Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. ??–??.

УДК 517.95+517.98

Н. Д. Копачевский

ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Введение

В данной работе рассматривается несколько проблем, связанных с выводом абстрактной формулы Грина. Во-первых, приводится вывод такой формулы для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Во-вторых, приводится вывод соответствующей абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Наконец, в-третьих, приводится вывод абстрактной формулы Грина для равномерно аккретивных полуторалинейных форм.

Частными случаями таких формул Грина являются, как известно, обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа и близкие к ним (скалярный случай), соответствующие обобщенные формулы Грина для векторных полей (теория упругости, гидродинамика), а также обобщенные формулы Грина для равномерно эллиптических уравнений и систем таких уравнений и др.

В работе рассматриваются примеры смешанных краевых задач, получаемых в произвольных ограниченных областях с липшицевой границей. Намечается программа дальнейших исследований, связанная с получением необходимых и достаточных условий разрешимости задач подобного рода.

Рассматриваются абстрактные краевые задачи, обобщающие классические краевые задачи Дирихле, Неймана и др., а также смешанные задачи. Приводятся примеры абстрактных спектральных краевых задач, находящих широкие приложения в конкретных проблемах прикладной математики. Приводятся также примеры абстрактных задач сопряжения.

Несколько слов об истории вопроса, связанного с выводом и получением абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Сначала автор этой статьи считал, что первый вариант абстрактной формулы Грина был выведен в монографии ([1], с. 119) и этот вывод принадлежит С.Г. Крейну. Однако позже выяснилось, что еще раньше один из вариантов такой формулы доказал Ж.-П. Обэн (см. главу 6 из [2], а также [3]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [4] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [2] или [3]. Дальнейшее продвижение в этом направлении принадлежит автору данной статьи (см. [5] – [8]).

Отметим еще, что абстрактные формулы Грина для равномерно аккретивных форм выводятся здесь, по-видимому, впервые (см. теоремы 3.1 – 3.3). Новыми являются также и варианты абстрактных формул Грина для смешанных краевых задач (см. теоремы 2.4, 2.6).

Автор благодарит М.С. Аграновича за многолетние конструктивные обсуждения проблем, представленных в данной работе, и посвящает ее М.С. Аграновичу в связи с его 80-летием.

1. О выводе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств

В данном параграфе доказывается теорема о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, определенным образом связанных между собой. Далее рассматривается основной пример, приводящий к обобщению классической первой формулы Грина для оператора Лапласа. Приводятся и другие примеры обобщенных формул Грина для некоторых задач математической физики.

1.1. **Основная теорема.**

При выводе абстрактной формулы Грина важную роль играют понятия гильбертовой пары пространств и оснащения гильбертова пространства (см. например, [9], [10], а также [1]).

Пусть F и E – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_F$ и $(\cdot, \cdot)_E$ соответственно, причем $F \subset E$. Будем говорить, что F плотно вложено в E и обозначать этот факт символом $F \hookrightarrow E$, если F — плотное линейное подмножество в E и существует константа $a > 0$, такая, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.1}$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, а нормы определены формулами

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega |u(x)|^2\, d\Omega, \quad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega. \tag{1.2}$$

По любой паре $(F;E)$ единственным образом определяется порождающий оператор A гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}(u,Av)_E=(u,v)_F=(A^{1/2}u,A^{1/2}v)_E,\ \forall u\in F=\mathcal{D}(A^{1/2}),\ v\in\mathcal{D}(A)\subset F,\\ \mathcal{R}(A)=E.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Таким образом, как оператор, действующий в E, оператор A является положительно определенным (вообще говоря, неограниченным) самосопряженным оператором, причем $\mathcal{D}(A^{1/2})=F$.

По оператору $A\gg 0$ можно ввести шкалу гильбертовых пространств E^α, $E^\alpha:=\ \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, таким образом, чтобы

$$E=E^0,\quad F=E^{1/2},\quad F^*=E^{-1/2}, \tag{1.4}$$

где F^* — совокупность линейных ограниченных функционалов на пространстве F. Тогда имеет место оснащение

$$E^{1/2}=F\hookrightarrow E=E^0\hookrightarrow F^*=E^{-1/2} \tag{1.5}$$

пространства E, причем любой линейный функционал на F выражается через "скалярное произведение" в E, т.е.

$$l_v(u):=\langle u,v\rangle_E,\ u\in F,\ v\in F^*,\ \ |\langle u,v\rangle_E|\leqslant\|u\|_F\cdot\|v\|_{F^*}. \tag{1.6}$$

Иными словами, пространства $F=E^{1/2}$ и $F^*=E^{-1/2}$ дуальны по форме пространства E, а билинейная форма $\langle u,v\rangle_E$ является расширением по непрерывности скалярного произведения $(u,v)_E$, $u\in F$, $v\in E$, на случай, когда $v\in F^*$.

В построенной шкале E^α оператор A ограниченно действует из E^α в $E^{\alpha-1}$. В частности, для оператора A гильбертовой пары $(F;\,E)$ далее понадобится формула

$$(u,v)_F=(A^{1/2}u,A^{1/2}v)_E=\langle u,Av\rangle_E,\quad \forall u,v\in F, \tag{1.7}$$

являющаяся расширением формулы (1.3) и также служащая определением порождающего оператора гильбертовой пары $(F;\,E)$.

Пусть теперь $\{E,\,(\cdot,\,\cdot)_E\}$, $\{F,\,(\cdot,\,\cdot)_F\}$ и $\{G,\,(\cdot,\,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1°.

$$F\hookrightarrow E,\quad \|u\|_E\leqslant a\|u\|_F,\quad \forall u\in F. \tag{1.8}$$

2°. На F задан оператор γ, называемый оператором следа и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma)=:\ G_+\subset G$ и

$$\gamma:F\to G_+\hookrightarrow G,\quad \|\gamma u\|_G\leqslant b\|u\|_F,\ \ b>0,\ \ \forall u\in F. \tag{1.9}$$

3°. Ядро оператора γ, т.е. $\ker\,\gamma =: N$, плотно в E:

$$\overline{N} = E. \tag{1.10}$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1° – 3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, с введенными на них нормами (1.2) и стандартной нормой в $L_2(\Gamma)$, а также с обычным оператором следа

$$\gamma u := u|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.11}$$

В самом деле, в этом случае (в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей) по теореме вложения (С.Л. Соболев, В.Е. Кондрашов, Ф. Реллих, см. [11]; [12], с. 32; [13], с. 47) имеем свойство плотности $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и выполнены неравенства

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant a\|u\|_{H^1(\Omega)}, \ \ \forall u \in H^1(\Omega), \tag{1.12}$$

причем оператор вложения компактен. Далее, по теореме Гальярдо о следах (см. [14]) получаем, что оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в пространство $G_+ := H^{1/2}(\Gamma)$, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$, и выполнено неравенство

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant b\|u\|_{H^1(\Omega)}, \ \ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Наконец, в этом примере $N := \ker\,\gamma = H^1_0(\Omega)$, а это подпространство пространства $H^1(\Omega)$, как известно, плотно в $L_2(\Omega)$. Таким образом, для указанной тройки пространств и оператора следа (1.11) выполнены все условия 1° – 3°.

Теорема 1.1. *Пусть для тройки пространств E, F, G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора γ выполнены условия* (1.8) – (1.10). *Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.14}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяется однозначно.

Доказательство. Оно проводится, с одной стороны, по схеме, изложенной в [2], с. 188-189, а с другой – с изменениями и некоторыми обобщениями, учитывающими, в частности, то обстоятельство, что только по элементу $u \in F$ выражения $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$ находятся неоднозначно (см. [15], с. 117).

1) Переходя к доказательству теоремы, отметим сначала, что в силу (1.9) ядро $N = \ker\gamma$ является подпространством в F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F, т.е. считаем, что

$$F = N \oplus M, \ \ \dim N = \dim M = \infty. \tag{1.15}$$

Согласно определениям N и M оператор сужения $\gamma_M := \gamma|_M$ оператора γ на подпространство M осуществляет взаимно однозначное отображение M на G_+ (см. (1.9)). Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{1.16}$$

Опираясь на (1.16) и (1.15), можно установить, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min\{\|u\|_F : \gamma u = \varphi\}, \tag{1.17}$$

и так как $G_+ \hookrightarrow G$ и имеет свойство (1.9), то $(G_+; G)$ – гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $G_+ = G^{1/2}$, $G = G^0$, $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

С целью получения представления для оператора гильбертовой пары $(G_+; G)$ проведем следующие построения. Обозначим через T_M оператор, сопряженный к оператору γ_M по форме пространства G. Так как в силу (1.16) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M := (\gamma_M)^*$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $M^* = M$. При этом, по определению T_M, имеем

$$(\eta, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad \forall \psi \in (G_+)^* = G^{-1/2}. \tag{1.18}$$

Обозначим теперь через ∂_M оператор, обратный к T_M, который, очевидно, существует, поскольку между элементами из M и G_+ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрия (см. (1.16)), а потому $(T_M)^{-1} = (\gamma_M^*)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*$. Тогда из (1.18) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G, \quad \forall \eta, w \in M, \quad \gamma_M \eta \in G_+, \quad \partial_M w \in (G_+)^*. \tag{1.19}$$

При $\eta = T_M \varphi$, $\varphi \in (G_+)^*$, из (1.18) получаем соотношение

$$(T_M\varphi, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G, \quad \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*. \tag{1.20}$$

Отсюда следует, в частности, что оператор $C_M := \gamma_M T_M$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $G^{1/2} = G_+$. Кроме того, $C_M|_G$ является ограниченным в G самосопряженным и положительным оператором.

Эти свойства позволяют установить, что $(C_M)^{-1}$ является оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$, и для него согласно свойству (1.7) выполнено тождество

$$(\varphi, \psi)_{G_+} = \langle \varphi, C_M^{-1}\psi \rangle_G, \quad \forall \varphi, \psi \in G_+. \tag{1.21}$$

2) Продолжим построения, связанные с доказательством теоремы. Рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$, которая существует в силу условия 1°, и введем оператор A этой гильбертовой пары. Тогда, согласно (1.7),

$$(\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.22}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M соответственно и рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_F, \quad \eta_N = P_N\eta \in N, \quad u \in F. \tag{1.23}$$

С учетом (1.22) он преобразуется к виду

$$\begin{gathered}(\eta_N, u)_F = \langle \eta_N, Au\rangle_E = \langle P_N\eta_N, Au\rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au\rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u\rangle_E, \\ L_N u := P_N^* Au, \quad \forall u \in F.\end{gathered} \tag{1.24}$$

Здесь $L_N : F \to N^*$ — линейный ограниченный оператор, так как $A : F \to F^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F^* \to N^* = AN$ — ограниченный проектор, действующий в F^*.

Из (1.24) приходим к формулам

$$(\eta_N, u_N)_F = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E, \quad \eta_N = P_N\eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F, \tag{1.25}$$

$$(\eta_N, u_M)_F = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_E, \quad u_M = P_M u, \quad u \in F. \tag{1.26}$$

Так как $\overline{N} = E$ (см. (1.10)), то из (1.26) получаем, что

$$L_N u_M = L_N P_M u = 0, \quad u \in F. \tag{1.27}$$

3) Введенный функционал $L_N u$ задан на подпространстве N. Расширим его определенным образом до функционала Lu, действующего на всем $F = N \oplus M$. Именно, далее будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F \to N^*, \quad L_M : F \to M^* := AM. \tag{1.28}$$

При этом потребуем (и это свойство соответствует многочисленным приложениям), чтобы

$$Lu_M = 0, \quad \forall u_M \in M. \tag{1.29}$$

Тогда в силу (1.27) и (1.28) должно выполняться свойство

$$L_M u_M = 0, \quad \forall u_M \in M. \tag{1.30}$$

4) Введем теперь в рассмотрение функционал

$$\Psi_u(\eta) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u\rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.31}$$

По построению (см. (1.24)) имеем свойство $\Psi_u(\eta_N) = 0$. Поэтому

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M), \quad \eta_M = P_M\eta \in M,$$

т.е. этот функционал принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+, так как между M и G_+ имеет место изометрический изоморфизм (см. (1.16)).

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно представить либо в виде функционала на M, либо функционала на G_+, либо в виде суммы функционалов на M и G_+ соответственно, причем в этом последнем случае между указанными функционалами будет определенная связь. Именно этот последний вариант, как будет видно из рассмотренного ниже классического примера, и возникает в приложениях. Отметим еще, что в краевых задачах математической физики элемент $f = Lu \in F^*$ может содержать составляющую (обобщенную функцию, распределение), сосредоточенную не только внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, где изучается краевая задача, но и на границе $\Gamma = \partial\Omega$ этой области (см., например, [15], с. 117).

Реализуя эту идею в абстрактной форме, представим $\Psi_u(\eta)$ в виде

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u \rangle_E = \langle \eta, L_M u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F. \quad (1.32)$$

Здесь $L_M u \in M^* = AM$, а $\langle \eta, L_M u \rangle_E = \langle \eta_M, L_M u \rangle_E$ — функционал на подпространстве M, выраженный в виде полуторалинейной формы относительно $\eta_M \in M$ и $L_M u \in M^*$. Соответственно $\partial u \in (G_+)^*$, а $\langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \langle \gamma_M \eta_M, \partial u \rangle_G$ — функционал на G_+, выраженный в виде формы относительно $\gamma\eta = \gamma_M \eta_M$ и $\partial u \in (G_+)^*$.

Отметим, что в приложениях конкретный вид выражения $L_M u$ определяется, исходя из заданного дифференциального выражения, отражающего физический процесс, и соответствующей формулы Грина, отвечающей исследуемой задаче.

Из (1.32) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$(\eta_M, u_M)_F = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G, \quad \eta_M, u_M \in M, \quad (1.33)$$

служащее определением функционала $\partial_M u_M \in (G_+)^*$, являющегося абстрактным аналогом производной по внешней нормали для элементов из подпространства M. Заметим, что это тождество уже было выведено ранее (см. (1.19)), причем

$$\partial_M = (T_M)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*.$$

При выводе (1.33) было учтено, что (см. (1.24), (1.30))

$$\langle \eta_M, L_N u_M \rangle_E = 0, \quad L_M u_M = 0.$$

При $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (1.32) имеем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G, \quad \forall \eta_M \in M, \quad \forall u_N \in N. \quad (1.34)$$

Именно оно и дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, о которой говорилось выше. В частности, если функционал $L_M u_N \in M^*$ задан, то функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$ определен однозначно.

5) Назовем $Lu := L_N u + L_M u$ (см. (1.28)) абстрактным дифференциальным выражением. С учетом (1.25) и (1.30) будем иметь

$$Lu = L_N(u_N + u_M) + L_M(u_N + u_M) = L_N u_N + L_M u_N = L u_N \in F^*. \quad (1.35)$$

Введем еще функционал

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \forall u = u_N + u_M \in N \oplus M = F \quad (1.36)$$

и назовем его абстрактной производной по внешней нормали для любого элемента $u \in F$.

Для получения абстрактной формулы Грина воспользуемся тождествами (1.25), (1.26) и (1.33), (1.34). Из них после сложения левых и правых частей приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(\eta, u)_F &= (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G = \\ &= \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M + \partial_N u_N \rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \\ &= \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Проверим теперь, что

$$\langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \langle \eta, Lu \rangle_E, \tag{1.38}$$

где Lu определено формулой (1.28). В самом деле, с учетом (1.35) имеем

$$\begin{aligned}\langle \eta, Lu \rangle_E &= \langle \eta_N + \eta_M, L_N u_N + L_M u_N \rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_N, L_M u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E,\end{aligned} \tag{1.39}$$

так как

$$\langle \eta_M, L_N u_N \rangle_E = \langle P_M \eta, P_N^* A u_N \rangle_E = \langle P_N P_M \eta, A u_N \rangle_E = 0,$$
$$\langle \eta_N, L_M u_N \rangle_E = \langle \eta_N, P_M^* L_M u_N \rangle_E = \langle P_M P_N \eta, L_M u_N \rangle_E = 0.$$

Здесь в последнем тождестве использовано свойство $L_M u_N = P_M^* L_M u_N \in M^*$.

