19}$$

Следовательно, в целом граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является липшицевой. Отметим еще, что функция $a_\Gamma(\widehat{\xi})$ из (15) непрерывна в замкнутой области $\overline{\Gamma}$, так как Γ достаточно гладкая.

2.2. Основные функциональные пространства. Исследование сформулированной проблемы будем проводить методами функционального анализа и теории уравнений в частных производных. В связи с этим введем необходимые для дальнейшего функциональные гильбертовы пространства (см. [4], параграфы 2.1 и 2.2).

1^0. Пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|\vec{u}\|_\Omega^2 := \int_\Omega |\vec{u}(x)|^2 \, d\Omega \tag{20}$$

и соответствующим скалярным произведением. Если $\vec{u}(x)$ — поле скоростей жидкости в области Ω, то элементам $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ отвечают поля скоростей с конечной кинетической энергией.

Далее нам понадобится ортогональное разложение $\vec{L}_2(\Omega)$ в форме

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{J}_{0,S}(\Omega), \tag{21}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega) : \quad \vec{w} = \nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma)\}, \tag{22}$$

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ (на } S)\}. \tag{23}$$

Здесь опрации $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [4], с. 100 – 102.

Отметим, что элементы из подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ описывают поля скоростей идеальной жидкости в открытом сосуде.

2^0. При движении однородной вязкой жидкости в сосуде тензор напряжений, возникаюих от действия вязких сил, имеет компоненты

$$\mu\tau_{ij} := \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2,3, \tag{24}$$

где $\mu = \rho\nu > 0$ — коэффициент динамической вязкости. Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии, скорость которой вычисляется по формуле

$$\mu E(\vec{u},\vec{u}) := \frac{1}{2}\,\mu\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\tau_{ij}(\vec{u})|^2\,d\Omega. \tag{25}$$

Совокупность векторных соленоидальных полей, удовлетворяющих условиям прилипания на твердой стенке S и конечной скорости диссипации энергии в вязкой жидкости, т.е. множество

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \quad E(\vec{u},\vec{u}) < \infty, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S)\}, \tag{26}$$

образует подпространство в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$, где каждая компонента $u_i(x)$ — элемент из $H^1(\Omega)$. В этом подпространтве квадрат нормы вводится по формуле

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} := E(\vec{u},\vec{u}), \tag{27}$$

и эта норма эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$.

Отметим, что подпространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ плотно в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ (см. [4], с.112 – 115). Более того, $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ компактно вложено в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, т.е. оператор вложения из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ компактен.

3^0. Пространство $L_2(\Gamma)$ с квадратом нормы

$$\|\varphi\|^2_0 := \int_\Gamma |\varphi(\widehat{\xi})|^2\,d\Gamma \tag{28}$$

и его подпространство $L_{2,\Gamma}$ (коразмерности 1) тех элементов из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны единичной функции 1_Γ:

$$L_{2,\Gamma} := \{\varphi \in L_{2,\Gamma} : \quad (\varphi, 1_\Gamma)_0 = 0\}. \tag{29}$$

2.3. Оснащенные гильбертовы пространства. Наряду с введенными выше пространствами в дальнейшем понадобятся и их оснащения (см. [11], параграф 1.1). Так как норма (25) эквивалентна норме $\vec{H}^1(\Omega)$ для элементов из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, то имеют место неравенства

$$0 < c_1 \leqslant \frac{\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega}}{\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}} \leqslant c_2 < \infty \tag{30}$$

и потому

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} \geqslant c_1\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)} \geqslant c_1\|\vec{u}\|^2_\Omega, \quad \forall\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{31}$$

Отсюда следует, что $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ образуют гильбертову пару (см. [4], с. 32 – 34), а порождающий оператор A этой пары образует шкалу пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, такую, что

$$E^0 = \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad E^{1/2} = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{32}$$

и

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} = \|A^{1/2}\vec{u}\|^2_\Omega, \quad \forall\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{33}$$

Наконец, на основе пространств $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ строится оснащение

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \subset\to \vec{J}_{0,S}(\Omega) \subset\to \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^* \tag{34}$$

пространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, и тогда любой линейный ограниченный функционал относительно элемента $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ представляется в виде „скалярного произведения" в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, т.е.

$$l_{\vec{\eta}}(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{\eta} \rangle_\Omega, \quad \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \quad \vec{\eta} \in \left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^*, \tag{35}$$

$$|l_{\vec{\eta}}(\vec{u})| \leqslant \|\vec{u}\|_{1,\Omega} \cdot \|\vec{\eta}\|_{\left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^*}. \tag{36}$$

Здесь $\langle \vec{u}, \vec{\eta} \rangle_\Omega$ — расширение (замыкание по непрерывности) скалярного произведения $(\vec{u}, \vec{\eta})_\Omega$ при $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, связанное переходом от элементов $\vec{\eta}$ из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ к элементам $\vec{\eta}$ из $\left(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)\right)^*$.

Введем в рассмотрение оператор нормального следа γ_n, действующий по закону

$$\gamma_n \vec{u} := (\vec{u} \cdot \vec{n})_\Gamma = (u_n)_\Gamma, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega). \tag{37}$$

Так как $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ — подпространство $\vec{H}^1(\Omega)$, а область Ω липшицева и Γ — достаточно гладкая часть границы $\partial\Omega$, то по теореме Гальярдо [12] получаем, что оператор γ_n ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с квадратом нормы

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int_\Gamma |\varphi|^2 \, d\Gamma + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\varphi(\widehat{\xi}) - \varphi(\widehat{\eta})|^2}{|\widehat{\xi} - \widehat{\eta}|^3} \, d\Gamma_{\widehat{\xi}} \, d\Gamma_{\widehat{\eta}}. \tag{38}$$

Отметим еще, что для элементов $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ выполнено условие

$$\int_\Gamma (\gamma_n \vec{u}) \, d\Gamma = 0, \tag{39}$$

т.е. $\gamma_n \vec{u} \in L_{2,\Gamma}$. Поэтому γ_n ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ в пространство

$$H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \tag{40}$$

плотно вложенное в $L_{2,\Gamma}$. Отсюда следует, что $H_\Gamma^{1/2}$ и $L_{2,\Gamma}$ образуют гильбертову пару пространств, и по ней строится оснащение

$$H_\Gamma^{1/2} \subset\to L_{2,\Gamma} \subset\to \left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*. \tag{41}$$

Соответственно любой ограниченный функционал на $H_\Gamma^{1/2}$ имеет вид

$$l_\psi(\varphi) := \langle \varphi, \psi \rangle_0, \quad \forall \varphi \in H_\Gamma^{1/2}, \quad \psi \in \left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*, \tag{42}$$

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_0| \leqslant \|\varphi\|_{H_\Gamma^{1/2}} \cdot \|\psi\|_{\left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*}, \tag{43}$$

где $\langle \varphi, \psi \rangle_0$ — расширение по непрерывности функционала $(\varphi, \psi)_0$ на случай $\varphi \in H_\Gamma^{1/2}$, $\psi \in \left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*$.

2.4. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и о вспомогательных задачах Стокса. Далее нам понадобится абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее частный случай, отвечающий введенным выше в пп. 2.2 и 2.3 пространствам и их оснащениям. Приведем соответствующий общий результат из [14], см. также [13], [15], ([16], с. 187-189).

Теорема 1. *Пусть для гильбертовых пространств E, F и G (с введенными в них скалярными произведенями) и оператора γ выполнены следующие условия:*

1^0. *Пространство F плотно вложено в E, т.е. F плотно в E и*

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{44}$$

2^0. *На пространстве F определен оператор γ (оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$ и*

$$\|\varphi\|_G \leqslant b\|\varphi\|_{G_+}, \quad \forall\varphi \in G_+. \tag{45}$$

Тогда найдутся такие операторы L и ∂, заданные на F и ограниченно действующие из $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) = F$ в F^* и $G_- = (G_+)^*$ соответственно, что имеет место следующая абстрактная формула Грина:

$$\langle\eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle\gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall\eta, u \in F, \tag{46}$$

где скобками обозначены соответствующи функционалы, причем $Lu \in F^*$, $\partial u \in (G_+)^*$. При этом операторы L и ∂ определяются по пространствам E, F и G (и их скалярным произведениям), а также по оператору γ единственным образом. $\square$

Рассмотрим ядро оператора γ, т.е. множество $N := \mathrm{Ker}\gamma \subset F$, а также его ортогональное дополнение

$$M = F \ominus N. \tag{47}$$

Тогда $\gamma_M = \gamma\big|_M$ осуществляет взаимно однозначное отображение M на G_+. Введем еще оператор T_M, сопряженный к γ_M в смысле скалярного произведения в G:

$$(\eta, T_M\psi)_F = \langle\gamma_M\eta, \psi\rangle_G, \quad \forall\eta \in M, \quad \forall\psi \in (G_+)^*. \tag{48}$$

Будем считать также, что оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ задан на F; тогда $\mathcal{D}(A) = F$, $\mathcal{R}(A) = F^*$ и

$$(\eta, u)_F = \langle\eta, Au\rangle_E, \quad \forall\eta, u \in F. \tag{49}$$

Рассмотрим абстрактную краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \quad \partial u = \psi. \tag{50}$$

Теорема 2. *(*см. [14], теорема 2*). Задача* (50) *тогда и только тогда имеет единственное слабое решение $u \in F$, когда выполнены условия*

$$f \in F^*, \quad \psi \in (G_+)^*. \tag{51}$$

Это решение имеет вид

$$u = A^{-1}f + T_M\psi, \tag{52}$$

где $A : F \longrightarrow F^*$ — порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$, а $T_M = (\gamma_M)^*$. $\square$

Замечание 1. *Решение задачи* (50)*, как следует из* (52)*, имеет вид*

$$u = v + w, \tag{53}$$

где $v = A^{-1}f$ — слабое решение абстрактной задачи Неймана для однородного „краевого условия", т.е.

$$Lv = f, \quad \partial v = 0, \tag{54}$$

а $w = T_M\psi$ — слабое решение задачи Неймана для одородного уравнения:

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi. \tag{55}$$

Эти слабые решения определяются соответственно тождествами

$$(\eta, v)_F = \langle\eta, f\rangle_E, \quad \forall\eta \in F, \tag{56}$$

$$(\eta, w)_F = \langle\gamma\eta, \psi\rangle_G, \quad \forall\eta \in F. \quad \square \tag{57}$$

Опираясь на сформулированные выше факты, рассмотрим тройку пространств $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $F = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$, а также оператор следа γ:

$$\gamma\vec{u} := \vec{u}|_\Gamma, \quad \forall\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{58}$$

Проверим, что для этих объектов выполнены условия 1^0 и 2^0 теоремы 1. Напомним предварительно, что в локальной системе координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$, введенной в окрестности Γ в п. 2.1, имеем

$$\gamma_n\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{n})\,|_\Gamma = u_3|_\Gamma. \tag{59}$$

Так как пространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ плотно в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и имеет место неравенство (31), то $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ образуют гильбертову пару пространств, т.е. выполнено условие 1^0.

Теорема 3. *(*см. [14], теорема 5*). Оператор A гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$ является оператором краевой задачи*

$$A\vec{v} := -P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_v = \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\textit{в}\ \Omega), \tag{60}$$

$$\vec{v} = \vec{0} \ (\textit{на}\ S), \quad \tau_{i3}(\vec{v}) - p_v\delta_{i3} = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma), \quad i = 1, 2, 3, \tag{61}$$

$$\Delta p_v = 0 \ (\textit{в}\ \Omega), \quad \frac{\partial p_v}{\partial n} = 0 \ (\textit{на}\ S). \tag{62}$$

Здесь $P_{0,S} : \vec{L}_2(\Omega) \longrightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ — ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, а $\tau_{ij}(\vec{v})$, в отличие от ранее введенных обозначений (24)*, теперь записываются в криволинейной системе координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$ и выражаются через ковариантные производные по переменным ξ^j:*

$$\tau_{ij}(\vec{v}) := v_{i,j} + v_{j,i}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{63}$$

Если задача (60) – (62) *имеет решение $\vec{v} \in \vec{H}^2(\Omega) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, то*

$$\nabla p_v \in \vec{G}_{h,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \vec{u} = \nabla p, \quad \Delta p = 0 \ (\textit{в}\ \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \ (\textit{на}\ S), \quad \int_\Gamma p\, d\Gamma = 0\}. \tag{64}$$

При любой $\vec{f} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ задача (60) – (62) *имеет единственное обобщенное решение $\vec{v} = A^{-1}\vec{f} \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. При любой $\vec{f} \in \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*$ эта задача имеет единственное слабое решение $\vec{v} \in \vec{f} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$. Обратно, любой элемент $\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ является слабым решением задачи* (60) – (62) *при некотором $\vec{f} \in \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*$.* □

Замечание 2. *Обобщенное решение задачи* (60) – (62) *определяется тождеством*

$$E(\vec{\eta}, \vec{v}) = (\vec{\eta}, \vec{f})_\Omega, \quad \forall\vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \tag{65}$$

а его слабое решение — сответственно тождеством

$$E(\vec{\eta}, \vec{v}) = \langle\vec{\eta}, \vec{f}\rangle_\Omega, \quad \forall\vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \qquad \square \tag{66}$$

Переходя к проверке условия 2^0 теоремы 1, заметим, что оператор следа (58), согласно теореме о следе в области с липшицевой границей (см. [12]), ограниченно действует из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$ в пространство

$$G_+ := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_\Gamma, \quad H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \tag{67}$$

плотное в пространстве

$$G := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}, \tag{68}$$

причем G_+ компактно вложено в G и

$$\|\vec{\varphi}\|_G \leqslant b\|\vec{\varphi}\|_{G_+}, \quad \forall\vec{\varphi} \in G_+. \tag{69}$$

Отсюда следует, что пространства G_+ и G образуют гильбертову пару и потому выполнено условие 2^0 теоремы 1.

Таким образом, для тройки пространств $E = \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $F = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}$ и оператора следа γ из (58) справедливо утверждение теоремы 1, которое в данном случае принимает следующую форму.

