МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**Таврический национальный университет
им. В.И. Вернадского**

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**Специальный курс лекций
для студентов специальности "Математика"**

Симферополь
2012

ББК 22.16
К65
УДК 517.9[37+58+83]

Печатается
по решению научно-методического совета
Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
(протокол № 2 от 22.12.2011 г.)

Рецензенты :

Белан Е.П. — д. ф.-м. н., профессор кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Закора Д.А. — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д. ***Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*:** Специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. – 112 с. — На русском языке.

В учебном пособии излагаются основные положения теории линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка в банаховом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами, изучаются задачи Коши для однородного и неоднородного дифференциальных уравнений. Рассматриваются их решения в терминах теории сильно непрерывных полугрупп, в том числе сильные решения ряда проблем линейной гидродинамики.

Изложение теоретических положений сопровождается примерами и упражнениями, рассмотрение которых позволяет полнее усвоить излагаемый учебный материал.

Для студентов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики и прикладной математики.

Оглавление

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для студентов специальностей ”Математика”, а также ”Прикладная математика”, ”Информатика”, ”Теоретическая физика” и рассчитан на знание основных положений курса "Функциональный анализ". Как правило, к его восприятию готовы студенты седьмого–восьмого семестров в университетской системе образования. Читатели должны быть ознакомлены с геометрией гильбертовых и банаховых пространств и теорией линейных ограниченных (и частично неограниченных) операторов, действующих в этих пространствах. Необходимо знать свойства самосопряженных операторов, основную спектральную теорему, понятие резольвенты и сопутствующие вопросы.

Изложение теоретических положений сопровождается упражнениями, которые формулируются в виде утверждений на лекциях, а доказываются самостоятельно либо на практических занятиях.

Глава 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

В дальнейшем буквами E, F, как правило, будут обозначаться банаховы пространства, т.е. полные линейные нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_F$ соответственно. Через $\mathcal{H}$ будем обозначать гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ и соответствующей нормой $\|u\|_{\mathcal{H}} := ((\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})^{1/2}$, $u \in \mathcal{H}$.

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из E в F, обозначается $\mathcal{L}(E,F)$. Если $F = E$, то $\mathcal{L}(E,E) =: \mathcal{L}(E)$. Множество компактных операторов из $\mathcal{L}(E,F)$ будем обозначать $\mathfrak{S}_\infty(E,F)$. Остальные обозначения будут вводиться по ходу изложения материала.

1.1 Введение

1.1.1 О содержании курса

Целью настоящего курса лекций является ознакомление слушателей с теми разделами функционального анализа, которые имеют достаточно широкие приложения и могут быть использованы на практике при качественном, а иногда и количественном изучении всевозможных процессов, происходящих в жизни. Это, в первую очередь, вопросы эволюции сложных систем с бесконечным числом степеней свободы.

В качестве примера рассмотрим малые движения какой-либо гидромеханической системы в окрестности состояния равновесия. Реализацией этой ситуации может быть, например, задача о колебаниях жидкого топлива в баке космической ракеты. Движения жидкости в баке могут повлиять (и влияют) на траекторию движения ракеты и должны учитываться при её проектировании. В частности, весьма важными являются вопросы устойчивости такого движения.

Будем считать, что отклонение рассматриваемой гидродинамической системы характеризуется функцией $u = u(t)$, которая при любом $t \in \mathbb{R}$ является элементом некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ размерности $\dim \mathcal{H} \leqslant \infty$. (Например, в любой момент t элемент $u(t)$ задает поле смещений частиц жидкого топлива в баке ракеты.) Тогда в общем виде закон движения системы может быть записан в виде дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$C\frac{d^2u}{dt^2} + (F+K)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \tag{1.1.1}$$

где в качестве коэффициентов присутствуют линейные операторы, действующие в $\mathcal{H}$, а $f(t)$ характеризует внешнюю нагрузку. Эти операторы имеют отчетливый энергетический либо механический смысл. Так, C есть оператор кинетической энергии со свойствами $C = C^* > 0$, B — оператор потенциальной энергии: $B = B^*$. Если состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, то оператор B положительно определен ($B \gg 0$), в общем случае оператор B ограничен снизу: $B \geqslant \gamma I$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), т.е. $(Bu, u) \geqslant \gamma(u, u)$ $(\forall u \in \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H})$.

Далее, через F в (1.1.1) обозначен оператор диссипации энергии, обычно он обладает свойств**ами** $F = F^* \geqslant 0$. Если на систему действуют кориолисовы силы, то оператор $K \neq 0$ и называется кориолисовым оператором. Он обладает следующими свойствами $K^* = -K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Вместо K посредством формулы $K := iG$ можно ввести гироскопический оператор G, для которого теперь будет $G = G^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Таким образом, естественно возникает задача (1.1.1) об интегрировании дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами, свойства которых приведены выше. Если в начальный момент заданы начальное поле смещений гидромеханической системы и начальное поле скоростей, т.е. выполнены условия

$$u(0) = u^0 \in \mathcal{H}, \quad u'(0) = u^1 \in \mathcal{H}, \tag{1.1.2}$$

то возникает задача Коши (1.1.1), (1.1.2). Соответственно появляется цикл вопросов о существовании, единственности и устойчивости решений этой задачи.

Многие задачи практики требуют изучения задач Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$C\frac{du}{dt} + Fu = f(t), \quad u(0) = u^0,$$

а иногда третьего и более высоких порядков. При изучении решений задач подобного рода (уравнения теплопроводности, волнового уравнения и других) существенно используются методы функционального анализа.

Наряду с эволюционными на практике возникают и нетрадиционные спектральные задачи. Рассмотрим, например, элементарные решения однородного уравнения (1.1.1), которые иногда в механике называют нормальными колебаниями. Как и в обычном методе Эйлера, это решения вида

$$u(t) = ve^{\lambda t}, \quad v \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.1.3}$$

где теперь v не зависит от t и является искомым элементом из $\mathcal{H}$, а λ — искомый спектральный параметр. Его мнимая часть характеризует частоту колебаний гидромеханической системы, а вещественная часть — декремент затухания:

$$e^{\lambda t} = (\cos((\operatorname{Im}\lambda)t) + i\sin((\operatorname{Im}\lambda)t))\, e^{(\operatorname{Re}\lambda)t}.$$

(При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ имеем возрастание амплитуды колебаний, а при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ — затухание.) Подставляя (1.1.3) в однородное уравнение (1.1.1), после сокращения на $e^{\lambda t}$ приходим к спектральной задаче

$$L(\lambda)v := \left(\lambda^2 C + \lambda(F+K) + B\right) v = 0 \tag{1.1.4}$$

для оператор–функции $L(\lambda)$, квадратично зависящей от параметра λ. Нетривиальные решения задачи (1.1.4) дают решения однородной задачи (1.1.1), имеющие вид (1.1.3).

Таким образом, эволюционные задачи для дифференциальных уравнений в гильбертовом либо банаховом пространстве порождают сопутствующие спектральные задачи, и эти задачи зачастую оказываются достаточно сложными для исследования. Наряду с операторными многочленами второго порядка вида (1.1.4), или, как говорят, операторными пучками второго порядка, возникают спектральные задачи для полиномиальных операторных пучков порядка более двух, а иногда и для пучков более сложного вида.

Например, в задаче С.Г. Крейна о колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде возникает мероморфный пучок

$$L(\lambda) := I - \lambda A - \lambda^{-1} B, \quad 0 < A \in \mathfrak{S}_\infty,\ 0 \leq B \in \mathfrak{S}_\infty,$$

со сложной структурой спектра.

Описанный вкратце круг проблем и будет в дальнейшем основным в данном курсе лекций. Наряду с дифференциальными могут быть рассмотрены также интегродифференциальные уравнения в гильбертовом либо банаховом пространстве. Эти уравнения также имеют многочисленные приложения. Так, процессы движения вязкоупругой либо релаксирующей жидкости описываются уравнениями подобного вида.

1.1.2 Функции со значениями в гильбертовом пространстве

1°. Далее будут рассматриваться функции $u(t)$, определенные на отрезке $[0, T] \subset \mathbb{R}$, значения которых при каждом t являются элементами банахова (или гильбертова) пространства E с нормой $\|\cdot\|_E$.

Определение 1.1.1. *Функция $u(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если*

$$\|u(t) - u(t_0)\|_E \to 0 \quad (t \to t_0),$$

и непрерывной на $[0, T]$, если она непрерывна в каждой точке t_0 отрезка $[0, T]$. □

Оказывается, что норма $\|u(t)\|_E$ непрерывной на $[0, T]$ функции есть скалярная непрерывная функция.

Множество всех непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в E, очевидно, образуют линейное пространство. Оно обозначается через $C([0, T]; E)$, а норма в нем вводится по формуле

$$\|u\|_{C([0,T];E)} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_E. \tag{1.1.5}$$

В этой норме пространство $C([0, T]; E)$ является банаховым, а сходимость по норме (1.1.5) означает равномерную сходимость по t.

2°. Перейдем теперь к понятию дифференцируемости функции $u = u(t)$ со значениями в E.

Определение 1.1.2. *Говорят, что функция $u(t)$ имеет в точке t_0 правую (левую) производную, если существует элемент $v \in E$, такой,* *что*

$$\left\|\frac{u(t_0+\Delta t)-u(t_0)}{\Delta t}-v\right\|\to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta t\to +0\ \ (\Delta t\to -0).$$

При этом пишут

$$\frac{d_+u(t_0)}{dt}=v \quad \left(\frac{d_-u(t_0)}{dt}=v\right).$$

Если правая и левая производные существуют и совпадают, то говорят, что функция $u(t)$ *дифференцируема в точке* t_0 *и ее производная*

$$u'(t_0)=\frac{du(t_0)}{dt}=v.$$

□

Говорят, что функция $u(t)$ дифференцируема на отрезке (интервале, полуинтервале), если она дифференцируема в каждой точке отрезка (интервала, полуинтервала). В этом случае производная $u'(t)$ также является функцией со значениями в банаховом пространстве E. Если она непрерывна, то говорят, что функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема.

Аналогичным образом вводится понятие n раз дифференцируемой и бесконечно дифференцируемой функции.

3°. Если $u(t)\in C\left([0,T];E\right)$, то для неё можно определить интеграл как предел интегральных сумм:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}u(\tau_k)\Delta t_k =: \int\limits_0^T u(t)\,dt, \tag{1.1.6}$$

$t_0=0<\tau_1<t_1<\tau_2<t_2<\tau_3<\ldots<\tau_n<t_n=T$, d – диаметр разбиения отрезка $[0,T]$. Здесь предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E. Для интегралов вида (1.1.6) справедлива оценка

$$\left\|\int\limits_a^b u(t)\,dt\right\|_E \leqslant \int\limits_a^b \|u(t)\|_E\,dt \quad ([a,b]\subset[0,T]),$$

а также теорема о среднем:

$$\int\limits_a^b u(t)\,dt=(b-a)\overline{v},$$

где $\overline{v} \in E$ — элемент $\overline{\mathrm{span}}\{u(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$, т.е. замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $u(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Отметим ещё, что если $u(t) \in C([0, T]; E)$, то

$$v(t) := \int\limits_a^t u(\tau)\, d\tau$$

является непрерывно дифференцируемой функцией и $v'(t) = u(t)$. Для любой непрерывно дифференцируемой функции $u(t)$ справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b u'(t)\, dt = u(b) - u(a).$$

Аналогично вводятся и другие понятия, встречающиеся в классическом математическом анализе. Здесь подробно на этом не будем останавливаться.

4°. Иногда рассматриваются функции $u(z)$ комплексного переменного $z \in G \subset \mathbb{C}$ со значениями в пространстве E. Здесь, как и в теории обычных функций комплексного переменного, под производной $u'(z_0)$ функции $u(z)$ в точке $z_0 \in G$ понимают такой элемент $u'(z_0) \in E$, для которого

$$\left\| \frac{u(z_0 + \Delta z) - u(z_0)}{\Delta z} - u'(z_0) \right\|_E \to 0 \quad (\Delta z \to 0).$$

Функция $u(z)$ со значениями в E называется *аналитической* в области $G \subset \mathbb{C}$, если она имеет в каждой точке этой области производную. Аналитическая функция в окрестности каждой точки $z_0 \in G$ разлагается в ряд Тейлора

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} u^{(k)}(z_0) \in E,$$

радиус r круга сходимости которого находится по формуле Коши-Адамара:

$$r^{-1} = \varlimsup_{k\to\infty} (\|a_k\|_E)^{1/k}.$$

На аналитические функции $u(z)$ $(z \in G)$ со значениями в банаховом пространстве E распространяются многие теоремы теории обычных аналитических функций. В частности, для аналитической $u(z)$ определяется интеграл по спрямляемому жорданову контуру $\Gamma \subset G$, справедлива теорема Коши и интегральная формула Коши:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

1.1.3 Линейные ограниченные и неограниченные операторы. Функции операторов

Здесь будут приведены некоторые факты и определения теории линейных ограниченных и неограниченных операторов, действующих в банаховом либо гильбертовом пространстве, а также функций таких операторов.

1°. Пусть E и F — банаховы пространства. Отображение $A : E \to F$ называется линейным оператором, если

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v \quad (\forall u, v \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}). \tag{1.1.7}$$

Линейный оператор непрерывен, если он непрерывен в точке $0 \in E$. Непрерывность равносильна свойству ограниченности оператора A, т.е. конечности величины

$$\|A\| := \sup\{\|Au\|_F / \|u\|_E : u \in E, u \neq 0\} = \\ = \sup\{\|Au\|_F : u \in E, \|u\|_E = 1\}. \tag{1.1.8}$$

Множество линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(E, F)$ является банаховым пространством с нормой (1.1.8).

Линейный оператор называется *вполне непрерывным*, или *компактным*, если он определен на всем E и отображает каждое ограниченное в E множество во множество, предкомпактное в F.

Очевидно, вполне непрерывный оператор ограничен. Множество $\mathfrak{S}_\infty(E, F)$ вполне непрерывных операторов является двусторонним идеалом в пространстве $\mathcal{L}(E, F)$, т. е.

1°. $A + B \in \mathfrak{S}_\infty(E, F)$, если A, $B \in \mathfrak{S}_\infty(E, F)$;

2°. $C_1 A, AC_2 \in \mathfrak{S}_\infty(E, F)$, если $A \in \mathfrak{S}_\infty(E, F), C_1 \in \mathcal{L}(E), C_2 \in \mathcal{L}(F)$.

2°. Функцию $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(E, F)$ ограниченных операторов будем называть оператором, зависящим от параметра t, или *оператор-функцией*. На оператор-функции, зависящие от параметра, переносятся понятия непрерывности, дифференцируемости и аналитичности, рассмотренные выше в п. 1.1.2

на примере функций со значениями в гильбертовом и банаховом пространстве.