6) Из (1.37) и (1.38) следует формула Грина

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{1.40}$$

причем по построению

$$Lu \in F^*, \;\; \partial u \in (G_+)^*, \;\; Lu = L_N u_N + L_M u_N, \;\; \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N. \tag{1.41}$$

Отметим еще раз, что если функционал $L_M u_N$ выбран, то функционал $\partial_N u_N$ определен однозначно. □

Замечание 1.1. Из проведенного доказательства теоремы следует, что для тройки пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ, удовлетворяющих условиям (1.8) – (1.10), существует не одна, а целое семейство формул Грина. Это семейство параметризуется, во-первых, выбором функционала $L_M u_N \in M^*$, а во-вторых, — произвольным числовым параметром α, вещественным либо комплексным. В самом деле, при выбранном $L_M u_N$ можно ввести семейство абстрактных дифференциальных выражений $L(\alpha)u$ по формуле

$$L(\alpha)u := L_N u + \alpha L_M u = L_N u_N + \alpha L_M u_N, \tag{1.42}$$

а также отвечающее им семейство производных по нормали

$$\partial(\alpha)u := \partial_M u_M + \alpha\,\partial_N u_N, \tag{1.43}$$

и тогда получим семейство формул Грина вида

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, L(\alpha)u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.44}$$

При этом формула Грина (1.40) отвечает значению $\alpha = 1$. □

Замечание 1.2. Отметим еще раз, что в приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ определено из физического смысла задачи, и тогда для него однозначно находятся $L_M u_N$ и константа α. □

Следствием теоремы 1.1 является такое утверждение.

Теорема 1.2. (вторая формула Грина). *Если выполнены условия теоремы 1.1, то в случае вещественных гильбертовых пространств E, F и G справедлива формула*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \langle u, L\eta\rangle_E = \langle \gamma u, \partial\eta\rangle_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F; \tag{1.45}$$

для комплексных пространств E, F и G соответственно имеем

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \overline{\langle u, L\eta\rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial\eta\rangle}_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F. \tag{1.46}$$

□

1.2. **Основной пример.** Рассмотрим в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ с нормами (1.2). Как уже упоминалось выше, пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$, т.е. соответствующий оператор вложения компактен, а $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Воспользуемся первой формулой Грина для оператора $u - \Delta u$:

$$(\eta, u - \Delta u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \;\; \eta \in H^1(\Omega), \;\; u \in H^2(\Omega). \tag{1.47}$$

Отсюда на основе обычных вариационных соображений и с использованием определения (1.3) порождающего оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ устанавливаем, что он является оператором краевой задачи Неймана:

$$Au := u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.48}$$

Точнее говоря, в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ порождающий оператор пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ является расширением оператора задачи (1.48) с $H^2(\Omega)$ на $H^1(\Omega)$, при этом

$$\mathcal{D}(A) = H^1(\Omega), \quad \mathcal{R}(A) = (H^1(\Omega))^*, \tag{1.49}$$

а его сужение на $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$ с $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$, причем A^{-1} — положительный компактный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$.

Введем, как и выше (см. (1.11)), для элементов из $H^1(\Omega)$ оператор следа γ по закону

$$\gamma\eta := \eta|_\Gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathcal{D}(\gamma) = H^1(\Omega). \tag{1.50}$$

Как уже упоминалось, по теореме Гальярдо (см. [14]) в области Ω с липшицевой границей Γ оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma |\varphi|^2 \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x}\int\limits_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}} \, d\Gamma_x \, d\Gamma_y, \tag{1.51}$$

и имеет место оценка (вида (1.13)):

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.52}$$

При этом $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma)$. Далее, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ), такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{1.53}$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим согласно общей схеме п. 1.1 ортогональное разложение пространства $H^1(\Omega)$. Очевидно, что

$$N = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = u|_\Gamma = 0\} =: H^1_0(\Omega). \tag{1.54}$$

Выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H^1_0(\Omega)$ в $F = H^1(\Omega)$.

Если $\eta \in H^1_0(\Omega)$ и $u \in M$, то в силу ортогональности η и u имеем

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla\eta) \, d\Omega = 0, \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega), \quad \forall u \in M. \tag{1.55}$$

Отсюда, из свойства плотности $H^1_0(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, а также того факта, что в $H^1_0(\Omega)$ плотным множеством является совокупность финитных бесконечно дифференцируемых функций, получаем, что

$$M =: H^1_h(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \tag{1.56}$$

Далее для простоты будем называть $H^1_h(\Omega)$ подпространством гармонических функций. Таким образом, имеет место ортогональное разложение

$$F = H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega) = N \oplus M. \tag{1.57}$$

Воспользуемся еще следующим фактом (см., например, [15], с. 98, [16], с. 149): в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.58}$$

т.е. $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ — дуальные пространства, и имеет место оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{1.59}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства $H^1_0(\Omega)$ и $H^1_h(\Omega)$ соответственно (см. (1.57)). Реализуя для данного примера общие построения, которые были проведены при доказательстве теоремы 1.1, рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\eta_N u + \nabla\eta_N \cdot \nabla u)\, d\Omega, \quad \forall \eta_N = P_N\eta \in H^1_0(\Omega), u \in H^1(\Omega). \tag{1.60}$$

С учетом определения (1.7) оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а также выражения (1.48) для этого оператора функционал (1.60) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} l_u(\eta_N) &:= (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta_N, P^*_N(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)} =: \\ &=: \langle \eta_N, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta_N \in H^1_0(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.61}$$

(Это соотношение выводится сначала для $u \in H^2(\Omega)$, а затем предельным переходом и для $u \in H^1(\Omega)$.)

Так как $H^1_0(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и имеет место оснащение

$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^1_0(\Omega))^*, \tag{1.62}$$

то из (1.61) следует, что

$$L_N u := P^*_N(u - \Delta u) \in N^* = (H^1_0(\Omega))^*, \tag{1.63}$$

а оператор $L_N \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H^1_0(\Omega))^*)$. Здесь P^*_N — проектор в пространстве $(H^1(\Omega))^*)$, $P^*_N = AP_N$.

Из тождества (1.61) следуют соотношения

$$(\eta_N, u_N)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta_N = P_N\eta, \quad \forall u_N = P_N u \in H^1_0(\Omega), \tag{1.64}$$

$$(\eta_N, u_M)_{H^1(\Omega)} = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta_N \in H^1_0(\Omega), \quad \forall u_M \in H^1_h(\Omega). \tag{1.65}$$

Из (1.65) и (1.62), в частности, получаем, что

$$L_N u_M = P^*_N(u_M - \Delta u_M) = 0, \tag{1.66}$$

хотя этот факт очевиден также из (1.56).

Следуя далее общей схеме доказательства теоремы 1.1, рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Psi_u(\eta) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \eta, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega - \langle \eta, P^*_N(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.67}$$

Так как по построению $\Psi_u(\eta_N)=0$, то $\Psi_u(\eta)=\Psi_u(\eta_M)$, $\eta_M=P_M\eta\in M=H_h^1(\Omega)$.

Напомним, что между элементами пространства $H_h^1(\Omega)$ и элементами пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ имеется изоморфизм и даже изометрия, если в $H^{1/2}(\Gamma)$ задать норму в виде

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}=\|u\|_{H^1(\Omega)},\ \ \varphi=\gamma_M u,\ \ u\in H_h^1(\Omega). \tag{1.68}$$

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно выразить как в виде $\langle\eta_M,L_M u\rangle_{L_2(\Omega)}$, где $L_M u\in(H_h^1(\Omega))^*=AH_h^1(\Omega)$, $L_M\in\mathcal{L}(H^1(\Omega);(H_h^1(\Omega))^*)$ — произвольный оператор, либо в виде $\langle\gamma_M\eta_M,\partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}$, $\partial u\in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. (1.59)), либо в виде суммы таких функционалов, связанных между собой (см. (1.34)):

$$\begin{aligned}&\Psi_u(\eta)=\langle\eta_M,L_M u\rangle_{L_2(\Omega)}+\langle\gamma_M\eta_M,\partial u\rangle_{L_2(\Gamma)},\\&\eta_M=P_M\eta\in H_h^1(\Omega),\quad u\in H^1(\Omega).\end{aligned} \tag{1.69}$$

Учитывая, что $\gamma_M\eta_M=\gamma u$, $\forall u\in H^1(\Omega)$, а также тот факт, что $L_M u=P_M^*L_M u$, правую часть в (1.69) можно переписать в виде

$$\Psi_u(\eta)=\langle\eta,L_M u\rangle_E+\langle\gamma\eta,\partial u\rangle_G,\ \ \forall\eta,u\in H^1(\Omega), \tag{1.70}$$

а тогда из (1.67), (1.70) следует тождество

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\langle\eta,Lu\rangle_{L_2(\Omega)}+\langle\gamma\eta,\partial u\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \ \forall\eta,u\in H^1(\Omega), \tag{1.71}$$

$$Lu:=L_N u+L_M u=P_N^*(u-\Delta u)+L_M u,\quad u\in H^1(\Omega). \tag{1.72}$$

Потребуем, как и в общей схеме доказательства теоремы 1.1 (см. (1.29)), чтобы выполнялось условие

$$Lu_M=0. \tag{1.73}$$

Тогда в силу (1.72), (1.66) получаем свойство

$$L_M u_M=0,\quad\forall u_M=P_M u\in H_h^1(\Omega). \tag{1.74}$$

Из (1.71) либо (1.69), в частности, при $u=u_M\in H_h^1(\Omega)$, $\eta=\eta_M\in H_h^1(\Omega)$ имеем соотношение

$$(\eta_M,u_M)_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_M\eta_M,\partial_M u_M\rangle_{L_2(\Gamma)}=:\langle\gamma_M\eta_M,\frac{\partial u_M}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \frac{\partial u_M}{\partial n}\Big|_\Gamma\in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.75}$$

которое служит определением производной по внешней нормали элемента $u_M\in H_h^1(\Omega)$. Оно обобщает обычную формулу

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega(\eta_M u_M+\nabla\eta_M\cdot\nabla u_M)d\Omega=\int\limits_\Gamma\eta_M\frac{\partial u_M}{\partial n}\,d\Gamma,\\&\eta_M\in H_h^1(\Omega),\ \ u_M\in H_h^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).\end{aligned} \tag{1.76}$$

Отметим еще, что в (1.75) функционал $\left(\dfrac{\partial u_M}{\partial n}\right)_\Gamma\in H^{-1/2}(\Gamma)$ не зависит от того, какой функционал $L_M u$ выбран в (1.69), так как выполнено условие (1.74).

Возьмем теперь в (1.71) $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$, $u = u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда в силу ортогональности $H_h^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а также свойства (1.73), получаем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega), \quad (1.77)$$

$$\partial_N u_N := (\partial u)|_N \in (G_+)^*, \ \ L_M u_N \in M^*. \quad (1.78)$$

Здесь по аналогии с формулой

$$\int\limits_\Omega \eta_M (u_N - \Delta u_N) d\Omega + \int\limits_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_N}{\partial n}\, d\Gamma = 0, \ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad (1.79)$$

функционал $\partial_N u_N$ можно назвать производной по внешней нормали для элемента $u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N = \Big(\frac{\partial u_M}{\partial n} + \frac{\partial u_N}{\partial n}\Big)_\Gamma = \frac{\partial}{\partial n}\Big(u_N + u_M\Big)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.80)$$

т.е. ∂u есть производная по внешней нормали для произвольного элемента $u \in H^1(\Omega)$.

Тождество (1.77), как и в общих построениях в теореме 1.1, дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, которая по необходимости должна выполняться. В частности, опираясь на (1.79), можно выбрать $L_M u_N$ в виде

$$L_M u_N := P_M^*(u_N - \Delta u_N), \ \ u_N \in H_0^1(\Omega). \quad (1.81)$$

(Напомним, что согласно (1.48), (1.49) элемент $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, а P_M^* — проектор на подпространство $M^* = AM = (H^1(\Omega))^*$.) Тогда формула (1.71) примет вид

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u) + P_M^*(u - \Delta u) \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \quad (1.82)$$

Теорема 1.3. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа γ (см. (1.50)) имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (1.83)$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (1.84)$$

При этом $(\partial u/\partial n)_\Gamma$ определяется по элементам $u \in H^1(\Omega)$ и $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ однозначно.

Доказательство. Оно следует из проведенных построений и из (1.82), если заметить, что $P_N^* + P_M^* = I_{F^*}$ — единичный оператор в $(H^1(\Omega))^*$. □

Из (1.83) следует также "привычная" первая формула Грина для оператора Лапласа Δ:

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \quad (1.85)$$

Из (1.83) можно получить и вторую обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа, см. теорему 1.2.

Замечание 1.3. Отметим еще раз, как и в замечаниях 1.1 и 1.2, что из доказательства теоремы 1.3 можно установить существование не одной формулы Грина (1.83), а целого семейства таких формул, т.е.

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, L(\alpha)u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u\,\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.86}$$

$$L(\alpha)u := P_N^*(u - \Delta u) + \alpha P_M^*(u - \Delta u) \in (H^1(\Omega))^*, \tag{1.87}$$

$$\partial(\alpha)u := \Big(\frac{\partial u_M}{\partial n}\Big)_\Gamma + \alpha\Big(\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.88}$$

где α — произвольная константа. Однако в приложениях возникает дифференциальное выражение $u - \Delta u$ (или $-\Delta u$ в (1.85)), которое получается из (1.87) при $\alpha = 1$. $\square$

1.3. **Другие примеры обобщенных формул Грина.** Здесь будут рассмотрены некоторые примеры классических формул Грина и (без доказательства) их соответствующие обобщенные варианты.

1°. *Равномерно эллиптическое дифференциальное выражение.*

Пусть снова $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\Gamma := \partial\Omega$ — сначала достаточно гладкая.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u, \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.89}$$

для которого выполнены условия

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad j,k = \overline{1,m}, \quad 0 < a_0 \leqslant a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \tag{1.90}$$

а также условие равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^2, \;\; c > 0, \;\; \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.91}$$

Введем производную по конормали

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}n_j, \quad \vec{n} = \sum_{j=1}^{m} n_j\vec{e}_j, \tag{1.92}$$

отвечающую дифференциальному выражению (1.89), и квадратичную форму

$$\|u\|^2_{H^1_{eq}(\Omega)} := \int\limits_\Omega \Big[\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)|u|^2\Big]\,d\Omega. \tag{1.93}$$

Тогда, как известно, имеет место следующая классическая формула Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения Lu:

$$\int\limits_{\Omega} \eta Lu\, d\Omega = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma, \quad \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{1.94}$$

Форма (1.93) при условиях (1.90), (1.91) задает в пространстве $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной норме (1.2). Отсюда, а также из теоремы Гальярдо следует, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1_{eq}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ (см. (1.50)) выполнены для области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ общие условия (1.8) — (1.10). Отсюда, в свою очередь, следует, что справедлива следующая обобщенная формула Грина для равномерно эллиптического оператора:

$$\langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial \nu} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1_{eq}(\Omega) = H^1(\Omega), \tag{1.95}$$

$$Lu \in (H^1_{eq}(\Omega))^*, \;\; \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.96}$$

Отметим, что если выполнены условия

$$a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}, \quad a_0(x) \equiv 1, \tag{1.97}$$

то формула (1.95) переходит в формулу (1.83).

2°. *Обобщенная формула Грина для систем линейных эллиптических уравнений.*

Будем снова считать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и $\Gamma := \partial\Omega$ достаточно гладкая.

Рассмотрим систему дифференциальных выражений

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j \Big[a_{jk}(x) \partial_k u(x) \Big] + a_0(x) u(x), \;\; \partial_j := \partial/\partial x_j, \tag{1.98}$$

которая применена к вектор–столбцу

$$u(x) := (u_1(x); \,\ldots\, ; u_n(x))^\tau, \;\; x \in \Omega, \tag{1.99}$$

где символом $(\,\cdot\,; \ldots ; \cdot\,)^\tau$ обозначена операция транспонирования. Здесь $a_{jk}(x)$ — матрицы, подчиненные условиям симметрии (в комплексных пространствах):

$$a^*_{jk}(x) = a_{jk}(x) \iff a^{rs}_{jk}(x) = \overline{a^{sr}_{kj}(x)}, \;\; r, s = \overline{1, n}\,, \tag{1.100}$$

а матрица $a_0(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т.е.

$$a^*_0(x) = a_0(x) \gg 0. \tag{1.101}$$

Введем производную по конормали, отвечающую дифференциальному выражению (1.98):

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} n_j(x) a_{jk}(x) \partial_k u(x), \quad n = (n_1(x); \,\ldots\, ; n_m(x))^\tau, \tag{1.102}$$

и будем считать, что выполнены следующие условия (см. [17]).