Теорема 4. *(*см. [14], теорема 9*). Пусть область Ω удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда для любых функций $\vec{\eta}$ и $\vec{u}$ из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ справедлива следующая формула Грина*

$$\langle\vec{\eta}, -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u\rangle_\Omega = E(\vec{\eta}, \vec{u}) - \sum_{i=1}^3 \langle(\gamma\vec{\eta})^i, (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u\delta_{i3})\rangle_0, \tag{70}$$

где $\tau_{i3}(\vec{u})$ определены формулами (63)*. При этом*

$$-P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u = L\vec{u} \in \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \quad \gamma\vec{\eta} = \vec{\eta}\big|_\Gamma \in G_+, \tag{71}$$

$$\partial\vec{u} = \sum_{i=1}^3 (\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u\delta_{i3})\, \vec{e}_{\xi_i} \in (G_+)^*. \qquad \square$$

Формула Грина (70) непосредственно связана с исследованием следующей краевой задачи Стокса:

$$-P_{0,S}\Delta\vec{u}+\nabla p_u=\vec{f},\quad \mathrm{div}\vec{u}=0\ (\text{в}\ \Omega),\quad \vec{u}=\vec{0}\ (\text{на}\ S), \tag{72}$$

$$\partial\vec{u}=\sum_{i=1}^{3}\left(\tau_{i3}(\vec{u})-p_u\delta_{i3}\right)\vec{e}_{\xi_i}=\vec{\psi}\ (\text{на}\ \Gamma), \tag{73}$$

$$\Delta p_u=0\ (\text{в}\ \Omega),\quad \frac{\partial p_u}{\partial n}=0\ (\text{на}\ S),\quad \int_\Gamma p_u\,d\Gamma=0. \tag{74}$$

Эта задача, как уже видно из постановки изучаемой в данной работе задачи (см. (9) – (18)), возникает в проблеме малых движений вязкой жидкости в открытом сосуде.

Теорема 5. *(*см. [14], теорема 8*). Если выполнены условия*

$$\vec{f}\in\left(\vec{J}^{1}_{0,S}(\Omega)\right)^*,\quad \vec{\psi}\in(G_+)^*, \tag{75}$$

то задача (72) – (74) *имеет единственное решение* $\vec{u}\in\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$*, представимое в виде*

$$\vec{u}=\vec{v}+\vec{w},\quad \nabla p_u=\nabla p_v+\nabla p_w, \tag{76}$$

где функция $\vec{v}$ *яляется слабым решением задачи* (60) – (62) *(первая вспомогательная задача С.Г. Крейна), а функция* $\vec{w}$ *— слабым решением следующей задачи (вторая вспомогательная задача С.Г. Крейна):*

$$-P_{0,S}\Delta\vec{w}+\nabla p_w=\vec{0},\quad \mathrm{div}\,\vec{w}=0\ (\textit{в}\ \Omega), \tag{77}$$

$$\vec{w}=\vec{0}\ (\textit{на}\ S),\quad \partial\vec{w}=\vec{\psi}\ (\textit{на}\ \Gamma), \tag{78}$$

$$\Delta p_w=0\ (\textit{в}\ \Omega),\quad \frac{\partial p_w}{\partial n}=0\ (\textit{на}\ S),\quad \int_\Gamma p_w\,d\Gamma=0. \tag{79}$$

Обратно, любое поле $\vec{u}\in\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *представимо в виде суммы* (76)*, где* $\vec{v}$ *и* $\vec{w}$ *— слабые решения задач* (60) – (62) *и* (77) – (79) *при некоторых* $\vec{f}$ *и* $\vec{\psi}$*, удовлетворяющих условиям* (75). □

Замечание 3. *В формуле Грина* (70) *для задачи Стокса* (72) – (74) *поле* p_u *связано с* $\vec{u}$ *(см.* (76)*). Иногда ее записывают в форме, содержащей независимое от* $\vec{u}$ *поле* p*. Это сводится к замене* p_u *на* p_u+p *в* (70), (71).

В самом деле, если $\nabla p\in\vec{G}_{h,S}(\Omega)\subset\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ *(см.* (64)*), то*

$$\langle\vec{\eta},\nabla p\rangle_\Omega=(\vec{\eta},\nabla p)_\Omega=\int_\Gamma\eta_n\,(\gamma p)\;d\Gamma=-\langle\gamma\eta_3,-p\rangle_0. \tag{80}$$

Здесь левая часть имеет смысл не только при $\nabla p\in\vec{J}_{0,S}(\Omega)$*, но и при* $\nabla p\in\left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*$*. Поэтому имеет смысл правая часть* (80) *при таких* ∇p *и соответственно видоизмененная формула* (70).
□

2.5. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений. Вернемся к начально-краевой задаче (9) – (18) и получим систему дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, ассоциированную с этой задачей.

Прежде всего, из (17) следует, что $\zeta\in L_{2,\Gamma}$ при любом $t\geqslant 0$. Поэтому $P_\Gamma\zeta=\zeta$, где $P_\Gamma: L_2(\Gamma)\longrightarrow L_{2,\Gamma}$ — ортопроектор на $L_{2,\Gamma}$:

$$P_\Gamma\varphi:=\varphi-|\Gamma|^{-1}\int_\Gamma\varphi\,d\Gamma,\quad \forall\varphi\in L_2(\Gamma). \tag{81}$$

Введем еще оператор B_σ по закону

$$B_\sigma\zeta:=P_\Gamma\mathcal{L}_\sigma P_\Gamma\zeta,\quad \zeta\in\mathcal{D}(B_\sigma)=H^2_0(\Gamma)\cap L_{2,\Gamma}, \tag{82}$$

где дифференциальное выражение $\mathcal{L}_\sigma$ определено в (14), (15), а граничное условие (16) учтено выбором $\mathcal{D}(B_\sigma)$.

Лемма 1. (см. [4], с. 163 – 164). *Оператор $B_\sigma : \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_{2,\Gamma} \longrightarrow L_{2,\Gamma}$ неограничен, самосопряжен и ограничен снизу. Его квадратичная форма имеет вид*

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 = \int_\Gamma \left[|\nabla_\Gamma \zeta|^2 + a_\Gamma |\zeta|^2 \right] \, d\Gamma, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \tag{83}$$

Если B_σ положительно определен в $L_{2,\Gamma}$, то (83) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1(\Gamma)$, а также норме

$$\|\zeta\|_\nabla^2 := \int_\Gamma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 \, d\Gamma, \quad \zeta \in H_0^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}. \tag{84}$$

Оператор B_σ имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой $+\infty$, а система его собственных элементов $\{\zeta_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис в $L_{2,\Gamma}$. $\square$

Определение 1. *Будем говорить, что состояние относительного равновесия вращающейся капиллярной вязкой жидкости статически устойчиво по линейному приближению, если оператор B_σ положительно определен в $L_{2,\Gamma}$, т.е.*

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 \geqslant c\|\zeta\|_0^2, \quad c > 0, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \qquad \square \tag{85}$$

Так как квадратичная форма $(B_\sigma \zeta, \zeta)_0$ (см. (83)) равна удвоенной потенциальной энергии для данной гидросистемы, то предположение (85) о положительной определенности оператора потенциальной энергии B_σ равносильно тому, что в состоянии относительного равновесия потенциальная энергия системы имеет грубый минимум. Отметим еще, что в предположении (85) оператор B_σ имеет обратный оператор B_σ^{-1}, который является положительным и компактным, а все собственные значения $\lambda_k(B_\sigma)$ оператора B_σ положительны.

Используя введенный в (82) оператор B_σ, перепишем краевое условие (14). Отметим при этом, что давление $p(t,x)$ можно определить с точностью до произвольной функции t, так как внутренние силы в жидкости определяются градиентами давления ∇p. Поэтому можно дополнительно считать, что выполнено условие нормировки

$$\int_\Gamma p \, d\Gamma = 0. \tag{86}$$

Тогда, действуя ортопроектором P_Γ на обе части (14) и используя соотношение

$$\int_\Gamma u_{3,3} \, d\Gamma = 0 \tag{87}$$

(для горизонтальной Γ оно доказано в [4], с. 115, а здесь доказывается аналогично), приходим вместо (14) к краевому условию

$$-p + 2\rho\nu u_{3,3} = -B_\sigma \zeta \quad (\text{на } \Gamma). \tag{88}$$

Цель дальнейших преобразований — получить из (9) – (18) систему дифференциальных соотношений, а затем из них — задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве.

Будем считать, что в уравнении (9) все слагаемые являются функциями переменной t со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Точнее говоря, $\vec{u}(t,x)$ — функция переменной t со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $\nabla p(t,x)$ — функция переменной t со значениями в $\vec{G}(\Omega) := \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ (см. (21) – (23), (64)). Тогда, действуя на обе части (9) ортопроекторами $P_{0,\Gamma}$ и $P_{0,S}$ на подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, приходим к соотношениям

$$\frac{1}{\rho} \nabla\varphi = 2\omega_0 P_{0,\Gamma} (\vec{u} \times \vec{e}_3) + \nu P_{0,\Gamma} \Delta \vec{u} + P_{0,\Gamma} \vec{f}, \quad \nabla\varphi := P_{0,\Gamma} \nabla p, \tag{89}$$

$$-\nu P_{0,S} \Delta \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \widetilde{p} = -\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\omega_0 P_{0,S} (\vec{u} \times \vec{e}_3) + P_{0,S} \vec{f}, \quad \nabla \widetilde{p} := P_{0,S} \nabla p. \tag{90}$$

Из (89) следует, что $\nabla\varphi$ непосредственно вычисляется по известному полю $\vec{f}$ и найденному из (90) полю $\vec{u}$. В то же время φ не входит в (90) и краевые и начальные условия (10) – (18). В самом деле, так как в силу (86), (89), (90), (22)

$$p = \widetilde{p} + \varphi, \quad \varphi\big|_\Gamma = 0, \tag{91}$$

то $p|_\Gamma = \widetilde{p}|_\Gamma$, и потому условие (88) принимает вид

$$-\widetilde{p} + 2\rho\nu u_{3,3} = -B_\sigma\zeta \text{ (на } \Gamma). \tag{92}$$

С учетом проведенных преобразований приходим к выводу, что задача (9) – (18) сводится к соотношению (89), а также к задаче Стокса (72) – (74) с заменой $\vec{f}$ на правую часть (90) и с заменой ψ на вектор, первые две компоненты которого равны нулю (в криволинейной системе координат $\widetilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$, введенной выше окрестности Γ), а третья компонента, т.е. нормальная компонента $\psi_n = \psi_3$, равна, в силу (92), величине $-B_\sigma\zeta$. Кроме того, должно выполняться также кинематическое условие (12).

Отсюда, а также из теоремы 5 и общей формулы (52) (см. теорему 2) следует, что исходная задача (9) – (18) равносильна соотношению (89) и системе уравнений и начальных условий

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}, \quad \nu A\vec{v} = -\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\omega_0 P_{0,S}\,(\vec{u}\times\vec{e}_3) + P_{0,S}\vec{f}, \tag{93}$$

$$\nu\vec{w} = T\left(-B_\sigma\zeta\right), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_n\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0. \tag{94}$$

Здесь символом d/dt обозначена производная по t от функции переменной t со значениями в гильбертовом пространстве, а

$$\gamma_n\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{n})_\Gamma\,, \quad \vec{u}\in\vec{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{95}$$

Далее, символом T в (94) обозначен не оператор краевой задачи (77) – (79), определенный на $(G_+)^*$ (см. (67), (68)), а его сужение на множество элементов $\psi\in(G_+)^*$, у которых, как только что упоминалось, лишь третья (нормальная) компонента отлична от нуля и является элементом пространства $\left(H^{1/2}_\Gamma\right)^*$. Этот факт следует из того, что для решений $\vec{u}$ задачи (9) – (18) должны выполняться краевые условия (13), т.е., в силу определения $\partial\vec{u}$ (см. (71), (73)), условия

$$(\partial\vec{u})_1 = (\partial\vec{u})_2 = 0 \text{ (на } \Gamma). \tag{96}$$

Так как оператор ∂ ограниченно действует из $F = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $(G_+)^*$ (теорема 4), то совокупность таких элементов $\vec{u}$ из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ образует подпространство в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, в котором содержатся все решения задачи (9) – (18), принадлежащие $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$.

В (93) – (94) можно исключить переменные $\vec{u}$ и ζ, воспользовавшись первым соотношением (93) и вторым соотношением (94). Дифференцируя первое соотношение (94) по t и вводя оператор

$$S_0\vec{u} := -iP_{0,S}\,(\vec{u}\times\vec{e}_3)\,, \tag{97}$$

приходим к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} + \nu A\vec{v} - 2i\omega_0 S_0(\vec{v}+\vec{w}) = P_{0,S}\vec{f}, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}^0, \tag{98}$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} + \nu^{-1}TB_\sigma\gamma_n(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}, \quad \vec{w}(0) = \vec{w}^0, \tag{99}$$

$$\vec{v}^0 = \vec{u}^0 - \vec{w}^0, \quad \vec{w}^0 = -\nu^{-1}TB_\sigma\zeta^0. \tag{100}$$

После замен

$$\vec{v} = A^{-1/2}\vec{\xi}, \quad \vec{w} = A^{-1/2}\vec{\eta}, \tag{101}$$

и формального применения оператора $A^{1/2}$ к обеим частям уравнений (98), (99) получим из (98) – (100) задачу Коши

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} + \nu A\vec{\xi} - 2i\omega_0 A^{1/2}S_0A^{-1/2}(\vec{\xi}+\vec{\eta}) - \nu^{-1}B(\vec{\xi}+\vec{\eta}) = A^{1/2}P_{0,S}\vec{f}, \tag{102}$$

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} + \nu^{-1}B(\vec{\xi}+\vec{\eta}) = \vec{0}, \quad \vec{\eta}(0) = -\nu^{-1}Q^*B_\sigma\zeta^0, \quad \vec{\xi}(0) = A^{1/2}\vec{u}^0 - \vec{\eta}(0), \tag{103}$$

$$B := Q^* B_\sigma Q, \quad Q := \gamma_n A^{-1/2}, \quad Q^* := A^{1/2} T. \tag{104}$$

Задачи (98) – (100) и (102) – (104) являются исходным пунктом исследования проблемы разрешимости начально-краевой задачи (9) – (18) о малых движениях капиллярной вязкой жидкости во вращающемся частично заполненном сосуде.

Определим предварительно свойства операторных коэффициентов в этих системах дифференциальных уравнений.

Лемма 2. *Оператор S_0, определенный формулой (97), является самосопряженным ограниченным оператором, действующим в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, при этом*

$$\|S_0\| = 1, \quad \sigma(S_0) = \sigma_{ess}(S_0) = [-1, 1]. \tag{105}$$

(Здесь через $\sigma_{ess}(S_0)$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора S_0, а $\sigma(S_0)$ — его спектр.)