Аналогично сформулированным выше построениям определяются *аналитические* функции операторов для комплексного переменного $z \in G \subset \mathbb{C}$. Пусть $A \in \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$. Важнейшим примером функции оператора A является его резольвента

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.1.9}$$

Напомним, что точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, если существует резольвента (1.1.9) из $\mathcal{L}(E)$. Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ открыто, а его спектр $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$. Более точно, спектр $\sigma(A)$ лежит в круге, радиус r_A которого равен

$$r_A = \lim_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{1/n}.$$

Число r_A называется спектральным радиусом оператора A.

3°. Приведем некоторые примеры операторов, зависящих от параметра, а также примеры голоморфных оператор–функций.

Пример 1.1.1. Для любого $A \in \mathcal{L}(E)$ определим функцию $\exp(tA)$ в виде ряда

$$\exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1.10}$$

Нетрудно видеть, что $\exp(tA) \in \mathcal{L}(E)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$. Эта функция обладает рядом замечательных свойств:

1) $\exp(tA)\,|_{t=0} = I_E$ (единичному оператору, действующему в E),
2) $\exp(tA)\exp(\tau A) = \exp(\tau A)\exp(tA) = \exp((t+\tau)A)$,
3) $(d/dt)\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$. $\square$

Аналогично определяется функция $\exp(\lambda A)$ для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. При этом свойства 1) – 3) сохраняются.

Пример 1.1.2. Для любого $A \in \mathcal{L}(E)$ определим по аналогии с рядом

$$\cos(ta) = 1 - \frac{(ta)^2}{2!} + \frac{(ta)^4}{4!} \ldots$$

оператор–функцию

$$C_A(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} =: \cos(tA).$$

Она называется *операторной косинус–функцией* и обладает рядом замечательных свойств, из которых отметим следующие:

1) $C_A(t)\,|_{t=0}= I_E$,

2) $C_A(t+\tau)+C_A(t-\tau)=2C_A(t)C_A(\tau)$.

□

Пример 1.1.3. Аналогом скалярной функции $\sin(ta)/a$ является *операторная синус–функция*

$$S_A(t) := \int_0^t C_A(\tau)\,d\tau. \tag{1.1.11}$$

Для нее, очевидно, выполнены свойства:

1) $S_A(0)=0$,

2) $S'_A(t)=C_A(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. □

Как будет видно из дальнейшего, функции (1.1.10)–(1.1.11) играют основную роль при исследовании решений дифференциальных уравнений первого и второго порядков с ограниченными операторными коэффициентами. Теория косинус– и синус–функций была впервые построена польским математиком М. Совой [18].

4°. Наряду с ограниченными операторами, действующими из E в F, на практике (в задачах математической физики, гидродинамики, теории упругости и других естественных науках) возникают линейные (т.е. аддитивные и однородные, см. (1.1.7)) операторы, которые не являются ограниченными из E в F. Для них норма (1.1.8) равна $+\infty$, и поэтому они задаются не на всем пространстве E, а лишь на некоторой его части, плотной или неплотной в нем. Теория таких (самосопряженных положительно определенных) операторов подробно изучается в курсе "Операторные методы в математической физике". Здесь отметим лишь тот факт, что для этих операторов также имеют смысл функции $\exp(tA)$, $C_A(t)$, $S_A(t)$, понятие резольвенты и ряд других свойств.

Приведем простейший и притом типичный пример линейного неограниченного оператора, действующего в гильбертовом пространстве.

Пример 1.1.4. Пусть $E=\mathcal{H}=L_2(0,\pi)$,

$$\mathcal{D}(A) := \{u(x)\in L_2(0,\pi) : u''(x)\in C[0,\pi]\}\subset L_2(0,\pi),$$

$$Au(x) := u''(x), \quad \forall u(x)\in\mathcal{D}(A).$$

Здесь, очевидно, $\overline{\mathcal{D}(A)} = L_2(0, \pi)$.

Определим для последовательности функций $u_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$, верхнюю грань отношения $\|Au\|^2_{\mathcal{H}} / \|u\|^2_{\mathcal{H}}$. Для $u(x) = u_k(x)$ имеем

$$\frac{\|Au_k\|^2_{\mathcal{H}}}{\|u_k\|^2_{\mathcal{H}}} = k^4 \to \infty \quad (k \to \infty),$$

и поэтому

$$\sup \frac{\|Au\|_{\mathcal{H}}}{\|u\|_{\mathcal{H}}} = +\infty.$$

Отсюда следует, что оператор A, введенный выше, неограничен в $\mathcal{H} = L_2(0, \pi)$. □

1.1.4 Упражнения к параграфу 1.1

Упражнение 1.1.1. Доказать, что норма $\|u(t)\|_E$ непрерывной на $[0, T]$ функции $u(t)$ со значениями в E есть скалярная непрерывная функция переменной t.

Указание. $\big|\|u(t)\|_E - \|u(t_0)\|_E\big| \leqslant \|u(t) - u(t_0)\|_E \to 0 \quad (t \to t_0)$.

□

Упражнение 1.1.2. Пусть $u(t) \to v$ (в E) при $t \to t_0$, а скалярная функция $\varphi(t) \to \alpha$. Доказать, что тогда $\varphi(t)u(t) \to \alpha v$ при $t \to t_0$ (в E). Аналогично проверить, что если $u_1(t) \to v_1$, $u_2(t) \to v_2$ (в E) при $t \to t_0$, то $u_1(t) + u_2(t) \to v_1 + v_2 \quad (t \to t_0)$. □

Упражнение 1.1.3. Дайте определение предела оператор–функции $A(t) \in \mathcal{L}(E, F)$ в точке $t \in \mathbb{R}$ $(t \in \mathbb{C})$ и ее непрерывности в этой точке. □

Упражнение 1.1.4. Пусть $u(t) \in C([0, T]; E)$ и $A(t)$ — непрерывная оператор–функция со значениями в $\mathcal{L}(E, F)$. Если $u(t) \to v$, $A(t) \to A_0$ при $t \to t_0 \in [0, T]$, то $A(t)u(t) \to A_0 v$ $(t \to t_0)$. Если $u(t)$ и $A(t)$ непрерывны в точке t_0, то $A(t)u(t)$ непрерывна в этой точке. Доказать эти факты. □

Упражнение 1.1.5. Доказать, что если функция $u(t)$ со значениями в E дифференцируема в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, то она непрерывна в этой точке.

□

Упражнение 1.1.6. Доказать, что если $u(t)$ со значениями в E и скалярная функция $\varphi(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то $\varphi(t)u(t)$ также дифференцируема в t_0 и

$$(\varphi(t)u(t))'_{t=t_0} = \varphi'(t_0)u(t_0) + \varphi(t_0)u'(t_0). \qquad \square$$

Упражнение 1.1.7. Доказать, что если функция $u(t)$ со значениями в E и оператор–функция $A(t)$ со значениями в $\mathcal{L}(E,F)$ дифференцируемы в точке t_0, то $A(t)u(t)$ также дифференцируема в t_0 и

$$(A(t)u(t))'_{t=t_0} = A'(t_0)u(t_0)+A(t_0)u'(t_0). \qquad \square$$

Упражнение 1.1.8. Пусть оператор–функция $A(t)$ дифференцируема в точке t_0 и непрерывно обратима в окрестности точки t_0. Доказать, что тогда $A^{-1}(t)$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$(A^{-1})'(t_0) = -A^{-1}(t_0)A'(t_0)A^{-1}(t_0).$$

Указание. Воспользоваться соотношениями

$$A(t)A^{-1}(t) \equiv A^{-1}(t)A(t) \equiv I, \quad A(t_0)A^{-1}(t_0) = A^{-1}(t_0)A(t_0) = I$$

и определением дифференцируемости оператор–функции. $\square$

Упражнение 1.1.9. Пусть два степенных ряда со значениями в E равны в круге $|\lambda| < r$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k.$$

Доказать, что тогда равны все их коэффициенты:

$$u_k = v_k \in E \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Указание. Положим $\lambda = 0$ и получим, что $u_0 = v_0$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \lambda^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \lambda^{k-1},$$

откуда $u_1 = v_1$ и т.д. $\square$

Упражнение 1.1.10. Доказать, что для оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ множество $\rho(A)$ его регулярных точек открыто, и получить формулу для резольвенты $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ в окрестности регулярной точки $\lambda_0 \in \rho(A)$. Установить, что спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ лежит в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$. $\square$

Упражнение 1.1.11. Доказать, что спектральный радиус r_A оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ определяется по формуле

$$r_A = \lim_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{1/n}.$$

Указание. Существование предела вытекает из соотношения $\|A^{m+n}\| \leqslant \|A^m\| \cdot \|A^n\|$ и рассуждений из [13, с. 294]. Далее, при любом λ с $|\lambda| \geqslant r_A$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k$$

абсолютно сходится в метрике $\mathcal{L}(E)$, ибо соответствующий ряд из норм мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $(r_A+\varepsilon)/|\lambda|$ при любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого места. При умножении этого ряда на $\lambda I - A$ получается I_E. □

Упражнение 1.1.12. Проверить, что для резольвенты $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ справедливо тождество Гильберта:

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A) \quad (\lambda, \mu \in \rho(A)). \qquad \square$$

Упражнение 1.1.13. Доказать, что ряд

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad A \in \mathcal{L}(E),$$

сходится при любом $t \in \mathbb{C}$, при этом

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A. \qquad \square$$

Упражнение 1.1.14. Доказать, что ряд

$$C_A(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} = \cos(tA)$$

сходится во всей комплексной плоскости ($t \in \mathbb{C}$) и

$$C'_A(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} A^{2k} \cdot 2k t^{2k-1} =$$

$$= -A \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(tA)^{2k-1}}{(2k-1)!} =: -A \sin(tA) = -\sin(tA) A. \qquad \square$$

Пусть $F(z)$ — однозначная аналитическая функция, определенная в области $G \subset \mathbb{C}$, содержащей спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, и Γ —

спрямляемый жорданов контур, лежащий в G и окружающий спектр оператора A.

Рассмотрим операторный интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} F(\lambda)R_\lambda(A)\,d\lambda.$$

Этот интеграл существует как интеграл от непрерывной оператор–функции $F(\lambda)R_\lambda(A)$ со значениями в $\mathcal{L}(E)$ и обладает свойствами интеграла Коши. Значение интеграла не зависит от выбора контура Γ, обладающего описанными свойствами, и представляет собой линейный ограниченный оператор, зависящий от выбора оператора A. Его называют функцией от оператора A:

$$F(A) := -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} F(\lambda)R_\lambda(A)\,d\lambda.$$

Если $F(z)$ — аналитическая функция во всей комплексной плоскости, то приведенное определение функции от оператора позволяет строить оператор–функции, зависящие от параметра, не только с помощью соответствующих рядов Тейлора, как это уже вводилось выше, а с помощью интегралов по контуру, охватывающему спектр оператора A. Так, оператор–функция $\exp(tA)$ представляется в виде

$$\exp(tA) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} e^{t\lambda}R_\lambda(A)\,d\lambda,$$

а функция $\cos(tA)$ — соответственно в виде

$$\cos(tA) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \cos(t\lambda)R_\lambda(A)\,d\lambda.$$

Упражнение 1.1.15. Опираясь на новое представление функции $\exp(tA)$ и тождество Гильберта (см. упражнение 1.1.12), установить групповое свойство экспоненты:

$$\exp((t+\tau)A) = \exp(tA)\exp(\tau A) = \exp(\tau A)\exp(tA). \qquad \square$$

Упражнение 1.1.16. Доказать аналогичным образом, что

$$\cos((t+\tau)A)+\cos((t-\tau)A) = 2\cos(tA)\cos(\tau A) = 2\cos(\tau A)\cos(tA). \qquad \square$$

1.2 Дифференциальное уравнение первого порядка с ограниченным операторным коэффициентом

1.2.1 Решение однородного и неоднородного уравнений

Пусть $A\colon E \to E$ — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E ($A \in \mathcal{L}(E)$) или гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$). Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u = u(t), \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{1.2.1}$$

Определение 1.2.1. *Функция $u = u(t)$ со значениями в E называется сильным решением дифференциального уравнения* (1.2.1), *если она непрерывно дифференцируема по t на $[0, \infty)$ и удовлетворяет уравнению* (1.2.1) *для любого $t \geqslant 0$.* □

Определение 1.2.2. *Задачей Коши для уравнения* (1.2.1) *называется задача вида*

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u^0 \in E. \tag{1.2.2}$$

□

Теорема 1.2.1. *Задача Коши* (1.2.2) *имеет при любом $u^0 \in E$ единственное решение, которое выражается формулой*

$$u(t) = \exp(tA)u^0, \tag{1.2.3}$$

где $\exp(tA)$ *— операторная экспонента:*

$$\exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}. \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Проверим сначала, что функция (1.2.3) удовлетворяет уравнению и начальному условию (1.2.2). Так как ряд (1.2.4) сходится в круге любого радиуса и представляет собой голоморфную функцию комплексного параметра t, то

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A\exp(tA).$$

Отсюда и из (1.2.3) имеем

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp(tA)u^0\right) = A\exp(tA)u^0 = Au(t), \tag{1.2.5}$$

т. е. выполнено условие (1.2.2).

Поскольку $\exp(tA)\big|_{t=0} = I_E$, то $u(0) = u^0$, и поэтому $\exp(tA)u^0$ — решение задачи Коши (1.2.2).

Покажем, что это решение находится единственным образом по элементу $u^0 \in E$. Пусть, напротив, имеется два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ задачи (1.2.2) при некотором $u^0 \in E$. Тогда для $u = u(t) := u_2(t) - u_1(t)$ имеем

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = 0,$$

и потому

$$u(t) = \int\limits_0^t Au(s)ds.$$

При $|t| < \delta$ отсюда следует оценка

$$\|u(t)\| = \Big\|\int\limits_0^t Au(s)ds\Big\| \leqslant \int\limits_0^t \|Au(s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|\int\limits_0^t \|u(s)\|\,ds \leqslant \delta\|A\|\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|u(t)\|.$$

Поэтому и

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|u(t)\| \leqslant \delta\|A\|\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|u(t)\|,$$

и при $\delta\|A\| < 1$ получим противоречие, если

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\|u(t)\| \neq 0.$$

□

Перейдём теперь к получению формулы для решения линейного неоднородного уравнения первого порядка. С этой целью рассмотрим задачу Коши вида

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{1.2.6}$$

где $u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функция со значениями в E.