1°. Матрица

$$a(x,\xi) := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1, \tag{1.103}$$

называемая главным символом дифференциального выражения (1.98), является положительно определенной равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, т.е. выражение $L_a u$ сильно эллиптично. Как указано в [17], с. 11, из сформулированного условия следует свойство эллиптичности $\det a(x,\xi) \neq 0$ и выполнение так называемого условия Шапиро–Лопатинского.

2°. Имеет место неравенство

$$\sum a_{jk}^{rs}\xi_j^r\overline{\xi_k^s} \geqslant c\sum |\xi_j^r|^2, \;\; x \in \Gamma, \;\; \xi_j^r \in \mathbb{C}, \;\; c > 0. \tag{1.104}$$

Тогда (см., например, [17]) имеет место неравенство

$$\begin{gathered} \|u\|^2_{H^1_a(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} E(u,u)\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} (a_0(x)u)\cdot\overline{u}\,d\Omega \geqslant \\ \geqslant c\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := c\sum_{k=1}^{n}\|u_k\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad E(u,u) := \sum a_{jk}^{rs}\partial_j u^r\overline{\partial_k u^s}. \end{gathered} \tag{1.105}$$

Заметим теперь, что для гладких функций $\eta(x) := (\eta_1(x);\, \ldots\,; \eta_n(x))^\tau$ и $u(x) := (u_1(x);\, \ldots\,; u_n(x))^\tau$ в области Ω с гладкой границей имеет место следующая формула Грина:

$$(\eta, L_a u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_a(\Omega)} - (\gamma\eta, \partial_{\nu_a}u)_{L_2(\Gamma)}, \;\; \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \;\; u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.106}$$

$$L_2(\Omega) := \{u := (u_1;\, \ldots\,; u_n)^\tau : \; \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \sum_{r=1}^{n}\|u_r\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty\}, \tag{1.107}$$

$$L_2(\Gamma) := \{\varphi := (\varphi_1;\, \ldots\,; \varphi_n)^\tau : \; \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} := \sum_{r=1}^{n}\|\varphi_r\|^2_{L_2(\Gamma)} < \infty\}, \tag{1.108}$$

$$\gamma u := (\gamma u_1;\, \ldots\,; \gamma u_n)^\tau.$$

Из неравенства (1.105) следует, что нормы в пространствах $H^1_a(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ (для вектор-столбца $u := (u_1;\, \ldots\,; u_n)^\tau$, см. правую часть (1.105)) эквивалентны. Отсюда и из теоремы 1.1, примененной к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$ (см. (1.107)), $F = H^1_a(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ (см. (1.108)) и оператору γ, приходим к выводу, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ справедлива формула Грина

$$\langle \eta, L_a u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_a(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \partial_{\nu_a}u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1_a(\Omega), \tag{1.109}$$

$$L_a u \in (H^1_a(\Omega))^*, \quad \partial_{\nu_a}u \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.110}$$

обобщающая формулу (1.106).

3°. *Обобщенная формула Грина линейной теории упругости.*

В линейной теории упругости основным дифференциальным выражением для поля $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, перемещений сплошной упругой среды является выражение

$$L\vec{u} := \vec{u} - [\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}\vec{u}], \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \tag{1.111}$$

где λ и μ — физические константы. Соответствующая классическая формула Грина для гладких полей $\vec{\eta}(x)$ и $\vec{u}(x)$ в области Ω с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет вид

$$\int_\Omega \vec{\eta}\cdot(L\vec{u})\,d\Omega = \mu\,E(\vec{\eta},\vec{u}) + \lambda\int_\Omega (\operatorname{div}\vec{\eta})(\operatorname{div}\vec{u})\,d\Omega + \int_\Omega \vec{\eta}\cdot\vec{u}\,d\Omega -$$

$$- \int_\Gamma (\gamma\vec{\eta})\cdot(P\vec{u})\,d\Gamma, \quad \vec{\eta} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}),$$

$$E(\vec{\eta},\vec{u}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{\eta})\tau_{jk}(\vec{u})\,d\Omega, \quad \tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{1.112}$$

$$P\vec{u} := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{u}) + \lambda \operatorname{div}\vec{u}\,\delta_{jk})\cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\vec{e}_j,$$

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j\vec{e}_j, \quad \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^{3}(\gamma u_j)\vec{e}_j =: \vec{\eta}|_\Gamma.$$

Введем пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой (1.107) при $n = 3$, соответствующее пространство $\vec{L}_2(\Gamma)$ (см. (1.108)), а также пространство $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} := \mu E(\vec{u},\vec{u}) + \lambda\int_\Omega |\operatorname{div}\vec{u}|^2\,d\Omega + \int_\Omega |\vec{u}|^2\,d\Omega. \tag{1.113}$$

Опираясь на неравенство Корна (см. [18], с. 18, а также (1.105))

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} \geqslant c_1\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \quad c_1 > 0, \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega), \tag{1.114}$$

можно доказать, что нормы в пространстве $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ и в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$ со стандартной нормой эквивалентны.

Отсюда и из теоремы 1.1, примененной к пространствам $E = \vec{L}_2(\Omega)$, $F = \vec{H}^1_{eq}(\Omega)$, $G = \vec{L}_2(\Gamma)$ и оператору следа γ (см. (1.112)), получаем, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место следующая обобщенная формула Грина линейной теории упругости:

$$\langle\vec{\eta}, L\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{\eta},\vec{u})_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} - \langle\gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta},\vec{u} \in \vec{H}^1_{eq}(\Omega) = \vec{H}^1(\Omega), \tag{1.115}$$

$$L\vec{u} \in (\vec{H}^1_{eq}(\Omega))^*, \quad \gamma\vec{\eta} \in \vec{H}^{1/2}(\Gamma), \quad P\vec{u} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* = \vec{H}^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.116}$$

Здесь $\vec{H}^{1/2}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций, заданных на Γ и имеющих проекции на оси координат, являющиеся элементами из $H^{1/2}(\Gamma)$.

2. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач

В этом параграфе при определенных дополнительных условиях выводится абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач. Приводятся поясняющие примеры, а также приложения к классической тройке гильбертовых пространств.

2.1. Первые формулировки абстрактной формулы Грина. В математической физике часто изучаются такие проблемы, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с Γ и фигурирующий в формуле Грина, естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Рассмотрим эту проблему в абстрактной форме. Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ выполнены условия (1.8) – (1.10), обеспечивающие по теореме 1.1 существование абстрактной формулы Грина:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G,\ Lu \in F^*,\ \partial u \in (G_+)^*,\ \gamma\eta \in G_+,\ \forall \eta, u \in F. \tag{2.1}$$

Для смешанных краевых задач желательно выражение $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ заменить, при определенных дополнительных условиях, на выражение $\sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Переходя к выводу абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач, будем считать, что дополнительно к условиям (1.8) – (1.10) выполнены следующие соотношения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \quad \exists (G_+)_k,\, (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \quad k = \overline{1,q}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим для простоты случай $q = 2$. Пусть p_1 — непрерывный проектор, действующий в пространстве G_+, а $p_2 = I_+ - p_1$ — дополнительный проектор. Введем подпространства

$$\widehat{(G_+)}_k := p_k G_+, \quad p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.3}$$

отвечающие этим проекторам. Введем также операторы

$$\widehat{\gamma}_k := p_k \gamma, \quad \widehat{\partial}_k := p_k^* \partial, \quad p_k^* : \widehat{(G_+)}_k^{\,*} \to (G_+)^*. \tag{2.4}$$

Так как по условию p_k непрерывен, то и p_k^* непрерывен и $(p_k^*)^2 = p_k^*$.

Теорема 2.1. (первая формулировка абстрактной формулы Грина). *В сформулированных выше предположениях имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.5}$$

Доказательство. Оно достаточно простое. Так как $p_1 + p_2 = I_+$, то

$$\gamma\eta = (p_1 + p_2)\gamma\eta = (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2)\eta, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.6}$$

Поэтому соответствующее слагаемое из правой части формулы (2.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \langle (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2)\eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k \eta, \partial u \rangle_G = \\ &= \sum_{k=1}^{2} \langle p_k \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k^2 \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k \gamma\eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u \rangle_G. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отсюда и из (2.1) следует формула (2.5). □

Из доказательства соотношения (2.7) видно, что если имеется не два, а q взаимно дополнительных проекторов, т.е.

$$\sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \quad p_k p_j = p_k \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, q}\,, \tag{2.8}$$

то аналогично выводу (2.7) приходим к формуле

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.9}$$

Поясним разобранную в абстрактной форме ситуацию на простом примере. Пусть липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ состоит из двух непересекающихся частей Γ_1 и Γ_2, причем

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = dist\,(\Gamma_1, \Gamma_2) := \inf\{|x - y| : x \in \Gamma_1,\ y \in \Gamma_2\} > 0. \tag{2.10}$$

Тогда если $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \tag{2.11}$$

причем, как следует из формулы (1.51),

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geqslant \|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\varphi_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \tag{2.12}$$

Введем оператор p_1, действующий для любого φ из (2.11) по закону

$$p_1\varphi := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{2.13}$$

Нетрудно видеть, что этот оператор обладает свойством $p_1^2 = p_1$. Обозначим совокупность элементов вида (2.13) через $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) := p_1 H^{1/2}(\Gamma)$.

Лемма 2.1. *Оператор*

$$p_1 : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)$$

является ограниченным проектором, действующим в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Оно основано на оценке нормы $p_1\varphi$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Непосредственное вычисление с использованием формулы (1.51) дает неравенство

$$\|p_1\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant (1 + 2|\Gamma_2|d^{-m-1})\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \ \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \tag{2.14}$$

где $d = dist\,(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$. Поэтому

$$\|p_1\| \leqslant (1 + 2|\Gamma_2|d^{-m-1})^{1/2}. \tag{2.15}$$

Свойство $p_1^2 = p_1$ уже отмечалось выше, так что p_1 — ограниченный проектор. $\square$

Оператор $p_2 := I_+ - p_1$, очевидно, также является ограниченным проектором (I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$) и действует по закону

$$p_2\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{2.16}$$

Эти рассуждения показывают, что при условии (2.10) имеет место прямое разложение:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)(\dot{+})\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_2), \quad \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k) = p_k H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \tag{2.17}$$

Таким образом, общий подход, примененный в теореме 2.1, является совершенно естественным для смешанных краевых задач.

Форма (2.9) абстрактной формулы Грина не совсем естественна, так как в классическом случае, отвечающем разобранному выше примеру, выражение

$$\langle\widehat{\gamma}_1\eta, \widehat{\partial}_1 u\rangle_G = \int_\Gamma \eta\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma, \quad \eta = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma_2).$$

Но тогда интеграл справа лучше написать в виде

$$\int_{\Gamma_1} (\eta|_{\Gamma_1})\Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{\Gamma_1}\,d\Gamma_1,$$

а затем расширить его до выражения $\langle\gamma_1\eta, \partial_1 u\rangle_{L_2(\Gamma_1)}$. Такие построения сейчас и будут проделаны.

Как следует из рассмотрения многих задач математической физики, введенные выше проекторы p_k можно представить в виде

$$p_k = \omega_k\rho_k, \quad k = \overline{1,q}, \tag{2.18}$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — оператор продолжения нулем из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k\omega_k = I_k \quad (\text{в } (G_+)_k), \quad k = \overline{1,q}, \tag{2.19}$$

т.е. ω_k является правым обратным для ρ_k. Будем далее считать также, что ρ_k и ω_k — ограниченные операторы.

Из (2.18), (2.19) следует, что $p_k^2 = p_k$ и этот оператор p_k ограничен, т.е. он является ограниченным проектором.

Поясним общие свойства (2.18), (2.19) на примере, разобранном выше, см. (2.10) – (2.17). Введем оператор ρ_k по закону

$$\rho_k\varphi := \varphi|_{\Gamma_k}, \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \tag{2.20}$$

Введем еще операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_1\varphi_1 := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1) \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2) \end{cases}, \quad \omega_2\varphi_2 := \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1) \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2) \end{cases}. \tag{2.21}$$

Тогда очевидно, что $\omega_k\rho_k = p_k$, $k = 1, 2$, (см. (2.13), (2.16)) и, кроме того, выполнены свойства (2.19).

Возвращаясь к общим рассуждениям, сформулируем в виде теоремы основной абстрактный результат.

Теорема 2.2. (вторая формулировка абстрактной формулы Грина). *Пусть выполнены условия* (2.18), (2.19) *и сделанные при этом предположения. Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде:*

$$\langle\eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \forall\eta, u \in F, \tag{2.22}$$

$$\gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^*\partial u \in (G_+)_k^*, \tag{2.23}$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

Доказательство. Преобразуем слагаемое из суммы в правой части (2.5) с учетом (2.18), (2.19). Имеем

$$\langle\widehat{\gamma}_k\eta,\widehat{\partial}_k u\rangle_G = \langle p_k\gamma\eta, p_k^*\partial u\rangle_G = \langle p_k^2\gamma\eta,\partial u\rangle_G = \langle p_k\gamma\eta,\partial u\rangle_G = \langle\omega_k\rho_k\gamma\eta,\partial u\rangle_G. \quad (2.24)$$

Так как по предположению ω_k — непрерывный оператор, то полученное выражение является линейным ограниченным функционалом относительно элементов вида $\rho_k\gamma\eta\in(G_+)_k$. Поэтому этот функционал можно представить по форме пространства G_k, $G=\bigoplus_{k=1}^{q} G_k$, $(G_+)_k\hookrightarrow G_k\hookrightarrow(G_+)_k^*$, $k=\overline{1,q}$, в следующем виде:

$$\langle\omega_k\rho_k\gamma\eta,\partial u\rangle_G = \langle\rho_k\gamma\eta,\omega_k^*\partial u\rangle_{G_k} =: \langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \eta,u\in F. \quad (2.25)$$

Отсюда и следует формула Грина (2.22) с обозначениями (2.23). □

2.2. **Классический пример.** Вернемся снова к тройке пространств $E=L_2(\Omega)$, $F=H^1(\Omega)$, $G=L_2(\Gamma)$, $\Gamma:=\partial\Omega$, оператору γ, $\gamma u:=u|_\Gamma$, $\forall u\in H^1(\Omega)$, и будем считать, что Γ — липшицева граница области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$.

В этом случае норму в $H^1(\Omega)$ определяют эквивалентным образом по формуле

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \inf\{\|\widehat{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^m)}:\ \widehat{u}|_\Omega = u\}, \quad (2.26)$$

(см. [16], с. 147), а в пространстве $H^s(\Gamma)$ — аналогично:

$$\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} := \inf\{\|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}:\ \widehat{\varphi}|_\Gamma=\varphi\}, \quad |s|\leqslant 1. \quad (2.27)$$

Разобъем теперь поверхность Γ на односвязные открытые части Γ_k, $k=\overline{1,q}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Тогда аналогично (2.26), (2.27) нормы в пространствах $H^s(\Gamma_k)$ определяют по формуле

$$\|\psi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} := \inf\{\|\widehat{\psi}\|_{H^s(\Gamma)}:\ \widehat{\psi}|_{\Gamma_k}=\psi_k\}, \quad |s|\leqslant 1. \quad (2.28)$$

Введем в рассмотрение ρ_k, оператор сужения с Γ на Γ_k, по закону

$$\rho_k\varphi := \varphi|_{\Gamma_k}, \quad \forall\varphi\in H^{1/2}(\Gamma). \quad (2.29)$$

Лемма 2.2. *Оператор ρ_k ограничен и*

$$\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)}\leqslant 1. \quad (2.30)$$

Доказательство. Оно следует непосредственно из определения нормы в $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. (1.51)) и неравенства (2.12). □

Введем теперь подпространства

$$\begin{aligned} H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) &:= \{u\in H^1(\Omega): u=0 \ \text{ на } \ \Gamma\setminus\Gamma_k\} = \\ &= \ker\,\gamma_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = \ker\,((I_+-\rho_k)\gamma), \ \ k=\overline{1,q}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Поскольку

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)\supset H^1_0(\Omega) = \ker\,\gamma = \{u\in H^1(\Omega): u=0 \ \ (\text{на } \ \Gamma)\} \quad (2.32)$$

и $H_0^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ при любом $k = \overline{1,q}$.

