ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ГИДРОСИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ-ГАЗ"

Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З.

В работе рассматривается применение подхода С.Л. Соболева [1], впоследствии использованного для исследования гидродинамических задач: Р.В. Рваловым и М.П. Дяченко – тяжелой вращающейся жидкости и Н.Д. Копачевским [2] – идеальной вращающейся жидкости, к проблемам малых колебаний вращающихся гидросистем.

Малые движения идеальной капиллярной жидкости плотности $\rho_0 = \mathrm{const} > 0$, в невозмущенном состоянии занимающей осесимметричную область Ω, равномерно вращающейся с сосудом с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$, $\vec{\omega}_0 > 0$ в однородном гравитационном поле интенсивности $-\vec{g} = g\vec{e}_3$, будем рассматривать в системе координат (x_1, x_2, x_3), неподвижной связанной с сосудом. В состоянии относительного равновесия давление $p_0(x)$ и поле скоростей жидкости $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ определяются соотношениями

$$p_0(x) = \rho_0[-gx_3 + \frac{1}{2}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2)], \quad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 2\omega_0 \vec{u} \times \vec{e}_3 - \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ \text{(в } \Omega), \quad (1)$$

где $p = p(t, x)$ – динамическое поле давлений. Решение уравнения (1) записывается в виде

$$\vec{u} = \nabla \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\omega_0 \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \times \vec{e}_3 + 4\omega_0^2 (\nabla \Phi \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3, \quad p = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - 4\omega_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \ \text{(в } \Omega) \qquad (2)$$

причем функцию состояния $\Phi = \Phi(t, x)$ определяют из уравнения $\Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0$. Отсюда следует, что можно рассматривать начально-краевые задачи для вращающейся идеальной однородной жидкости, используя лишь одну скалярную функцию Φ.

Цель данной работы – получить аналогичное уравнение для функции состояния поля смещений вращающегося баротропного газа и обобщить его на случай вращающейся системы "жидкость-газ".

Используя зависимость равновесной плотности от давления баротропного газа, имеем

$$\rho_0(x) = \rho_0(0) \exp(-a^{-2}\Pi_0(x)), \quad \Pi_0(x) = gx_3 - \frac{1}{2}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2), \ \ a > 0 - \text{скорость звука}, \quad (3)$$

из линеаризованных уравнений движения вращающегося баротропного газа следует

$$\rho_0(x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho_0(x)[2\omega_0 \vec{u} \times \vec{e}_3] + \rho_0(x)\vec{f} - \rho(x)\nabla \Pi_0, \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(x)\vec{u}) = 0, \ \nabla p = a^2 \nabla \rho \quad \text{(в } \Omega), \quad (4)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 2\omega_0 \vec{u} \times \vec{e}_3 - a^2 \nabla \Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big) + \vec{f}. \qquad (5)$$

Сравнивая уравнения (5) и (1) и учитывая (2), получаем искомые представление для поля смещений $\vec{w} = \vec{w}(t, x)$ и уравнение для функции состояния $\Psi = \Psi(t, x)$:

$$\vec{w} = \nabla \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2\omega_0 \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \vec{e}_3 + 4\omega_0^2 (\nabla \Psi \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3, \ a^2 \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} - 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \ \Delta_0 \varphi := \frac{\operatorname{div}(\rho_0 \nabla \varphi)}{\rho_0}, \ (6)$$

$$\Delta_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2\omega_0 \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \Big(\nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \vec{e}_3\Big) + 4\omega_0^2 \Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \rho_0^{-1} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\Big) - a^{-2} \Big(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\Big) = 0. \quad (7)$$

Замечание 1. *При предельном переходе в (7) $a^{-2} \to 0$ (т.е. к несжимаемой жидкости) в силу (3) получаем $\rho_0(x) \equiv \rho_0 > 0$ и уравнение ($\Delta_0 \to \Delta$) для функции состояния вращающейся жидкости с заменой Ψ на Φ.*

Действуя аналогичным образом, в работе получены представление решения задачи о малых колебаниях равномерно вращающейся системы "жидкость-газ" через функцию состояния для поля смещений и уравнение для ее определения. Отметим, что полученная функция состояния определяется через функции состояния жидкости и газа и удовлетворяет условию "сшивания" на границе раздела сред.

Список литературы

[1] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Матем. – 1954. – 18, № 1. – с. 3 – 50.

[2] Копачевский Н.Д. Применение метода С.Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости // ЖВМиМФ. – 1976. – 16, № 2. – с. 426–439.