Доказательство. См. [4], параграфы 7.4, 5.1, 5.3. $\square$

Лемма 3. *Пространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ имеет ортогональное разложение*

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = \vec{N}_1(\Omega) \oplus \vec{M}_1(\Omega), \tag{106}$$

где

$$\vec{N}_1(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) : \gamma_n \vec{v} = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma)\}, \tag{107}$$

а $\vec{M}_1(\Omega)$ — подпространство слабых решений задачи (77) – (79) при любых $\vec{\psi} = (0; 0; \psi_3)$, $\psi_3 = \psi_n \in \left(H^{1/2}_\Gamma\right)^*$. Соответственно пространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega) = A^{1/2}\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ имеет ортогональное разложение

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{N}_0(\Omega) \oplus \vec{M}_0(\Omega) := A^{1/2}\vec{N}_1(\Omega) \oplus A^{1/2}\vec{M}_1(\Omega). \tag{108}$$

Доказательство. См. [4], параграфы 1.3, 2.2, а также с. 310. $\square$

Лемма 4. *Операторы*

$$Q = \gamma_n A^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \longrightarrow L_{2,\Gamma}, \quad Q^* = A^{1/2} T : L_{2,\Gamma} \longrightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega) \tag{109}$$

взаимно сопряжены и компактны. При этом Q ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $H^{1/2}_\Gamma$, а Q^*, после расширения, ограниченно действует из $\left(H^{1/2}_\Gamma\right)^*$ в $\vec{M}_0(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Доказательство. Эти свойства операторов Q и Q^* следуют из леммы 3, определения обобщенных и слабых решений задачи (77) – (79) (с заменой, как и выше, $\vec{\psi}$ на $(0; 0; \psi_3)$). В частности, свойство

$$(Q^*\varphi, \vec{\eta})_\Omega = (\varphi, Q\vec{\eta})_0, \quad \forall \varphi \in L_{2,\Gamma}, \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{L}_2(\Omega), \tag{110}$$

следует из определения

$$E(T\psi_3, \vec{u}) = (A^{1/2}T\psi_3, A^{1/2}\vec{u})_\Omega = (\psi_3, \gamma_n \vec{u})_0, \quad \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \tag{111}$$

обобщенного решения задачи (77) – (79) с последующей заменой $\vec{u} = A^{-1/2}\vec{\eta}$.

Отметим еще, что компактность оператора $Q = \gamma_n A^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \longrightarrow L_{2,\Gamma}$ следует из того, что $A^{-1/2}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, оператор γ_n ограничено действует из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $H^{1/2}_\Gamma$, а $H^{1/2}_\Gamma$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$. $\square$

Рассмотрим теперь свойства оператора B, определенного формулой (104). Заметим сначала, что этот оператор неограничен и действует в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. При этом элементы из $\vec{N}_0(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ он аннулирует и потому $\dim \mathrm{Ker} B = \infty$. Кроме того, область его значений $\mathcal{R}(B)$ принадлежит, в силу определения оператора T, подпространству $\vec{M}_0(\Omega)$. Далее, если оператор B_σ имеет ограниченный обратный, то можно считать, что после сужения на $\vec{M}_0(\Omega)$ оператор B действует в $\vec{M}_0(\Omega)$ и имеет ограниченный обратный, так как тогда все сомножители в определении B (см. (104)) ограниченно обратимы как операторы, действующие из одного пространства в другое. В частности, как показано в [4], с. 118, сужение оператора γ_n на $\vec{M}_1(\Omega)$ также является ограниченно обратимым оператором. В этих условиях можно считать, что

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{R}(B^{-1}) \subset \vec{M}_0(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega), \tag{112}$$

где $\mathcal{D}(B)$ — некоторое плотное множество в $\vec{M}_0(\Omega)$.

Далее этот оператор можно продолжить нулем на $\vec{N}_0(\Omega) = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \vec{M}_0(\Omega)$ и считать его заданным, если это нужно, на плотном в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ множестве, которое снова обозначим через $\mathcal{D}(B)$.

Если состояние равновесия статически устойчиво по линейному приближению, т.е. $B_\sigma \gg 0$ (см. (85)), то оператор B неотрицателен, так как по лемме 4 операторы Q и Q^* взаимно сопряжены. В этом случае он имеет самосопряженное расширение (по Фридрихсу), которое снова обозначим через B, а его область определения — через $\mathcal{D}(B)$.

Отметим, наконец, что оператор B неограничен и его ненулевые собственные значения $\lambda_k(B)$ имеют степенную асимптотику

$$\lambda_k(B) = \sigma\left(\frac{1}{\pi}\,\mathrm{mes}\Gamma\right)^{-1/2} k^{1/2}[1+o(1)] \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{113}$$

Этот факт установлен в работах [17] – [18].

3. О разрешимости начально-краевой задачи

Опираясь на задачу Коши (98) – (100), рассмотрим вопрос о существовании и единственности решений исходной начально-краевой задачи (9) – (18). Как сейчас будет установлено, задача (98) – (100) может быть приведена к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения.

3.1. Переход к задаче Коши для параболического уравнения в гильбертовом пространстве. Из определения (104) оператора B следует, что оператор $TB_\sigma\gamma_n$ из (99) может быть представлен в виде

$$B_1 := TB_\sigma\gamma_n = A^{-1/2}BA^{1/2}. \tag{114}$$

Так как оператор B действует в $\vec{M}_0(\Omega)$ (см. (112)), а подпространства $\vec{M}_1(\Omega)$ и $\vec{M}_0(\Omega)$ связаны соотношением (108), т.е.

$$\vec{M}_0(\Omega) = A^{1/2}\vec{M}_1(\Omega), \quad \vec{M}_1(\Omega) = A^{-1/2}\vec{M}_0(\Omega), \tag{115}$$

то формулой (114) определен оператор B_1, подобный оператору B и заданный на множестве $\mathcal{D}(TB_\sigma\gamma_n) \subset \vec{M}_1(\Omega)$, такой, что

$$\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{R}(TB_\sigma\gamma_n) = \vec{M}_1(\Omega). \tag{116}$$

Отсюда следует, что $B_1 = TB_\sigma\gamma_n$ — положительно определенный оператор, действующий в $\vec{M}_1(\Omega)$ и имеющий те же общие свойства и спектр, что и оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset \vec{M}_0(\Omega) \longrightarrow \vec{M}_0(\Omega)$.

Введем в рассмотрение операторы

$$R := B^{1/2}PA^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \longrightarrow \vec{M}_0(\Omega), \quad R^+ := A^{-1/2}PB^{1/2}, \quad \mathcal{D}(R^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \vec{M}_0(\Omega), \tag{117}$$

где $P : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \longrightarrow \vec{M}_0(\Omega)$ — ортопроектор на подпространство $\vec{M}_0(\Omega)$. (В (117) можно писать либо не писать оператор P, так как $\vec{M}_0(\Omega)$ инвариантно для B и $B^{1/2}$ и потому $B^{1/2} = B^{1/2}P = PB^{1/2} = PB^{1/2}P$.)

Выясним общие свойства операторов R и R^+.

Лемма 5. *Для операторов R и R^+ выполнены соотношения*

$$R \in \mathfrak{S}_\infty\,, \quad R^+ = R^*|\mathcal{D}(B^{1/2}), \quad \overline{R^+} = R^* \in \mathfrak{S}_\infty\,. \tag{118}$$

Доказательство. Второе и третье свойства (118) следуют из (117), определения сопряженного оператора и из плотности $\mathcal{D}(B^{1/2})$ в $\vec{M}_0(\Omega)$. Первое свойство (118) доказано Т.А. Суслиной для кусочно-гладкой области Ω с граничным условием (16) для функций, входящих в область определения оператора B_σ (см. (82) и лемму 1). Если для краевого угла δ выполнено условие

$$0 < \delta < \delta_* \approx 0,354\pi, \tag{119}$$

то собственные значения $\lambda_k(R^*R)$ оператора R^*R имеют степенную асимптотику:

$$\lambda_k(R^*R) = \left(\frac{c}{k}\right)^{1/2}[1+o(1)], \quad k \longrightarrow \infty, \quad c = \sigma^2\frac{9}{256\pi}\,\mathrm{mes}\Gamma > 0. \tag{120}$$

Этот факт также доказан Т.А. Суслиной [19]. $\square$

С помощью операторов R^+, R и R^* проведем в задаче (98) – (100) следующие формальные преобразования, позволяющие перейти от нее к задаче Коши для абстрактного параболического кравнения. С этой целью осуществим в (98) – (100) замену

$$\vec{w} = \nu^{-1} R^+ \vec{z} \tag{121}$$

и подействуем на обе части (99) оператором $\nu\,(R^+)^{-1} = \nu B^{-1/2} P A^{1/2}$, ограниченно действующим, в силу (115), из $\vec{M}_1(\Omega)$ в $\mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \vec{M}_0(\Omega)$.

Это дает систему уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu^{-1}\frac{d}{dt}(R^+\vec{z}) + \nu A\vec{v} - 2i\omega_0 S_0\vec{v} - 2i\omega_0\nu^{-1} S_0 R^+\vec{z} = P_{0,S}\vec{f}, \tag{122}$$

$$\frac{d\vec{z}}{dt} + B^{1/2}A^{1/2}(\vec{v} + \nu^{-1}A^{-1/2}B^{1/2}\vec{z}) = \vec{0}, \tag{123}$$

которую в векторно-матричной форме можно переписать в виде

$$\left(\mathcal{I} + \frac{1}{\nu}\mathcal{R}^*\right)\frac{dy}{dt} + (\mathcal{I} + \mathcal{F})\,\mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{124}$$

$$\mathcal{F} := \frac{1}{\nu}\mathcal{R} - 2i\omega_0 S = \frac{1}{\nu}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix} - 2i\omega_0\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu}S_0A^{-1} & S_0A^{-1/2}B^{-1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{125}$$

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \nu A & 0 \\ 0 & \nu^{-1}B \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{z} \end{pmatrix}, \quad f_0(t) = \begin{pmatrix} P_{0,S}\vec{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} \vec{v}(0) \\ \vec{z}(0) \end{pmatrix}. \tag{126}$$

При переходе от (122), (123) к (124) – (126) использовано соотношение

$$\frac{d}{dt}(R^+\vec{z}) = R^*\frac{d\vec{z}}{dt}, \tag{127}$$

которое справедливо в силу леммы 5, если $\dfrac{d\vec{z}}{dt}$ непрерывна по t.

Лемма 6. *Операторы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$ из (124), (125) компактны, а операторы $\mathcal{I} + \nu^{-1}\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{I} + \mathcal{F}$ ограниченно обратимы, причем*

$$\left(\mathcal{I} + \nu^{-1}\mathcal{R}^*\right)^{-1} = \mathcal{I} - \nu^{-1}\mathcal{R}^*, \quad (\mathcal{I} + \mathcal{F})^{-1} = \mathcal{I} + \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{128}$$

Доказательство. Свойства компактности $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$ очевидны, так как по лемме 5 $\mathcal{R} \in \mathfrak{S}_\infty$, оператор S_0 ограничен, а A^{-1} и $B^{-1/2}$ компактны. Далее, первое свойство (128) также очевидно, поскольку $\mathcal{R}^*$ — треугольная операторная матрица (см. (125)). Наконец, можно проверить непосредственным подсчетом, что оператор $\mathcal{I} + \mathcal{F}$ обратим. Тогда обратный имеет структуру (128). $\square$

Применим слева в (124) ограниченный и ограниченно обратимый оператор $\left(\mathcal{I} + \nu^{-1}\mathcal{R}^*\right)^{-1}$. Тогда вместо (124) – (126) будем иметь задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + (\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{129}$$

$$\mathcal{I} + \mathcal{T} := \left(\mathcal{I} - \nu^{-1}\mathcal{R}^*\right)(\mathcal{I} + \mathcal{F}), \quad \mathcal{T} \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{130}$$

Здесь учтено, что $\left(\mathcal{I} - \nu^{-1}\mathcal{R}^*\right) f_0(t) = f_0(t)$, а оператор $(\mathcal{I} + \mathcal{F})$ в силу леммы 6 ограниченно обратим.

Задача (129) – (130), в силу доказанных свойств операторов $(\mathcal{I} + \mathcal{F})$ и $\mathcal{A}_0$, является задачей Коши для абстрактного параболического уравнения. Ее можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_0 y + f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{131}$$

где оператор $-(\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_0$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащей положительную полуось $t > 0$ (см. [20], с.183). В самом деле, оператор $\mathcal{A}_0$, определенный формулой (126), является самосопряженным положительно определенным, поэтому оператор $-\mathcal{A}_0$ является генератором аналитической полугруппы. Этим же свойством обладает и оператор $-(\mathcal{I} + \mathcal{T})\mathcal{A}_0$, так как $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_\infty$, а $\mathcal{I} + \mathcal{T}$ ограниченно обратим.

3.2. О разрешимости начально-краевой задачи. Опираясь на задачу (131), рассмотрим вопрос о разрешимости исходной начально-краевой задачи (9) – (18). Далее задачу Коши (131) будем называть задачей, ассоциированной с задачей (9) – (18).

Определение 2. *Будем говорить, что задача Коши* (131) *имеет сильное решение* $y(t)$ *на отрезке* $[0,T]$ *со значениями в пространстве* $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{M}_0(\Omega)$, *если выполнены следующие свойства:*

1^0. *функция* $y(t)$ *при каждом* $t \in [0,T]$ *принадлежит* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B)$ *и* $\mathcal{A}_0 y(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$;

2^0. $\dfrac{dy}{dt} \in C([0,T];\mathcal{H})$;

3^0. *при любом* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (131), *а при* $t = 0$ — *начальное условие* $y(0) = y^0$. $\square$

Определение 3. *Будем говорить, что функция* $\varphi(t)$ *со значениями в* $\mathcal{H}$ *удовлетворяет условию Гельдера на отрезке* $[0,T]$ *и писать* $\varphi(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H})$, *если найдутся такие константы* $\alpha \in (0,1]$ *и* $c_\alpha > 0$, *что*

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_{\mathcal{H}} \leqslant c_\alpha |t-s|^\alpha, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \qquad \square \tag{132}$$

Используя теорему 1.4 из [21], с.130, приходим к следующему выводу.

Теорема 6. *Пусть в задаче* (9) – (18) *выполнены условия*

$$\vec{f}(t,x) \in C^\alpha([0,T];\vec{L}_2(\Omega)), \quad \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \vec{u}^0 = \vec{v}^0 + \vec{w}^0, \tag{133}$$

$$\vec{v}^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \vec{w}^0 \in \vec{M}_1(\Omega) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \gamma_n \vec{w}^0 \in \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2}). \tag{134}$$

Тогда ассоциированная задача Коши (131) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Оно основано на проверке условий теоремы 1.4 из [21] и предыдущих преобразований, связанных с переходом от задачи (9) – (18) к задаче (131).