Введем еще одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформулированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [19] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [16], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 2.3. (В.С. Рычков [19], см. также М.С. Агранович [16]). *Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. Тогда существует линейный оператор $\mathcal{E}$ (оператор В.С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\mathcal{E}\psi\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c\|\psi\|_{H^s(\Gamma_k)}, \ \ \forall\psi \in H^s(\Gamma_k), \ \ |s| \leqslant 1. \tag{2.33}$$

$\square$

Опираясь на введенные понятия, рассмотрим полуторалинейную форму следующего вида:

$$[\varphi,\psi]_\Gamma := \langle \varphi, \mathcal{E}\psi\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \forall\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{2.34}$$

где $\mathcal{E}\psi \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (см. (1.58)). Из (2.33) следует оценка

$$|\,[\varphi,\psi]_\Gamma\,| \leqslant c\,\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{2.35}$$

Пусть теперь $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, т.е. $\gamma\eta = 0$ на $\Gamma\setminus\Gamma_k$. Тогда можно проверить, что

$$\langle \gamma\eta, \mathcal{E}\psi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \varphi, \mathcal{E}\psi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \rho_k\varphi, \psi\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \rho_k\gamma\eta, \psi\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{2.36}$$

где ρ_k — оператор сужения (2.29), а справа стоит расширение по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$ на элементы $\rho_k\varphi = \gamma_k\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, т.е. функционал по форме $L_2(\Gamma_k)$.

Отметим, что при выбранном $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, правая часть в (2.36) не зависит от способа продолжения элемента $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ до элемента $\widehat{\psi} := \mathcal{E}\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а определяется лишь значениями ψ на Γ_k.

Рассмотрим теперь вспомогательную смешанную краевую задачу вида

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ w = 0 \ \ (\text{на } \Gamma\setminus\Gamma_k), \ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \ \ (\text{на } \Gamma_k). \tag{2.37}$$

Слабым решением задачи (2.37) назовем такую функцию $w \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, для которой при любой $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta. \tag{2.38}$$

Нетрудно видеть, что классическое решение задачи (2.37) является слабым решением в смысле определения (2.38).

Лемма 2.4. *Задача* (2.37) *имеет слабое решение* w *тогда и только тогда, когда выполнено условие* $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. *При этом*

$$w \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega) =: H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega). \tag{2.39}$$

Доказательство. Оно традиционно и основано на соотношении (2.36) с учетом леммы 2.2 и теоремы Гальярдо. $\square$

Из этой леммы следует, что оператор $\widetilde{T}_k$, сопоставляющий элементу $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ решение $w = \widetilde{T}_k\psi_k$ задачи (2.37), ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ на $H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$. Полагая в (2.38) $\eta \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, будем иметь тождество

$$(\eta, \widetilde{T}_k\psi_k)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \forall\eta \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \forall\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{2.40}$$

Здесь, по построению, элементы вида $\widetilde{\varphi}_k := \gamma_k w$, $w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, обладают следующими свойствами: во-первых, они принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_k)$, а во-вторых, — продолженные нулем с Γ_k на всю Γ они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$. Кроме того, очевидно, что между элементами $\widetilde{\varphi}_k = \gamma_k w$ и w имеется взаимно однозначное соответствие.

Обозначим через $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ совокупность элементов вида

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \{\widetilde{\varphi}_k = \gamma_k w : w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{2.41}$$

Лемма 2.5. *Множество* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ *плотно в* $L_2(\Gamma_k)$.

Доказательство. Оно проводится от противного с использованием тождества (2.40), см. [8]. $\square$

Введем в рассмотрение оператор

$$\widetilde{C}_k := \gamma_k\widetilde{T}_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{2.42}$$

По построению между $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\widetilde{C}_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Учитывая этот факт, а также изоморфизм между $H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, введем на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}, \quad \eta, u \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad \gamma_k\eta = \alpha, \quad \gamma_k u = \beta. \tag{2.43}$$

С учетом определения (2.41) и тождества (2.40) это соотношение можно переписать в виде

$$(\alpha,\beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}=(\eta,w)_{H^1(\Omega)}=\langle\alpha,\widetilde{C}_k^{-1}\beta\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\quad \forall\alpha,\beta\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{2.44}$$

$$\eta=\widetilde{T}_k\zeta_k,\ \gamma_k\eta=\alpha,\ w=\widetilde{T}_k\psi_k,\ \gamma_k\widetilde{T}_k\psi_k=\widetilde{C}_k\psi_k=\beta,\ \psi_k,\,\zeta_k\in H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{2.45}$$

Лемма 2.6. *Оператор* $\widetilde{C}_k^{-1}=(\gamma_k\widetilde{T}_k)^{-1}$ *с областью определения* $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k^{-1})=\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ *и областью значений* $\mathcal{R}(\widetilde{C}_k^{-1})=\mathcal{D}(\widetilde{C}_k)=H^{-1/2}(\Gamma_k)$ *является оператором гильбертовой пары* $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k);L_2(\Gamma_k))$.

Доказательство. Оно основано на неравенствах

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\varphi}\|_{L_2(\Gamma_k)}\leqslant\|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}\leqslant\|\widehat{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leqslant c_1\|w\|_{H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)}=c_1\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)},\\ \widetilde{\varphi}=\gamma_k w,\ \ w\in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ \ \widetilde{\varphi}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\end{gathered} \tag{2.46}$$

где $\widehat{\varphi}$ – продолженная нулем на $\Gamma\setminus\Gamma_k$ функция $\widetilde{\varphi}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, и лемме 2.5. □

Таким образом, имеет место оснащение

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)\hookrightarrow L_2(\Gamma_k)\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{2.47}$$

Отметим еще, что норма в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ "сильнее" стандартной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, что следует из (2.46):

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}\leqslant c_1\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)},\ \ \forall\widetilde{\varphi}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)\subset H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{2.48}$$

Опираясь на доказанные факты, введем на элементах из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ оператор ω_k продолжения нулем на $\Gamma\setminus\Gamma_k$, действующий по закону

$$\omega_k\widetilde{\varphi}_k:=\begin{cases}\widetilde{\varphi}_k & (\text{на }\Gamma_k),\\ 0 & (\text{на }\Gamma\setminus\Gamma_k),\end{cases}\qquad\forall\widetilde{\varphi}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{2.49}$$

Лемма 2.7. *Оператор* ω_k *продолжения нулем с* Γ_k *на* Γ*, рассматриваемый на области определения* $\mathcal{D}(\omega_k):=\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$*, является непрерывным оператором из* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ *в* $H^{1/2}(\Gamma)$*; при этом*

$$\|\omega_k\widetilde{\varphi}_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leqslant c_1\|\widetilde{\varphi}_k\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)},\ \ \forall\widetilde{\varphi}_k\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{2.50}$$

где $c_1>0$ *– константа из неравенства* (1.39) *(теорема Гальярдо).*

Доказательство. Этот факт уже установлен при выводе неравенств (2.46) с той же константой c_1. В самом деле, в (2.46) $\widehat{\varphi}=\omega_k\widetilde{\varphi}_k$, откуда и следует (2.50). □

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. Как известно (см. [20], с. 78, а также [21], с. 116 – 117), даже в случае гладкой Γ оператор продолжения нулем с некоторой части $\Gamma_k\subset\Gamma$ (с гладкой $\partial\Gamma_k$) на всю Γ не является непрерывным из $H^{1/2}(\Gamma_k)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако в данном случае, т.е. на решениях w вспомогательной задачи (2.37) на элементах $\gamma_k w$, $w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, этот оператор оказывается непрерывным.

Введем теперь следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \ k = \overline{1,q}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{H}^1(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})^q_{k=1} H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \\ &H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H^1_h(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным* по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на части Γ_k, $k = \overline{1,q}$, если для любого k элемент $\gamma_k u = \rho_k \gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Согласно проведенным выше построениям и определениям (2.51), (2.52), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ имеем

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_q,\ \ u_0 \in H^1_0(\Omega),\ \ u_k \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ \ k = \overline{1,q}, \tag{2.53}$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \ \gamma_k u_k =: \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \gamma_k u_j = 0\ (k \neq j),\ \ j,k = \overline{1,q}. \tag{2.54}$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь следующую тройку пространств и оператор следа:

$$E = L_2(\Omega),\ \ F = \widehat{H}^1(\Omega),\ G = L_2(\Gamma),\ \Gamma := \partial\Omega,\ \gamma u := u|_\Gamma,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega). \tag{2.55}$$

Нетрудно видеть, что для них выполнены следующие свойства.

1°. $\widehat{H}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)} = c\|u\|_{\widehat{H}^1(\Omega)},\ \ \forall u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{2.56}$$

2°. Оператор $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ ограничен, $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$ и (по теореме С.Л. Соболева о следах)

$$\|\gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \widetilde{c}\|u\|_{H^1(\Omega)},\ \ \forall u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{2.57}$$

3°. Пространство $H^1_0(\Omega) = \ker\gamma$ плотно в $L_2(\Omega)$.

4°. Для каждого $k = \overline{1,q}$ оператор $p_k = \omega_k\rho_k$ в силу лемм 2.2 и 2.7 является ограниченным проектором в пространстве $G_+ := \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$, а оператор $\rho_k\omega_k$ по построению является ограниченным проектором в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) =: (G_+)_k$.

Поэтому по теореме 2.2 приходим к следующему выводу.

Теорема 2.3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $\widehat{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с* *липшицевой границей* Γ, *разбитой на части* Γ_k *с липшицевыми границами* $\partial\Gamma_k$, $k=\overline{1,q}$, *справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$\langle \eta, u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta,u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall \eta,u\in \widehat{H}^1(\Omega),$$
$$u-\Delta u\in(\widehat{H}^1(\Omega))^*, \gamma_k\eta := \eta|_{\Gamma_k}\in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ \ k=\overline{1,q}. \tag{2.58}$$

□

2.3. **Итоговая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач.** Вторая формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 2.2, не всегда отражает те классы смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулем с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, как было видно из рассмотрений п. 2.2, полезно использовать в случаях, когда куски Γ_k границы $\Gamma=\partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы задают краевые условия Дирихле с функциями класса $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить еще более общую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы в приложениях можно было использовать и краевые условия Неймана или Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, снова будем считать, что имеют место оснащения

$$(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\quad k=\overline{1,q},\quad G=\bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \tag{2.59}$$

а операторы проектирования $p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k$ представляются в виде (2.18), (2.19):

$$p_k=\omega_k\rho_k,\quad k=\overline{1,q},\quad \rho_k\omega_k=(I_+)_k,\quad k=\overline{1,q},\quad \sum_{k=1}^{q}p_k=I_+, \tag{2.60}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но не обязательно нулем. Предполагается также, что $\rho_k : G_+\to(G_+)_k$ и $\omega_k :\ (G_+)_k\to\widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях сопряженный оператор

$$p_k^*=\rho_k^*\omega_k^*,\quad \rho_k^*=(G_+)_k^*\to(G_+)^*,\quad \omega_k^*=\widehat{(G_+)}_k^{\,*}\to(G_+)_k^*,\quad k=\overline{1,q}, \tag{2.61}$$

где ρ_k^* и ω_k^* — ограниченные операторы, причем здесь ω_k^* — оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^{\,*}$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 2.4. (общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач). *Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование абстрактной формулы Грина в форме* (1.14), *т.е. условия* (1.8) – (1.10). *Пусть* *также выполнены условия* (2.59) *и условия* (2.60) *либо* (2.61). *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в форме* (2.22), (2.23):

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.62}$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \tag{2.63}$$

где ρ_k *и* ω_k^* *— операторы со свойствами* (2.60), (2.61).

Доказательство. Если выполнены условия (2.60), то доказательство полностью повторяет вывод формул (2.24), (2.25).

Если же выполнены условия (2.61), то имеем

$$\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \gamma\eta, \Big(\sum_{k=1}^{q} p_k^*\Big)\partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma\eta, p_k^* \partial u\rangle_G =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma\eta, \rho_k^* \omega_k^* \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{q} \langle \rho_k \gamma\eta, \omega_k^* \partial u\rangle_{G_k} =: \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \eta, u \in F.$$

□

2.4. **Приложения к классической тройке гильбертовых пространств.** Рассмотрим теперь вопрос о том, как выглядит формула Грина (2.62), (2.63) для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и обычного оператора следа γ. Сначала докажем некоторые предварительные утверждения.

Рассмотрим вспомогательную задачу Неймана

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \ \ (\text{на } \ \Gamma_k), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma\backslash\Gamma_k), \tag{2.64}$$

а также соответствующую задачу Зарембы

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega), \quad w = \varphi_k \ \ (\text{на } \ \Gamma_k), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma\backslash\Gamma_k). \tag{2.65}$$

Теорема 2.5. *Задача Неймана* (2.64) *тогда и только тогда имеет слабое решение* $w =: T_k\psi_k \in H_h^1(\Omega)$, *когда выполнено условие*

$$\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{2.66}$$

Задача Зарембы (2.65) *имеет слабое решение* $w =: \gamma_k^{-1}\varphi_k \in H_h^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{2.67}$$

Доказательство. Заметим сначала, что условия (2.66), (2.67) необходимы для разрешимости задач (2.64), (2.65). В самом деле, если $w \in H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то по теореме Гальярдо (см. п. 1.2) $\gamma w := w|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, а потому, как следует из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma_k)$ (см. (1.51)), $\varphi_k := w|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. выполнено условие (2.67). Далее, для $w \in H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ аналогично получаем (см. (1.84)), что $(\partial w/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому, согласно (2.28), $(\partial w/\partial n)_{\Gamma_k} =: \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$.

Докажем теперь, что условия (2.66), (2.67) достаточны для разрешимости (2.64), (2.65) соответственно.

Представим решение задачи Зарембы (2.65) в виде $w = w_1 + w_2$. Предварительно продолжим с помощью оператора В.С. Рычкова функцию $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$, т.е. введем, согласно лемме 2.3,

$$\varphi := \mathcal{E}_k\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\mathcal{E}_k\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_k\|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}. \tag{2.68}$$

Далее будем считать, что φ есть след на Γ функции w_1, которая является решением задачи Дирихле:

$$w_1 - \Delta w_1 = 0 \ \text{ (в } \Omega), \quad w_1 = \varphi = \mathcal{E}_k\varphi_k \ \text{ (на } \Gamma). \tag{2.69}$$

Тогда решение w_1 этой задачи существует, единственно и выражается формулой

$$w_1 = \gamma_M^{-1}\mathcal{E}_k\varphi_k \in H_h^1(\Omega), \tag{2.70}$$

где оператор γ_M^{-1} ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ на $H_h^1(\Omega)$.

Для функции $w_2 := w - w_1$ возникает краевая задача

$$w_2 - \Delta w_2 = 0 \ \text{ (в } \Omega), \quad w_2 = 0 \ \text{ (на } \Gamma_k), \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = -\frac{\partial w_1}{\partial n} \ \text{ (на } \Gamma\backslash\Gamma_k), \tag{2.71}$$

которая уже исследована выше (см. (2.37)). В самом деле, так как $w_1 \in H^1(\Omega)$, то $(\partial w_1/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому $(\partial w_1/\partial n)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. По лемме 2.4 получаем, что задача (2.71) имеет единственное слабое решение

$$w_2 \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad w_2 = T_k(-\partial w_1/\partial n)_{\Gamma_k}. \tag{2.72}$$

Итак, условие (2.67) не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача Зарембы (2.65) имела единственное слабое решение.