Теорема 1.2.2. *Пусть $f(t)$ — непрерывная функция t со значениями в E, а $u^0 \in E$. Тогда решение задачи Коши* (1.2.6) *единственно и выражается формулой*

$$u(t) = \exp(tA)u^0 + \int\limits_0^t \exp((t-s)A)u(s)ds.$$

Доказательство. Оно основано на применении метода вариации произвольной постоянной. Осуществим в (1.2.6) замену искомой функции по закону

$$u(t) = \exp(tA)v(t).$$

Тогда

$$u'(t) = A\exp(tA)v(t) + \exp(tA)v'(t),$$

и потому из (1.2.6) получаем

$$\exp(tA)\frac{dv}{dt} = f(t).$$

Отсюда следует, с учётом начального условия $v(0) = u^0$, что

$$v(t) = u^0 + \int\limits_0^t \exp(-sA)f(s)ds,$$

и тогда

$$u(t) = \exp(tA)u^0 + \int\limits_0^t \exp((t-s)A)f(s)ds.$$

Доказательство единственности решения задачи Коши (1.2.6) в точности повторяет аналогичное доказательство для однородной задачи (1.2.2), см. теорему 1.2.1. □

1.2.2 Поведение решения на бесконечности

Рассмотрим теперь вопрос о поведении решения однородной задачи Коши (1.2.2) при $t \to \infty$. В силу (1.2.3) необходимо уметь оценивать поведение нормы оператор–функции $\exp(tA)$ при больших t.

Оказывается, эта проблема, как и в случае задачи с конечным числом степеней свободы, тесно связана с расположением спектра оператора A в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Определение 1.2.3. *Решение* $u(t) = \exp(tA)u^0$ *задачи* (1.2.2) *называется асимптотически устойчивым, если* $u(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$. *Если каждое решение задачи* (1.2.2) *является асимптотически устойчивым, то говорят, что уравнение* (1.2.2) *асимптотически устойчиво.*

□

Поскольку $u(t) \equiv 0$ является решением уравнения (1.2.2), элемент $u = 0$ является равновесной точкой дифференциального уравнения (1.2.2). В этой терминологии асимптотическая устойчивость уравнения (1.2.2) эквивалентна утверждению, что $u = 0$ — *асимптотически устойчивая точка равновесия* для уравнения (1.2.2).

При выяснении вопросов устойчивости решений уравнения (1.2.2) полезно воспользоваться представлением оператор-функции $\exp(tA)$ не в виде ряда Тейлора

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

а в виде интеграла по замкнутому контуру, окружающему спектр оператора A. Так как $A \in \mathcal{L}(E)$, то его спектр — замкнутое ограниченное множество. Пусть Γ_A — замкнутый жорданов контур, содержащий внутри себя весь спектр оператора A. Тогда, как доказывается в теории оператор-функций (а здесь приводится без доказательства), имеет место следующее представление функции $\exp(tA)$ через резольвенту $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$:

$$\exp(tA) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} \mathrm{e}^{t\lambda}(A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda. \tag{1.2.7}$$

Теорема 1.2.3. *Если спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *принадлежит открытой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda < \gamma$*, то существует постоянная* C *(зависящая от* A *и* γ*), такая, что*

$$\|\exp(tA)\| \leqslant C\exp(\gamma t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.2.8}$$

Обратно, из (1.2.8) *следует, что* $\sigma(A)$ *принадлежит замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \gamma$.

Доказательство. 1°. Пусть $\sigma(A)$ принадлежит открытой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < \gamma$. Тогда в представлении (1.2.7) для $\exp(tA)$ можно выбрать контур Γ_A вокруг $\sigma(A)$ таким образом, чтобы на Γ_A выполнялось условие $\operatorname{Re}\lambda < \gamma$. Пусть $\ell(\Gamma_A)$ — длина Γ_A. Заметим, что

$$|\exp(t\lambda)| \leqslant \exp(t\gamma) \quad \text{для} \quad \lambda \in \Gamma_A \quad \text{и} \quad t \geqslant 0.$$

Тогда в силу (1.2.7)

$$\|\exp(tA)\| = \frac{1}{2\pi}\Big\|\oint_{\Gamma_A} \mathrm{e}^{t\lambda}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\ell(\Gamma_A)\max_{\lambda\in\Gamma_A}\|(A-\lambda I)^{-1}\|\exp(t\gamma) =: C\,\mathrm{e}^{\gamma t}\,.$$

2°. Для доказательства второго утверждения теоремы предположим, что имеет место оценка (1.2.8). Тогда для $t \geqslant 0$ спектр оператора $\exp(tA)$ принадлежит замкнутому контуру радиуса $C\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ с центром в нуле. Однако

$$\sigma\big(\exp(tA)\big) = \big\{e^{\lambda t} : \lambda \in \sigma(A)\big\}.$$

(Это утверждение, которое называют теоремой об отображении спектров, доказывается в курсе функционального анализа применительно к функциям оператора, в данном случае применительно к оператор-функции $\exp(tA)$, построенной по оператору A.) Но тогда

$$\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda} = |e^{t\lambda}| \leqslant C\,\mathrm{e}^{\gamma t} \quad \big(\lambda\in\sigma(A)\big),$$

поскольку спектр ограниченного оператора лежит в круге, радиус которого не превышает норму оператора. Последнее соотношение выполнено для всех $t \geqslant 0$. Если $\lambda \in \sigma(A)$, тогда из предыдущего

$$\exp\big(t(\mathrm{Re}\,\lambda - \gamma)\big) \leqslant C, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Это возможно лишь при условии, что $\mathrm{Re}\,\lambda - \gamma \leqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Re}\,\sigma(A) \leqslant \gamma \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \gamma \quad \big(\lambda\in\sigma(A)\big).$$

Теорема доказана.

□

На основании теоремы 1.2.3 можно получить следующий основной результат.

Теорема 1.2.4. 1°. *Если $\sigma(A)$ лежит в открытой левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, то однородное уравнение* (1.2.2) *асимптотически устойчиво.*

2°. *Обратно, если это уравнение асимптотически устойчиво, то $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$.*

3°. *Если пространство E конечномерно, то условие асимптотической устойчивости однородного уравнения* (1.2.2) *эквивалентно утверждению, что $\sigma(A)$ принадлежит полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.*

Доказательство. 1°. Предположим, что $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$. Поскольку $\sigma(A)$ — компактное множество в $\mathbb{C}$, то найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $\sigma(A)$ принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -\varepsilon$. Тогда по предыдущей теореме 1.2.3 получаем, что

$$\|\exp(tA)\| \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \quad t \geqslant 0,$$

с некоторой постоянной C. Поэтому для любого $u^0 \in E$ имеем

$$\|u(t)\| = \|\exp(tA)u^0\| \leqslant C\|u^0\|\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Следовательно, уравнение (1.2.2) асимптотически устойчиво.

2^0. Предположим теперь, что *уравнение* (1.2.2) асимптотически устойчиво. Возьмём любое $u^0 \in E$. Тогда

$$u(t) := \exp(tA)u^0 \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Отсюда следует, что существует такая константа $C(u^0)$, зависящая от элемента $u^0 \in E$, что

$$\|\exp(tA)u^0\| \leqslant C(u^0) < \infty$$

для всех $t \geqslant 0$. Тогда (согласно принципу Банаха-Штейнгауза равномерной ограниченности из курса функционального анализа) существует константа C такая, что

$$\|\exp(tA)\| \leqslant C < \infty \quad (t \geqslant 0).$$

Отсюда по теореме 1.2.3 при $\gamma = 0$ получаем, что

$$\operatorname{Re}\sigma(A) \leqslant 0. \tag{1.2.9}$$

3°. Предположим, наконец, что уравнение (1.2.2) асимптотически устойчиво и $\dim E < \infty$. Докажем, что в этом случае $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$. Предположим, напротив, что $\lambda_0 = ib \in \sigma(A)$, $b \in \mathbb{R}$. Поскольку E конечномерно, то оператор A в E представляется в виде матрицы, и тогда $\lambda_0 = ib$ — собственное значение этой матрицы. Пусть u_0 — собственный элемент оператора (матрицы) A, отвечающий собственному значению $\lambda_0 = ib$:

$$Au_0 = \lambda_0 u_0 = ibu_0, \quad u_0 \neq 0.$$

Тогда

$$\exp(tA)u_0 = e^{itb}u_0$$

(u_0 является собственным элементом не только для оператора A, но и для $\exp(tA)$ – проверьте этот факт!).

Отсюда следует, что в силу свойства асимптотической устойчивости

$$\|u_0\| = \|e^{itb}u_0\| = \|\exp(tA)u_0\| \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Значит, $\|u_0\| = 0$ и $u_0 = 0$, в противоречии с тем фактом, что собственный элемент $u_0 \neq 0$.

Таким образом, точки спектра оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ при $\dim E < \infty$ не могут находиться на мнимой оси, и взамен (1.2.9) получаем

$$\operatorname{Re}\sigma(A) < 0.$$

Теорема доказана. $\square$

1.2.3 Теорема Ляпунова

При изучении вопросов устойчивости динамических систем с конечным числом степеней свободы ($\dim E < \infty$) важную роль играют теоремы Ляпунова, выдающегося русского механика и математика. Сейчас будут рассмотрены аналогичные вопросы в бесконечномерном случае ($\dim E = \infty$) для однородного уравнения (1.2.2).

Определение 1.2.4. *Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется строго положительным, или положительно определённым, если*

$$(Au, u)_{\mathcal{H}} \geqslant \delta(u, u)_{\mathcal{H}} \quad (\forall u \in \mathcal{H},\ \delta > 0). \tag{1.2.10}$$

Кратко свойство (1.2.10) *обозначается так: $A \gg 0$.*

Если $-A \gg 0$, то оператор A называют строго отрицательным (отрицательно определённым) и пишут $A \ll 0$. $\square$

Далее понадобится следующий вспомогательный факт.

Теорема 1.2.5. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если $A + A^* \ll 0$, то $\sigma(A)$ принадлежит открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$.*

Доказательство. По условию теоремы

$$\big((A + A^*)u, u\big) \leqslant -\delta\|u\|^2 \quad (\forall u \in \mathcal{H},\ \exists\delta > 0).$$

Зафиксируем произвольно $u \in \mathcal{H}$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(t) := \|\exp(tA)u\|^2.$$

Для этой функции

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}\big(\exp(tA)u, \exp(tA)u\big) = \Big|\big(\exp(tA)\big)^* = \exp(tA^*)\Big| =$$
$$= \frac{d}{dt}\big(\exp(tA^*)\exp(tA)u, u\big) = \big(\exp(tA^*)(A^*+A)\exp(tA)u, u\big) =$$
$$\big((A^*+A)\exp(tA)u, \exp(tA)u\big) \leqslant -\delta\big(\exp(tA)u, \exp(tA)u\big) = -\delta\varphi(t).$$

Отсюда следует, что

$$\big(\mathrm{e}^{\delta t}\varphi(t)\big)' = \delta\,\mathrm{e}^{\delta t}\varphi(t) + \mathrm{e}^{\delta t}\varphi'(t) \leqslant \delta\,\mathrm{e}^{\delta t}\varphi(t) - \mathrm{e}^{\delta t}\delta\varphi(t) = 0.$$

Интегрируя обе части неравенства в пределах от 0 до t, имеем

$$\mathrm{e}^{\delta t}\varphi(t) \leqslant \varphi(0) \quad (t \geqslant 0).$$

Таким образом,

$$\|\exp(tA)u\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

и потому

$$\|\exp(tA)\| \leqslant \exp(-\frac{1}{2}\delta t) \quad (t \geqslant 0).$$

По теореме 1.2.3 отсюда получаем, что

$$\operatorname{Re}\sigma(A) \leqslant -\frac{1}{2}\delta < 0.$$

Теорема доказана.

□

На основе доказанной теоремы, а также с использованием других важных фактов сейчас будет установлен основной результат, который назван *теоремой Ляпунова.*

Теорема 1.2.6. *Спектр оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ принадлежит открытой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ тогда и только тогда, когда существует положительно определенный оператор $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что*

$$ZA + A^*Z \ll 0. \tag{1.2.11}$$

Доказательство. 1°. (Достаточность). Предположим, что существует $Z \gg 0$, для которого выполнены условия

$$\begin{aligned} \big((ZA+A^*Z)u, u\big) &\leqslant -\delta_1(u,u) \quad (\delta_1 > 0,\ \forall u \in \mathcal{H}), \\ \big(Zu, u\big) &\geqslant \delta(u,u) \quad (\forall u \in \mathcal{H},\ \delta > 0). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Введём в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение, полагая

$$\langle u, v\rangle := (Zu, v) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}).$$

Обозначим через $\|\cdot\|_Z$ соответствующую норму:

$$\|u\|_Z := \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что в силу (1.2.12)

$$\delta\|u\|^2 \leqslant \|u\|_Z^2 \leqslant \|Z\|\cdot\|u\|^2, \tag{1.2.13}$$

т. е. новая и старая нормы эквивалентны. В частности, множество $\mathcal{H}$, снабжённое новой нормой, снова является гильбертовым пространством (назовем его $\mathcal{H}_Z$) и состоит из тех же самых элементов, а сходимость в $\mathcal{H}$ равносильна сходимости в $\mathcal{H}_Z$.

Легко проверить, что если $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_Z)$, и обратно. Обозначим через A^+ оператор, сопряжённый к оператору A в новом скалярном произведении. Имеем

$$\langle Au, v\rangle = \big(ZAu, v\big) = \big(u, A^*Zv\big),$$
$$\langle u, A^+v\rangle = \big(Zu, A^+v\big) = \big(u, ZA^+v\big),$$

откуда следует, что

$$ZA^+ = A^*Z.$$

Тогда

$$\langle (A + A^+)u, u\rangle = \big(ZAu, u\big) + \big(ZA^+u, u\big) = \big((ZA + A^*Z)u, u\big).$$

Отсюда и из неравенств (1.2.12), (1.2.13) получаем

$$\langle (A + A^+)u, u\rangle \leq -\delta_1\|u\|^2 \leq -\delta_1\|Z\|^{-1}\|u\|_Z^2,$$

т. е. оператор $A + A^+$ отрицательно определён в H_Z. Поэтому из теоремы 1.2.5 следует, что

$$\big\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\big\} =: \operatorname{Re}\sigma(A) < 0. \tag{1.2.14}$$

2°. (Необходимость). Предположим теперь, что выполнено условие (1.2.14), и докажем, что существует оператор $Z \gg 0$ такой, что имеет место свойство (1.2.11).