Если выполнено первое условие (133), то $P_{0,S}\vec{f} \in C^\alpha([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega))$ и потому

$$f_0(t) := \left(P_{0,S}\vec{f}; 0\right)^t \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}). \tag{135}$$

Далее, $\vec{v}^0 \in \mathcal{D}(A)$, и для принадлежности в задаче (131) элемента $y^0 = (\vec{v}^0; \vec{z}^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ достаточно проверить, что $\vec{z}^0 \in \mathcal{D}(B)$. Имеем, согласно определению (121),

$$B\vec{z}^0 = \nu B(R^+)^{-1}\vec{w}^0 = \nu B B^{-1/2} A^{1/2} \vec{w}^0 = \nu B^{1/2} A^{1/2} \vec{w}^0 \in \vec{M}_0(\Omega). \tag{136}$$

Так как выполнено последнее условие (134), то

$$\|B_\sigma^{1/2} \gamma_n \vec{w}^0\|_0^2 < \infty.$$

Аппроксимируя элемент $A^{1/2}\vec{w}^0 \in \vec{M}_0(\Omega)$ элементами $A^{1/2}\vec{w}_k \in \mathcal{D}(B)$ из плотного множества $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \vec{M}_0(\Omega)$, будем иметь $\left((A^{1/2}T)^* = \gamma_n A^{-1/2}\right)$

$$\|B^{1/2}A^{1/2}\vec{w}^0\|_\Omega^2 = \lim_{k\longrightarrow\infty} \|B^{1/2}A^{1/2}\vec{w}_k^0\|_\Omega^2 = \lim_{k\longrightarrow\infty} (BA^{1/2}\vec{w}_k^0, A^{1/2}\vec{w}_k^0)_\Omega =$$

$$= \lim_{k\longrightarrow\infty} (A^{1/2}TB_\sigma\gamma_n A^{-1/2}A^{1/2}\vec{w}_k^0, A^{1/2}\vec{w}_k^0)_\Omega = \lim_{k\longrightarrow\infty} (B_\sigma\gamma_n\vec{w}_k^0, \gamma_n A^{-1/2}A^{1/2}\vec{w}_k^0)_0 =$$

$$= \lim_{k\longrightarrow\infty} \|B_\sigma^{1/2}\gamma_n\vec{w}_k^0\|_0^2 = \|B_\sigma^{1/2}\gamma_n\vec{w}^0\|_0^2 < \infty. \tag{137}$$

Отсюда следует, что требование (136) будет выполнено, если выполнено последнее условие (134).

Таким образом, установлено, что выполнены условие (135) и условие $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B)$. Так как, кроме того, оператор $-\left(\mathcal{I} + \mathcal{T}\right)\mathcal{A}_0$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем полуось $t > 0$, то по теореме 1.4 из [21] получаем утверждение данной теоремы. $\square$

Замечание 4. *При выводе свойства* (137) *было использовано соотношение*

$$\|B^{1/2}\vec{\varphi}\|_{\Omega}^2 = \|B_{\sigma}^{1/2}\gamma_n A^{-1/2}\vec{\varphi}\|_0^2, \tag{138}$$

которое проверяется (аналогично выводу (137)*) для элементов из* $\mathcal{D}(B)$ *и справедливо, после замыкания, для элементов из* $\mathcal{D}(B^{1/2})$. $\square$

Замечание 5. *Из теоремы 6 следует, что при выполнении условий* (133), (134) *задача* (124) — (126)*, а вместе с ней и задача Коши* (122) — (123) *имеют сильное решение на отрезке* $[0,T]$*. При этом все слагаемые в* (122) *являются элементами из* $C([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega))$*, а в* (123) — *элементами из* $C([0,T];\vec{M}_0(\Omega))$*, причем*

$$B^{1/2}A^{1/2}\left(\vec{v}+\nu^{-1}A^{-1/2}B^{1/2}\vec{z}\right) = B^{1/2}A^{1/2}\vec{v}+\nu^{-1}B\vec{z}. \tag{139}$$

В самом деле, в этом случае задача (129) — (130) *имеет сильное решение на* $[0,T]$*, а потому, в силу первой форулы* (128)*, задача* (124) — (126) *имеет сильное ршение на* $[0,T]$*. Наконец, в силу формулы* (127)*, которая справедлива в этом случае, приходим к выводу, что выполнены уравнения* (122), (123)*, которые следуют из* (124) — (126). $\square$

Определение 4. *Будем говорить, что решение ассоциированной задачи Коши* (131) *обладает дополнительными свойствами гладкости по переменной* $t\in[0,T]$*, если выполнены следующие условия:*

$$B\vec{z}(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2})),\quad PA\vec{v}(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2})). \qquad \square \tag{140}$$

Отметим, что необходимыми условиями для этого являются условия

$$\vec{z}^0\in\mathcal{D}(B^{3/2})\subset\vec{M}_0(\Omega),\quad PA\vec{v}^0\in\mathcal{D}(B^{1/2})\subset\vec{M}_0(\Omega). \tag{141}$$

Теорема 7. *Пусть решение ассоциированной задачи Коши* (131) *обладает дополнительными свойствами гладкости по* t*. Пусть выполнены условия* (141) *и первое условие* (133)*. Тогда задача* (122) — (123) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$*, для которого все слагаемые в* (123) *являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2}))$*. Далее, в этом случае задача* (98) — (100) *имеет единственное сильное решение, для которого все слагаемые в* (98) *являются элементами из* $C([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega))$*, а в* (99) — *элементами из* $C([0,T];\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))$.

Доказательство. Если выполнены сформулированные условия, то задача (131) имеет сильное решение, которое обладает дополнительными свойствами гладкости по t. Согласно замечанию 5, в этом случае задача (122) — (123) имеет единственное сильное решение на $[0,T]$ и имеет место свойство (139). Поэтому, в силу (140), каждое слагаемое в (123) является элементом из $C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2}))$.

Применяя у обеим частям (123) ограниченный оператор $\nu^{-1}R^*=\nu^{-1}\overline{R^+}$, $R^+=A^{-1/2}PB^{1/2}=R^*\big|\mathcal{D}(B^{1/2})$, получим соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\nu^{-1}R^+\vec{z}\right)+\nu^{-1}TB_{\sigma}\gamma_n(\vec{v}+\nu^{-1}R^+\vec{z})=\vec{0}, \tag{142}$$

при выводе которого использованы формулы (127) и (114). Здесь каждое слагаемое является элементом из $C([0,T];\vec{M}_1(\Omega))$. Поэтому после замены (121) приходим из (122), (142) к выводу, что задача (98) — (100) имеет единственное сильное решение на $[0,T]$, причем каждое слагаемое в (98) есть элемент из $C([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega))$, а в (99) — элемент из $C([0,T];\vec{M}_1(\Omega))\subset C([0,T];\vec{J}_{0,S}^1(\Omega))$.
$\square$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 7, а также условия*

$$B_{\sigma}\zeta^0\in\left(H_{\Gamma}^{1/2}\right)^*,\quad \nu\vec{w}^0+TB_{\sigma}\zeta^0=0. \tag{143}$$

Тогда задача (93) — (94) *имеет единственное сильное решение на* $[0,T]$*, причем*

$$B_{\sigma}\zeta(t):=B_{\sigma}\left(\zeta^0+\int_0^t(\gamma_n\vec{u})(s)ds\right)\in C^1\left([0,T];\left(H_{\Gamma}^{1/2}\right)^*\right), \tag{144}$$

$$\vec{w}(t)\in C([0,T];\vec{M}_1(\Omega)). \tag{145}$$

Доказательство. Согласно утверждению теоремы 7,
$$TB_\sigma\gamma_n(\vec{v}+\vec{w}) = TB_\sigma\gamma_n\vec{u} = TB_\sigma\frac{d\zeta}{dt} \in C([0,T];\vec{M}_1(\Omega)). \tag{146}$$
Поэтому
$$\vec{w}(t) = -\frac{1}{\nu}\int_0^t TB_\sigma\gamma_n\vec{u}(s)ds + \vec{w}^0 \in C^1([0,T];\vec{M}_1(\Omega)),$$
т.е. выполнено свойство (145). Далее, из построений параграфа 2 следует, что свойство (146) выполнено тогда и только тогда, когда
$$B_\sigma\gamma_n u = B_\sigma\frac{d\zeta}{dt} \in C\left([0,T];\left(H_\Gamma^{1/2}\right)^*\right). \tag{147}$$
Отсюда с учетом условий (143) приходим к выводу, что выполнено свойство (144), а также первое уравнение (94). $\square$

Замечание 6. *Условия* (143) *заведомо выполнены, если*
$$\zeta^0 \in \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_{2,\Gamma}, \quad \nu(\partial\vec{w}^0)_3 + B_\sigma\zeta^0 = 0, \quad (\partial\vec{w}^0)_1 = (\partial\vec{w}^0)_2 = 0. \quad \square \tag{148}$$

Отметим в заключение этого параграфа, что теоремы 6 и 7, а также следствие 1 позволяют установить, при наличии свойства дополнительной гладкости решений задачи Коши (131), см. определение 4, условия, обеспечивающие сильную разрешимость исходной начально-краевой задачи (9) — (18), т.е. существование сильного решения задачи (93) — (94), а также тривиального соотношения (89).

4. Нормальные колебания системы при условии статической устойчивости по линейному приближению

В этом параграфе изучаются свойства спектра и вопросы базисности собственных и присоединенных элементов задачи о нормальных колебаниях капиллярной вязкой жидкости.

4.1. Постановка спектральной задачи и простейшие свойства её решений. Рассмотрим решения однородной задачи (102) – (104) либо преобразованной задачи (124) – (126), зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$. Такие решения называют нормальными колебаниями гидросистемы.

Для соответствующих амплитудных элементов задача (102) – (104) приводит к спектральной проблеме
$$\nu A\vec{\xi} - 2i\omega_0 A^{1/2}S_0A^{-1/2}(\vec{\xi}+\vec{\eta}) - \nu^{-1}B(\vec{\xi}+\vec{\eta}) = \lambda\vec{\xi}, \quad \vec{\xi} \in \mathcal{D}(A), \tag{149}$$
$$\nu^{-1}B(\vec{\xi}+\vec{\eta}) = \lambda\vec{\eta}, \quad P(\vec{\xi}+\vec{\eta}) \in \mathcal{D}(B), \tag{150}$$
где $P : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \longrightarrow \vec{M}_0(\Omega)$ — ортопроектор.

Задача (122), (123) аналогично приводит к спектральной проблеме, которую в векторно-матричном виде, как и (124), (125), можно записать в форме
$$(\mathcal{I}+\mathcal{F})\,\mathcal{A}_0 y = \lambda\left(\mathcal{I}+\frac{1}{\nu}\mathcal{R}^+\right)y, \quad y = (\vec{v};\vec{z})^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{151}$$
Соответственно задача (124), (125) приводит к проблеме
$$(\mathcal{I}+\mathcal{F})\,\mathcal{A}_0 y = \lambda\left(\mathcal{I}+\frac{1}{\nu}\mathcal{R}^*\right)y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{152}$$
$$\mathcal{R}^+ = \begin{pmatrix} 0 & R^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^* = \begin{pmatrix} 0 & R^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{153}$$
Рассмотрим простейшие свойства решений задач (149) – (150), (151) и (152).

1^0. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением этих задач.

В самом деле, при $\lambda = 0$ в задаче (151) последовательно имеем $(\mathcal{I}+\mathcal{F})\mathcal{A}_0 y = 0$, $\mathcal{A}_0 y = 0$, $y = 0$, так как $\mathcal{I}+\mathcal{F}$ и $\mathcal{A}_0$ обратимы (см. лемму 6, формулу (126), с учетом свойств $A \gg 0$, $B \gg 0$).

2^0. Все собственные значения λ лежат в правой полуплоскости.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ из (149), (150) приходим к системе
$$\nu\vec{\xi} = 2i\omega_0 A^{-1/2}S_0A^{-1/2}(\vec{\xi}+\vec{\eta}) + \lambda A^{-1}(\vec{\xi}+\vec{\eta}), \quad \nu\vec{\eta} = \lambda^{-1}B(\vec{\xi}+\vec{\eta}), \tag{154}$$

а затем к одному уравнению

$$(\nu I - 2i\omega_0 S)\vec{\delta} = \lambda A^{-1}\vec{\delta} + \lambda^{-1}B\vec{\delta}, \quad \vec{\delta} := \vec{\xi} + \vec{\eta}, \quad S := A^{-1/2}S_0A^{-1/2}. \tag{155}$$

Отсюда получаем, с учетом соотношения $S = S^*$, что

$$\mathrm{Re}\lambda = \frac{\nu\|\vec{\delta}\|^2_\Omega}{(\|A^{-1/2}\vec{\delta}\|^2_\Omega + |\lambda|^{-2}\|B^{1/2}\vec{\delta}\|^2_\Omega)} > 0. \tag{156}$$

3^0. Задачи (151) (с оператором $\mathcal{R}^+$) и (152) (с оператором $\mathcal{R}^*$) имеют одни и те же решения $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.

В самом деле, из условия $y = (\vec{v}; \vec{z})^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ следует, что $\vec{z} \in \mathcal{D}(B)$, а тогда, согласно лемме 5 и формулам (153),

$$R^+\vec{z} = R^*\vec{z}, \quad \mathcal{R}^+y = \mathcal{R}^*y. \tag{157}$$

4^0. Указанные задачи могут иметь лишь дискретный спектр, т.е. состоящий из конечнократных изолированных собственных значений с предельной точкой $\lambda = \infty$.

Действительно, задача (152) равносильна спектральной проблеме

$$y = \lambda\mathcal{A}_0^{-1}\left(\mathcal{I} + \mathcal{F}\right)^{-1}\left(\mathcal{I} + \frac{1}{\nu}\mathcal{R}^*\right)y, \quad y \in \mathcal{H}, \tag{158}$$

на характеристические числа компактного оператора

$$\mathcal{A}_0^{-1}\left(\mathcal{I} + \mathcal{F}\right)^{-1}\left(\mathcal{I} + \frac{1}{\nu}\mathcal{R}^*\right) = \mathcal{A}_0^{-1}\left(\mathcal{I} + \mathcal{T}\right), \quad \mathcal{T} \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{159}$$

являющегося слабым возмущением самосопряженного оператора $\mathcal{A}_0$.

Основываясь на последнем свойстве, докажем далее свойство базисности системы собственных и присоединенных элементов и получим асимптотическое поведение собственных значений задачи (159). Предварительно дадим необходимые для дальнейшего определения.

4.2. О базисности Абеля – Лидского для системы корневых элементов. Отметим сразу же, что это свойство является промежуточным между свойством полноты и свойством базисности со скобками: здесь разложение любого элемента в ряд производится с помощью специального метода, который называют методом Абеля – Лидского порядка α (см. [22], с.248–249).

Пусть оператор L имеет дискретный спектр, состоящий из счетного множества конечнократных собственных значений $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ (характеристических чисел оператора $A = L^{-1}$), причем все они, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе

$$\Lambda_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{arg}\lambda| < \theta\}. \tag{160}$$

Пусть также $\alpha > 0$, $\alpha\theta < \pi/2$, $\lambda^\alpha := |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\mathrm{arg}\lambda}$, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ — система корневых (собственных и присоединенных) элементов оператора L, отвечающих собственным значениям $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$, а $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ биортогональная к ней система.

Предположим сначала, что система $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ не содержит присоединенных элементов оператора L, отвечающих собственным значениям $\mu_j \in \Lambda_\theta$.