Пусть теперь $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Докажем, что существует единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ задачи Неймана (2.64).

Заметим сначала, что если $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, то элемент

$$\widehat{\psi}_k := \rho_k^*\psi_k := \begin{cases} \psi_k & \text{(на } \Gamma_k), \\ 0 & \text{(на } \Gamma\backslash\Gamma_k), \end{cases} \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{2.73}$$

Здесь ρ_k^* — оператор продолжения нулем с $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$. Докажем это последнее утверждение, т.е. свойство $\widehat{\psi}_k \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Так как $L_2(\Gamma_k)$ плотно в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$, то для $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ найдется последовательность элементов $\psi_{k_j} \in L_2(\Gamma_k)$, сходящаяся к ψ_k в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Кроме того, если ζ_{k_j} — последовательность элементов из $L_2(\Gamma\backslash\Gamma_k)$, сходящаяся к нулю при $j \to \infty$, то последовательность элементов

$$\widehat{\psi}_{k_j} := \begin{cases} \psi_{k_j} & \text{(на } \Gamma_k), \\ \zeta_{k_j} & \text{(на } \Gamma\backslash\Gamma_k), \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots ,$$

фундаментальна в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Поэтому она имеет предел (в силу полноты $H^{-1/2}(\Gamma)$), который, очевидно, равен $\widehat{\psi}_k$. Значит, $\widehat{\psi}_k \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Докажем теперь тождество

$$\langle \mathcal{E}_k\varphi_k, \widehat{\psi}_k\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \varphi_k, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \forall\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{2.74}$$

а также неравенство

$$|\langle \varphi_k, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}| = |\langle \mathcal{E}_k\varphi_k, \widehat{\psi}_k\rangle_{L_2(\Gamma)}| \leqslant \|\mathcal{E}_k\| \cdot \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}\| \cdot \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}. \tag{2.75}$$

Здесь предполагается, что норма в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ определена по закону (2.28).

Для элементов $\widehat{\psi}_k$ вида (2.73) с $\psi_k \in L_2(\Gamma_k)$ имеем

$$\langle \mathcal{E}_k\varphi_k, \widehat{\psi}_k\rangle_{L_2(\Gamma)} = (\mathcal{E}_k\varphi_k, \widehat{\psi}_k)_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma (\mathcal{E}_k\varphi_k)(\widehat{\psi}_k)\, d\Gamma = \int\limits_{\Gamma_k} \varphi_k\psi_k\, d\Gamma_k = (\varphi_k, \psi_k)_{L_2(\Gamma)},$$

а отсюда тождество (2.74) получается предельным переходом, т.е. расширением скалярного произведения на элементы ψ_k из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Далее, из (2.74) получаем неравенство

$$|\langle \varphi_k, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}| = |\langle \mathcal{E}_k\varphi_k, \widehat{\psi}_k\rangle_{L_2(\Gamma)}| \leqslant \|\mathcal{E}_k\| \cdot \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}\| \cdot \|\widehat{\psi}_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{2.76}$$

Переходя справа к

$$\inf \{\|\widehat{\psi}_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} : \widehat{\psi}_k|_{\Gamma_k} = \psi_k\},$$

приходим к формуле (2.75).

Опираясь на доказанные утверждения, в частности, на (2.73) и (2.75), докажем, что при $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ задача Неймана (2.64) имеет единственное решение $w \in H^1_h(\Omega)$. В самом деле, ее слабое решение определяется из тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\eta \in H^1(\Omega), \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{2.77}$$

Так как при любом $\eta \in H^1(\Omega)$ правая часть в (2.77) в силу (2.74), (2.75) и свойств $\gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\rho_k\gamma\eta = \gamma_k\eta =: \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$, то имеет место тождество (2.77). Тогда

$$w =: T_k\varphi_k, \quad T_k \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k),\, H^1_h(\Omega)). \tag{2.78}$$

$\square$

Опираясь на утверждения теоремы 2.5, введем оператор Стеклова (иногда его называют оператором Пуанкаре–Стеклова, см. [22] – [24]), который сопоставляет по решению w задачи Неймана (2.64) его след на Γ_k:

$$\varphi_k = \gamma_k T_k\psi_k =: C_k\psi_k, \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{2.79}$$

Пусть η и w — два решения задачи Неймана (2.64), отвечающие соответственно элементам ζ_k и ψ_k из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$, причем $\eta|_{\Gamma_k} = \xi_k$, $w|_{\Gamma_k} = \varphi_k$. Тогда, исходя из определения (2.77) слабого решения задачи Неймана, легко видеть, что

$$\langle \xi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle C_k \zeta_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \zeta_k, C_k^{-1} \varphi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \tag{2.80}$$

откуда следует, что C_k^{-1} — оператор гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$,

$$\mathcal{D}(C_k^{-1}) = \mathcal{R}(C_k) = H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(C_k^{-1}) = \mathcal{D}(C_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{2.81}$$

Будем далее говорить, что если выполнены условия (2.80), (2.81), то пространства $H^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задаче Неймана (2.64) либо задаче Зарембы (2.65).

Аналогичное утверждение о дуальности справедливо и для задачи (2.37) – (2.38), т.е.

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \ \text{(на } \Gamma_k), \ \ w = 0 \ \text{(на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \tag{2.82}$$

и соответствующей задачи Дирихле:

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ w = \widetilde{\varphi}_k \ \text{(на } \Gamma_k), \ \ w = 0 \ \text{(на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \tag{2.83}$$

Здесь, как показали проведенные выше рассмотрения, возникает оператор Стеклова $\widetilde{C}_k := \gamma_k \widetilde{T}_k$, гильбертова пара пространств $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); H^{-1/2}(\Gamma_k))$, а также соотношения

$$\langle \widetilde{\xi}_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \widetilde{C}_k \zeta_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \zeta_k, \widetilde{C}_k^{-1} \widetilde{\varphi}_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \tag{2.84}$$

$$\mathcal{D}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{R}(\widetilde{C}_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{2.85}$$

а η и w — соответствующие решения задач (2.82) либо (2.83). Таким образом, пространства $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задачам (2.82), (2.83).

Отметим, наконец, и такой очевидный факт: пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ дуальны по задаче Неймана

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \ \text{(на } \Gamma), \tag{2.86}$$

и соответствующей задаче Дирихле

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ w = \varphi \ \text{(на } \Gamma), \tag{2.87}$$

причем связь между ψ и φ дается классическим оператором Стеклова:

$$\varphi = C\psi, \ \xi = C\zeta, \ \mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C) = H^{1/2}(\Gamma), \ \mathcal{R}(C^{-1}) = \mathcal{D}(C) = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{2.88}$$

$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle C\zeta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \zeta, C^{-1}\varphi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \quad \eta, w \in H_h^1(\Omega). \tag{2.89}$$

Приведем еще одну вспомогательную формулу, которая далее понадобится. Пусть $\xi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Тогда, как было установлено выше, $\xi_k := \xi|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k)$, $\psi_k := \psi|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, причем эти пространства дуальны по задачам (2.64), (2.65), $k = \overline{1,q}$. Убедимся, что имеет место формула

$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{q} \langle \xi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \xi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.90}$$

В самом деле, если $\psi \in L_2(\Gamma)$, то $\psi_k \in L_2(\Gamma_k)$ и имеет место формула

$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\xi, \psi)_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_{\Gamma} \xi\psi \, d\Gamma = \sum_{k=1}^{q} \int\limits_{\Gamma_k} \xi_k \psi_k \, d\Gamma_k = \sum_{k=1}^{q} (\xi_k, \psi_k)_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{2.91}$$

а формула (2.90) получается из (2.91) предельным переходом, так как $L_2(\Gamma)$ по построению образует плотное множество в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Введем в $H^{-1/2}(\Gamma)$ норму, отвечающую разбиению Γ на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1, q}$, по следующему правилу:

$$\|\psi\|^2_{eq, H^{-1/2}(\Gamma)} := \sum_{k=1}^{q} \|\psi_k\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}. \tag{2.92}$$

Лемма 2.8. *Нормы в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$, определяемые по обычному закону*

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} := \sup \{ |\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}| \,/\, \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} : 0 \neq \varphi \in H^{1/2}(\Gamma) \} \tag{2.93}$$

и по правилу (2.92)*, эквивалентны.*

Доказательство. Так как

$$\|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)} := \inf \{ \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \, : \, \psi|_{\Gamma_k} = \psi_k \}, \tag{2.94}$$

то

$$\sum_{k=1}^{q} \|\psi_k\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_k)} \leqslant q \|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{2.95}$$

Далее, из формулы (1.51), задающей квадрат нормы в $H^{1/2}(\Gamma)$, следует, что

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geqslant \sum_{k=1}^{q} \|\varphi_k\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.96}$$

Поэтому, с использованием формул (2.90) и (2.96), имеем

$$\frac{|\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}|^2}{\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \frac{\Big| \sum\limits_{k=1}^{q} \langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \Big|^2}{\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leqslant \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{q} |\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}| \Big)^2}{\sum\limits_{k=1}^{q} \|\varphi_k\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)}} \leqslant$$

$$\leqslant q \sum_{k=1}^{q} \frac{|\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}|^2}{\sum\limits_{j=1}^{q} \|\varphi_j\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_j)}} \leqslant q \sum_{k=1}^{q} \frac{|\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}|^2}{\|\varphi_k\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)}} \leqslant q \sum_{k=1}^{q} \|\psi_k\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant q \sum_{k=1}^{q} \|\psi_k\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_k)},$$

что вместе с (2.95) приводит к неравенствам

$$q^{-1/2} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant \|\psi\|_{eq, H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant q^{1/2} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{2.97}$$

□

Опираясь на установленные факты, приведем примеры операторов проектирования в пространствах $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, а также их представления в виде (2.60) и (2.61), использованные при доказательстве общей теоремы 2.4. Эти примеры основаны на результатах рассмотрения вспомогательных краевых задач, изученных выше.

Рассмотрим сначала пространство $H^{-1/2}(\Gamma)$ и будем считать, что липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ разбита на части Γ_k с липшицевыми $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. Для любой $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ найдем

$$\psi_k := \psi|_{\Gamma_k} =: \omega_k^* \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{2.98}$$

где ω_k^* — оператор сужения, $\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma_k)$, который, в силу предыдущих построений и определения нормы в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ (см. (2.94)), ограничен и его норма

$$\|\omega_k^*\| \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\rho_k\| \leqslant 1. \tag{2.99}$$

Далее, введем оператор продолжения нулем, действующий из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ по закону

$$\rho_k^* \psi_k = \widehat{\psi}_k := \begin{cases} \psi_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \backslash \Gamma_k). \end{cases} \tag{2.100}$$

Из (2.92) и (2.97) следует, что оператор ρ_k^* ограничен. Кроме того, очевидно, выполнены свойства

$$p_k^* := \rho_k^* \omega_k^* = (p_k^*)^2, \ \ \omega_k^* \rho_k^* = (I_-)_k, \ \ p_k^* p_j^* = 0 \ \ (k \neq j), \tag{2.101}$$

где $(I_-)_k$ — единичный оператор в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$.

Отсюда следует, что p_k^* является ограниченным оператором проектирования в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$,

$$\sum_{k=1}^{q} p_k^* = I_-, \tag{2.102}$$

где I_- — единичный оператор в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$, и имеет место прямое разложение

$$H^{-1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{q} \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := p_k^* H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.103}$$

Кроме того, в силу указанного выше свойства дуальности пространств $H^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ по задаче Неймана (2.64) либо по задаче Зарембы (2.65), выполнены общие требования (2.59), где $(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k)$, $G_k = L_2(\Gamma_k)$, $(G_+)_k^* = H^{-1/2}(\Gamma_k)$, а также свойства (2.61).

Приведем теперь более сложный пример, относящийся к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. Пусть $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Опираясь на связи между решениями задач Дирихле (2.87) и Неймана (2.86) и вводя оператор Стеклова $C : \ H^{-1/2}(\Gamma) \to \ H^{1/2}(\Gamma)$, будем иметь $\psi := C^{-1}\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Рассмотрим, далее, элементы $\psi_k = \ \psi|_{\Gamma_k} = \ \omega_k^*\psi$ и $\widehat{\psi}_k := \rho_k^*\psi_k$

(см. разобранный выше пример). Решая теперь задачу Неймана (2.86) с $\psi = \widehat{\psi}_k$, а затем находя след слабого решения w этой задачи на Γ, получаем

$$w|_\Gamma = C\widehat{\psi}_k = C\rho_k^*\omega_k^* C^{-1}\varphi =: p_k\varphi, \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.104}$$

Убедимся, что введенный оператор p_k является ограниченным оператором проектирования, действующим в $H^{1/2}(\Gamma)$. Прежде всего, он равен произведению ограниченных операторов (действующих из одного пространства в другое) и потому ограничен. Кроме того, опираясь на свойства (2.101), легко убедиться, что

$$p_k^2 = p_k, \ \ \sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \ \ p_k p_j = 0 \ \ (k \neq j), \tag{2.105}$$

где I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$. Поэтому для операторов p_k выполнены общие свойства (2.60), причем можно формально считать, что

$$p_k = \widetilde{\omega}_k \widetilde{\rho}_k, \ \ \widetilde{\rho}_k := \omega_k^* C^{-1}, \ \ \widetilde{\omega}_k := C\rho_k^*, \tag{2.106}$$

$$\widetilde{\rho}_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma_k), \widetilde{\omega}_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma), \widetilde{\rho}_k\widetilde{\omega}_k = \omega_k^*\rho_k^* = (I_-)_k. \tag{2.107}$$

Таким образом, имеем прямое разложение

$$H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{q} \check{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \check{H}^{1/2}(\Gamma_k) := p_k H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.108}$$

Оно позволяет по любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ найти такие функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma)$, связанные с φ через решение задачи Неймана (2.86), что в сумме имеем

$$\sum_{k=1}^{q} \varphi_k = \varphi. \tag{2.109}$$

В качестве следствия из разобранных примеров, а также из теоремы 2.4 приходим к такому выводу.

Теорема 2.6. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,q}$, справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{2.110}$$

$$\begin{gathered} \gamma_k \eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \ \ \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), k = \overline{1,q}, \\ u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*. \end{gathered} \tag{2.111}$$

$\square$

Формула Грина (2.110), таким образом, приспособлена не только к исследованию с ее помощью слабых решений краевых задач в области Ω с условиями Дирихле на части Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ (см. теорему 2.3), но также и с краевыми условиями Неймана либо Ньютона.

Из рассмотрения теорем 2.3 и 2.6 и формул Грина (2.58) и (2.110) соответственно возникает следующий естественный вопрос: в каком отношении находятся между собой пространства $\widehat{H}^1(\Omega)$ (см. (2.52)) и $H^1(\Omega)$, для которых эти формулы справедливы? Очевидно, имеет место включение $\widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, однако далее будет установлено, что эти пространства изоморфны.

Переходя к более детальному изучению этой проблемы, установим взаимосвязь между пространством

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := (\dotplus)_{k=1}^{q} \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{2.112}$$

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \left\{ \widehat{\varphi}_k \quad := \quad \begin{cases} \widetilde{\varphi}_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \end{cases} \quad \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \right\} \tag{2.113}$$

(см. (2.50)) и пространством $H^{1/2}(\Gamma) \supset \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$. Напомним, что элементы из $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ состоят из наборов функций, заданных на Γ_k и продолжимых нулем вне Γ_k. При этом они обращаются в нуль на $\partial\Gamma_k$ и удовлетворяют необходимым условиям продолжения нулем в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Введем подпространство

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q) := (\dotplus)_{k=1}^{q-1} \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{2.114}$$

и выясним, каково ортогональное дополнение этого подпространства в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. При этом будем считать, что скалярное произведение в $H^{1/2}(\Gamma)$ определено по закону (см. (1.16), (1.17))

$$\begin{aligned} &(\varphi_1, \varphi_2)_{H^{1/2}(\Gamma)} := (w_1, w_2)_{H^1(\Omega)}, \quad \gamma w_1 = \varphi_1, \quad \gamma w_2 = \varphi_2, \\ &w_k - \Delta w_k = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.115}$$

приводящему к норме, эквивалентной стандартной норме (1.51).

