

*Н.Д. Копачевский* (Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина)

## Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач

В докладе рассматривается абстрактная формула, приспособленная к исследованию в общем виде смешанных краевых задач, когда на разных частях границы области, в которой изучается задача, ставятся разные краевые условия.

**Теорема 1.** Пусть  $\{E, (\cdot, \cdot)_E\}$ ,  $\{F, (\cdot, \cdot)_F\}$  и  $\{G, (\cdot, \cdot)_G\}$  – гильбертовы пространства с введенными на них скалярными произведениями, а  $\gamma : F \rightarrow G$  – абстрактный оператор следа. Пусть для них выполнены условия:

1°.  $F \hookrightarrow E$  ( $F$  ограничено вложено в  $E$ , т.е.  $F$  плотно в  $E$  и  $\|u\|_E \leq a\|u\|_F$ ,  $\forall u \in F$ );

2°.  $\gamma : F \rightarrow G_+ \hookrightarrow G$ ,  $\|\gamma u\|_G \leq b\|u\|_F$ ,  $\forall u \in F$ .

Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение  $L$  и абстрактный оператор производной по внешней нормали  $\partial$ , однозначно определяемые по  $E$ ,  $F$ ,  $G$  и  $\gamma$ , такие, что имеет место абстрактная формула Грина

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \quad Lu \in F^*, \quad \partial u \in (G_+)^*. \quad \square \quad (1)$$

Пусть  $p_k : G_+ \rightarrow (\widetilde{G}_+)_k := p_k G_+$  – ограниченный проектор в  $G_+$ ,  $k = \overline{1, q}$ , представимый в виде  $p_k = \omega_k \rho_k$ , где  $\rho_k$  – абстрактный оператор сужения элементов из  $G_+$  (функций, заданных на границе области) на  $(G_+)_k := \rho_k G_+$ , а  $\omega_k : (G_+)_k \rightarrow (\widetilde{G}_+)_k$  – абстрактный оператор “продолжения нулем” с  $(G_+)_k$  на  $(\widetilde{G}_+)_k = p_k G_+$ . Пусть, кроме того,  $G = \bigoplus_{k=1}^q G_k$ ,  $(G_+)_k \hookrightarrow G_k$  и  $\rho_k \omega_k = I_k$  (единичный оператор в  $(G_+)_k$ ), причем операторы  $\rho_k$  и  $\omega_k$  непрерывны.

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1 и сформулированные выше условия, то имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (2)$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*,$$

где  $\gamma_k$  – абстрактный оператор следа на часть границы области, а  $\partial_k$  – абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.  $\square$

Рассматриваются приложения формулы (2) к смешанным краевым задачам в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  с липшицевой границей  $\Gamma = \partial\Omega$  применительно к тройке пространств  $E = L_2(\Omega)$ ,  $F = H^1(\Omega)$ ,  $G = L_2(\Gamma)$  и оператору следа  $\gamma u := u|_\Gamma$ , а также для задач гидродинамики и теории упругости.

- [1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский матем. вестник. — Т. 1, № 1. — 2004. — с. 69-97.
  - [2] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ, Симферополь). — №2. — 2004. — с. 52-80.
  - [3] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач // Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и Кибернетика”. — Симферополь. — Т.20(59), №2. — 2007. — с. 3-12.
  - [4] Kopachevsky N. D., Starkov P. A., Voytitsky V. I. Abstract Green’s Formula and Spectral Transmission Problems // Intern. Conf. Nonlinear PDE, September 10–15, 2007, Yalta, Crimea, Ukraine. — Book of abstracts. — p. 40–41.
  - [5] Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А. Вспомогательные абстрактные краевые задачи и задачи сопряжения // Современная математика. Фундаментальные направления, 40 стр. (2009, в печати).
-