Определение 5. *Будем говорить, что система элементов $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ является системой элементов Абеля – Лидского порядка α, если существует возрастающая последовательность индексов $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_l < \ldots$ такая, что ряд*

$$\sum_{l=0}^\infty P_l(t)f, \quad P_l(t)f := \sum_{j=m_l+1}^{m_{l+1}}(f, g_j)e_j(t)f_j, \tag{161}$$

$$e_j(t) := e_j(t;\alpha) := exp(-\mu_j^\alpha t) \quad (\mu_j \in \Lambda_\theta), \quad e_j(t) \equiv 1, \quad (\mu_j \overline{\in} \Lambda_\theta), \tag{162}$$

сходится при $t > 0$ и сумма $f(t)$ этого ряда стремится к f при $t \longrightarrow +0$. $\square$

В общей ситуации, когда имеются присоединенные элементы оператора L, определение 5 обобщается следующим образом. Пусть $f_p, \ldots, f_q$ — базис подпространства из корневых элементов оператора L, отвечающих собственному значению $\mu \in \Lambda_\theta$. Тогда сумма $\sum_{j=p}^{q}(f, g_j)e_j(t)f_j$ из определения (161) заменяется интегралом

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\mu|=\varepsilon}\exp(-\lambda^\alpha t)R_L(\lambda)f\,d\lambda, \tag{163}$$

где контур интегрирования лежит в Λ_θ и окружает изолированное собственное значение μ оператора L, $R_L(\lambda) := (L-\lambda I)^{-1}$. При $t = 0$ интеграл (163) равен проекции элемента f на подпространство корневых элементов оператора L, отвечающих собственному значению μ, а если μ является простым полюсом резольвенты $R_L(\lambda)$, то интеграл совпадает с суммой $\sum_{j=p}^{q}(f, g_j)e_j(t)f_j$.

Если компактный оператор A не имеет неограниченного обратного оператора L, т.е. если $\mathrm{Ker}A \neq \{0\}$, то в (163) следует взять вместо $R_L(\lambda)$ модифицированную резольвенту $A(I-\lambda A)^{-1}$, а в качестве μ_j — характеристические числа оператора A.

Будем теперь считать, что оператор A, т.е. оператор, обратный оператору L с дискретным спектром $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, имеет вид

$$A = A_0(I+T_1), \tag{164}$$

где T_1 — компактный оператор, а A_0 — самосопряженный компактный оператор класса $\mathcal{S}^{(p)} \subset \mathfrak{S}_p$, т.е. его s - числа (собственные значения оператора $(A_0^2)^{1/2}$) допускают оценку

$$s_j(A_0) \leqslant c(A_0)j^{-p}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{165}$$

Предположим также, что собственные значения оператора A_0 ненулевые и все, кроме, быть может, конечного их числа, положительны либо отрицательны. Далее нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 8. *(см. [22], с.292). Если выполнены сформулированные выше предположения, то:*

1). *Система корневых элементов $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ оператора A из (164) образует базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > p^{-1}$.*

2). *Если характеристические числа оператора A_0 имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_j(A_0) = c_{A_0}j^p + o(j^p), \quad j \longrightarrow \infty, \quad c_{A_0} \neq 0, \tag{166}$$

то характеристические числа $\mu_j(A)$ оператора A имеют то же самое асимптотическое поведение. □

4.3. О базисности мод нормальных колебаний и асимптотике спектра. Напомним, что проблема нормальных колебаний изучается при условии (85) статической устойчивости по линейному приближению. Тогда, как было выяснено в п. 4.1, проблемы (149) – (150), (151) и (152) равносильны.

Теорема 9. 1). *Спектр задачи* (158), *а потому и задач* (149) – (150) *и* (151), (152) *дискретный с предельной точкой $\lambda = \infty$.*

2). *Все собственные значения λ конечнократны и расположены, кроме, быть может, конечного их числа, в секторе Λ_ε при любом $\varepsilon > 0$.*

3). *Корневые (собственные и присоединенные) элементы задачи* (158) *образуют базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > 2$.*

4). *Асимптотическое поведение собственных значений λ_j задачи* (158) *имеет вид*

$$\lambda_j = \sigma\nu^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{mes}\,\Gamma\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j \longrightarrow \infty). \tag{167}$$

Доказательство. 1). Заметим сначала, что оператор $\mathcal{A}_0^{-1} = \mathrm{diag}(\nu^{-1}A^{-1}; \nu B^{-1})$ (см. (126)), действующий в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{M}_0(\Omega)$, являются компактным положительным оператором. При этом собственные значения $\lambda_j(A)$ (характеристические числа оператора A^{-1}) имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_j(A) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Omega}{3\pi^2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)], \quad j \longrightarrow \infty, \tag{168}$$

(см. [23], а также [4], с.279), а собственные значения $\lambda_j(B)$ — поведение (113).

Обозначим через

$$n(r,G):=\sum_{\mu_j(G)\leqslant r}1 \tag{169}$$

функцию распределения характеристических чисел компактного положительного оператора G. Тогда из формул (168) и (113) следует, что

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}n(r,A^{-1})r^{-3/2}=\frac{\operatorname{mes}\Omega}{3\pi^2},\quad \lim_{r\longrightarrow\infty}n(r,B^{-1})r^{-2}=\sigma^{-2}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{mes}\Gamma\right). \tag{170}$$

Так как

$$n(r,\mathcal{A}_0^{-1})=n(r,\nu^{-1}A^{-1})+n(r,\nu B^{-1}), \tag{171}$$

то из формул (170) следует, что

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}n(r,\mathcal{A}_0^{-1})r^{-2}=\lim_{r\longrightarrow\infty}n(r,\nu B^{-1})r^{-2}=\nu^2\sigma^{-2}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{mes}\Gamma\right)>0, \tag{172}$$

а отсюда — асимптотическая формула

$$\lambda_j(\mathcal{A}_0^{-1})=\lambda_j(\nu B^{-1})[1+o(1)]=\nu\sigma^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{mes}\Gamma\right)^{1/2}j^{-1/2}[1+o(1)]. \tag{173}$$

2). Из формулы (173) следует, что оператор $\mathcal{A}_0^{-1}\in\mathcal{S}^{(p)}$ при $p=1/2$. Так как в задаче (158) – (159) оператор $\mathcal{F}\in\mathfrak{S}_\infty$, то по первому утверждению теоремы 8 получаем, что корневые элементы задачи (158), т.е. задачи на собственные значения для оператора (159), образуют базис Абеля – Лидского порядка $\alpha>p^{-1}=2$.

3). Из (173) и второго утверждения теоремы 8 получаем также, что задача (158) имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с асимптотическим поведением (167) для собственных значений.

4). Наконец, локализация спектра в секторе Λ_ε при любых $\varepsilon>0$ следует из теоремы М.В. Келдыша (см., например, [24], с. 314–317).

Этим теорема 9 полностью доказана. □

Замечание 7. *Доказательство утверждений теоремы 9 для случая невращающегося сосуда приведено также в дипломной работе О.А. Дудик, выполненной под руководством автора данной статьи (см.* [25]*).* □

Таким образом, итогом рассмотрения спектральных задач (149) – (150), (151), (152) является следующий вывод: при выполнении условия статической устойчивости по линейному приближению все нормальные движения капиллярной вязкой жидкости в равномерно вращающемся сосуде являются асимптотически устойчивыми, а спектр и корневые функции обладают доказанными выше свойствами.

5. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости

В этом параграфе проводится подробное доказательство обращения теоремы Лагранжа об устойчивости малых движений капиллярной жидкости. Сначала рассматривается случай невращающейся жидкости, а затем равномерно вращающейся в состоянии относительного равновесия. Отметим, что данная проблема кратко ранее излагалась в [7] – [10], а более подробно, но не полностью, — во втором томе монографии [5] — [6].

5.1. О неустойчивых движениях для невращающейся жидкости. Рассмотрим спектральную задачу (149) – (150) при $\omega_0=0$ и будем считать, что оператор B действует из $\mathcal{D}(B)\subset\vec{M}_0(\Omega)$ в $\vec{M}_0(\Omega)$. Тогда из (149) – (150) получаем задачу

$$A\vec{\xi}-\alpha B(P\vec{\xi}+\vec{\eta})=\widetilde{\lambda}\vec{\xi},\quad \vec{\xi}\in\mathcal{D}(A),\quad \alpha=\nu^{-2},\quad \widetilde{\lambda}=\lambda/\nu, \tag{174}$$

$$\alpha B(P\vec{\xi}+\vec{\eta})=\widetilde{\lambda}\vec{\eta},\quad (P\vec{\xi}+\vec{\eta})\in\mathcal{D}(B), \tag{175}$$

а оператор P, как и ранее, — ортопроектор из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ на $\vec{M}_0(\Omega)$.

Напомним (см. (104)), что $B=Q^*B_\sigma Q$, $Q=\gamma_n A^{-1/2}$, $Q^*=A^{1/2}T$, где B_σ — оператор потенциальной энергии (82), до сих пор считавшийся положительно определенным в $L_{2,\Gamma}$. Рассмотрим теперь ситуацию, когда условие (85) статической устойчивости по линейному приближению не выполнено и нижняя грань оператора B_σ отрицательна. Так как оператор B_σ имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ (лемма 1), то далее будет рассматриваться общий случай, когда оператор B_σ имеет κ (с учетом их кратности) отрицательных собственных значений и q - кратное нулевое собственное значение:

$$\lambda_1(B_\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\kappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\kappa+1}(B_\sigma) = \ldots = \lambda_{\kappa+q}(B_\sigma) < \lambda_{\kappa+q+1}(B_\sigma) \leqslant \ldots. \tag{176}$$

Заметим, что собственные значения оператора B_σ (и другие характеристики операторов задачи (174) – (175)) являются непрерывными функциями параметров изучаемой гидросистемы. В частности, если интенсивность гравитационного поля изменяет знак и модуль, то минимальное собственное значение оператора B_σ, совпадающее с его нижней гранью, может стать отрицательным, и тогда выполнены условия (176) с $\kappa \geqslant 1$, $q \geqslant 0$.

Теорема 10. *Если выполнены условия* (176)*, то оператор* $B : \mathcal{D}(B) \subset \vec{M}_0(\Omega) \longrightarrow \vec{M}_0(\Omega)$ *имеет дискретный вещественный спектр и его собственные значения* $\lambda_k(B)$*,* $k = 1, 2, \ldots$*, удовлетворяют неравенствам вида* (176)*:*

$$\lambda_1(B) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\kappa(B) < 0 = \lambda_{\kappa+1}(B) = \ldots = \lambda_{\kappa+q}(B) < \lambda_{\kappa+q+1}(B) \leqslant \ldots. \tag{177}$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу

$$B\vec{\eta} := Q^* B_\sigma Q \vec{\eta} = \lambda \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} \in \mathcal{D}(B) \subset \vec{M}_0(\Omega). \tag{178}$$

Так как оператор B считается здесь действующим в пространстве $\vec{M}_0(\Omega)$, то оператор Q, как и оператор Q^*, имеет обратный оператор; этот факт непосредственно следует из лемм 3 и 4. Поэтому в (178) можно сделать замену

$$Q\vec{\eta} = \gamma_n A^{-1/2} \vec{\eta} =: \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \tag{179}$$

Тогда, применяя еще слева оператор Q, приходим к задаче

$$C B_\sigma \zeta = \lambda \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma) \subset L_{2,\Gamma}, \quad C := \gamma_n T. \tag{180}$$

Здесь оператор C обладает свойствами

$$0 < C \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Gamma}). \tag{181}$$

В самом деле, оператор T ограниченно действует из $(H_\Gamma^{1/2})^* \supset L_{2,\Gamma}$ в $\vec{M}_1(\Omega)$, а оператор γ_n ограниченно действует из $\vec{M}_1(\Omega)$ в $H_\Gamma^{1/2} \subset L_{2,\Gamma}$. Так как вложения $L_{2,\Gamma} \subset (H_\Gamma^{1/2})^*$ и $H_\Gamma^{1/2} \subset L_{2,\Gamma}$ компактны, то оператор $C = \gamma_n T : L_{2,\Gamma} \longrightarrow L_{2,\Gamma}$ компактен.

Для доказательства свойства положительности оператора C воспользуемся абстрактным тождеством (48) применительно к пространствам $F = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$, $G = L_{2,\Gamma}$ и соответствующим операторам $T_M = T$ и $\gamma_M = \gamma_n$. Тогда при $\vec{\eta} \in \vec{M}_1(\Omega)$ и $\psi \in L_{2,\Gamma}$ будем иметь

$$(\vec{\eta}, T\psi)_{1,\Omega} = \langle \gamma_n \vec{\eta}, \psi \rangle_0 = (\gamma_n \vec{\eta}, \psi)_0. \tag{182}$$

Отсюда следует, что $\gamma_n = T^*$ и потому $C = \gamma_n T = C^* \geqslant 0$. Так как на $\vec{M}_1(\Omega)$ операторы γ_n и T обратимы, то $C > 0$.

Полагая в (182) $\vec{\eta} = T\psi$, получим

$$\|T\vec{\psi}\|_{1,\Omega}^2 = (C\psi, \psi)_0 = \|C^{1/2}\psi\|_0^2. \tag{183}$$

Если $\varphi = C\psi$, $\psi \in L_{2,\Gamma}$, то из (183) следует тождество

$$\|T\psi\|_{1,\Omega}^2 = (\varphi, C^{-1}\varphi)_0 = \|C^{-1/2}\varphi\|_0^2 < \infty, \tag{184}$$

откуда приходим к выводу, что

$$\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_\Gamma^{1/2}, \tag{185}$$

так как

$$\varphi = \gamma_n(T\psi) = \gamma_n \vec{w}, \quad \vec{w} \in \vec{M}_1(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \tag{186}$$

и потому

$$\varphi = \gamma_n \vec{w} \in H_\Gamma^{1/2}. \tag{187}$$

Возвращаясь к задаче (180), отметим, что при $\lambda \neq 0$ ее решения ζ из $\mathcal{D}(B_\sigma)$ принадлежат также $\mathcal{D}(C^{-1})$. Поэтому (180) равносильна задаче

$$B_\sigma \zeta = \lambda C^{-1}\zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma) \cap \mathcal{D}(C^{-1}\zeta). \tag{188}$$

Здесь оператор C^{-1} самосопряжен, положительно определен и неограничен. Очевидно, спектр задачи (188) совпадает со спектром задачи (178). Покажем, что задача (188) имеет дискретный спектр и ее собственные значения обладают свойствами (177).