Если выполнено (1.2.14), то также

$$\operatorname{Re}\sigma(A^*) < 0.$$

Поэтому спектры $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$ оба лежат в левой полуплоскости. Рассмотрим с учётом этого факта операторное уравнение

$$ZA + A^*Z = -2I \tag{1.2.15}$$

относительно неизвестного оператора $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Поскольку $-2I \ll 0$, то достаточно убедиться, что уравнение (1.2.15) имеет решение $Z \gg 0$, и вторая часть теоремы будет доказана. Будем считать, что факт существования Z уже установлен, более того, как позже будет показано, оператор Z имеет следующее интегральное представление

$$Z = 2\int\limits_0^\infty \exp(tA^*)\exp(tA)\,dt. \tag{1.2.16}$$

Проверим, что оператор Z вида (1.2.16) обладает свойством $Z \gg 0$. Так как

$$\big(\exp(tA)\big)^* = \exp(tA^*),$$

то ясно, что оператор-функция $\exp(tA^*)\exp(tA)$ при любом $t \geqslant 0$ является самосопряжённым неотрицательным оператором и потому $Z \geqslant 0$:

$$\begin{gathered}\big(Zu, u\big) = 2\Big(\int\limits_0^\infty \exp(tA^*)\exp(tA)\,dtu, u\Big) = \\ = 2\int\limits_0^\infty \big(\exp(tA^*)\exp(tA)u, u\big)\,dt = 2\int\limits_0^\infty \|\exp(tA)u\|^2\,dt \geqslant 0.\end{gathered} \tag{1.2.17}$$

Далее, для любого $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\|u\| = \|\exp(-tA)\exp(tA)u\| \leq \|\exp(-tA)\| \cdot \|\exp(tA)u\| \leqslant \\ \leqslant \mathrm{e}^{t\|A\|} \cdot \|\exp(tA)u\|,\end{aligned}$$

и тогда

$$\|\exp(tA)u\| \geqslant \mathrm{e}^{-t\|A\|}\,\|u\| \quad (\forall u \in \mathcal{H},\ \forall t \geqslant 0). \tag{1.2.18}$$

Применяя (1.2.18) к (1.2.17), имеем

$$\big(Zu, u\big) \geqslant 2\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2t\|A\|}\,\|u\|^2\,dt = \|A\|^{-1}\|u\|^2,$$

т. е. $Z \gg 0$. Теорема доказана.

□

Осталось лишь убедиться в существовании решения Z уравнения (1.2.15) с указанными свойствами.

Теорема 1.2.7. *(вспомогательная). Предположим, что операторы A и B ограничены и*

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{dist}\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) = d > 0.$$

Тогда уравнение

$$AZ - ZB = C, \quad C \in \mathcal{L}(E), \tag{1.2.19}$$

имеет единственное решение $Z \in \mathcal{L}(E)$, выражаемое формулами

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} (A - \lambda I)^{-1} C (B - \lambda I)^{-1}\, d\lambda = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_B} (A - \lambda I)^{-1} C (B - \lambda I)^{-1} d\lambda, \tag{1.2.20}$$

где Γ_A и Γ_B — контуры Коши вокруг $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$, которые отделяют $\sigma(A)$ от $\sigma(B)$.

Доказательство. 1°. Тот факт, что $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ — отделённые компактные множества, позволяет выбрать контуры Γ_A и Γ_B так, как это указано выше. Предположим сначала, что Z является решением уравнения (1.2.19), и получим формулы (1.2.20). Тогда

$$(A - \lambda I)Z - Z(B - \lambda I) = C, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$Z(B - \lambda I)^{-1} - (A - \lambda I)^{-1} Z = (A - \lambda I)^{-1} C (B - \lambda I)^{-1} \tag{1.2.21}$$

для любых $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. В частности, тождество (1.2.21) справедливо для $\lambda \in \Gamma_A$. Проинтегрируем обе части (1.2.21) по Γ_A и заметим, что $\sigma(A)$ лежит внутри, а $\sigma(B)$ — вне Γ_A. Тогда, в силу аналитичности оператор-функции $(B - \lambda I)^{-1}$ внутри Γ_A и в силу соотношения

$$-\oint_{\Gamma_A} (A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda = 2\pi i I,$$

получаем, что

$$2\pi i Z = \oint_{\Gamma_A} (A - \lambda I)^{-1} C (B - \lambda I)^{-1}\, d\lambda,$$

откуда следует первая формула (1.2.20). Вторая формула (1.2.20) получается аналогичным образом при интегрировании вдоль Γ_B.

2°. Докажем теперь, что уравнение (1.2.19) имеет решение $Z \in \mathcal{L}(E)$. Пусть Z — ограниченный линейный оператор, определённый первой формулой (1.2.20). Тогда

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} A(A-\lambda I)^{-1}C(B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I+\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}C(B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}\lambda(A-\lambda I)^{-1}C(B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}C(B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}\lambda(A-\lambda I)^{-1}C(B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda + 0 \end{aligned}$$

(последний интеграл равен нулю по теореме Коши).

Таким образом,

$$\begin{aligned} AZ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I)^{-1}C(B-\lambda I)^{-1}(B-\lambda I-B)\,d\lambda = \\ &= \Big\{-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\Big\}C + \\ &+ \Big\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A}(A-\lambda I)^{-1}C(B-\lambda I)^{-1}\,d\lambda\Big\}B = IC + ZB. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что Z является решением уравнения (1.2.19). Теорема доказана.

□

Следствием теоремы 1.2.7 является такое утверждение.

Теорема 1.2.8. *Пусть A и B — операторы из $\mathcal{L}(E)$ такие, что их спектры расположены в открытой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Тогда операторное уравнение*

$$AZ + ZB = C, \quad C \in \mathcal{L}(E), \tag{1.2.22}$$

имеет единственное решение из $\mathcal{L}(E)$, именно,

$$Z = -\int_0^\infty \exp(tA)C\exp(tB)\,dt. \tag{1.2.23}$$

Доказательство. Из условия на спектры $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ следует, что $\sigma(A)\cap\sigma(-B)=\varnothing$. Поэтому согласно теореме 1.2.7 получаем, что уравнение

$$AZ+ZB=AZ-Z(-B)=C$$

имеет *единственное решение* $Z\in\mathcal{L}(E)$. Теперь следует убедиться, что *формула* (1.2.23) *действительно даёт решение уравнения* (1.2.22).

Заметим, что интеграл в (1.2.23) является несобственным интегралом *с непрерывной подынтегральной оператор-функцией.* Так как $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$, то, согласно доказательству первой части теоремы 1.2.4, существуют постоянные $\varepsilon>0$ и $M>0$ такие, что

$$\|\exp(tA)\|\leqslant M\,\mathrm{e}^{-t\varepsilon},\quad \|\exp(tB)\|\leqslant M\,\mathrm{e}^{-t\varepsilon}\quad (t\geqslant 0).$$

Тогда нетрудно видеть, что $\|\exp(tA)C\exp(tB)\|\to 0$ $(t\to+\infty)$ и операторный интеграл (1.2.23) сходится.

Далее, имеем

$$\frac{d}{dt}\big[\exp(tA)C\exp(tB)\big]=$$
$$=A\exp(tA)C\exp(tB)+\exp(tA)C\exp(tB)B\quad (\to 0 \text{ при } t\to\infty)$$

(по тем же оценкам, что и выше). Поэтому

$$-C=\overbrace{\lim_{s\to\infty}\big(\exp(sA)C\exp(sB)}^{0}-C\big)=\left|\begin{array}{c}\text{формула Ньютона-}\\ \text{-Лейбница}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int\limits_0^s\frac{d}{dt}[\exp(tA)C\exp(tB)]\,dt=\lim_{s\to\infty}\Big\{A\Big(\int\limits_0^s\exp(tA)C\exp(tB)dt\Big)+$$

$$+\Big(\int\limits_0^s\exp(tA)C\exp(tB)dt\Big)B\Big\}=A\Big(\lim_{s\to\infty}\int\limits_0^s\exp(tA)C\exp(tB)\,dt\Big)+$$

$$+\Big(\lim_{s\to\infty}\int\limits_0^s\exp(tA)C\exp(tB)\,dt\Big)B=-(AZ+ZB).$$

Теорема доказана. □

Наконец, из теоремы 1.2.7 и 1.2.8 получаем сразу же утверждение, которое уже было использовано в доказательстве теоремы Ляпунова 1.2.6.

Теорема 1.2.9. *При условии* $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ *уравнение*

$$ZA + A^*Z = -2I \tag{1.2.24}$$

имеет единственное решение $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *выражаемое формулой*

$$Z = 2\int_0^\infty \exp(tA^*)\exp(tA)\,dt. \tag{1.2.25}$$

Доказательство. Действительно, так как $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то по теореме 1.2.8 уравнение (1.2.24) имеет решение вида 1.2.23 с оператором $C = -2I \ll 0$, т. е. вида (1.2.25).

□

Таким образом, все дополнительные утверждения, связанные с теоремой Ляпунова, полностью доказаны.

Отметим в заключение, что установленные здесь признаки асимптотической устойчивости решений однородной задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u^0, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

могут быть существенно использованы при исследовании конкретных динамических систем с бесконечным числом степеней свободы.

1.2.4 Упражнения к параграфу 1.2

Упражнение 1.2.1. Доказать, что если $u_0 \in E$ — собственный элемент оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, отвечающий собственному значению λ_0, т.е. $Au_0 = \lambda_0 u_0$, то u_0 — собственный элемент оператор–функции $\exp(tA)$, отвечающий собственному значению $\exp(t\lambda_0)$:

$$\exp(tA)u_0 = \exp(t\lambda_0)u_0. \qquad \square$$

Упражнение 1.2.2. Доказать, что

$$\Big(\exp(tA)\Big)^* = \exp(tA^*) \quad (t \geqslant 0,\ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})). \qquad \square$$

Упражнение 1.2.3. Доказать, что

$$\|\exp(-tA)\| \leqslant \mathrm{e}^{t\|A\|} \quad (A \in \mathcal{L}(E)). \qquad \square$$

Упражнение 1.2.4. Доказать формулу

$$\oint_{\Gamma_A} \bigl(A - \lambda I\bigr)^{-1} d\lambda = -2\pi i I, \quad \text{если } \sigma(A) \text{ внутри } \Gamma_A.$$

Указание.

$$C_A := \bigl\{\lambda = (r_A + \varepsilon)\,\mathrm{e}^{i\varphi} : 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\bigr\} \quad \Longrightarrow \quad \oint_{\Gamma_A} \bigl(A - \lambda I\bigr)^{-1} d\lambda =$$

$$= \oint_{C_A} \bigl(A - \lambda I\bigr)^{-1} d\lambda = -\oint_{C_A} \lambda^{-1}\bigl(I - \lambda^{-1}A\bigr)^{-1} d\lambda =$$

$$= -\oint_{C_A} \lambda^{-1}\Bigl(I + \frac{A}{\lambda} + \ldots\Bigr)\, d\lambda = -2\pi i I.$$

□

Упражнение 1.2.5. Доказать формулы

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} \lambda^k \bigl(A - \lambda I\bigr)^{-1} d\lambda = A^k, \quad A \in \mathcal{L}(E),\ k = 1, 2, \ldots,$$

где Γ_A —жорданов контур, окружающий спектр оператора A. □

1.3 Задача о малых движениях идеальной жидкости в равномерно вращающемся сосуде

Эта задача интересна в математическом отношении и важна на практике: если спутник на орбите вращается вокруг некоторой оси, то жидкое топливо в баке совершает движения, которые должны быть учтены при проектировке ракеты.

1.3.1 Постановка задачи и основные уравнения.

Будем считать, что жесткий сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ целиком заполнен идеальной несжимаемой однородной жидкостью плотности ρ и равномерно вращается вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$. При этом система координат $Ox_1x_2x_3$ жестко связана с вращающимся сосудом, то есть является неинерциальной.

Заметим, что идеальной, то есть невязкой, жидкость считают тогда, когда вязкие силы, действующие в жидкости, можно считать пренебрежимо малыми. Однако, если вращение происходит достаточно долго, то какими бы ни были вязкие силы, имеющиеся в реальной жидкости, движение жидкости станет близким к равномерному вращению. Иными словами, в состоянии относительного равновесия система "тело+жидкость" будет равномерно вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$, а потому в системе координат $Ox_1x_2x_3$ будет находиться в покое.

Если вдоль оси Ox_3 действует также гравитационное поле с ускорением $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, то в состоянии относительного равновесия для градиента равновесного давления $P_0(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, имеем

$$\frac{1}{\rho}\nabla P_0 = -g\vec{e}_3 + \omega_0^2 r\vec{e}_r, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{1.3.1}$$

где $\vec{e}_r$ – орт цилиндрической системы координат, а второе слагаемое справа есть центробежная сила. Поэтому из (1.3.1) получаем

$$P_0(x) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + p_a,$$

где p_a — давление в начале координат.

Рассмотрим теперь, пренебрегая силами вязкости, малые движения идеальной жидкости, близкие к равномерному вращению. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ – поле относительной скорости жидкости, а через $p(t,x)$ – динамическую добавку к равновесному давлению $P_0(x)$. Тогда полное давление $P(t,x)$ равно

$$P(t,x) = P_0(x) + p(t,x). \tag{1.3.2}$$

С учетом (1.3.2) линеаризованные относительно искомых функций $\vec{u}(t,x)$ и $p(t,x)$ уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости (их называют уравнениями Эйлера) в системе координат $Ox_1x_2x_3$ принимают вид

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\vec{u}\times\vec{\omega}_0 + \vec{f}(t,x), \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \ (\text{в } \Omega). \tag{1.3.3}$$

Здесь записан второй закон Ньютона для движения жидкой частицы единичной массы в равномерно вращающейся системе координат: $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ — произведение массы жидкой частицы (равной единице) на ее ускорение — равно сумме действующих на эту частицу сил, то есть силы, обусловленной градиентом давления, кориолисовой силы, появившейся в силу неинерциальности системы, а также малого поля внешних сил. Кроме того, учтено, что жидкость однородна и несжимаема, то есть поле скоростей $\vec{u}(t,x)$ соленоидально.

Обозначим через $\vec{n}$ внешнюю нормаль к границе $S = \partial\Omega$ области Ω, занятой жидкостью. Так как частицы идеальной жидкости могут свободно скользить вдоль стенки S, но не могут проникать сквозь нее,то на S должно выполняться условие непротекания

$$\vec{u}_n := \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на}\, S). \tag{1.3.4}$$

Наконец, в начальный момент времени $t = 0$ в области Ω должно быть задано начальное поле скоростей:

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.3.5}$$

Таким образом, начально-краевая задача о малых движениях идеальной жидкости в сосуде Ω, близких равномерному вращению с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$, состоит в нахождении векторного поля скорости частиц жидкости $\vec{u}(t,x)$ и скалярного поля динамического давления $p(t,x)$ из системы уравнений (1.3.3), граничного условия (1.3.4) и начального условия (1.3.5).

Исследование этой задачи далее будет проведено методами функционального анализа, в частности, методами теории дифференциальных уравнений первого порядка с ограниченным операторным коэффициентом. Естественным функциональным пространством, в котором будут происходить основные события, станет гильбертово пространство вектор–функций $\vec{L}_2(\Omega)$, а также функций со значениями в этом пространстве.

1.3.2 Об ортогональном разложении гильбертова пространства векторных полей с конечной кинетической энергией

Рассмотрим произвольную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$), которая заполнена движущейся жидкостью. В каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ определен вектор скорости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и, таким образом, возникает поле скоростей $\vec{u}(x)$. (Зависимость от времени t сейчас несущественна.) Естественно предположить,что соответствующая масса жидкости имеет конечную кинетическую энергию T. Если жидкость однородна и имеет плотность ρ, то конечность кинетической энергии означает, что

$$2T = \rho \int\limits_{\Omega} |\vec{u}|^2 \, d\Omega < \infty.$$

Таким образом, все поля, которым соответствует конечная кинетическая энергия, образуют гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{\vec{L}_2(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |\vec{u}|^2 \, d\Omega \Big)^{1/2},$$

отвечающей скалярному произведению

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x) \, d\Omega. \tag{1.3.6}$$

(Здесь для простоты записана формула для вещественнозначных функций; в случае комплекснозначных функций второй сомножитель следует взять комплексно сопряженным.) Точка "$\cdot$" означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{3} u_k v_k.$$

Выделим в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$ два вида полей: потенциальные и соленоидальные. Поле $\vec{v}$ потенциально, если $\vec{v} = \nabla p$, и тогда

$$\int\limits_{\Omega} |\vec{v}| \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} |\nabla p|^2 \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{3} \Big| \frac{\partial p}{\partial x_k} \Big|^2 d\Omega < \infty.$$

У такого поля производные $\dfrac{\partial p}{\partial x_k}$ суммируются с квадратом по области Ω.