Лемма 2.9. *Имеет место ортогональное разложение*

$$H^{1/2}(\Gamma) = \widehat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q) \oplus \check{H}^{1/2}(\Gamma_q), \tag{2.116}$$

где

$$\begin{aligned} &\check{H}^{1/2}(\Gamma_q) := \Big\{ \varphi_q = \gamma w_q : w_q - \Delta w_q = 0 \ \ (\textit{в } \ \Omega), \\ &\frac{\partial w_q}{\partial n_k} = 0 \ \ (\textit{на}\, \Gamma_k), \ k = \overline{1, q-1}, \ \ \frac{\partial w_q}{\partial n_q} = \psi_q \ \ (\textit{на}\, \Gamma_q), \ \forall \psi_q \in H^{-1/2}(\Gamma_q) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\varphi} \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q)$ — произвольный элемент, т.е.

$$\widehat{\varphi} = \sum_{j=1}^{q-1} \widehat{\varphi}_j, \quad \widehat{\varphi}_j \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_j), \quad j = \overline{1, q-1}. \tag{2.118}$$

Пусть, далее, φ_q ортогонально любому $\widehat{\varphi}$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда с использованием формулы Грина (2.110) имеем

$$\begin{aligned}(\widehat{\varphi},\varphi_q)_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \Big(\sum_{j=1}^{q-1}\widehat{\varphi}_j,\varphi_q\Big)_{H^{1/2}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{q-1}(\widehat{\varphi}_j,\varphi_q)_{H^{1/2}(\Gamma)} = \\ &= \sum_{j=1}^{q-1}(w_j,w_q)_{H^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^{q-1}\langle w_j, w_q-\Delta w_q\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{q-1}\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k w_j,\frac{\partial w_q}{\partial n_k}\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \sum_{j=1}^{q-1}\sum_{k=1}^{q-1}\langle\gamma_k w_j,\frac{\partial w_q}{\partial n_k}\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = 0.\end{aligned} \tag{2.119}$$

Здесь при выводе использованы связи

$$w_q-\Delta w_q = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ \widehat{\varphi}_j=\gamma w_j, \ \ \widehat{\varphi}_j|_{\Gamma_q}=0, \ \ j=\overline{1,q-1}. \tag{2.120}$$

Отметим еще, что

$$\gamma_k w_j = \gamma_k w_k\delta_{kj}, \ \ k,j=\overline{1,q-1}, \tag{2.121}$$

поэтому (2.119) дает соотношение

$$\sum_{k=1}^{q-1}\langle\gamma_k w_k,\frac{\partial w_q}{\partial n_k}\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = 0. \tag{2.122}$$

Заметим теперь, что $\gamma_k w_k = \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, причем $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$ (лемма 2.5), а $L_2(\Gamma_k)$ плотно в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому из (2.122) имеем свойства

$$H^{-1/2}(\Gamma_k)\ni\frac{\partial w_q}{\partial n_k}=0 \ \ (\text{на } \Gamma_k), \quad k=\overline{1,q-1},$$

а производная по нормали $\partial w_q/\partial n_q =: \psi_q$ на Γ_q может быть произвольным элементом из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Отсюда следует, что ортогональное дополнение к $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma\setminus\ \Gamma_q)$ имеет вид (2.117). □

Из этой леммы получаем следующий важный результат.

Теорема 2.7. *Пространства $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ (см. (2.112), (2.113)) и $H^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны. Соответственно изоморфны пространства $\widehat{H}^1(\Omega)$ (см. (2.52)) и $H^1(\Omega)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\widehat{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)\oplus\Big\{(\dot{+})_{k=1}^q H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\Big\}, \tag{2.123}$$

$$H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) := \Big\{w_k\in H_h^1(\Omega): \ w_k=0 \ \ (\text{на } \Gamma\setminus\Gamma_k), \ \frac{\partial w_k}{\partial n_k}=\psi_k\in H^{-1/2}(\Gamma_k)\Big\} \tag{2.124}$$

(см. (2.37) – (2.39)). Соответственно для $H^1(\Omega)$ имеем разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)\oplus H_h^1(\Omega), \tag{2.125}$$

$$H_h^1(\Omega) := \Big\{w\in H^1(\Omega): \ w-\Delta w=0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \frac{\partial w}{\partial n}=\psi, \ \forall\psi\in H^{-1/2}(\Gamma)\Big\}. \tag{2.126}$$

Представим любую функцию $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^{q} \widehat{\psi}_k, \quad \widehat{\psi}_k \in \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q}, \tag{2.127}$$

(см. (2.100), (2.103)). Тогда очевидно, что $H^1_h(\Omega)$ допускает прямое разложение

$$H^1_h(\Omega) = (\dot{+})_{k=1}^{q} H^1_{h,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega), \tag{2.128}$$

$$\begin{gathered} H^1_{h,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) := \\ = \Big\{ w_k \in H^1_h(\Omega) : \ \frac{\partial w_k}{\partial n_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \frac{\partial w_k}{\partial n_j}\Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j \neq k) \Big\}. \end{gathered} \tag{2.129}$$

Для пространств $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ из (2.112), (2.113), а также из (2.128), (2.129) аналогично получаем, что каждое из них является прямой суммой подпространств вида (2.113), связанных с решениями вспомогательной задачи (2.37), и соответственно вспомогательной задачи (2.64). В частности (см. (2.108)),

$$H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{q} \check{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{2.130}$$

где $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ определено так же, как в (2.117) определено $\check{H}^{1/2}(\Gamma_q)$ при $k = q$:

$$\begin{gathered} \check{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \Big\{ \varphi_k = \gamma w_k : \ \ w_k - \Delta w_k = 0 \ (\text{в } \ \Omega), \\ \frac{\partial w_k}{\partial n_k} = \psi_k \quad (\text{на } \ \Gamma_k), \quad \forall \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \frac{\partial w_k}{\partial n_j}\Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j \neq k) \Big\}. \end{gathered} \tag{2.131}$$

Из формул (2.123) – (2.131) видно, что для доказательства всех утверждений теоремы достаточно убедиться, что подпространства $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ изоморфны для каждого $k = \overline{1,q}$.

Установим это свойство, опираясь на свойства решений вспомогательных задач (2.37) и (2.64). Для решений задачи (2.37) имеем (см. (2.45))

$$\widetilde{\varphi}_k := \gamma_k \widetilde{T}_k \psi_k = \widetilde{C}_k \psi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \ \ \psi_k = \widetilde{C}_k^{-1} \widetilde{\varphi}_k, \tag{2.132}$$

где $\widetilde{C}_k$ — оператор гильбертовой пары $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$ (лемма 2.6, см. также (2.82) – (2.85)). Для решений задачи (2.64) соответственно получаем

$$\varphi_k := w|_\Gamma = C \rho_k^* \psi_k, \tag{2.133}$$

где C — оператор Стеклова задачи Неймана (2.86), примененный к элементу $\rho_k^* \psi_k =: \ \widetilde{\psi}_k$ (см. (2.100), (2.101)). Отсюда получаем связи

$$\rho_k^* \psi_k = C^{-1} \varphi_k, \ \ \psi_k = \omega_k^* C^{-1} \varphi_k. \tag{2.134}$$

Из (2.133), (2.134) следует, что элементы $\widetilde{\varphi}_k$ и φ_k (и соответственно $\widehat{\varphi}_k$ и φ_k, см. (2.113)), образующие подпространства $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, связаны соотношениями

$$\widetilde{\varphi}_k := \widetilde{C}_k \omega_k^* C^{-1} \varphi_k, \ \ \varphi_k = C \rho_k^* \widetilde{C}_k^{-1} \widetilde{\varphi}_k, \ \ k = \overline{1,q}. \tag{2.135}$$

Таким образом, пространства $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ изоморфны, т.е. между элементами этих пространств имеются взаимно однозначные и взаимно непрерывные отображения, описываемые формулами (2.135). Отсюда, в силу сказанного выше, следуют также свойства изоморфности между пространствами $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$, а также между $\widehat{H}^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$. □

Доказанная теорема, вместе с леммой 2.9 и теоремами 2.3 и 2.6, показывают, что вид изоморфизма пространства $H^1(\Omega)$ при решении смешанных краевых задач следует выбирать, исходя из вида краевых условий на отдельных частях Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$. Ниже это соображение будет принято во внимание.

3. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм

До сих пор рассматривалась ситуация, когда имеется тройка гильбертовых пространств E, F, G и оператор следа γ, связанные условиями (1.8) – (1.10), и для этих объектов имеет место формула Грина (1.14). Однако в приложениях часто возникает ситуация (несимметричный случай), когда вместо скалярного произведения в пространстве F исходным является полуторалинейная форма $\Phi(\eta, u)$, $\eta, u \in F$, связанная с нормой в пространстве F естественными соотношениями (см. ниже (3.2) и (3.13)). Оказывается, и в этом случае можно доказать существование абстрактной формулы Грина, где вместо скалярного произведения $(\eta, u)_F$ стоит соответствующая форма $\Phi(\eta, u)$.

3.1. **Полуторалинейные ограниченные формы.** Рассмотрим функцию $\Phi(\eta, u) : F \times F \to \mathbb{C}$, определенную на комплексном гильбертовом пространстве F. Ее называют *полуторалинейной формой*, если она линейна по η и антилинейна по u, т.е.

$$\begin{aligned} \Phi(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, u) &= c_1\Phi(\eta_1, u) + c_2\Phi(\eta_2, u), \\ \Phi(\eta, c_1u_1 + c_2u_2) &= \overline{c}_1\Phi(\eta, u_1) + \overline{c}_2\Phi(\eta, u_2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Простейшим примером полуторалинейной формы является скалярное произведение $(\eta, u)_F$.

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на F, если

$$|\Phi(\eta, u)| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F, \quad \forall \eta, u \in F, \quad c_1 > 0. \tag{3.2}$$

Будем считать далее, что имеется гильбертова пара пространств $(F; E)$, а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*. \tag{3.3}$$

Нетрудно установить, что каждой форме $\Phi(\eta, u)$ однозначно отвечает линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$, с помощью которого форма $\Phi(\eta, u)$ допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.4}$$

В самом деле, в силу (3.2) форма $\Phi(\eta, u)$ является ограниченным линейным функционалом в пространстве F, а потому ее можно представить в виде

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, u_* \rangle_E, \quad \forall \eta \in F. \tag{3.5}$$

При этом элемент $u_* \in F^*$ однозначно находится по элементу $u \in F$.

Вводя оператор $A : F \to F^*$ по закону

$$Au := u_*, \tag{3.6}$$

приходим к выводу, что имеет место представление (3.4). При этом в силу (3.2) имеем

$$|\langle \eta, Au \rangle_E| \leqslant c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F, \tag{3.7}$$

откуда следует, что

$$\|Au\|_{F^*} \leqslant c_1 \|u\|_F \implies \|A\|_{F \to F^*} \leqslant c_1, \tag{3.8}$$

т.е. оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ ограничен.

Очевидно, имеет место и обратное утверждение: каждый линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$ однозначно определяет форму $\Phi(\eta, u)$ по закону (3.4), и для этой формы выполнено неравенство (3.2) с константой $c_1 := \|A\|_{F \to F^*}$. Таким образом, между ограниченными формами и их операторами имеет место взаимно однозначное соответствие.

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)} \tag{3.9}$$

называется *сопряженной* к форме $\Phi(\eta, u)$. Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u), \quad \forall \eta, u \in F, \tag{3.10}$$

то форма $\Phi(\eta, u)$ называется *эрмитовой*, или *симметрической*. Сопряженной форме $\Phi^*(\eta, u)$ однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор $A^* : F \to F^*$:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A^* u \rangle_E, \tag{3.11}$$

а эрмитовой (симметрической) форме отвечает *самосопряженный* оператор (действующий из F в F^*):

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E = \overline{\langle u, A\eta \rangle}_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.12}$$

3.2. **Равномерно аккретивные формы.** Назовем форму $\Phi(\eta, u)$ и отвечающий ей оператор A *равномерно аккретивными* в пространстве F, если

$$\operatorname{Re} \Phi(u, u) = \operatorname{Re} \langle u, Au \rangle_E \geqslant c_2 \|u\|_F^2, \quad c_2 > 0, \quad \forall u \in F. \tag{3.13}$$

(Это соотношение иногда называют также *неравенством Гординга*.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u, u)| \geqslant c_2 \|u\|_F^2, \tag{3.14}$$

поскольку $|\Phi(u,u)| \geqslant \operatorname{Re}\Phi(u,u)$.

Лемма 3.1. *Ограниченная равномерно аккретивная форма $\Phi(\eta,u)$ может быть представлена через скалярное произведение в F в виде*

$$\Phi(\eta,u) = (Q\eta,u)_F = (\eta,Q^*u)_F, \quad \forall \eta,u \in F, \tag{3.15}$$

где Q — линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор.

Доказательство. Снова заметим, что при фиксированном $u \in F$ величина $\Phi(\eta,u)$ является линейным по η функционалом в F и потому представима в виде

$$\Phi(\eta,u) = (\eta,w)_F, \quad w \in F, \tag{3.16}$$

при этом

$$\|w\|_F \leqslant c_1\|u\|_F, \tag{3.17}$$

в силу чего элемент w определяется однозначно. Положив $w = Q^*u$, придем к представлению (3.15), причем в этом представлении $Q^* : F \to F$, а потому и Q — ограниченные операторы:

$$\|Q^*\| = \|Q\| \leqslant c_1. \tag{3.18}$$

Принимая в (3.16) $\eta = u$, из (3.14), (3.17) получаем

$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant |\Phi(u,u)| = |(u,Q^*u)_F| = |(u,w)_F| \leqslant \|u\|_F \cdot \|w\|_F \leqslant c_1\|u\|_F^2. \tag{3.19}$$

Отсюда при $u \neq 0$ имеем

$$c_2\|u\|_F \leqslant \|w\|_F = \|Q^*u\|_F \leqslant c_1\|u\|_F. \tag{3.20}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$c_2\|u\|_F \leqslant \|Qu\|_F \leqslant c_1\|u\|_F. \tag{3.21}$$

Из (3.20) следует, что $\ker Q^* = \{0\}$, а потому, в силу разложения

$$F = \mathcal{R}(Q) \oplus \ker Q^*, \tag{3.22}$$

приходим к выводу, что область значений оператора Q есть все пространство. Тогда из левого неравенства (3.21) следует, что оператор Q имеет ограниченный обратный и

$$\|Q^{-1}\| \leqslant c_2^{-1}. \tag{3.23}$$

□

Далее понадобится еще одно известное утверждение.

Лемма 3.2. (Лакс, Мильграм, см., например, [15], с. 43). *Ограниченный на F равномерно аккретивный оператор $A : F \to F^*$, отвечающий форме $\Phi(\eta,u)$, имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1} : F^* \to F$.*

Доказательство. Аналогично (3.19) и с учетом (3.4) имеем

$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant \operatorname{Re}\Phi(u,u) \leqslant |\Phi(u,u)| = |\langle u, Au\rangle_E| \leqslant \|u\|_F \cdot \|Au\|_{F^*}, \tag{3.24}$$

откуда при $u \neq 0$ следует, что

$$\|u\|_F \leqslant c_2^{-1}\|Au\|_{F^*}, \quad \forall u \in F. \tag{3.25}$$

Следовательно, $\ker A = \{0\}$. Аналогично устанавливаем, что $\ker A^* = \{0\}$. Так как $A : F \to F^*$ ограничен (см. (3.8)), а потому замкнут, снова, как и в лемме 3.1, получаем, что $\mathcal{R}(A) = F^*$. Значит, обратный оператор существует, определен на всем F^* и потому (по теореме Банаха) ограничен:

$$\|A^{-1}\|_{F^* \to F} \leqslant c_2^{-1}. \tag{3.26}$$

□

3.3. **О представлении несимметрической равномерно аккретивной формы.** Доказанные выше факты позволяют установить для ограниченной несимметрической равномерно аккретивной формы $\Phi(\eta, u)$ структуру отвечающего ей оператора A. Перейдем к изложению этого круга вопросов.