Рассмотрим вместо (188) задачу

$$B_{\sigma,b}\zeta = \lambda C^{-1}\zeta, \quad B_{\sigma,b} := B_\sigma + bI, \quad \mathcal{D}(B_{\sigma,b}) = \mathcal{D}(B_\sigma), \tag{189}$$

где константа $b > 0$ выбрана таким образом, чтобы оператор $B_{\sigma,b}$ был положительно определен:

$$B_{\sigma,b} \gg 0. \tag{190}$$

Тогда, как это ясно из проведенных преобразований, задача (189) равносильна спектральной проблеме

$$B_b\vec{\eta} := Q^*(B_\sigma + bI)Q\vec{\eta} = \lambda\vec{\eta}, \tag{191}$$

которая уже обсуждалась выше (см. леммы 1, 4 и конец п. 2.4). В частности, задача (191) имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а ее собственные значения имеют асимптотическое поведние (113).

С использованием оператора $B_{\sigma,b}$ задачу (188) можно переписать в виде

$$(B_{\sigma,b} - bI)\zeta = \lambda C^{-1}\zeta. \tag{192}$$

Осуществляя здесь преобразования, обратные проведенным выше, и возвращаясь к задаче (178), получим новую форму ее записи:

$$(B_b - b\widetilde{C})\vec{\eta} = \lambda\vec{\eta}, \quad B_b = Q^* B_{\sigma,b} Q, \quad \widetilde{C} := Q^*Q = (A^{1/2}T)(\gamma_n A^{-1/2}). \tag{193}$$

Как следует из предыдущего, здесь оператор $\widetilde{C}$, как и оператор $C = \gamma_n T = (\gamma_n A^{-1/2})(A^{1/2}T) = QQ^*$, — компактный положительный оператор, имеющий в качестве спектра те же собственные значения. Так как B_b положительно опеределен, то в (193) можно сделать замену

$$B_b^{1/2}\vec{\eta} = \vec{v}, \tag{194}$$

и вместо (193) приходим к спектральной задаче

$$(I - bB_b^{-1/2}\widetilde{C}B_b^{-1/2} - \lambda B_b^{-1})\vec{\eta} = 0, \quad \vec{\eta} \in \vec{M}_0(\Omega), \tag{195}$$

где B_b^{-1} и $B_b^{-1/2}CB_b^{-1/2}$ — компактные положительные операторы, причем B_b^{-1} имеет степенную асимптотику собственных значений, следующую из (113). Отсюда и из теоремы 11.1 монографии [24] следует, что задача (195) имеет дискретный вещественный спектр с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а ее собственные значения имеют асимптотическое поведение (113).

Таким образом, задача (178), равносильная задаче (195), также имеет дискретный вещественный спектр с указанной асимптотикой собственных значений. Это означает, что оператор B в (178) ограничен снизу, самосопряжен и имеет дискретный спектр. Тогда его собственные значения λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, суть последовательные минимумы вариационного отношения $(B\vec{\eta}, \vec{\eta})/(\vec{\eta}, \vec{\eta})$, которое с использованием (83) можно переписать в виде

$$\frac{\displaystyle\int_\Gamma [|\nabla_\Gamma(\gamma_n\vec{w})|^2 + a_\Gamma|\gamma_n\vec{w}|^2]\,d\Gamma}{E(\vec{w}, \vec{w})}, \quad \vec{w} = A^{-1/2}\vec{\eta} \in \vec{M}_1(\Omega), \quad \gamma_n\vec{w} \in H_0^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \tag{196}$$

Так как знаменатель в (196) положителен при $\vec{w} \neq \vec{0}$, то знак собственных значений λ определяется знаком квадратичной формы, стоящей в числителе. Поэтому, вычисляя последовательные (по возрастанию) минимумы вариационного отношения (196) и учитывая свойства (176), видим, что квадратичная форма числителя принимает отрицательные значения на подпространстве размерности κ. Отсюда следует, что задача (178) имеет ровно κ отрицательных собственных значений. Далее, так как эта квадратичная форма принимает нулевое значение на подпространстве размерности q, то последующие за отрицательными q собственных значений задачи (178) будут равны нулю. Наконец, собственные значения $\lambda_{\kappa+q+1}(B)$ при $j \geqslant 1$ положительны и стремятся к $+\infty$ при $j \longrightarrow \infty$.

Таким образом, установлено, что при выполнении неравенств (176) для собственных значений оператора B выполнены свойства (177). $\square$

Возвращаясь к проблеме (174) – (175), рассмотрим свойства ее решений в случае, когда выполнены условия (176), а потому (в силу теоремы 174) и условия (177). Далее для простоты $\widetilde{\lambda}$ из (174) – (175) обозначим через λ.

Лемма 7. *Если ядро оператора B ненулевое, т.е. $Ker\, B \neq \{0\}$ и $q > 0$ в неравенствах (177), то проблема (174) – (175) имеет решение*

$$\lambda = \lambda_0 = 0, \quad \vec{\eta} = \vec{\eta}_0 = \vec{\psi}, \quad \forall \vec{\psi} \in Ker\, B, \quad \vec{\xi} = \vec{0}, \tag{197}$$

которое естественно назвать переходным (из правой полуплоскости в левую) решением задачи (174) – (175).

Доказательство. Полагая в (174) – (175) $\lambda = 0$, имеем

$$A\vec{\xi} - \alpha B(P\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \vec{0}, \quad \alpha B(P\vec{\xi} + \vec{\eta}) = 0,$$

откуда следует, что $A\vec{\xi} = \vec{0}$ и потому $\vec{\xi} = 0$, а затем $B\vec{\eta} = \vec{0}$ и потому $\vec{0} \neq \vec{\eta} \in \operatorname{Ker} B$. $\square$

Дальнейшее изучение свойств решений задачи (174) – (175) связано с доказательством так называемого принципа смены устойчивости.

Обозначим через $\vec{H}_0$ ядро оператора $B, \vec{H}_0 = \operatorname{Ker} B \neq \{0\}$, $\dim \vec{H}_0 = q > 0$, а через $\vec{H}_1$ — его ортогональное дополнение в $\vec{M}_0(\Omega), \vec{H}_1 := \vec{M}_0(\Omega) \ominus \vec{H}_0$. Тогда задачу (174) – (175) можно переписать в виде

$$A\vec{\xi} - \alpha B_1(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \lambda\vec{\xi}, \quad \vec{\xi} \in \mathcal{D}(A), \tag{198}$$

$$\alpha B_1(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \lambda\vec{\eta}, \quad P_1(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \in \mathcal{D}(B_1), \tag{199}$$

где $P_1 : \vec{M}_0(\Omega) \longrightarrow \vec{H}_1$ — ортопроектор на $\vec{H}_1$, а $B_1 := B\big|_{\vec{H}_1} = P_1 B = B P_1 = P_1 B P_1$ — сужение оператора B на подпространство $\vec{H}_1$. Очевидно, $\operatorname{Ker} B_1 = \{0\}$ в $\vec{H}_1$, и его собственные значения $\lambda_k(B_1)$, очевидно, обладают свойствами

$$\lambda_1(B_1) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\kappa(B_1) < 0 < \lambda_{\kappa+1}(B_1) \leqslant \lambda_{\kappa+j}(B_1) \leqslant \ldots, \tag{200}$$

так как

$$\lambda_k(B_1) = \lambda_k(B), \quad k = 1, \ldots, \kappa, \quad \lambda_k(B_1) = \lambda_{k+q}(B), \quad k \geqslant \kappa + 1. \tag{201}$$

Лемма 8. *Собственные значения задачи (198) – (199) могут переходить из правой полуплоскости в левую только через нуль.*

Доказательство. Будем считать в (198) – (199), что $\lambda \neq 0$, и перепишем эту систему в виде

$$A\vec{\xi} = \lambda(\vec{\xi} + \vec{\eta}), \quad \alpha B_1(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \lambda\vec{\eta}, \quad \vec{\xi} \in \mathcal{D}(A), \quad P_1(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \in \mathcal{D}(B_1). \tag{202}$$

Применяя к первому соотношению оператор A^{-1} и вводя $\vec{\delta} := \vec{\xi} + \vec{\eta}$, приходм к уравнению

$$\vec{\delta} = \lambda A^{-1}\vec{\delta} + \alpha\lambda^{-1} B_1 \vec{\delta}. \tag{203}$$

Если здесь положить $\lambda = i\gamma$, $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$, то после умножения (скалярно в $\vec{M}_0(\Omega)$) на $\vec{\delta}$ приходим к выводу, что левая часть равна $\|\vec{\delta}\|^2$, в то время как правая часть чисто мнимая. Отсюда следует, что $\vec{\delta} = \vec{0}$. Тогда из (202) получаем, что $\vec{\xi} = \vec{0}$, $\vec{\eta} = \vec{0}$, т.е. при $\lambda = i\gamma$, $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$, задача (198) – (199) имеет лишь тривиальное решение. $\square$

Следствием этого утвержденя и леммы 7 является

Теорема 11. *(принцип смены устойчивости). При потере устойчивости нормальных движений капиллярной вязкой жидкости, обусловленной изменением физических параметров гидросистемы, переход собственных значений λ из правой комплексной полуплоскости в левую происходит через нуль комплексной плоскости и лишь при условии $\operatorname{Ker} B_\sigma \neq \{0\}$.* $\square$

Отметим еще одно свойство решений задачи (174) – (175) и связанных с ней задач (198) – (199) и (203).

Лемма 9. *Невещественные собственные значения задачи* (203), *а также те вещественные собственные значения, которым кроме собственных отвечают и присоединенные элементы, расположены в полуплоскости*

$$\mathrm{Re}\lambda > \frac{\lambda_{\min}(\mathrm{A})}{2} > 0. \tag{204}$$

Доказательство этого утверждения дословно повторяет соответствующее доказательство для аналогичного утверждения применительно к задаче вида (203) для тяжелой вязкой жидкости, где B_1 — компактный неотрицательный оператор (см., например, [4], с.286–288, а также [6], с.79–81). □

Перейдем от спектральной задачи (198) – (199) с неограниченными операторами A и B_1 к задаче на собственные значения для компактного оператора. Это можно сделать, так как A и B_1 имеют компактные обратные операторы.

Лемма 10. *При* $\lambda \neq 0$ *задача* (198) – (199) *равносильна задаче*

$$\alpha A^{-1}\vec{\xi} + \alpha A^{-1}P_1\vec{\eta} = \mu\vec{\xi}, \quad \mu := \alpha\lambda^{-1}, \tag{205}$$

$$-\alpha P_1 A^{-1}\vec{\xi} + (B_1^{-1} - \alpha P_1 A^{-1} P_1)\vec{\eta} = \mu\vec{\eta}. \tag{206}$$

Доказательство. 1). Из задачи (198) – (199), записанной в форме (202), видно, что при $\lambda \neq 0$

$$\vec{\eta} = P_1\vec{\eta} \in \vec{H}_1. \tag{207}$$

Поэтому, применяя к первому соотношению (202) оператор A^{-1}, приходим к (205). Далее, проектируя (205) на $\vec{H}_1$, имеем

$$\alpha P_1 A^{-1}\vec{\xi} + \alpha P_1 A^{-1} P_1\vec{\eta} = \mu P_1\vec{\xi}. \tag{208}$$

Из второго уравнения (202) получаем

$$B^{-1}\vec{\eta} = \mu(P_1\vec{\xi} + \vec{\eta}). \tag{209}$$

Подставляя сюда выражение для $\mu P_1\vec{\xi}$ из (208), приходим к (206).

2). Докажем теперь, что решения задачи (205) – (206) являются также решениями задачи (198) – (199). Из (205) снова имеем (208). Тогда из (206) получаем $B^{-1}\vec{\eta} - \mu P_1\vec{\xi} = \mu\vec{\eta}$, откуда при $\mu = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ приходим к (199), если учесть, что $B_1(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = B_1(P_1\vec{\xi} + \vec{\eta})$.

Далее, из (205) следует, что $\vec{\xi} \in \mathcal{D}(A)$ и

$$\alpha(\vec{\xi} + P_1\vec{\eta}) = \mu A\vec{\xi} \Longleftrightarrow A\vec{\xi} = \lambda(\vec{\xi} + \vec{\eta}). \tag{210}$$

Используя (199), из (210) получаем (198). □

Вид задачи (205) – (206) и свойства операторов A^{-1} и B_1^{-1} позволяют применить к этой задаче теорию возмущений при достаточно малом $\alpha = \nu^{-2}$, т.е. при достаточно большой вязкости. Отметим, что при изменении ν свойства всех операторов, входящих в уравнения (205) – (206), остаются неизменными, так как не изменяются внешние и внутренние (капилярные) силы, а также конфигурация области Ω, занятой жидкостью.

Лемма 11. *Если в задаче* (205) – (206) *параметр* $\alpha > 0$ *настолько мал, что выполнено условие*

$$4\alpha < \frac{\lambda_1(A)}{|\lambda_1(B_1)|}, \tag{211}$$

то эта задача имеет в левой полуплоскости не менее κ (с учетом кратностей) собственных значений.

Доказательство. Рассмотрим проблему (205) – (206) как задачу, полученную при возмущении спектральной векторно-матричной задачи

$$\begin{pmatrix} \alpha A^{-1} & 0 \\ 0 & B_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{212}$$

изучаемой в гильбертовом пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{M}_0(\Omega)$, операторной матрицей вида

$$\alpha T := \alpha \begin{pmatrix} 0 & A^{-1}P_1 \\ -P_1A^{-1} & -P_1A^{-1}P_1 \end{pmatrix}. \tag{213}$$

Свойства спектра задачи (212) с учетом неравенств (200) очевидны: он состоит из собственных значений $\{\lambda_k^{-1}(B_1)\}_{k=1}^{\kappa}$, расположенных на отрицательной полуоси, а также множества $\{\lambda_k^{-1}(A)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_k^{-1}(B_1)\}_{k=\kappa+1}^{\infty}$ положительных собственных значений с предельной точкой в нуле. При этом расстояние от наибольшего собственного значения $\lambda_1^{-1}(B_1)$, расположенного в левой полуплоскости, до нуля, равно, очевидно, $|\lambda_1^{-1}(B_1)| = 1/|\lambda_1(B_1)|$.

Поэтому если норма матрицы возмущения (213) будет меньше величины $r := 1/(2|\lambda_1(B_1)|)$, то спектр возмущенной задачи в левой полуплоскости находится в области

$$\Lambda_r := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \tau| < r, \quad \tau \in [\lambda_\kappa^{-1}(B_1), \lambda_1^{-1}(B_1)]\}, \tag{214}$$

а также, возможно, в левом полукруге радиуса r с центром в нуле. В частности, в Λ_r будет ровно κ собственных значений задачи (205) – (206).