Гладкие (то есть дифференцируемые) соленоидальные поля $\vec{w}(x)$ удовлетворяют дополнительному условию

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{ в } \Omega).$$

Рассмотрим подмножество гладких соленоидальных полей, у которых нормальная составляющая поля на границе $S = \partial\Omega$ обращается в нуль:

$$\vec{w}_n := \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{ на } S).$$

Как известно из курса математического анализа, любое гладкое векторное поле может быть представлено в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\vec{u} = \nabla p + \vec{w}, \quad \operatorname{div} \vec{w} = 0.$$

Если поле $\vec{w}$ удовлетворяет еще дополнительному условию непротекания (1.3.2), то поля ∇p и $\vec{w}$ оказываются ортогональными в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$:

$$(\nabla p, \vec{w})_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{w} \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\nabla p \cdot \vec{w} + p \operatorname{div} \vec{w}) \, d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(p\vec{w}) \, d\Omega = \int\limits_{S} (p\vec{w}) \cdot \vec{n} \, dS = \int\limits_{S} p w_n \, dS = 0.$$

Отсюда, осуществляя предельный переход к негладким полям, можно получить следующий результат (его доказательство не приводится).

Лемма 1.3.1. *Имеет место разложение $\vec{L}_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства*

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{1.3.7}$$

где

$$\vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \vec{v} = \nabla p\},$$

а $\vec{J}_0(\Omega)$ — замыкание в норме $\vec{L}_2(\Omega)$ множества $\widetilde{\vec{J}_0}(\Omega)$ гладких соленоидальных полей с условием непротекания на твердой стенке $S = \partial\Omega$:

$$\widetilde{\vec{J}_0}(\Omega) := \{\vec{w} \in \vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{w} = 0 \ (\textit{в}\ \Omega),\ w_n = 0 \ (\textit{на}\ S)\}.$$

□

Ортогональное разложение (1.3.7), а также дополнительное разбиение подпространства $\vec{G}(\Omega)$ на два других подпространства, носят название разложения Г. Вейля. Разложение (1.3.7) сейчас будет существенно использовано при исследовании задачи (1.3.3)–(1.3.5) о малых движениях вращающейся идеальной жидкости.

1.3.3 Переход к дифференциальному уравнению первого порядка в гильбертовом пространстве

Особенностью системы уравнений (1.3.3) является то обстоятельство, что эта система не содержит производных по времени от одной из искомых функций — давления $p(t,x)$. Эту трудность можно избежать, если воспользоваться ортогональным разложением (1.3.7).

Будем считать поля $\vec{u}(t,x)$, $\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$. Тогда в силу условия соленоидальности и условия непротекания поле $\vec{u}(t,x)$ принимает при фиксированных t значения в подпространстве $\vec{J}_0(\Omega)$; соответственно поле $\nabla p(t,x)$ при каждом t является элементом подпространства $\vec{G}(\Omega)$.

Введем в рассмотрение ортопроекторы P_0 и P_G на подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно. Как известно из теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, они обладают свойствами

$$P_0 = P_0^* = P_0^2, \quad P_G = P_G^* = P_G^2, \quad P_0 + P_G = I, \quad P_0 P_G = P_G P_0 = 0.$$

Так как $\nabla p \in \vec{G}(\Omega)$, то $P_G \nabla p = \nabla p$, $P_0 \nabla p = \vec{0}$, аналогично из условия $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)$ имеем $P_0 \vec{u} = \vec{u}$, $P_G \vec{u} = \vec{0}$. Применим ортопроекторы P_0 и P_G к левой и правой частям первого уравнения (1.3.3). Учитывая еще, что производная по t коммутирует с ортопроекторами(их действие зависит от пространственных переменных), получим два соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} = 2\omega_0 P_0(\vec{u} \times \vec{e}_3) + P_0 \vec{f}(t), \\ &\vec{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\omega_0 P_G(\vec{u} \times \vec{e}_3) + P_G \vec{f}(t). \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Здесь частная производная по времени $\dfrac{\partial}{\partial t}$ заменена обыкновенной производной $\dfrac{d}{dt}$, поскольку теперь поле $\vec{u}$ зависит лишь от одной переменной t и принимает значения в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Система уравнений (1.3.8) обладает следующим замечательным свойством: если поле $\vec{u} = \vec{u}(t)$ найдено, то ∇p можно найти из второго уравнения (1.3.8), в то же время первое уравнение (1.3.8) не содержит ∇p. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь задачу Коши для первого уравнения (1.3.8) при начальном условии

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega). \tag{1.3.9}$$

Введем действующий в $\vec{J}_0(\Omega)$ оператор K по закону

$$K\vec{u} := 2\omega_0 P_0(\vec{u} \times \vec{e}_3), \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega). \tag{1.3.10}$$

Тогда задачу (1.3.8), (1.3.9) можно переписать как задачу Коши для обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = K\vec{u} + \vec{f}_0(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \vec{f}_0 := P_0\vec{f}(t). \tag{1.3.11}$$

1.3.4 О разрешимости начально–краевой задачи

Прежде чем выяснять условия разрешимости задачи (1.3.11), рассмотрим свойства операторного коэффициента K, который назовем кориолисовым оператором (см. (1.3.10))

Теорема 1.3.1. *Оператор K, действующий в гильбертовом пространстве $\vec{J}_0(\Omega)$, обладает следующими свойствами*

$$K^* = -K, \quad K \in \mathcal{L}(\vec{J}_0(\Omega)),$$

т.е. K ограничен и кососимметричен, причем

$$||K|| \leqslant 2\omega_0. \tag{1.3.12}$$

Доказательство. В силу определения (1.3.10) аддитивность K очевидна, а его ограниченность будет следовать из (1.3.12). Проверим сначала свойство кососимметричности.

Пусть $\vec{u}$, $\vec{v}$ — любые векторные поля из $\vec{J}_0(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&(K\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = (2\omega_0 P_0(\vec{u}\times\vec{e}_3),\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = \\
&= 2\omega_0((\vec{u}\times\vec{e}_3),P_0\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = 2\omega_0((\vec{u}\times\vec{e}_3),\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = \\
&= 2\omega_0\int_\Omega(\vec{u}\times\vec{e}_3)\cdot\vec{v}\,d\Omega = 2\omega_0\int_\Omega(\vec{e}_3\times\vec{v})\cdot\vec{u}\,d\Omega = \\
&= -2\omega_0\int_\Omega \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{e}_3)\,d\Omega = (\vec{u},(-2\omega_0)(\vec{v}\times\vec{e}_3))_{\vec{L}_2(\Omega)} = \\
&= (P_0\vec{u},(-2\omega_0)(\vec{v}\times\vec{e}_3))_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{u},(-2\omega_0)P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3))_{\vec{L}_2(\Omega)} = \\
&= (\vec{u},(-K)\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{u},K^*\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

т.е. $K^* = -K$.

Далее, при любом поле $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned}
&||K\vec{u}||^2_{\vec{L}_2(\Omega)} = 4\omega_0^2||P_0(\vec{u}\times\vec{e}_3)||^2_{\vec{L}_2(\Omega)} \leqslant 4\omega_0^2||\vec{u}\times\vec{e}_3||^2_{\vec{L}_2(\Omega)} = \\
&= 4\omega_0^2\int_\Omega|\vec{u}\times\vec{e}_3|^2\,d\Omega \leqslant 4\omega_0^2\int_\Omega|\vec{u}|^2\,d\Omega = 4\omega_0^2||\vec{u}||^2_{\vec{L}_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и следует свойство (1.3.12). Теорема доказана.

□

Следствием теоремы 1.3.1, а также абстрактной теоремы 1.2.2 является такой вывод.

Теорема 1.3.2. *Пусть в начально-краевой задаче* (1.3.3)–(1.3.5) *о малых движениях идеальной вращающейся жидкости поле внешних массовых сил* $\vec{f}(t,x)$ *является непрерывной функцией переменной* t *со значениями в гильбертовом пространстве* $\vec{L}_2(\Omega)$*, а начальное поле* $\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega)$*. Тогда задача* (1.3.3)–(1.3.5) *имеет единственное решение* $\vec{u}(t,x)$*,* $\nabla p(t,x)$*, для которого* $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}(t,x)$ *и* $\nabla p(t,x)$ *— непрерывные функции переменной* t *со значениями в подпространствах* $\vec{J}_0(\Omega)$ *и* $\vec{G}(\Omega)$ *соответственно.*

Доказательство. Если $\vec{f}(t,x)$ – непрерывная по t функция со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, то функции $P_0\vec{f}(t,x)$ и $P_G\vec{f}(t,x)$ в силу ограниченности ортопроекторов P_0 и P_G также являются непрерывными по t функциями со значениями в $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно.

Так как $\vec{u}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega)$, то по теореме 1.2.2 задача (1.3.11) имеет единственное и притом непрерывно дифференцируемое по t решение

$$\vec{u}(t)=\exp(tK)\vec{u}^0+\int\limits_0^t\exp((t-s)K)\vec{f}_0(s)\,ds.$$

Далее, из непрерывности $\vec{u}(t)$ получаем, что $P_G(\vec{u}(t)\times\vec{e}_3)$ — непрерывная функция со значениями в $\vec{G}(\Omega)$; поэтому из второго уравнения (1.3.8) имеем свойство непрерывности $\nabla p(t)$. Так как система уравнений (1.3.8) (или задача Коши (1.3.11) вместе со вторым уравнением (1.3.8)) равносильна исходной начально–краевой задаче (1.3.3)–(1.3.5), то отсюда следуют все утверждения теоремы.

□

Заметим, наконец, что для решений задачи (1.3.3)–(1.3.5) имеет место следующий важный факт.

Теорема 1.3.3. *В задаче* (1.3.3)–(1.3.5) *как при наличии гироскопических (кориолисовых) сил, так и при их отсутствии имеет место закон баланса кинетической энергии гидродинамической системы:*

$$
\frac{1}{2}\rho\int\limits_{\Omega}|\vec{u}(t,x)|^2\,d\Omega =
$$
$$
=\frac{1}{2}\rho\int\limits_{\Omega}|\vec{u}^0(x)|^2\,d\Omega+\rho\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\Omega}\vec{f}(\tau,x)\cdot\vec{u}(\tau,x)\,d\Omega\Big)\,d\tau. \qquad (1.3.14)
$$

Здесь слева стоит кинетическая энергия системы в произвольный момент времени t, а справа — сумма кинетической энергии в начальный момент $t=0$ и работы внешних сил над системой.

Доказательство. Умножим скалярно в (вещественном) пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$ обе части уравнения (1.3.3) на $\rho\vec{u}$; получим

$$
\rho\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{u}\Big)_{\vec{L}_2(\Omega)} =
$$
$$
=-(\nabla p,\vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)}+2\omega_0\rho(\vec{u}\times\vec{e}_3,\vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)}+\rho(\vec{f},\vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)}. \qquad (1.3.15)
$$

Так как $\nabla p\in\vec{G}(\Omega)$, $\vec{u}\in\vec{J}_0(\Omega)$, то $(\nabla p,\vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)}=0$. Далее,

$$
(\vec{u}\times\vec{e}_3,\vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}(\vec{u}\times\vec{e}_3)\cdot\vec{u}\,d\Omega=0, \qquad (1.3.16)
$$

то есть кориолисовы силы не производят работу.

Заметим еще, что

$$
\rho\Big(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{u}\Big)_{\vec{L}_2(\Omega)}=\rho\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{u}\,d\Omega=\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\vec{u}(t,x)|^2\,d\Omega. \qquad (1.3.17)
$$

Поэтому из (1.3.15) с учетом (1.3.16), (1.3.17) после интегрирования по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса кинетической энергии (1.3.15). Теорема доказана. □

Замечание 1.3.1. Соотношение (1.3.14) можно считать также и законом баланса полной кинетической плюс потенциальной энергии системы, если заметить, что в рассматриваемом случае при движении жидкости в сосуде ее потенциальная энергия не изменяется и равна потенциальной энергии в начальный момент времени.

□

1.3.5 Собственные колебания

Рассмотрим свободные движения идеальной вращающейся жидкости, то есть такие решения задачи (1.3.3)–(1.3.5), которые происходят при отсутствии поля внешних сил: $\vec{f}(t,x) \equiv \vec{0}$.

Определение 1.3.1. *Собственными колебаниями идеальной вращающейся жидкости называются решения однородной задачи* (1.3.3)–(1.3.4)*, которые зависят от* t *по закону* $\exp(i\omega t)$*:*

$$\vec{u}(t,x) = \exp(i\omega t)\vec{u}(x), \quad p(t,x) = \exp(i\omega t)p(x). \tag{1.3.18}$$

□

Здесь ω – частота собственных колебаний, а $\vec{u}(x)$ и $p(x)$ — амплитудные функции для поля скорости и давления соответственно.

Подставляя функции (1.3.18) в уравнения (1.3.3) и граничное условие (1.3.4), приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{gathered} 2\omega_0(\vec{u} \times \vec{e}_3) - \frac{1}{\rho}\nabla p = i\omega\vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), \\ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S = \partial\Omega), \end{gathered} \tag{1.3.19}$$

относительно спектрального параметра $\omega \in \mathbb{C}$. Заметим, что амплитудные функции $\vec{u}(x)$ и $p(x)$ являются, вообще говоря, комплекснозначными.

В операторной форме, следующей из эволюционной задачи (1.3.11), проблема (1.3.19) приводит к уравнению

$$K\vec{u} = i\omega\vec{u}, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega). \tag{1.3.20}$$

Здесь $\vec{J}_0(\Omega)$ – подпространство $\vec{L}_2(\Omega)$, причем оба эти пространства теперь следует считать комплексными, а скалярное произведение взамен (1.3.6) определять по формуле

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{1.3.21}$$

После комплексификации $\vec{L}_2(\Omega)$ оператор K сохраняет свойство кососимметричности, то есть $K^* = -K$ (см. теорему 1.3.1 и вывод формулы (1.3.13)). Введем, опираясь на этот факт, оператор G согласно формуле

$$G = -iK. \tag{1.3.22}$$

Теорема 1.3.4. *Оператор G является самосопряженным ограниченным оператором, действующим в $\vec{J}_0(\Omega)$, для которого*

$$\sigma(G) \subset [-2\omega_0, 2\omega_0]. \tag{1.3.23}$$

Доказательство. В самом деле,

$$G^* = iK^* = i(-K) = -iK = G.$$

Далее, так как $||K|| = ||G||$, то из неравенства (1.3.12) имеем

$$\|G\| = \|K\| \leqslant 2\omega_0,$$

откуда следует свойство (1.3.23). Теорема доказана.