Итак, пусть несимметрическая форма $\Phi(\eta, u)$ удовлетворяет условиям (3.2) и (3.13), т.е. является ограниченной и равномерно аккретивной в пространстве F, причем $\Phi(\eta, u) \neq \Phi^*(\eta, u)$.

Введем в рассмотрение симметрические формы

$$\begin{aligned} \Phi_R(\eta,u) &:= \frac{1}{2}\Big[\Phi(\eta,u) + \Phi^*(\eta,u)\Big] = \Phi_R^*(\eta,u), \\ \Phi_I(\eta,u) &:= \frac{1}{2i}\Big[\Phi(\eta,u) - \Phi^*(\eta,u)\Big] = \Phi_I^*(\eta,u), \end{aligned} \tag{3.27}$$

называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы $\Phi(\eta, u)$, так как

$$\Phi(\eta,u) = \Phi_R(\eta,u) + i\Phi_I(\eta,u). \tag{3.28}$$

Для $\Phi_R(\eta, u)$ из (3.13), (3.2) имеем неравенства

$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant \Phi_R(u,u) =: \|u\|_{F_0}^2 \leqslant c_1\|u\|_F^2, \quad \forall u \in F. \tag{3.29}$$

Отсюда следует, что в пространстве F можно ввести новую норму, эквивалентную норме $\|u\|_F$, а также соответствующее скалярное произведение. Таким образом, теперь имеем $F = F_0$, а норма в F_0 определена по закону (3.29).

Возникает гильбертова пара пространств $(F_0; E)$. Обозначим через A_0 оператор этой гильбертовой пары. Тогда в шкале пространств E^α, построенной по этому оператору, будем иметь

$$E = E^0, \quad F_0 = E^{1/2} = \mathcal{D}(A_0), \quad F_0^* = E^{-1/2} = \mathcal{R}(A_0), \tag{3.30}$$

$$A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(F_0; E), \quad A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(E; F_0^*), \tag{3.31}$$

$$(\eta, u)_{F_0} = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0 u\rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{3.32}$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств мнимой части формы $\Phi(\eta, u)$. Из неравенств (3.2), (3.29) имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_I(\eta,u)| \leqslant |\Phi(\eta,u)| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \leqslant c_1 c_2^{-1}\|\eta\|_{F_0} \cdot \|u\|_{F_0} = \\ = c_1 c_2^{-1}\|A_0^{1/2}\eta\|_E \cdot \|A_0^{1/2}u\|_E, \end{aligned} \tag{3.33}$$

т.е. формы $\Phi_I(\eta, u)$ и $\Phi(\eta, u)$ ограничены сверху в пространстве F_0.

Из (3.33) следует, что форму $\Phi_I(\eta, u)$ можно рассматривать как функцию от аргументов $A_0^{1/2}\eta$ и $A_0^{1/2}u$ в пространстве E:

$$\Phi_I(\eta,u) =: \varphi(\eta', u'), \ \ \eta' = A_0^{1/2}\eta \in E, \ \ u' = A_0^{1/2}u \in E, \tag{3.34}$$

причем эта новая форма ограничена на E. Поэтому к форме $\varphi(\eta', u')$ применима лемма 3.1 в следующей редакции. Во-первых, вместо F здесь следует взять пространство E. Во-вторых, необходимо использовать то утверждение леммы, где учитывается лишь ограниченность, но не равномерная аккретивность формы. В-третьих, следует учесть, что $\Phi_I(\eta, u)$, а потому и $\varphi(\eta', u')$ — симметрические формы.

Тогда по лемме 3.1 будем иметь

$$\varphi(\eta', u') = (Q\eta', u')_E = (\eta', Qu')_E, \ \ \forall \eta, u \in E, \tag{3.35}$$

где уже учтено, что оператор $Q \in \mathcal{L}(E)$ является самосопряженным в E. Таким образом, из (3.34), (3.35) имеем представление

$$\Phi_I(\eta,u) =: (QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, QA_0^{1/2}u)_E, \ \ \forall \eta, u \in F_0. \tag{3.36}$$

Окончательно, с учетом (3.28), (3.29) и (3.36), получаем

$$\begin{aligned} &\Phi(\eta,u) := (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E + i(QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I+iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, (I-iQ)A_0^{1/2}u)_E = \\ &= \langle \eta, A_0^{1/2}(I-iQ)A_0^{1/2}u\rangle_E, \ \ \forall \eta, u \in F_0 = F. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Сравнивая (3.37) с формулой (3.4), приходим к выводу, что оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ имеет вид

$$A = A_0^{1/2}(I-iQ)A_0^{1/2}, \ \ A \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \tag{3.38}$$

Так как $Q = Q^*$ в пространстве E, а оператор $A_0^{1/2}$ ограниченно обратим (из F_0^* в E и из E в F_0), то оператор A имеет ограниченный обратный

$$A^{-1} = A_0^{-1/2}(I-iQ)^{-1}A_0^{-1/2}, \ \ A^{-1} \in \mathcal{L}(F_0^*, F_0). \tag{3.39}$$

Выкладки и выводы, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, можно повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$. Тогда вместо (3.37) будем иметь

$$\begin{aligned} &\Phi^*(\eta,u) = \Phi_R(\eta,u) - i\Phi_I(\eta,u) = ((I-iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= (A_0^{1/2}\eta, (I+iQ)A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0^{1/2}(I+iQ)A_0^{1/2}u\rangle_E, \ \forall \eta, u \in F = F_0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Отсюда с учетом определения (3.11) получаем, что форме $\Phi^*(\eta,u)$ отвечает сопряженный к (3.38) оператор

$$A^* = A_0^{1/2}(I+iQ)A_0^{1/2}, \ \ A^* \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \tag{3.41}$$

Заметим также, что при $Q=0$, т.е. в симметрическом случае, из (3.38), (3.41) следует, что

$$\Phi(\eta,u) = \Phi^*(\eta,u) = \Phi_R(\eta,u) = \langle \eta, A_0 u\rangle_E, \ \ \forall \eta, u \in F_0, \tag{3.42}$$

где $A_0 : F_0 \to F_0^*$ — самосопряженный оператор в смысле определения (3.12).

3.4. **Абстрактные формулы Грина для полуторалинейных форм.** Представление (3.38) для оператора A формы $\Phi(\eta,u)$ и соответствующего оператора A^* из (3.41) для сопряженной формы $\Phi^*(\eta,u)$ позволяют получить обобщение обсуждавшгося в п. 1.1 варианта, когда имелась тройка пространств E, F и G, а также оператор следа γ. Именно, теперь можно рассмотреть случай, когда вместо пространства F с введенным на нем скалярным произведением имеется форма $\Phi(\eta,u)$, удовлетворяющая в пространстве F общим условиям (3.2), (3.13). Соответствующую формулу Грина, существование которой далее будет установлено, назовем абстрактной формулой Грина для полуторалинейной формы $\Phi(\eta,u)$.

Итак, пусть выполнены условия (1.8) – (1.10), а также условия (3.2), (3.13). Тогда для пространства $F_0 = F$ с нормой (3.29) и соответствующим скалярным произведением

$$(\eta,u)_{F_0} := \Phi_R(\eta,u), \tag{3.43}$$

пространств E, G и оператора следа γ выполнены условия теоремы 1.1, и потому имеет место абстрактная формула Грина вида

$$\Phi_R(\eta,u) = \langle \eta, L_0 u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_0 u\rangle_G, \ \ \forall \eta, u \in F_0, \tag{3.44}$$

$$F_0 = N_0 \oplus M_0, \ \ N_0 = \ker\gamma, \ \ L_0 u := L_{0,N_0} u + L_{0,M_0} u, \tag{3.45}$$

$$\partial_0 u = \partial_{N_0} u_{N_0} + \partial_{M_0} u_{M_0}, \ \ \forall u = u_{N_0} + u_{M_0} \in F_0, \ \ \partial_0 u \in (G_+)^*, \ \ L_0 u \in (F_0)^*. \tag{3.46}$$

Здесь $L_0 u$ — абстрактное дифференциальное выражение, $\partial_0 u$ — абстрактный оператор производной по внешней нормали, который однозначно определяется по $u \in F_0$ и выбранному $L_0 u \in F_0^*$.

Пусть $\eta = \eta_{N_0} + \eta_{M_0}$, $u = u_{N_0} + u_{M_0}$ — произвольные элементы из F_0, представленные через их проекции на взаимно ортогональные подпространства N_0 и M_0. Тогда из (3.44) получаем формулы (являющиеся аналогами формул (1.25), (1.26), а также (1.33), (1.34)) следующего вида

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{N_0}) = \langle \eta_{N_0}, L_{0,N_0} u_{N_0}\rangle_E, \quad L_{0,N_0} u_{N_0} = P_{N_0}^* A_0 u_{N_0}, \tag{3.47}$$

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{M_0}) = 0 = \langle \eta_{N_0}, L_{0,N_0} u_{M_0}\rangle_E, \quad L_{0,N_0} u_{M_0} = 0, \tag{3.48}$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{M_0}) = \langle \gamma_{M_0}\eta_{M_0}, \partial_{M_0} u_{M_0}\rangle_G, \quad L_{0,M_0} u_{M_0} = 0, \tag{3.49}$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{N_0}) = 0 = \langle \eta_{M_0}, L_{0,M_0} u_{N_0}\rangle_E + \langle \gamma_{M_0}\eta_{M_0}, \partial_{N_0} u_{N_0}\rangle_G. \tag{3.50}$$

Здесь A_0 — оператор гильбертовой пары $(F_0; E)$, P_{N_0} — ортопроектор на $N_0 = \ker\gamma$; $L_{0,M_0}u_{N_0}$ — функционал, который, вообще говоря, выбирается произвольно, $L_{0,M_0} : N_0 \to M_0^* := A_0 M_0$; при этом соотношение (3.49) служит определением функционала $\partial_{M_0} u_{M_0}$, а (3.50) — функционала $\partial_{N_0} u_{N_0}$ (через $L_{0,M_0} u_{N_0}$).

Наша цель — получить такую формулу Грина для формы $\Phi(\eta, u)$, которая бы имела вид, близкий к (3.44), и при $Q = 0$ (когда $\Phi(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u)$) переходила в формулу (3.44). Иными словами, желательно получить формулу с непрерывной зависимостью от $Q = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.

По-видимому, тогда искомая формула Грина должна иметь вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \ \ \forall \eta, u \in F_0, \tag{3.51}$$

где Lu и ∂u — абстрактные дифференциальное выражение и производная по внешней нормали (конормали), определяемые по исходным данным и при $Q \to 0$ (в $\mathcal{L}(E)$) переходящие в $L_0 u$ и $\partial_0 u$ соответственно (см. (3.45), (3.46)).

Отметим еще одно важное обстоятельство: для несимметричной формы $\Phi(\eta, u)$ теперь следует использовать не ортогональное, а прямое разложение пространства F_0, т.е.

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N (\dot{+}) M, \ \ N = \ker\gamma, \ \ M \neq M_0. \tag{3.52}$$

Здесь подпространство M, очевидно, снова обладает тем свойством, что между элементами $u \in M$ и $\gamma u \in G_+$ по-прежнему, как и в симметрическом случае, имеет место взаимно однозначное соответствие, поскольку $\ker\gamma = N$.

Проведем далее построения, близкие к тем, которые уже были использованы при доказательстве теоремы 1.1 применительно к форме $(\eta, u)_F$, однако теперь с учетом представления (3.37), (3.38) для $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть подпространства N и M в прямом разложении F_0 (см. (3.52)) уже выбраны, а P_N и $P_M = I - P_N$ — соответствующие проекторы на эти подпространства. Рассмотрим при любом $u \in F_0$ функционал

$$\begin{aligned} &\Phi(\eta_N, u) = \langle \eta_N, Au\rangle_E = \langle P_N\eta_N, Au\rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au\rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u\rangle_E, \\ &L_N u := P_N^* Au, \quad A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}, \quad \eta_N = P_N\eta \in N, \end{aligned} \tag{3.53}$$

где $A : F_0 \to F_0^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F_0^* \to N^*$ — ограниченный проектор. Из (3.53) приходим к формулам

$$\Phi(\eta_N, u_N) = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E, \quad \eta_N = P_N\eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F_0, \tag{3.54}$$

$$\Phi(\eta_N, u_M) = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_E. \tag{3.55}$$

Введенный функционал $L_N u \in N^*$ задан на подпространстве N. Расширим его на все пространство $F_0 = N(\dot{+})M$ до функционала Lu и будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F_0 \to N^*, \quad L_M : F \to M^*. \tag{3.56}$$

При этом потребуем (как и при доказательстве теоремы 1.1), чтобы

$$Lu_M = L_N u_M + L_M u_M = 0, \quad \forall u = u_M \in M. \tag{3.57}$$

Введем теперь функционал

$$\Psi_u(\eta) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0, \tag{3.58}$$

который в силу (3.53) принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+. Как и при доказательстве теоремы 1.1, будем считать, что правая часть в (3.58) равна сумме функционалов на M и G_+:

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u \rangle_E = \langle \eta, L_M u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F, \tag{3.59}$$

$$L_M u = P_M^* L_M u \in M^* \subset F_0^*, \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad \gamma\eta = \gamma_M \eta_M \in G_+. \tag{3.60}$$

Из (3.59) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \eta_M, L_M u_M \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G, \tag{3.61}$$

где учтено, что $\langle \eta_M, L_N u_M \rangle_E = 0$ в силу определения $L_N u$ из (3.53) и свойства $P_M P_N = 0$. Далее, при $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (3.59) получаем аналогично

$$\Phi(\eta_M, u_N) = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G. \tag{3.62}$$

До сих пор выбор подпространств N и M из прямого разложения (3.52) не был сделан. Будем далее считать, что эти подпространства таковы, что выполнено условие

$$\Phi(\eta_N, u_M) = 0, \quad \forall \eta_N = P_N \eta \in N, \quad \forall u_M = P_M u \in M. \tag{3.63}$$

Тогда из (3.55) получаем, что в силу плотности N в E должно иметь место свойство

$$L_N u_M = 0, \quad u_M = P_M u \in M, \tag{3.64}$$

которое вместе с (3.57) дает также свойство

$$L_M u_M = 0, \quad u_M \in M. \tag{3.65}$$

Поэтому из (3.56) имеем формулу

$$Lu = L_N u_N + L_M u_N = Lu_N, \tag{3.66}$$

определяющую закон действия абстрактного дифференциального выражения $Lu \in F_0^*$, учитывающий свойство (3.57).

С учетом (3.65) формула (3.61) приводит к соотношению

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G, \tag{3.67}$$

служащему определением абстрактной производной по конормали из подпространства M. Заметим, что это определение не зависит от выбора функционала $L_M u$ в (3.59). Далее, формулой (3.62) определяется производная по конормали из подпространства N, т.е. функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$. Очевидно, этот функционал зависит от выбора функционала $L_M u_N \in M^*$.

Итак, если выполнено условие (3.63), то соотношения (3.54), (3.55), (3.67), (3.62) являются обобщением соотношений (3.47) – (3.50) соответственно и при $Q \to 0$ переходят в них, так как $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$, а проекторы P_N и P_M, как будет установлено ниже, переходят в ортопроекторы P_{N_0} и P_{M_0} (см. (3.52)).

Покажем, что условие (3.63) выполнимо, и получим соответствующие формулы для проекторов P_M и P_N.

Для любого $\eta \in F_0$ имеем

$$\eta = P_{N_0}\eta + P_{M_0}\eta = P_N\eta + P_M\eta = \eta_N + \eta_M. \tag{3.68}$$

Здесь $P_N\eta \in N = N_0$ и потому $P_{N_0}P_N\eta = P_N u$. Аналогично устанавливаем, что $P_{M_0}P_M u = P_{M_0}u$, $\forall u \in F_0$, и тогда

$$P_{M_0}P_M = P_{M_0} \quad \Longleftrightarrow \quad P_N = P_{N_0}P_N. \tag{3.69}$$

Воспользуемся теперь формулами (3.37) и представим $\Phi(\eta, u)$ в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\eta, u) &= ((I + iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}(I + iA_0^{-1/2}QA_0^{1/2})\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I + iQ_0)\eta, u)_{F_0} = (\eta, (I - iQ_0)u)_{F_0}, \ \ \forall \eta, u \in F_0.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Легко проверить, что здесь

$$Q_0 := A_0^{-1/2}QA_0^{1/2} = Q_0^* \in \mathcal{L}(F_0), \tag{3.71}$$

т.е. является ограниченным самосопряженным оператором, действующим в F_0.