Проверим, что если выполнено условие (211), то $\|\alpha T\| = \alpha\|T\| < r$. Имеем простейшую оценку

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & A^{-1}P_1 \\ -P_1A^{-1} & -P_1A^{-1}P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{array}{c} A^{-1}P_1\vec{\eta} \\ -P_1A^{-1}\vec{\xi} - P_1A^{-1}P_1\vec{\eta} \end{array} \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|A^{-1}\|^2 \Big\{ \|\vec{\eta}\|^2 + \left(\|\vec{\xi}\|^2 + \|\vec{\eta}\|^2 + 2\|\vec{\xi}\|\|\vec{\eta}\| \right) \Big\} < 4\|A^{-1}\|^2 \left(\|\vec{\xi}\|^2 + \|\vec{\eta}\|^2 \right).$$

Отсюда ледует, что $\|\alpha T\| \leqslant 2\alpha\|A^{-1}\| = \dfrac{2\alpha}{\lambda_1(A)}$, и тогда в силу (211) имеем $\|\alpha T\| < r$. □

Из леммы 11 на основании предыдущих фактов приходим к следующему выводу.

Теорема 12. *Если выполнено условие* (211)*, то в левой комплексной полуплоскости задача* (198) – (199) *имеет ровно κ собственных значений и расположены они на отрицательной полуоси.* □

Доказательство этой теоремы осуществим по этапам.

Как уже отмечалось выше (см. лемму 8), задача (198) – (199) равносильна уравнению (203), причем для собственных значений из левой полуплоскости задача не имеет присоединенных элементов (лемма 9).

Лемма 12. *Пусть $\{\vec{\delta}_{kj}\}_{j=1}^{\alpha_k}$ – собственные элементы задачи* (203)*, отвечающие одному и тому же собственному значению $\lambda_k < 0$. Тогда элементы $\{P_1\vec{\delta}_{kj}\}_{j=1}^{\alpha_k}$ линейно независимы.*

Доказательство. Имеем из (203)

$$\vec{\delta}_{kj} = \lambda_k A^{-1}\vec{\delta}_{kj} + \alpha\lambda_k^{-1}B_1\vec{\delta}_{kj}, \quad j = 1, \ldots, \alpha_k. \tag{215}$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^{\alpha_k} c_j P_1 \vec{\delta}_{kj} = \vec{0}. \tag{216}$$

Тогда из (215) получаем

$$\alpha\lambda_k^{-1} \sum_{j=1}^{\alpha_k} c_j B_1 \vec{\delta}_{kj} = \lambda_k \left(I - \lambda_k A^{-1} \right) \sum_{j=1}^{\alpha_k} c_j \vec{\delta}_{kj} = \vec{0} \quad (B_1P_1 = B_1). \tag{217}$$

Так как $\lambda_k < 0$, то оператор $I - \lambda_k A^{-1} \gg 0$ и потому ограниченно обратим, а тогда $\sum\limits_{j=1}^{\alpha_k} c_j \vec{\delta}_{kj} = \vec{0}$.

Поскольку $\vec{\delta}_{kj}$ линейно независимы, то отсюда следует, что $c_j = 0$, $j = 1, \ldots, \alpha_k$, и лемма доказана. □

Второе вспомогательное утверждение относится к свойству собственных элементов, отвечающих различным собственным значениям.

Лемма 13. *Элементы* $\{P_1\vec{\delta}_k\}_{k=1}^{\kappa}$, *отвечающие собственным элементам* $\{\vec{\delta}_k\}_{k=1}^{\kappa}$ *задачи* (203) *для различных собственных значений* $\lambda_k < 0$, *линейно незавиимы.*

Доказательство. Пусть $\vec{\delta}$ – решение задачи (203) при некотором $\lambda < 0$. Имеем

$$\vec{\delta} = \lambda A^{-1}\vec{\delta} + \alpha\lambda^{-1}B_1\vec{\delta}. \tag{218}$$

Представим

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_0 + \vec{\delta}_1, \quad \vec{\delta}_0 = P_0\vec{\delta} \in \vec{H}_0, \quad \vec{\delta}_1 = P_1\vec{\delta} \in \vec{H}_1. \tag{219}$$

Подставляя (219) в (218) и действуя ортопроекторами P_0 и P_1 на полученное соотношение, приходим к системе уравнений

$$\vec{\delta}_0 = \lambda P_0 A^{-1}\left(P_0\vec{\delta}_0 + P_1\vec{\delta}_1\right), \quad \vec{\delta}_1 = \lambda P_1 A^{-1}\left(P_0\vec{\delta}_0 + P_1\vec{\delta}_1\right) + \alpha\lambda^{-1}B_1\vec{\delta}_1. \tag{220}$$

Так как $\lambda < 0$, то оператор $I_0 - \lambda P_0 A^{-1}P_0$ положительно определен в $\vec{H}_0$ и поэтому из (220) получаем уравнение

$$\vec{\delta}_1 = \lambda\left[\lambda P_1 A^{-1}P_0\left(I_0 - \lambda P_0 A^{-1}P_0\right)^{-1}P_0 A^{-1}P_1 + P_1 A^{-1}P_1\right]\vec{\delta}_1 + \alpha\lambda^{-1}B_1\vec{\delta}_1. \tag{221}$$

Из проведенных выкладок следует, что задачи (221) и (218) равносильны, причем их собственные элементы $\{\vec{\delta}_k\}_{k=1}^{\kappa}$ и $\{P_1\vec{\delta}_k\}_{k=1}^{\kappa}$ линейно независимы одновременно. □

Опираясь на леммы 12 и 13, перейдем к доказательству теоремы 12. Тот факт, что в левой полуплоскости собственные значения задачи (198) – (199) вещественны, следует из леммы 9. Далее, из уравнения (203) следует, что

$$\lambda = \frac{\|\vec{\delta}\|^2}{\|A^{-1/2}\vec{\delta}\|^2 + \alpha|\lambda|^{-2}(B_1\vec{\delta}, \vec{\delta})}, \tag{222}$$

причем квадратичная форма $(B_1\vec{\delta}, \vec{\delta}) = (B_1P_1\vec{\delta}, P_1\vec{\delta})$ оператора B_1 в силу (200) имеет ровно κ отрицательных квадратов, т.е. отрицательно определена на подпространстве размерности κ, натянутом на первые κ собственных элементов оператора B_1.

Для того, чтобы в (222) было $\lambda < 0$, необходимо, чтобы

$$(B_1\vec{\delta}, \vec{\delta}) = \left(J_\kappa|B_1|^{1/2}P_1\vec{\delta}, |B_1|^{1/2}P_1\vec{\delta}\right) > 0, \tag{223}$$

где

$$|B_1| = (B_1^{1/2})^{1/2} \gg 0, \quad J_\kappa = B_1|B_1|^{-1}, \quad B_1 = J_\kappa|B_1|^{-1} = |B_1|^{-1/2}J_\kappa|B_1|^{-1/2}. \tag{224}$$

В ортогональном разложении пространства $\vec{H}_1 = \vec{M}_0(\Omega) \ominus \vec{H}_0$, отвечающем отрицательным и положительным собственным значениям и собственным элементам оператора B_1 (см. (200)), т.е. в разложении

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1,-} \oplus \vec{H}_{1,+}, \quad \dim\vec{H}_{1,-} = \kappa, \tag{225}$$

оператор $J_\kappa = \mathrm{diag}(-I_-; I_+)$, $J_\kappa = J_\kappa^{-1} = J_\kappa^*$.

Из этих свойств следует, что форме (223) отвечает индефинитное скалярное произведение в пространстве Л.С. Понтрягина Π_κ, определяемое оператором J_κ. Свойство (223) говорит о том, что собственные элементы $\{P_1\vec{\delta}\}$ задачи (203), отвечающие отрицательным собственным значениям, являются отрицательными в Π_κ. Так как в силу лемм 12 и 13 они линейно независимы, а размерность любого отрицательного подпространства в Π_κ в точности равна κ (см., например, [26], с.73), то количество отрицательных собственных значений задачи (203) (с учетом их кратностей) не может превышать κ. С другой стороны, по лемме 11 их количество не менее κ. Отсюда и следует утверждение теоремы 12.

Рассмотрим теперь случай произвольного α в задаче (205) – (206), когда условие (211) не обязательно выполнено.

Теорема 13. *Пусть в задаче* (205) – (206) $\alpha = \alpha_0 > 0$ – *произвольное положительное число. Тогда эта задача имеет в левой полуплоскости ровно* κ *собственных значений и они расположены на вещественной оси.*

Доказательство. Для достаточно малых значений α, когда $\alpha < \alpha_* := \lambda_1(A)/4|\lambda_1(B_1)|$, этот факт доказан в теореме 12.

Заметим теперь, что конфигурация области Ω, занятой жидкостью, и свойства операторов в задаче (205) – (206) не зависят от величины вязкости жидкости $\nu > 0$, а потому и от $\alpha = \nu^{-2}$. Будем уменьшать непрерывно величину вязкости от значений $\nu > \nu_* = \alpha_*^{-1/2}$ до произвольного значения $\nu = \nu_0$, $\nu_0^{-2} = \alpha_0 > 0$. Тогда, с одной стороны, собственные значения $\mu = \mu(\alpha)$ задачи (205) – (206) будут непрерывными функциями параметра α, а с другой – они при изменении α от значений $\alpha < \alpha_*$ до $\alpha = \alpha_0 > 0$ не могут уйти на бесконечность, так как для компактного оператора, отвечающего задаче (205) – (206), собственные значения $\mu_k(\alpha)$ имеют предельную точку $\mu = 0$.

Далее, из (205) – (206) вытекает также, что при любом $\alpha > 0$ задача не имеет собственного значения $\mu = 0$. В самом деле, соотношения

$$\alpha A^{-1}\vec{\xi} + \alpha A^{-1}P_1\vec{\eta} = 0, \quad B_1^{-1}\vec{\eta} - P_1\left(\alpha A^{-1}\vec{\xi} + \alpha A^{-1}P_1\vec{\eta}\right) = \vec{0} \tag{226}$$

приводят к тривиальному решению $\vec{\eta} = \vec{0}$, $\vec{\xi} = \vec{0}$, так как $\mathrm{Ker}B_1^{-1} = \{0\}$, $\mathrm{Ker}A^{-1} = \{0\}$. Отсюда следует, что при упомянутом выше изменении α собственные значения $\mu = \mu(\alpha)$ не могут также попасть и в нуль. Наконец, они не могут пройти из левой полуплоскости в правую по мнимой оси (лемма 8). Кроме того, при любом α все они находятся на вещественной оси (в левой полуплоскости). Теорема доказана. $\square$

Итогом всех проведенных выше рассмотрений является

Теорема 14. *(обращение теоремы Лагранжа об устойчивости). Пусть при $\omega_0 = 0$ потенциальная энергия капиллярной вязкой жидкости в произвольном неподвижном сосуде имеет грубый „не-минимум" и для оператора потенциальной энергии B_σ выполнены условия* (176). *Тогда задача* (174) – (175) *о нормальных колебаниях жидкости имеет ровно κ отрицательных значений, а также q-кратное нулевое собственное значение.*

В частности, если $\kappa \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, то изучаемая гидросистема является динамически неустойчивой.

Доказательство. Оно следует из теоремы 13 и того факта, что при $\lambda \neq 0$ задачи (174) – (175) и (205) – (206) равносильны (лемма 10), а $\mu = \alpha\widetilde{\lambda}^{-1}$, $\alpha = \nu^{-2}$, $\widetilde{\lambda} = \dfrac{\lambda}{\nu}$ (см. (174)). $\square$

Отметим в заключение этого пункта, что переход собственных значений $\widetilde{\lambda}$ из правой полуплоскости в левую возможен тогда, когда $\mathrm{Ker}B_\sigma \neq \{0\}$ (см. лемму 7).

5.2. О неустойчивых движениях для равномерно вращающейся жидкости. Рассмотрим теперь ситуацию, когда сосуд с жидкостью равномерно вращается с угловой скоростью $\omega_0 \neq 0$. Тогда вместо (174) – (175) будем иметь более общую проблему (см. (149) – (150)):

$$A[\vec{\xi} - 2i\omega_0\nu^{-1}S(\vec{\xi} + \vec{\eta})] - \alpha B(P\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \widetilde{\lambda}\vec{\xi}, \tag{227}$$

$$\alpha B(P\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \widetilde{\lambda}\vec{\eta}, \quad P\vec{\xi} + \vec{\eta} \in \mathcal{D}(B), \tag{228}$$

$$\vec{\xi} - 2i\omega_0\nu^{-1}S(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \in \mathcal{D}(A), \quad S := A^{-1/2}S_0A^{-1/2}, \quad \widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \alpha = \nu^{-2}. \tag{229}$$

Отметим предварительно следующий факт.

Лемма 14. *Для любых $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(A)$ и $\vec{\psi} \in \mathcal{D}(B)$ найдутся такие элементы $\vec{\xi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{\eta} \in \vec{M}_0(\Omega)$, что выполнены условия*

$$\vec{\xi} - 2i\omega_0S(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \vec{\varphi}, \quad P\vec{\xi} + \vec{\eta} = \vec{\psi} \in \mathcal{D}(B). \tag{230}$$

Доказательство. Из второго уравнения имеем $\vec{\eta} = \vec{\psi} - P\vec{\xi}$. Подставляя его в первое, приходим к уравнению

$$\left(I - 2i\omega_0\nu^{-1}SP_0\right)\vec{\xi} = \vec{\varphi} + 2i\omega_0\nu^{-1}S\vec{\psi}, \quad P_0 = I - P. \tag{231}$$

Так как оператор S компактен, то для доказательства ограниченной обратимости оператора $I - 2i\omega_0\nu^{-1}SP_0$ достаточно установить, что уравнение

$$\left(I - 2i\omega_0\nu^{-1}SP_0\right)\vec{\xi} = \vec{0} \tag{232}$$

имеет лишь тривиальное решение. Представим $\vec{\xi}$ в виде $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 + \vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_0 = P_0\vec{\xi}$, $\vec{\xi}_1 = P\vec{\xi}$. Тогда (232) равносильно двум уравнениям

$$\vec{\xi}_0 = 2i\omega_0\nu^{-1}P_0SP_0\vec{\xi}_0, \quad \vec{\xi}_1 = 2i\omega_0\nu^{-1}PSP_0\vec{\xi}_0.$$

Так как $S = S^*$, то первое уравнение имеет лишь тривиальное решение, и тогда $\vec{\xi}_0 = \vec{0}$, $\vec{\xi}_1 = \vec{0}$, $\vec{\xi} = 0$.

Значит, существует единственный элемент $\vec{\xi}$, являющийся решением уравнения (231), а потому и единственный $\vec{\eta} = \vec{\psi} - P\vec{\xi}$. □

Доказательство обращения теоремы Лагранжа для задачи (227) – (229) лишь незначительно отличается от соответствующих построений в п.5.1 и проходит по тому же плану, что и там.

Проведем это доказательство по этапам.

1^0. Снова предположим, что выполнены условия (176) для оператора потенциальной энергии B_σ. Тогда для оператора $B = Q^*B_\sigma Q$ справдливо утверждение теоремы 10.

2^0. Взамен леммы 7 теперь имеем следующее утверждение.