□

Осуществим в задаче (1.3.20) замену $K = iG$, то есть используем связь (1.3.21). Тогда вместо (1.3.20) приходим к задаче на собственные значения

$$G\vec{u} = \omega\vec{u}, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega), \tag{1.3.24}$$

для самосопряженного оператора G.

Напомним, что согласно одной из классификаций точек спектра $\sigma(A)$ самосопряженного оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ множество $\sigma(A)$ состоит из двух непересекающихся множеств:

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_e(A), \quad \sigma_d(A) \cap \sigma_e(A) = \emptyset.$$

Здесь $\sigma_d(A)$ — дискретный спектр оператора, то есть совокупность изолированных конечнократных собственных значений, а $\sigma_e(A)$ — предельный спектр, который называют также существенным спектром, или спектром сгущения.

Приведем известный критерий принадлежности точки $\lambda \in \mathbb{R}$ к множеству $\sigma_e(A)$, выраженный в терминах самого оператора A.

Теорема 1.3.5. *(Г. Вейль). Для принадлежности λ к $\sigma_e(A)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность Вейля для оператора A в точке λ, то есть такая слабо сходящаяся к нулю (в частности, ортонормированная) последовательность элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{H}$, для которой*

$$\inf_k \|u_k\| > 0, \quad (A - \lambda I)u_k \to 0 \ (k \to \infty).$$

□

Теорема 1.3.6. *Спектр $\sigma(G)$ оператора G совпадает с его предельным спектром и составляет отрезок $[-2\omega_0, 2\omega_0]$:*

$$\sigma(G) = \sigma_e(G) = [-2\omega_0, 2\omega_0]. \tag{1.3.25}$$

Доказательство этих утверждений приведено в монографии Н.Д. Копачевского, С.Г. Крейна и Нго Зуй Кана "Операторные методы в линейной гидродинамике" (М., Наука, 1989) [6, 193–194] и основано на оригинальной работе Ральстона [14]. Оно состоит в построении последовательности Вейля для оператора $K = iG$ в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. При этом установлено, что

$$\sigma(K) = \sigma_e(K) = [-2i\omega_0, 2i\omega_0].$$

Отсюда и следуют свойства (1.3.25). Теорема доказана.

□

Назовем оператор G, заданный формулой (1.3.21), *гироскопическим* оператором задачи о малых движениях вращающейся жидкости. Из формул (1.3.25) можно сделать следующие физические выводы.

Теорема 1.3.7. *Кориолисовы (гироскопические) силы, действующие на равномерно вращающуюся однородную несжимаемую жидкость, заполняющую некоторый объем $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, порождают собственные колебания жидкости, являющиеся внутренними инерционными волнами с частотами ω, которые плотно заполняют отрезок $[-2\omega_0, 2\omega_0]$, где ω_0 — угловая скорость вращения системы.*

□

Замечание 1.3.2. Как показывают примеры, тонкая структура спектра внутренних инерционных волн существенно зависит от конфигурации области Ω. Так, в цилиндрическом сосуде совокупность собственных значений ω задачи (1.3.24) образует счетное множество, плотное на отрезке $[-2\omega_0, 2\omega_0]$, а соответствующие собственные функции — полную ортогональную систему (ортогональный базис) в пространстве $\vec{J}_0(\Omega)$. Однако при небольшой вариации области Ω чисто точечный спектр может стать непрерывным на некоторых интервалах или даже на всем отрезке $[-2\omega_0, 2\omega_0]$. Таким образом, предельный спектр исследуемой задачи не зависит от вариации области Ω, занятой жидкостью, а его тонкая структура — существенно зависит.

□

1.3.6 Упражнения к параграфу 1.3

Приведенные здесь упражнения 1.3.1–1.3.7 осуществляют последовательные этапы доказательства основной спектральной теоремы 1.3.6, а также устанавливают другие факты, изложенные в этом параграфе.

Упражнение 1.3.1. В задаче на собственные значения

$$2\omega_0(\vec{u}\times\vec{e}_3) - \frac{1}{\rho}\nabla p = i\omega\vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega\ ), \quad u_n = 0 \quad (\text{ на } S = \partial\Omega\ ),$$

равносильной задаче

$$K\vec{u} = i\omega\vec{u}, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega),$$

применить критерий Вейля принадлежности точки $i\omega$, $0 < |\omega| < 2\omega_0$, предельному спектру оператора $K = iG$, $G = G^*$, то есть найти такую последовательность Вейля $\{\vec{u}_l\}_{l=1}^{\infty}$, что

$$\|K\vec{u}_l - i\omega\vec{u}_l\|_{\vec{J}_0(\Omega)} / \|\vec{u}_l\|_{\vec{J}_0(\Omega)} \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Указание. См. работу [14]. □

Упражнение 1.3.2. Вывести линеаризованные уравнения движения (1.3.3) вращающейся жидкости.

Указание. Воспользоваться соответствующим выводом из монографии [6, с. 124–125]. □

Упражнение 1.3.3. Доказать разложение Вейля

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega).$$

Указание. См. [6, с. 103–106]. □

Упражнение 1.3.4. Повторить подробно доказательство теоремы 1.3.2. □

Упражнение 1.3.5. Повторить вывод закона баланса кинетической энергии (теорема 1.3.3). □

Упражнение 1.3.6. Проверить, что после комплексификации $\vec{L}_2(\Omega)$ оператор K сохраняет свойство кососимметричности (см. (1.3.21), (1.3.22)). □

Упражнение 1.3.7. Решить задачу на собственные значения для оператора K (или G) в случае области Ω в виде кругового цилиндра (метод разделения переменных). □

Глава 2

Дифференциальные уравнения второго порядка

2.1 Дифференциальные уравнения второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами

2.1.1 Решение однородного уравнения

Рассмотрим в банаховом пространстве E абстрактную задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \tag{2.1.1}$$

Здесь $u = u(t)$ — искомая функция со значениями в E, $f(t)$ — заданная функция со значениями в E, u^0 и u^1 — заданные элементы из E, а оператор $A \in \mathcal{L}(E)$.

Определение 2.1.1. *Сильным решением уравнения* (2.1.1) *назовём такую функцию $u(t) \in C^2([0,T]; E)$, для которой выполнено уравнение* (2.1.1)*, где все слагаемые — непрерывные функции переменной t.*

□

Прежде чем исследовать задачу (2.1.1) в произвольном банаховом пространстве E, заметим сначала, что в одномерном случае, когда $E = \mathbb{R}$ и $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, метод вариации произвольных постоянных, применённый к уравнению (2.1.1), приводит к формуле

$$u(t) = \cos(tA^{1/2})u^0 + A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})u^1 + \\ + \int\limits_0^{\tau} A^{-1/2}\sin\big((t-s)A^{1/2}\big)f(s)\,ds. \quad (2.1.2)$$

Как сейчас будет выяснено, эта формула сохраняет смысл и для произвольного банахова пространства E и $A \in \mathcal{L}(E)$. С целью установления этого факта перейдём от задачи Коши (2.1.1) для дифференциального уравнения второго порядка в пространстве E к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $E^{(2)} := E \oplus E$, элементами которого являются пары $\hat{u} = (u_1; u_2)^\tau$, u_1, $u_2 \in E$, с нормой, вычисляемой по формуле

$$\|\hat{u}\|_2^2 := \|u_1\|_E^2 + \|u_2\|_E^2.$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение (2.1.1) и положим

$$u =: u_1, \quad \frac{du}{dt} =: u_2.$$

Тогда уравнение (2.1.1) заменяется эквивалентной системой уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -Au_1,$$

т.е. уравнением

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \mathcal{A}\hat{u}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{u} = (u_1; u_2)^\tau \in E^{(2)}. \quad (2.1.3)$$

Здесь $\mathcal{A}$ — матричный операторный коэффициент, являющийся ограниченным оператором из $\mathcal{L}(E^{(2)})$, так как $A \in \mathcal{L}(E)$ и единичный оператор $I \in \mathcal{L}(E)$.

Лемма 2.1.1. *Для оператора $\mathcal{A}$ из* (2.1.3) *справедливы соотношения*

$$\mathcal{A}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}, \ \mathcal{A}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & A^k \\ -A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}, \ \ k \in \mathbb{N}. \quad (2.1.4)$$

Доказательство. Оно проводится по индукции.

□

На основе формул (2.1.4) можно выписать общее решение дифференциального уравнения (2.1.3) при начальном условии

$$\hat{u}(0) = \big(u_1(0); u_1'(0)\big)^\tau = (u^0; u^1)^\tau \in E^{(2)}. \quad (2.1.5)$$

Теорема 2.1.1. *Общее решение однородной задачи* (2.1.3), (2.1.5) *имеет вид*

$$\hat{u}(t) = \exp(t\mathcal{A})\,\hat{u}(0), \tag{2.1.6}$$

где

$$\exp(t\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} C(t) & S(t) \\ -AS(t) & C(t) \end{pmatrix}, \tag{2.1.7}$$

$$\begin{gathered} C(t)\big(= \cos(tA^{1/2})\big) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}A^k}{(2k)!}, \\ S(t) = \int_0^t C(s)\,ds\big(= A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})\big) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}A^k}{(2k+1)!}. \end{gathered} \tag{2.1.8}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.2.1 задача (2.1.3), (2.1.5) имеет при любом $\hat{u}(0) \in E^{(2)}$ единственное решение $\hat{u}(t)$, выражаемое формулой

$$\hat{u}(t) = \exp(t\mathcal{A})\,\hat{u}(0) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\mathcal{A}^n}{n!}\Big)\hat{u}(0).$$

Однако

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\mathcal{A}^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \frac{\mathcal{A}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1} \frac{\mathcal{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Пользуясь формулами (2.1.4), отсюда получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \frac{\mathcal{A}^{2k}}{(2k)!} = $$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} \frac{A^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} \frac{A^{k}}{(2k)!} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{pmatrix},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k+1} \frac{\mathcal{A}^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k+1} \frac{A^{k}}{(2k+1)!} \\ -A\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k+1} \frac{A^{k}}{(2k+1)!} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S(t) \\ -AS(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где $C(t)$ и $S(t)$ — введенные выше функции (их называют соответственно косинус– и синус–функциями оператора A).

Отсюда для $\exp(t\mathcal{A})$ получаем формулу (2.1.7), и теорема доказана. $\square$

Замечание 2.1.1. Запись $C(t) = \cos(tA^{1/2})$ имеет смысл тогда, когда существует оператор $A^{1/2} \in \mathcal{L}(E)$, $E = \mathcal{H}$. Однако представление этой функции в виде ряда не содержит дробных степеней A, и поэтому выражение $\cos(tA^{1/2})$ имеет смысл при любом $A \in \mathcal{L}(E)$. Аналогичное утверждение имеет место и для $S(t) = \int\limits_0^t C(s)\,ds = A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})$, где последнее выражение имеет смысл при обратимом $A > 0$, $A \in \mathcal{L}(E)$, $E = \mathcal{H}$. Однако ряд для $S(t)$ снова не содержит дробных и отрицательных степеней оператора A и поэтому имеет смысл при любых $A \in \mathcal{L}(E)$.

$\square$

Следствием теоремы 2.1.1 является такой важный факт.

Теорема 2.1.2. *Решение однородной задачи* (2.1.1) *при любых* u^0 *и* u^1 *из* E *имеет вид*

$$u(t) = C(t)\,u^0 + S(t)\,u^1, \tag{2.1.9}$$

где $C(t)$ *и* $S(t)$ *— введенные формулами* (2.1.8) *косинус– и синус–функции оператора* A.

Доказательство. Из (2.1.6), (2.1.7) в векторно–матричной форме имеем

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t) & S(t) \\ -AS(t) & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix},$$

откуда первая строчка приводит к формуле (2.1.9), а вторая строчка даёт соотношение

$$u'(t) = -AS(t)u^0 + C(t)u^1. \tag{2.1.10}$$

Отсюда с использованием легко проверяемой формулы

$$C'(t) = -AS(t)$$

получаем, что

$$u''(t) = -AC(t)u^0 - AS(t)u^1 = -Au(t),$$

т.е. однородное уравнение (2.1.1) выполнено.

Далее, из (2.1.9), (2.1.10) следует, что

$$u(0) = C(0)u^0 = u^0, \quad u'(0) = C(0)u^1 = u^1.$$

Теорема доказана. $\square$

2.1.2 Решение неоднородного уравнения

Перейдём теперь к рассмотрению неоднородной задачи (2.1.1). Как сейчас будет выяснено, решение этой задачи напоминает формулу (2.1.2) и выражается через функции $C(t)$ и $S(t)$, введённые в (2.1.8).

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены условия*

$$f(t) \in C\big([0,T];E\big), \quad u^0,\ u^1 \in E.$$

Тогда решение задачи Коши (2.1.1) *единственно и имеет вид*

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int\limits_0^t S(t-s)f(s)\,ds. \tag{2.1.11}$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1.2 и линейности задачи (2.1.1) достаточно убедиться, что функция

$$v(t) := \int\limits_0^t S(t-s)f(s)\,ds \tag{2.1.12}$$

является решением неоднородного уравнения (2.1.1) и удовлетворяет начальным условиям

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \tag{2.1.13}$$

Первое условие (2.1.13) следует непосредственно из (2.1.12), а второе — из соотношения

$$v'(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t S(t-s)f(s)\,ds = S(0)f(t) + \int\limits_0^t S'(t-s)f(s)\,ds \tag{2.1.14}$$

при $t = 0$.

Проверим теперь, что

$$v''(t) + Av(t) = f(t).$$

В самом деле, из (2.1.14) и связи $S'(t-s) = C(t-s)$ имеем

$$v'(t) = \int\limits_0^t C(t-s)f(s)\,ds.$$

Поэтому

$$v''(t) = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^t C(t-s)f(s)\,ds\Big) = C(0)f(t) + \int\limits_0^t C'(t-s)f(s)\,ds =$$

$$= f(t) - A\int\limits_0^t S(t-s)f(s)\,ds = f(t) - Av(t).$$

Теорема доказана. □

2.1.3 Полное дифференциальное уравнение второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами

Как уже упоминалось в п. 1.1, при исследовании малых колебаний механических систем, систем с бесконечным числом степеней свободы, а также сплошных сред часто приходится исследовать задачу Коши для полного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом или гильбертовом пространстве E:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F+K)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.$$

Здесь A — оператор кинетической энергии системы, B — оператор потенциальной энергии, F — оператор диссипации, а K — кориолисов оператор. Если пространство $E = \mathcal{H}$ — гильбертово, то квадратичная форма кинетической энергии имеет вид $\frac{1}{2}\Big(A\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\Big)_{\mathcal{H}}$, и потому естественно считать, что $A \gg 0$. Далее, квадратичная форма потенциальной энергии имеет вид $\frac{1}{2}(Bu, u)_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $B = B^*$. Если состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, то $B \geqslant 0$ или даже $B \gg 0$. Оператор диссипации, очевидно, должен удовлетворять условию $\big(F\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\big)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$, т.е. $F \geqslant 0$. Наконец, кориолисов оператор K обладает свойством кососимметричности: $K^* = -K$, так что гироскопический оператор $G = -iK$ самосопряжен: $G = G^*$.