В представлении (3.70) условие (3.63) переписывается в виде

$$(P_N\eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0, \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{3.72}$$

Используя второе соотношение (3.69), отсюда имеем

$$(P_{N_0}P_N\eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = (P_{N_0}P_N\eta, P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0.$$

Значит, элемент $P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u$ принадлежит подпространству $N_0 = N$ и одновременно ортогонален ему при любом $u \in F_0$. Поэтому

$$P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u = 0, \ \ \forall u \in F_0. \tag{3.73}$$

Представляя $P_M u$ в виде суммы его ортогональных проекций на N_0 и M_0, имеем из (3.73), с учетом первой формулы (3.69) и свойства $P_{N_0}P_{M_0} = 0$,

$$\begin{aligned}&P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0}P_M u + P_{M_0}P_M u) = P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0}P_M u + P_{M_0}u) = \\ &= (I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})P_{N_0}P_M u - i(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u),\end{aligned} \tag{3.74}$$

где I_{N_0} — единичный оператор в N_0.

Поскольку здесь оператор $P_{N_0}Q_0P_{N_0}$ самосопряжен и действует в N_0, то существует ограниченный обратный оператор $(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}$, и из (3.74) получаем, что

$$P_{N_0}P_M u = i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \;\; \forall u \in F_0.$$

Окончательно имеем

$$P_M u = P_{M_0}u + i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \;\; \forall u \in F_0, \tag{3.75}$$

$$P_N u = P_{N_0}u - i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \;\; \forall u \in F_0. \tag{3.76}$$

Формулы (3.75), (3.76) дают связь проекторов P_M и P_N с ортопроекторами P_{N_0} и P_{M_0}. В симметрическом случае, т.е. при $Q = 0 \iff Q_0 = 0$, они переходят в ожидаемые тривиальные соотношения, когда $N = N_0$, $M = M_0$, $P_N = P_{N_0}$, $P_M = P_{M_0}$.

Можно проверить, что для операторов P_M и P_N из (3.75), (3.76) выполнены свойства $P_M^2 = P_M$, $P_N^2 = P_N$, т.е. эти ограниченные операторы действительно являются проекторами.

Таким образом, при выборе абстрактного дифференциального выражения Lu по формулам (3.56), (3.57), (3.66) и проекторов P_M и P_N в виде (3.75), (3.76) справедливы соотношения (3.54), (3.55), (3.67), (3.62) причем $Lu_M = 0$ и выполнено свойство (3.63).

Введем еще, как и в п. 1.1, абстрактную производную по конормали ∂u по закону

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N \in (G_+)^*, \quad u = u_N + u_M \in F_0. \tag{3.77}$$

Итогом проведенных построений является следующее утверждение.

Теорема 3.1. (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм). *Пусть выполнены условия* (1.8) – (1.10) *для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия* (3.2), (3.13) *для формы* $\Phi(\eta, u)$. *Тогда имеет место следующая формула Грина:*

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \tag{3.78}$$

$$Lu = L_N u + L_M u \in F_0^*, \quad Lu = Lu_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M \in (G_+)^*. \tag{3.79}$$

При этом ∂u *определяется однозначно по элементам* $u \in F_0$ *и* $Lu \in F_0^*$.

Доказательство. После проведенных выше построений для доказательства теоремы достаточно почти дословно повторить разделы 5) и 6) доказательства теоремы 1.1 с заменой $(\eta, u)_F$ на $\Phi(\eta, u)$. □

Замечание 3.1. Относительно формулы Грина (3.78), (3.79) справедливы утверждения, высказанные в замечаниях 1.1 и 1.2 : наряду с (3.78) можно получить семейство формул Грина вида

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0, \tag{3.80}$$

где α — произвольная константа, а $L(\alpha)u$ и $\partial(\alpha)u$ по-прежнему выражаются формулами (1.42), (1.43). Однако в приложениях Lu, как правило, задано обычным дифференциальным выражением, полученным из рассмотрения физического или иного смысла задачи. □

Построения, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, легко аналогично повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$ и отвечающего ей оператора $A^* = A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}$. Тогда вместо (3.70) будем иметь

$$\Phi^*(\eta, u) = ((I - iQ_0)\eta, u)_{F_0}, \quad \forall \eta, u \in F_0, \tag{3.81}$$

а пространство F_0 допускает прямое разложение

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N_*(\dot{+})M_*, \quad N_* = N_0, \;\; M_* \neq M_0. \tag{3.82}$$

При этом вместо (3.75), (3.76) для проекторов P_{M_*} и P_{N_*} на подпространства M_* и N_* соответственно приходим к формулам

$$P_{M_*}u = P_{M_0}u - i(I_{N_0} + iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \quad \forall u \in F_0, \tag{3.83}$$

$$P_{N_*}u = P_{N_0}u + i(I_{N_0} + iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \quad \forall u \in F_0. \tag{3.84}$$

Далее, абстрактное дифференциальное выражение L_*u, отвечающее форме $\Phi^*(\eta, u)$, определяется по закону, аналогичному (3.79):

$$L_*u := L_{*,N}u + L_{*,M}u \in F_0^*, \quad L_*u = L_*u_{N_*}, \quad L_{*,N}u := (P_{N_*})^*A^*u, \quad u \in F_0, \tag{3.85}$$

а абстрактная производная по конормали — по формуле

$$\partial_*u := \partial_{M_*}u_{M_*} + \partial_{N_*}u_{N_*} \in (G_+)^*. \tag{3.86}$$

Здесь производные по конормали в подпространствах M_* и N_*, т.е функционалы $\partial_{M_*}u_{M_*}$ и $\partial_{N_*}u_{N_*}$, определяются из тождеств, аналогичных (3.67) и (3.62):

$$\Phi^*(\eta_{M_*}, u_{M_*}) = \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{M_*}u_{M_*}\rangle_G, \tag{3.87}$$

$$\Phi^*(\eta_{M_*}, u_{N_*}) = \langle \eta_{M_*}, L_{*,M_*}u_{N_*}\rangle_E + \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{N_*}u_{N_*}\rangle_G. \tag{3.88}$$

Исходя из этих фактов, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.2. (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейной сопряженной формы). *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда имеет место следующая формула Грина:*

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, L_*u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_*u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \tag{3.89}$$

где L_*u и ∂_*u определены формулами (3.85), (3.86). □

Из (3.79), (3.89) и связи $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$, получаем, что

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \overline{\langle u, L_*\eta\rangle}_E + \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta\rangle}_G, \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{3.90}$$

Теорема 3.3. (вторая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм). *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда имеет место следующая абстрактная формула Грина:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \overline{\langle u, L_* \eta \rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial_* \eta \rangle}_G - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{3.91}$$

□

4. Заключительные замечания

Наметим теперь, какие проблемы естественным образом исследуются на основе доказанных теорем о существовании абстрактных формул Грина (3.78), (3.89), (3.91). Все эти проблемы рассматриваются на базе соответствующих формул Грина с уже выбранным дифференциальным выражением Lu (см., например, [20] , с. 237).

4.1. **Абстрактные краевые задачи.** К числу таких задач относятся следующие проблемы.

1°. *Неоднородная задача Неймана для уравнения Пуассона*:

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G). \tag{4.1}$$

Для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f \in F_0^*, \quad \psi \in (G_+)^*, \tag{4.2}$$

а слабое решение выражается формулой

$$u = A^{-1} f + T_M \psi, \tag{4.3}$$

где $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$ — оператор формы $\Phi(\eta, u)$, а $T_M : (G_+)^* \to M \subset F_0$ — оператор вспомогательной задачи

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G). \tag{4.4}$$

2°. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона*:

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = \varphi \quad (\text{в } G). \tag{4.5}$$

Здесь при выполнении необходимых и достаточных условий

$$f \in N^*, \quad \varphi \in G_+, \tag{4.6}$$

задача имеет слабое решение

$$u = A_{00}^{-1} f + \gamma_M^{-1} \varphi, \tag{4.7}$$

где $A_{00} = P_N^* A P_N : N \to N^*$ — оператор, отвечающий сужению формы $\Phi(\eta, u)$ на подпространство N (для η и u), а γ_M — сужение оператора следа γ на M.

3°. *Третья краевая задача (задача Ньютона–Неймана)*:

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha \gamma u = \psi \quad (\text{в } G), \tag{4.8}$$

где $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ — неотрицательный оператор, т.е.

$$\langle \varphi, \alpha\varphi \rangle_G \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{4.9}$$

Эта задача исследуется так же, как и 1°, однако взамен нормы $\|u\|^2_{F_0} = \Phi_R(u, u)$ здесь используется эквивалентная норма

$$\|u\|^2_{eq,F_0} := \|u\|^2_{F_0} + \langle \gamma u, \alpha\gamma u \rangle_G. \tag{4.10}$$

Если выполнены условия (4.2), то задача (4.8) имеет единственное слабое решение $u \in F_0$, выражаемое формулой вида (4.3) (с измененными A и T_M).

4.2. **Абстрактные смешанные краевые задачи.** Теорема 2.4, доказывающая существование абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач в случае симметрической формы — скалярного произведения в пространстве F, справедлива и в случае несимметрической формы $\Phi(\eta, u)$, если выполнены предположения (2.59) – (2.61). Такая формула Грина теперь имеет вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{4.11}$$

На ее основе изучаются абстрактные смешанные краевые задачи, когда на разных частях "границы", т.е. в граничном пространстве G, задаются различные краевые условия типа Дирихле, Неймана либо Ньютона–Неймана. В симметрическом случае и для классической тройки гильбертовых пространств подобный подход описан в п. 2.4.

Здесь отметим еще раз, что в смешанных краевых задачах выбор пространства, в котором ищется слабое решение, в значительной мере определяется характером краевых условий, заданных на различных частях (подпространствах) границы (граничного пространства).

4.3. **Спектральные проблемы и абстрактная формула Грина.** На основе абстрактной формулы Грина (3.78), а также формулы (4.11) для смешанных краевых задач исследуются спектральные проблемы, возникающие в приложениях. Перечислим кратко некоторые из них. Отметим, что рассмотрение этих проблем приводит к изучению некоторых нестандартных спектральных задач, в частности, несамосопряженных (см. [5], [8]).

1°. *Задача Дирихле, Неймана, Ньютона*:

Это задачи соответственно вида

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{в } G); \tag{4.12}$$

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u = 0 \quad (\text{в } G); \tag{4.13}$$

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = 0 \quad (\text{в } G). \tag{4.14}$$

2°. *Задача Стеклова*:

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial w + \alpha\gamma w = \lambda\gamma w \quad (\text{в } G). \tag{4.15}$$

3°. *Задача Стефана*:

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \lambda\gamma u \quad (\text{в } G). \tag{4.16}$$

4°. *Задача М. Аграновича*:

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \mu\gamma u \quad (\text{в } G). \tag{4.17}$$

Здесь один из параметров (λ или μ) является спектральным, а другой — фиксированным.

5°. *Задача С. Крейна*:

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \lambda(\partial u + \alpha\gamma u) = \gamma u \quad (\text{в } G). \tag{4.18}$$

6°. *Задача Чуешова*:

$$Lu + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \lambda\gamma u \quad (\text{в } G). \tag{4.19}$$

4.4. **Спектральные задачи сопряжения.** Подробное изучение этого класса задач для конкретных приложений проведено М.С. Аграновичем с его учениками и коллегами (см. например, [25]). В абстрактной форме такие проблемы обсуждаются в [8].

Приведем краткое словесное описание постановки спектральных задач сопряжения. Пусть имеется набор пространств E_j, F_j и G_j и операторов следа γ_j, $j = \overline{1,q}$, таких, что для каждого набора справедлива абстрактная формула Грина в форме (1.14), т.е.

$$\langle \eta_j, L_j u_j \rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j \eta_j, \partial_j u_j \rangle_{G_j}, \quad \forall \eta_j, u_j \in F_j, \quad j = \overline{1,q}. \tag{4.20}$$

Будем считать также, что каждое граничное пространство G_j является ортогональной суммой пространств, $G_j = \oplus_{kl} G_{jkl}$, причем каждое G_{jkl} имеет оснащение:

$$(G_+)_{jkl} \hookrightarrow G_{jkl} \hookrightarrow (G_+)^*_{jkl}.$$

При этом оснащения совпадают при перемене мест индексов k и j.

В этих обозначениях спектральная задача сопряжения формулируется следующим образом. Необходимо найти набор $u = (u_1, \dots, u_q)$ элементов $u_j \in F_j$ из уравнений

$$L_j u_j + \lambda u_j = 0 \quad (\text{в } E_j), \quad j = \overline{1,q}, \tag{4.21}$$

а также "краевых" условий сопряжения, которые разбиваются на следующие категории.

При $k > j$:

1°. Это условия первой задачи сопряжения с параметром μ, когда приравниваются следы на G_{jkl}, а сумма производных по нормали равна спектральному параметру μ, умноженному на след элемента u_j либо u_k.

2°. Аналогичное условие без параметра μ (т.е. $\mu = 0$).

3°. Условия второй задачи сопряжения (когда приравнивается нулю сумма производных по нормали) с параметром μ.

4°. Условия второй задачи сопряжения без параметра μ.

При $k = j$ имеются три типа условий:

1°. Условие Ньютона–Неймана с параметром μ.

2°. Условие Ньютона–Неймана без параметра ($\mu = 0$).

3°. Однородное условие Дирихле.

Оказывается, для таких задач можно доказать существование формулы Грина в форме (1.9) применительно к некоторому подпространству F_0 пространства $F = \oplus_{k=1}^{q} F_j$, учитывающему ”главные” краевые условия. На этой основе проблему можно снова свести к задаче вида (4.17) и исследовать ее уже разработанными методами.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[2] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384 с.

[3] Aubin J.-P. Abstract Boundary-Value Operators and Their Adjoint // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1970. – Vol. 43. – pp. 1 – 33.

[4] Showalter R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations // Electronic Journal of Differential Equations. – 1994. – Vol. 1. – 214 p.

[5] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский матем. вестник. – 2004. – Т. 1. – № 1. – С. 69 – 97.

[6] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – 2004. – Т. 2. – С. 52 – 80.

[7] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2007. – Т. 20(59). – № 2. – С. 3 – 12.

[8] Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – Т. 34. – С. 5 – 44. (Translated: V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky, P.A. Starkov. Multicomponent Conjugation (Transmission) Problems and Auxillary Abstract Boundary-Value Problems // Journal of Mathematical Sciences (Springer). – 2010. – Vol. 170, Issue 2. – pp. 131 – 172.)

[9] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[10] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[11] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

[12] Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

[13] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[14] Gagliardo E. Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in „n" variabili //Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1957. – Vol. 27. – pp. 284 – 305.

[15] McLean W. Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. – Cambridge University Press, 2000. – 358 p.

[16] Agranovich M.S. Remarks on Potential Spaces and Besov Spaces in a Lipschitz Domain and on Whitney Arrays on its Boundary // Russian Journal of Math. Physics. – 2008. – Vol. 15. – № 2. – pp. 146 – 155.

[17] Агранович М.С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С. 3 – 78.

[18] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.

[19] Rychkov V.S. On Restrictions and Extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin Spaces with Respect to Lipschitz Domains // Journal of London Math. Soc. – 1999. – Vol. 60(1). – pp. 237 – 257.

[20] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[21] Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Наука, 1994. – 336 с.

[22] Пальцев Б.В. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях // Математический сборник. – 1996. – Т. 187. – № 4. – С. 59 – 116.

[23] Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. – М.: Отдел вычисл. матем. АН СССР, 1983. – 184 с.

[24] Агошков В.И., Лебедев В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1985. – Вып. 2. – С. 173 – 226.

[25] Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. – Wiley-VCH, Berlin, . . . , Toronto, 1999. – 378 p.