Лемма 15. *Если $KerB \neq \{0\}$ и потому $q > 0$ в (177), то задача (227) – (229) имеет переходное решение вида*

$$\widetilde{\lambda} = \lambda_0 = 0, \quad \vec{\eta} = \vec{\eta}_0 := \left(P\left(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S\right)^{-1}P\right)^{-1}\vec{\psi}, \quad \forall\vec{\psi} \in KerB, \tag{233}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 := 2i\omega_0\nu^{-1}S\left(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S\right)^{-1}\vec{\eta}_0,$$

где P – единичный оператор в $\vec{M}_0(\Omega)$, $P\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{M}_0(\Omega)$.

Доказательство. Полагая в (227) – (228) $\widetilde{\lambda} = 0$, имеем

$$A\left(\vec{\xi} - 2i\omega_0\nu^{-1}S(\vec{\xi} + \vec{\eta})\right) = \vec{0}, \quad B(P\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \vec{0}. \tag{234}$$

Из первого уравнения получаем

$$(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)\vec{\xi} = 2i\omega_0\nu^{-1}S\vec{\eta}.$$

Так как $S = S^*$, то существует ограниченный обратный оператор $(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}$, и тогда

$$\vec{\xi} = 2i\omega_0\nu^{-1}S(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}\vec{\eta}. \tag{235}$$

Из второго уравнения (234) имеем $P\vec{\xi} + \vec{\eta} = \vec{\psi} \in \mathrm{Ker}B$. Подставляя (235) в это соотношение, приходим к уравнению

$$F\vec{\eta} := P(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}P\vec{\eta} = \vec{\psi}. \tag{236}$$

Заметим теперь, что оператор F ограниченно обратим в $\vec{M}_0(\Omega)$. В самом деле, если $F\vec{\eta} = 0$, то

$$(F\vec{\eta}, \vec{\eta}) = \left((I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}\vec{\eta}, \vec{\eta}\right) = 0, \quad \vec{\eta} = P\vec{\eta}.$$

После замены $(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}\vec{\eta} =: \vec{v}$ будем иметь

$$\|\vec{v}\|^2 - 2i\omega_0\nu^{-1}(S\vec{v}, \vec{v}) = 0.$$

Так как $S = S^*$, то $\vec{v} = \vec{0}$, а потому и $\vec{\eta} = \vec{0}$.

Используя обратимость F, приходим из (236) к формуле (233) для $\vec{\eta} = \vec{\eta}_0$, а тогда другая формула (233) для $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0$ следует из (235). □

3^0. Проводя ту же схему рассуждений, что и в п.5.1, вместо системы уравнений (198) – (199) теперь имеем из (227) – (229)

$$A[\vec{\xi} - 2i\omega_0\nu^{-1}S(\vec{\xi} + \vec{\eta})] - \alpha B_1(P_1\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \lambda\vec{\xi}, \tag{237}$$

$$\alpha B_1(P_1\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \lambda\vec{\eta}, \tag{238}$$

$$\vec{\xi} - 2i\omega_0\nu^{-1}S(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \in \mathcal{D}(A), \quad P_1\vec{\xi} + \vec{\eta} \in \mathcal{D}(B_1), \tag{239}$$

где снова, как и выше (перед леммой 7) для простоты $\widetilde{\lambda}$ заменено на λ.

Для задачи (237) – (239) утверждения леммы 8 и теоремы 11 (принцип смены устойчивости) сохраняются. В самом деле, вместо уравнения (203) теперь аналогично выкладкам леммы 8 приходим к уравнению

$$\vec{\delta} = \lambda A^{-1}\vec{\delta} + \alpha\lambda^{-1}B_1\vec{\delta} + 2i\omega_0 S\vec{\delta}, \tag{240}$$

которое при $\lambda = i\gamma$, $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$, имеет лишь тривиальне решения.

4^0. Вместо леммы 10 при $\omega_0 \neq 0$ имеем следующее ее обобщение.

Лемма 16. *Пусть*

$$R(\omega_0\nu^{-1}) := I + 2i\omega_0\nu^{-1}U(\omega_0\nu^{-1})SP_1, \tag{241}$$

$$U(\omega_0\nu^{-1}) := (I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}. \tag{242}$$

Тогда оператор $R(\omega_0\nu^{-1})$ ограниченно обратим и $R^{-1}(\omega_0\nu^{-1})$ имеет структуру

$$R^{-1}(\omega_0\nu^{-1}) = I + T_1(\omega_0\nu^{-1}), \quad T_1(\omega_0\nu^{-1}) \in \mathfrak{S}_\infty, \quad T_1(0) = 0. \tag{243}$$

При этом задача (237) – (239) *равносильна задаче*

$$\alpha R^{-1}(\omega_0\nu^{-1})U(\omega_0\nu^{-1})A^{-1}\vec{\xi} + R^{-1}(\omega_0\nu^{-1})[2i\omega_0\nu^{-1}U(\omega_0\nu^{-1})SB_1^{-1} + \alpha U(\omega_0\nu^{-1})A^{-1}P_1]\vec{\eta} = \mu\vec{\xi},$$

$$\begin{aligned} B_1^{-1}\vec{\eta} - \alpha P_1R^{-1}(\omega_0\nu^{-1})U(\omega_0\nu^{-1})A^{-1}\vec{\xi} - \alpha P_1R^{-1}(\omega_0\nu^{-1})A^{-1}P_1\vec{\eta} - \\ -2i\omega_0\nu^{-1}P_1R^{-1}(\omega_0\nu^{-1})U(\omega_0\nu^{-1})SB_1^{-1}\vec{\eta} = \mu\vec{\eta}, \quad \mu = \alpha\lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{244}$$

Доказательство. Так как $S = S^* = A^{-1/2}S_0A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$, то оператор $U(\omega_0\nu^{-1})$ равен сумме единичного и компактного оператора, а потому $R(\omega_0\nu^{-1})$ имеет такую же структуру. Поэтому для доказательства свойства (243) достаточно проверить, что оператор $R(\omega_0\nu^{-1})$ обратим.

Рассмотрим уравнение $R(\omega_0\nu^{-1})\vec{\xi} = \vec{0}$ и представим ξ в виде $\vec{\xi} = \vec{\xi_0} + \vec{\xi_1}$, $\vec{\xi_0} = P_0\vec{\xi} = (I - P_1)\vec{\xi}$, $\vec{\xi_1} = P_1\vec{\xi}$. Тогда будем иметь

$$\vec{\xi_0} + \vec{\xi_1} + 2i\omega_0\nu^{-1}(I - 2i\omega_0\nu^{-1}S)^{-1}S\vec{\xi_1} = \vec{0},$$

откуда приходим к уравнению

$$\vec{\xi_0} + U(\omega_0\nu^{-1})P_1\vec{\xi_1} = \vec{\xi_0} + P_0U(\omega_0\nu^{-1})P_1\vec{\xi_1} + P_1U(\omega_0\nu^{-1})P_1\vec{\xi_1} = \vec{0},$$

и тогда

$$\vec{\xi_0} + P_0U(\omega_0\nu^{-1})P_1\vec{\xi_1} = \vec{0}, \quad P_1U(\omega_0\nu^{-1})P_1\vec{\xi_1} = \vec{0}. \tag{245}$$

Однако оператор $P_1U(\omega_0\nu^{-1})P_1$ обратим в $\vec{H}_1$. Этот факт доказывается так же, как и в проблеме (236). Поэтому из второго соотношения (245) имеем $\vec{\xi_1} = \vec{0}$, а потому из первого – равенство $\vec{\xi_0} = \vec{0}$.

Итак, оператор $R(\omega_0\nu^{-1})$ обратим. Покажем теперь, что задачи (237) – (239) и (244) равносильны.

Из (237) – (238) имеем

$$\vec{\xi} = \lambda U(\omega_0\nu^{-1})A^{-1}(\vec{\xi} + \vec{\eta}) + 2i\omega_0\nu^{-1}U(\omega_0\nu^{-1})S\vec{\eta}, \vec{\eta} = -P\vec{\xi} + \frac{\lambda}{\alpha}B_1^{-1}\vec{\eta}. \tag{246}$$

Подставляя выражение для $\vec{\eta}$ в последнее слагаемое первого уравнения и учитывая, что $P_1\vec{\eta} = \vec{\eta}$, получим

$$R(\omega_0\nu^{-1})\vec{\xi} = \lambda U(\omega_0\nu^{-1})A^{-1}(\vec{\xi} + P_1\vec{\eta}) + 2i\omega_0\nu^{-1}\lambda\alpha^{-1}U(\omega_0\nu^{-1})SB_1^{-1}\vec{\eta}. \tag{247}$$

Отсюда и следует первое уравнение (244) с учетом связи $\mu = \alpha\lambda^{-1}$. Второе уравнение (244) получается из второго уравнения (246), если использовать выражение для $\vec{\xi}$ из первого уравнения (244).

Нетрудно видеть, что все проделанные преобразования можно обратить, откуда и следует второе утверждение леммы. □

5^0. Опираясь на лемму 16 и факты, уже доказанные в п.5.1, установим основной результат о структуре спектра исследуемой задачи в левой полуплоскости при $\omega_0 \neq 0$.

Теорема 15. *Пусть при $\omega_0 \neq 0$ потенциальная энергия капиллярной жидкости в сосуде имеет грубый „не-минимум" и выполнены условия* (176). *Тогда справедливы утверждения теоремы 14, и гидросистема является динамически неустойчивой.*

Доказательство. Заметим сначала, что при $\omega_0 = 0$ система уравнений (244) переходит в (205) – (206), так как $R(0) = I$, $U(0) = I$ (см. (241) – (243)).

Учитывая этот факт, заменим в (244) ω_0 на $\varepsilon\omega_0$ и будем формально считать, что $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Тогда при $\varepsilon = 0$ будут справедливы утверждения теоремы 14 (с операторами, зависящими от ω_0 как от параметра). В частности, при $\varepsilon = 0$ в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\mu < 0$ задача (244) будет иметь ровно κ собственных значений, причем расположены они на вещественной оси.

При изменении ε от 0 до 1 собственные значения в левой полуплоскости будут изменяться непрерывно. При этом, как и при доказательстве теоремы 13, имеют место следующие факты. Эти собственные значения не могут уйти на бесконечность, так как (244) есть задача на собственные значения для компактного оператора. Кроме того, легко проверить, что задача (244) при $\mu = 0$ имеет тривильное решение при любом ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, т.е. собственные значения не могут обратиться в нуль. Наконец, они не могут перейти из левой полуплоскоти в правую в силу свойства 3^0.

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Гидромеханика невесомости (под общ. ред. А.Д. Мышкиса).* — М.: Наука, 1976. — 504 с.
2. Mishkis A.D., Babskii V.G., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Low – gravity fluid mechanics. Mathematical theory and capillary phenomena.* — Springer — Verlag, Berlin etc., 1987, XIX+583 pp.
3. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости (под ред. А.Д. Мышкиса).* — Киев: Наукова думка, 1992. — 592 с.
4. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* — М.: Наука, 1989. — 416 с.
5. Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.* Vol. 1: Self – adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhäuser Verlag, Basel — Boston — Berlin, 2001, pp. 384 (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
6. Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.* Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhäuser Verlag, Basel — Boston — Berlin, 2003, pp. 444 (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)
7. Копачевский Н.Д. *Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости малых колебаний капиллярной жидкости* // Тез. докл. Всес. конф. „Проблемы комплексной автоматизации гидрофизических исследований", Севастополь, МГИ АН УССР, ОКБ „Информ" при Симфероп. гос. ун-те, 11–13 мая 1989 г., с. 99–100.
8. Копачевский Н.Д. *Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости малых колебаний капиллярной вязкой жидкости* // Докл. АН СССР, 1990, т. 314, № 1. — с. 71–73.
9. Копачевский Н.Д. *Об устойчивости малых движений капиллярной вязкой вращающейся жидкости* // Тез. докл. междунар. матем. конф. „Ляпуновские чтения" (посвящ. 100 – летию создания А.М. Ляпуновым теор. уст. движ.), — г. Харьков: 1992. — с. 77–78.
10. Володкович Е.Д., Копачевский М.Д. *Звернення теоремы Лагранжа про стiйкiсть малих рухiв капiлярной в'язкой обертающиїся рiдини* // В сб. „Спектральные и эволюционные задачи". Тез. докл. II Крымской осенней математической школы – симпозиума (КРОМШ – II), вып.2, Симферополь – Ласпи, 1993. — с. 73–74.
11. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.
12. Gagliargo E. *Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957), pp. 284–305 (in Italian). MR 21:1525.
13. Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и задачи Стокса* // Известия вузов Северо–Кавказск. регион. Естественные науки. Математика и механика сплошной среды, Ростов – на – Дону, 2004, с. 137–141.
14. Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса* //Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ), 2004, №2, с. 52–80.
15. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи* // Украинский матем. вестник, Т. 1, № 1 (2004). — с. 69–97.

16. Обэн Ж.-П. *Приближенное решение эллиптических краевых задачб* – М: Мир, 1977. — 384 с.
17. Суслина Т.А. *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. — 1985. — Т.147 — с.179–183 Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, № 8058 – В.
18. Суслина Т.А. *Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей* // Ленингр. электротехн. ин-т. связи. — Л. — 1985. — 79с. Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, № 8058 – В.
19. Суслина Т.А. *Спектральная асимптотика двух модельных задач о колебаниях жидкости* // Известия Санкт-Петербургского электротехнич. ин-та, Т. 449, 1992, с. 82–88.
20. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1967, 464 с.
21. Голдстейн Дж. *Полугруппы линейных операторов и их приложения.* Киев: Выща школа, 1989, 347 с.
22. Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. *Generaized method of Eigenoscillations in Difraction Theory.* WILEY – VCH Verlag, Berlin, New York, 1999, 380 pp.
23. Metivier G. *Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationales a des sousespaces* // J. Math. pures et appl. — 1978. — V.57, № 2. — P.133–156.
24. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Наука, 1965. — 448 с.
25. Дудик О.А. *Малые движения и нормальные колебания капиллярной вязкой жидкости в неподвижном сосуде* // Таврическая научн. конф. студентов и молодых специалистов по информатике и математике. Изв-во Крымского научн. центра НАНУ, Симферополь, 2004, с.20-23.
26. Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H. *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces wiht an Indefinite Metric.* Akademie-Verlag, Berlin, 1982, Band 9, 120 pp.
27. Solonnikov V.A. *On the stability of non-symmetric equilibrium figures of a rotating viscous incompressible liquid. Interfaces and Free Boundaries.* 6, 2004, p. 461–492.
28. Solonnikov V.A. *On linear stability and instability of equilibrium figures of uniformly rotating liquid.* Proc. Conf. on Elliptic and Parab. Problems (Taiwan, 2004), to appear.

Н.Д. Копачевский
E-mail: kopachevsky@crimea.edu