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши для полного (т.е. содержащего du/dt) дифференциального уравнения второго порядка

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+C\frac{du}{dt}+Bu=f(t),\quad u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1, \tag{2.1.15}$$

в предположении, что A, B, C — ограниченные операторы, причем также $A^{-1}\in\mathcal{L}(E)$. Как и для неполного дифференциального уравнения второго порядка, исследованного в предыдущем пункте, задачу (2.1.15) можно привести к задаче Коши для неоднородного дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $E^{(2)}=E\oplus E$.

Теорема 2.1.4. *Если выполнены условия*

$$A\,,\ A^{-1},\ B,\ C\in\mathcal{L}(E),\quad u^0,\ u^1\in E,\quad f(t)\in C\big([0;T];E\big),$$

то задача Коши имеет единственное дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Осуществим в (2.1.15) замену

$$\frac{du}{dt}=:v \tag{2.1.16}$$

и перейдем от (2.1.15) к задаче Коши для системы уравнений

$$\begin{pmatrix}0&A\\I&0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B&C\\0&-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(t)\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u(0)\\v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^0\\u^1\end{pmatrix}, \tag{2.1.17}$$

которую будем трактовать как одно уравнение в пространстве $E^{(2)}=E\oplus E$.

Так как оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, то матричный оператор $\left(\begin{smallmatrix}0&A\\I&0\end{smallmatrix}\right)$ обратим, и обратный имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&A\\I&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&I\\A^{-1}&0\end{pmatrix}=:\mathcal{D}.$$

Применяя его к обеим частям (2.1.17), будем иметь задачу Коши

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt}+\mathcal{D}\mathcal{J}y=\mathcal{D}\hat f(t),\quad \mathcal{J}:=\begin{pmatrix}B&C\\0&-I\end{pmatrix},\\ \hat f(t)=(f(t);0)^\tau,\quad y=\big(u(t);v(t)\big)^\tau,\quad y(0)=(u^0;u^1)^\tau.\end{gathered} \tag{2.1.18}$$

Из условий теоремы следует, что

$$\mathcal{J}\in\mathcal{L}(E^{(2)}),\quad \mathcal{D}\in\mathcal{L}(E^{(2)}),\quad \mathcal{D}\hat f(t)\in C\big([0;T];E^{(2)}\big),\quad y(0)\in E^{(2)}.$$

Поэтому согласно теореме 1.2.2 задача (2.1.18) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение

$$y(t) = \exp\bigl(-t\mathcal{D}\mathcal{J}\bigr)y(0) + \int\limits_0^t \exp\bigl(-(t-s)\mathcal{D}\mathcal{J}\bigr)\mathcal{D}\hat{f}(s)\,ds,$$

т.е. такую совокупность непрерывно дифференцируемых функций $u(t)$ и $v(t)$, для которых выполнены уравнения и начальные условия (2.1.17). Возвращаясь от системы (2.1.17) снова к дифференциальному уравнению и начальным условиям (2.1.15), приходим к выводу, что эта задача имеет дважды непрерывно дифференцируемое и притом единственное решение $u(t)$. Теорема доказана. $\square$

2.1.4 Упражнения к параграфу 2.1

Упражнение 2.1.1. Доказать лемму 2.1.1. $\square$

Упражнение 2.1.2. Проверить формулу

$$C'(t) = -AS(t). \qquad \square$$

Упражнение 2.1.3. Пусть в дифференциальном уравнении

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + Bu = 0,$$

рассматриваемом в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, коэффициенты A и B — операторы кинетической и потенциальной энергии — положительно определены: $A \gg 0$, $B \gg 0$, причём $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Показать, что в этом случае все решения уравнения ограничены при любых $t \in \mathbb{R}$.

Указание. Воспользоваться заменой $A^{1/2}u(t) = v(t)$ и исследовать решения $v(t)$ с помощью группы унитарных операторов. $\square$

Упражнение 2.1.4. Пусть для уравнения

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + K\frac{du}{dt} + Bu = 0,$$

рассматриваемого в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, выполнены условия

$$A \gg 0, \quad B \gg 0, \quad K^* = -K, \quad A\,,\,B\,,\,K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Показать, что все решения этого уравнения ограничены на всей оси $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Упражнение 2.1.5. Проверить, что при $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$

$$\begin{pmatrix} B & A \\ I & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A^{-1} & -A^{-1}B \end{pmatrix}. \qquad \square$$

2.2 Колебания идеальной стратифицированной жидкости в ограниченной области

Эта задача важна в прикладном отношении, поскольку стратифицированная несжимаемая жидкость, заполняющая некоторую область (бак с нефтью и т.п.), может породить внутренние волновые движения, не имеющие аналога для однородной жидкости. Исследования задач подобного рода начались в восьмидесятые годы и в настоящее время интенсивно ведутся во многих научных центрах мира.

2.2.1 Математическая постановка задачи

Пусть замкнутый неподвижный сосуд $\Omega \in \mathbb{R}^3$ полностью заполнен идеальной несжимаемой стратифицированной жидкостью. В такой жидкости в состоянии покоя плотность ρ_0 частиц изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3, направленной против вектора ускорения гравитационного поля: $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, $\rho_0 = \rho_0(x_3)$. Из физических соображений естественно считать, что

$$\begin{gathered} 0 < m \leqslant \rho_0(x_3) \leqslant M < \infty, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ m = \inf_{x_3} \rho_0(x_3), \quad M = \sup_{x_3} \rho_0(x_3). \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Будем для определённости считать, что *функция* $\rho_0(x_3)$ *непрерывно дифференцируема по* x_3, а *стратификация* (расслоение по плотности вдоль оси Ox_3) *является устойчивой*. Характеристикой устойчивости такой жидкости, а также возникающих в ней сил плавучести является так называемая *частота плавучести* $\omega_0(x_3)$ (или *частота Вяйсяля-Брендта*), которая определяется по формуле

$$\omega_0^2(x_3) := -g\rho_0'(x_3)/\rho_0(x_3).$$

Физический смысл $\omega_0(x_3)$ состоит в том, что частица жидкости, находящаяся на уровне $\tilde{x}_3 = \text{const}$, при небольшом смещении с этого уровня начинает за счет архимедовых сил плавучести колебаться относительно уровня $\tilde{x}_3 = \text{const}$ с частотой $\omega_0(\tilde{x}_3)$.

Далее будем считать, что $\omega_0^2(x_3) \geqslant 0$ и, более того, выполнено условие устойчивой стратификации

$$\begin{gathered} 0 < \omega_{0,-}^2 \leqslant \omega_0^2(x_3) \leqslant \omega_{0,+}^2 < \infty, \\ \omega_{0,-}^2 = \min_{x\in\overline{\Omega}} \omega_0^2(x_3), \quad \omega_{0,+}^2 = \max_{x\in\overline{\Omega}} \omega_0^2(x_3). \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

Нетрудно установить, что в этом случае формулы (2.2.1) являются следствием (2.2.2), если в какой-либо точке x_3^0 будет $\rho_0(x_3^0) > 0$.

В состоянии покоя в стратифицированной жидкости выполнено следующее условие равновесия:

$$-\frac{1}{\rho_0(x_3)}\nabla P_0 - g\vec{e}_3 = \vec{0}, \tag{2.2.3}$$

где P_0 — равновесное давление. Отсюда получаем

$$P_0 = P_0(x_3) = P_0(0) - g\int\limits_0^{x_3} \rho_0(\xi)\,d\xi.$$

Рассмотрим малые движения стратифицированной жидкости, близкие к состоянию покоя. Соответствующие нелинейные уравнения движения и уравнение неразрывности для идеальной жидкости имеют вид

$$\tilde{\rho}\Big[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\Big] = -\nabla P - \tilde{\rho} g\vec{e}_3 + \tilde{\rho}\vec{f}(t,x), \quad \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho}\vec{u}) = 0 \ (\text{в } \Omega). \tag{2.2.4}$$

Здесь $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t,x)$ — плотность жидкости, $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ — поле скорости, $P = P(t,x)$ — поле полного давления, $\vec{f}(t,x)$ — поле внешних массовых сил, отличных от гравитационных.

Представим полное давление в виде суммы статического и динамического давлений:

$$P_0(t,x) = P_0(x_3) + p(t,x_3).$$

Аналогично представим плотность жидкости в виде суммы равновесной и динамической плотности:

$$\tilde{\rho}(t,x) = \rho_0(x_3) + \rho(t,x).$$

При исследовании малых движений жидкости будем считать искомые функции $\vec{u}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$, а также поле $\vec{f}(t,x)$, бесконечно малыми функциями первого порядка малости. Линеаризуя уравнения (2.2.4) относительно этих функций, получим с учётом (2.2.3) уравнения

$$\begin{aligned} \rho_0(x_3)\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\nabla p - \rho g \vec{e}_3 + \rho_0(x_3)\vec{f}(t,x), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \operatorname{div}(\rho_0(x_3)\vec{u}) = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Эти уравнения записаны пока для произвольной идеальной сжимаемой жидкости. Выпишем теперь условие несжимаемости для рассматриваемой стратифицированной жидкости. Так как вдоль траектории движения плотность жидкости не изменяется, то полная производная по времени от плотности равна нулю:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} \equiv \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \tilde{\rho} \cdot \vec{u} = 0.$$

Линеаризуя это соотношение, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0, \tag{2.2.6}$$

и с учётом того, что

$$\operatorname{div}(\rho_0 \vec{u}) = \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u},$$

получаем из (2.2.6) и второго уравнения (2.2.5) условие соленоидальности для поля скорости:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,).$$

Окончательно уравнения малых движений идеальной стратифицированной несжимаемой жидкости принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0(x_3)}\nabla p - \frac{\rho}{\rho_0(x_3)} g \vec{e}_3 + \vec{f}(t,x), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

К этим уравнениям следует добавить граничное условие непротекания на твёрдой стенке $S = \partial\Omega$ сосуда

$$u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{ на } S\,),$$

а также начальные условия для полей скорости и плотности:

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{2.2.8}$$

2.2.2 Исключение поля плотности. Использование поля малых смещений жидкости

В начально–краевой задаче (2.2.7)–(2.2.8) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{w}(t,x)$, связанных с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,). \tag{2.2.9}$$

Тогда из второго уравнения (2.2.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(t,x) + \nabla\rho_0 \cdot \vec{w}\right) = 0,$$

и поэтому

$$\rho(t,x) = -\rho_0'(x_3)w_3(t,x) + \rho^0(x) + \rho_0'(x_3)w_3^0(x), \tag{2.2.10}$$

где $\vec{w}^0(x)$ — поле начальных смещений частиц жидкости, $\rho^0(x)$ — начальное распределение плотности, $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ — равновесная плотность. Подставляя (2.2.10) в первое уравнение (2.2.7) и переходя к полю смещений, получим с учётом (2.2.9) следующую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0(x_3)}\nabla p - \omega_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3 + \vec{F}(t,x), \quad \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,),\\
&\vec{F}(t,x) = \vec{f}(t,x) - g\rho^0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3) + \omega_0^2(x_3)w_3^0(x)\vec{e}_3,\\
&w_n = 0\,(\text{ на } S\,), \quad \vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}^0(x).
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Здесь условие непротекания для поля скорости заменено аналогичным условием для поля смещений.

Эти уравнения содержат лишь две искомые функции: векторное поле смещений $\vec{w}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. Таким образом, при переходе к полю смещений $\vec{w}(t,x)$ задача (2.2.7)–(2.2.8) упростилась. По решению $\vec{w}(t,x)$ задачи (2.2.11) решения $\vec{u}(t,x)$ и $p(t,x)$ задачи (2.2.7)–(2.2.8) можно найти по формулам (2.2.9) и (2.2.10).

2.2.3 Ортогональное разложение пространства векторных полей с конечной кинетической энергией

В рассматриваемой задаче равновесная плотность жидкости ρ_0 не является постоянной, а потому кинетическая энергия $T_{\text{кин}}$ малых движений жидкости с точностью до малых выше второго порядка малости имеет вид

$$T_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}(t,x)|^2 \, d\Omega.$$

Так как здесь, как и в параграфе 1.1.3, естественно рассматривать векторные поля скоростей с конечной кинетической энергией $T_{\text{кин}}$, то необходимо ввести в рассмотрение вещественное гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega; \rho_0)$ с весовой функцией $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ и скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)} := \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x) \, d\Omega. \tag{2.2.12}$$

Соответствующая норма

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)} = \int\limits_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}(x)|^2 \, d\Omega \tag{2.2.13}$$

при выполнении условий (2.2.1) эквивалентна обычной норме

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\vec{u}|^2 \, d\Omega, \tag{2.2.14}$$

введенной в параграфе 1.1.3 для однородной несжимаемой жидкости. Поэтому $\vec{L}_2(\Omega; \rho_0)$ состоит из тех же векторных полей, что и пространство $\vec{L}_2(\Omega)$.

Введём в $\vec{L}_2(\Omega; \rho_0)$ следующие множества:

1°. Замыкание в норме $\vec{L}_2(\Omega; \rho_0)$ гладких соленоидальных полей с условием непротекания на $S = \partial\Omega$:

$$\vec{J}_0(\Omega; \rho_0) = \overline{\widetilde{\vec{J}_0}(\Omega; \rho_0)} = \overline{\{\vec{u} \in \vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), u_n = 0 \ (\text{на } S)\}}.$$

2^0. Множество квазипотенциальных полей

$$\vec{G}(\Omega; \rho_0) := \{\vec{v} = \rho_0^{-1}(x_3) \nabla p : \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)} = \int\limits_{\Omega} \rho_0^{-1}(x_3) |\nabla p|^2 \, d\Omega < \infty\}.$$

Теорема 2.2.1. *Имеет место следующее ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Omega; \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega; \rho_0) \oplus \vec{G}(\Omega; \rho_0). \tag{2.2.15}$$

Доказательство. Оно повторяет доказательство леммы 1.3.1 с учетом нового определения скалярного произведения (2.2.12).

□

Ортогональное разложение (2.2.15) играет в задаче (2.2.11) о малых колебаниях стратифицированной жидкости такую же важную роль, как разложение (1.3.7), отвечающее случаю $\rho_0(x_3) \equiv 1$, в задаче о колебаниях однородной жидкости.

2.2.4 Получение операторного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве

Переходя к исследованию начально–краевой задачи (2.2.11), отметим, что в ней, как и в задаче параграфа 1.1.3, не содержатся производные по t от $p(t,x)$ и поэтому она не может быть приведена к задаче типа Коши–Ковалевской. Однако метод ортогонального проектирования, уже использованный в параграфе 1.1.3 для случая гильбертова пространства вектор–функций $\vec{L}_2(\Omega)$, может быть применён в задаче (2.2.11) на основе ортогонального разложения (2.2.15) гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$.

Будем считать, что в первом уравнении (2.2.11) искомые функции $\vec{w}(t,x)$ и $\nabla p(t,x)$ являются функциями переменной t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$. Тогда в силу разложения (2.2.15) и условий $\operatorname{div}\vec{w} = 0$ (в Ω), $w_n = 0$ (на S) приходим к выводу, что при любом $t \in [0,T]$

$$\vec{w}(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0), \quad \rho_0^{-1}(x_3)\nabla p \in \vec{G}(\Omega;\rho_0). \tag{2.2.16}$$

Введём, как и в параграфе 1.1.3, ортопроекторы P_0 и P_G на подпространства $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$ и $\vec{G}(\Omega;\rho_0)$ соответственно и подействуем ими на обе части первого уравнения (2.2.11). С учётом (2.2.16) имеем

$$\frac{d^2\vec{w}}{dt^2} + P_0(\omega_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3) = \vec{F}_0(t), \quad \vec{F}_0(t) := P_0\vec{F}(t,x), \tag{2.2.17}$$

$$\vec{0} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - P_G(\omega_0(x_3)w_3\vec{e}_3) + P_G\vec{F}(t). \tag{2.2.18}$$

Здесь, как и в параграфе 1.1.3, зависимость от x у функций не указывается, так как они считаются элементами $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$, зависящими от t как от параметра.

Из системы уравнений (2.2.17), (2.2.18) видно, что для поля смещений $\vec{w}(t,x)$ получено уравнение, куда не входит ∇p, в то же время ∇p можно найти по известному полю $\vec{w}$ из (2.2.18). Таким образом, приём ортогонального проектирования позволил расщепить исходную задачу (2.2.11) на две задачи, исследование которых проще первоначальной.

Из (2.2.18) и формулы $\vec{F}(t,x)$ из (2.2.11) можно сделать и такой важный вывод.

Теорема 2.2.2. *Поле давлений $p(t,x)$ в стратифицированной жидкости определяется лишь полем вертикальных смещений $w_3(t,x)$ и начальными функциями $w_3^0(x)$, $\rho^0(x)$, а также равновесным распределением плотности $\rho(x_3)$. В рамках линейной теории горизонтальные поля смещений $w_1(t,x)$ и $w_2(t,x)$,а также поле скоростей $\vec{u}(t,x) = \partial\vec{w}/\partial t$ не влияет на поле давлений.* $\square$

Перейдём к изучению уравнения (2.2.17) и введём оператор B по закону
$$B\vec{w} := P_0(\omega_0^2(x_3)w_3\vec{e}_3), \quad \forall\vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0).$$
Тогда задачу (2.2.17) вместе с начальными условиями (2.2.11) можно переписать в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$:
$$\frac{d^2\vec{w}}{dt^2} + B\vec{w} = \vec{F}_0(t), \quad \vec{w}(0) = \vec{w}^0, \quad \vec{w}^{'}(0) = \vec{u}^0. \tag{2.2.19}$$

2.2.5 Разрешимость начально-краевой задачи о колебаниях стратифицированной жидкости

Изучим свойства решений задачи (2.2.19) и на их основе получим утверждения о разрешимости исходной начально–краевой задачи (2.2.7)–(2.2.8). Предварительно исследуем свойства оператора B, который назовём, исходя из его происхождения и наличия сил плавучести в стратифицированной жидкости, *оператором плавучести.*

Теорема 2.2.3. *Оператор плавучести B, действующий в $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$, обладает свойствами*
$$B = B^* \in \mathcal{L}(\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)), \quad 0 \leqslant B \leqslant \omega_{0,+}^2 I, \tag{2.2.20}$$
где I — единичный оператор в $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$, а $\omega_{0,+}^2$ — максимальное значение квадрата частоты плавучести (*см.* (2.2.2)).

Доказательство. Его предлагается предлагается провести самостоятельно. $\square$

Так как B — линейный ограниченный оператор, то задача Коши (2.2.19) имеет вид, в общей ситуации исследованный в п.4.2 (см. теорему 2.1.3). Поэтому её решение согласно формуле (2.1.11) и утверждению теоремы 2.1.3 имеет вид

$$\vec{w}(t) = C_B(t)\vec{w}^0 + S_B(t)\vec{u}^0 + \int_0^t S_B(t-s)\vec{F}_0(s)\,ds, \tag{2.2.21}$$

$$\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0),\ \ \vec{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0),\ \ \vec{F}_0(t) \in C([0,T];\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)). \tag{2.2.22}$$

Здесь $C_B(t)$ и $S_B(t)$ — косинус– и синус–функции, построенные по оператору B согласно формулам (2.1.8).

Опираясь на формулы (2.2.21), (2.2.22), приведём утверждение о разрешимости задачи (2.2.7)–(2.2.8).

Теорема 2.2.4. *Если в начально-краевой задаче* (2.2.7)–(2.2.8) *выполнены условия*

$$\int_\Omega |\rho^0(x)|^2\,d\Omega < \infty, \quad \vec{w}^0(x) \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0), \quad \vec{u}^0(x) \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0),$$

$$\vec{f}(t,x) \in C\big([0,T];\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)\big), \tag{2.2.23}$$

а также условия (2.2.1) *и* (2.2.2)*, обеспечивающие устойчивую стратификацию, то задача* (2.2.7)–(2.2.8) *имеет единственное решение, для которого* $\vec{w}(t,x)$, $\partial\vec{w}/\partial t = \vec{u}(t,x)$, $\partial^2\vec{w}/\partial t^2 = \partial\vec{u}/\partial t$, $\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p$ *являются непрерывными функциями переменной* t *со значениями в* $\vec{L}_2(\Omega;\rho_0)$*, а* $\rho(t,x)$ *— дважды непрерывно дифференцируемая по* t *функция со значениями в пространстве скалярных функций* $L_2(\Omega)$*.*

Для указанного решения выполнен закон баланса полной энергии рассматриваемой гидродинамической системы:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}(t,x)|^2\,d\Omega + \frac{1}{2}g\int_\Omega \omega_0^{-2}(x_3)\rho_0^{-1}(x_3)|\rho(t,x)|^2\,d\Omega =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_0(x_3)|\vec{u}^0(x)|^2\,d\Omega + \frac{1}{2}g\int_\Omega \omega_0^{-2}(x_3)\rho_0^{-1}(x_3)|\rho^0(x)|^2\,d\Omega +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{f}(\tau,x)\cdot\vec{u}(\tau,x)\,d\Omega. \tag{2.2.24}$$

Доказательство. Оно основано на формуле (2.2.21) и условиях (2.2.22), если выполнены условия (2.2.23). При этом использованы также формулы (2.2.17), (2.2.18), а также обратный переход от задачи (2.2.11) к задаче (2.2.7)–(2.2.8) с учётом формул (2.2.9), (2.2.10).

Вывод закона баланса полной энергии системы проводится по тому же плану, что и в теореме 1.3.3 для однородной вращающейся жидкости, с дополнительным учётом формулы (2.2.6) и ортогонального разложения (2.2.15). Подробные выкладки предлагается проделать самостоятельно.

□

Закон баланса полной (кинетической плюс потенциальной) энергии (2.2.24) утверждает, что изменение этой энергии происходит за счёт работы внешних сил над гидродинамической системой. Второе слагаемое слева в (2.2.24) есть потенциальная энергия системы, обусловленная действием сил плавучести. Если внешняя сила $\vec{f}(t,x) \equiv \vec{0}$, то из (2.2.24) следует закон сохранения полной энергии.

2.2.6 Собственные колебания

Рассмотрим собственные колебания стратифицированной жидкости, т.е. такие решения однородной задачи (2.2.19), для которых

$$\vec{w}(t,x) = \exp(i\omega t)\vec{w}(x), \quad \vec{w}(x) \in \vec{J}_0(\Omega;\rho_0), \tag{2.2.25}$$

где ω — частота колебаний, а $\vec{w}(x)$ — искомая амплитудная функция. Подставляя (2.2.25) в (2.2.19) при $\vec{f} \equiv \vec{0}$, приходим к задаче

$$B\vec{w} = \lambda\vec{w}, \quad \lambda = \omega^2, \tag{2.2.26}$$

на собственные значения оператора B.

Из свойств (2.2.20) оператора B получаем такие утверждения.

Теорема 2.2.5. *Спектр задачи* (2.2.26) *вещественный и расположен на промежутке* $[0, \omega_{0,+}^2]$. *Если собственные элементы* $\vec{w}_k$ *и* $\vec{w}_l$ *задачи* (2.2.26) *отвечают различным собственным значениям* $\lambda_k \neq \lambda_l$, *то* $\vec{w}_k$ *и* $\vec{w}_l$ *ортогональны в* $\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)$ *и по квадратичной форме оператора плавучести:*

$$(\vec{w}_k, \vec{w}_l)_{\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)} = (B\vec{w}_k, \vec{w}_l)_{\vec{J}_0(\Omega;\rho_0)} = 0.$$

Доказательство. Его предлагается провести самостоятельно. □

Приведём ещё один важный факт, относящийся к свойствам решений задачи (2.2.26). (Его доказательство опубликовано в статье Н.Д. Копачевского и М.Ю. Царькова [15].)

Теорема 2.2.6. *Предельный спектр задачи* (2.2.26) *совпадает с отрезком* $[0, \omega_{0,+}^2]$. *Если сосуд* Ω *является цилиндрическим с произвольным поперечным сечением и образующей, параллельной оси* Ox_3*, то совокупность собственных значений задачи* (2.2.26) *образует множество, плотное на отрезке* $[0, \omega_{0,+}^2]$*, а собственные функции образуют ортогональный базис в* $\vec{J}_0(\Omega; \rho_0)$. $\square$

Следствие 2.2.1. *Частоты собственных колебаний, обусловленных действием сил плавучести в стратифицированной жидкости, образуют множество, плотное на отрезке* $[-\omega_{0,+}, \omega_{0,+}]$. *Этим частотам отвечают внутренние волновые движения, вызванные неоднородностью жидкости.* $\square$

2.2.7 Упражнения к параграфу 2.2

Упражнение 2.2.1. Показать, что при выполнении условий (2.2.2) и условия $\rho_0(x_3^0) > 0$ при некотором x_3^0 таком, что $(x_1, x_2, x_3^0) \in \Omega$, неравенства (2.2.1) имеют место. $\square$

Упражнение 2.2.2. Получить закон изменения равновесной плотности $\rho_0(x_3)$ при постоянной частоте плавучести:

$$\omega_0^2(x_3) = \omega_0^2 = const. \quad \square$$

Упражнение 2.2.3. Доказать, что при выполнении условий (2.2.1) нормы (2.2.13) и (2.2.14) эквивалентны. $\square$

Упражнение 2.2.4. Провести на основе леммы 1.3.1 доказательство теоремы 2.2.1. $\square$

Упражнение 2.2.5. Доказать, опираясь на эквивалентность норм (2.2.13) и (2.2.14), что $\vec{J}_0(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega; \rho_0)$. $\square$

Упражнение 2.2.6. Доказать теорему 2.2.3. $\square$

Упражнение 2.2.7. Доказать утверждения теоремы 2.2.4. $\square$

Упражнение 2.2.8. Доказать теорему 2.2.5. $\square$

Упражнение 2.2.9. Исследовать двумерную (в плоскости Ox_1x_3) задачу (2.2.26) о собственных колебаниях стратифицированной жидкости в прямоугольном канале с вертикальными стенками как при экспоненциальной ($\omega_0^2(x_3) \equiv \mathrm{const} = \omega_0^2$), так и при произвольной устойчивой стратификации плотности.

Указание. Получить задачу на собственные значения для вертикального смещения и решить её методом разделения переменных. $\square$

Глава 3

Полугруппы операторов и линейные абстрактные задачи Коши

3.1 Полугруппы линейных ограниченных операторов

3.1.1 Введение

Теория полугрупп преобразований играет важную роль в современной математической физике. Понимаемая в достаточно широком смысле, она представляет собой математический аппарат теории эволюционных систем. Оценивая место этой теории в математике, Эйнар Хилле, один из создателей теории полугрупп, писал: “Я приветствую полугруппу, где бы я ее ни встретил, а встречается она повсюду. Впрочем, от друзей я слышал, что иногда в математике встречаются объекты, отличные от полугрупп.” В данном курсе будет рассмотрена лишь небольшая часть обширной и далеко продвинутой теории, основанной на теории полугрупп, – линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами.

Чтобы понять, о чем будет идти далее речь, рассмотрим эволюцию некоторой системы, которую изучают в экспериментальной лаборатории. В корректно поставленном физическом эксперименте исход эксперимента однозначно определяется его условиями, и при небольших изменениях этих условий результат эксперимента должен меняться также незначительно. Пусть эволюция системы описывается решениями задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u^0, \tag{3.1.1}$$

в некотором банаховом пространстве E, где A — вообще говоря неограниченный аддитивный и однородный оператор, действующий из области определения $\mathcal{D}(A) \subset E$ в E, а $u^0 \in E$. Тогда, если задача (3.1.1) отвечает корректно поставленному эксперименту, то естественно надеяться, что для этой задачи справедливы теорема существования, теорема единственности и теорема устойчивости, утверждающая, что решение непрерывно зависит от параметров задачи, а именно: от начального элемента u^0 и от оператора A.

Пусть задача (3.1.1) корректна в вышеприведенном неформальном смысле. Пусть $U(t)$ — линейный ограниченный оператор (оператор–функция), ставящий в соответствие элементу $u^0 \in E$ решение $u(t)$ задачи (3.1.1): $u(t) = U(t)u^0$. Если $u(s) = U(s)u^0$, $u(t+s) = U(t)u(s) = U(t)U(s)u^0$, то очевидно соотношение

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad (t, s \geqslant 0),$$

которое, по-видимому, должно выполняться для оператор–функции $U(t)$.

На основании этого свойства возникает понятие однопараметрической полугруппы операторов, посредством которой выражается решение корректно поставленной однородной задачи Коши (3.1.1) или соответствующей неоднородной задачи. Изучению свойств таких полугрупп и будет посвящен данный параграф.

3.1.2 Сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа ограниченных операторов

Заметим сразу же, что полугруппы такого типа возникают во многих эволюционных задачах математической физики, в частности, при изучении уравнения теплопроводности, волнового уравнения, ряда сложных гидродинамических систем и во многих других ситуациях.

Определение 3.1.1. *Пусть E — банахово пространство и $\mathcal{L}(E)$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих в E. Семейство оператор–функций $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ со значениями в $\mathcal{L}(E)$ назовем сильно непрерывной однопараметрической полугруппой* *операторов (или (C_0)–полугруппой) на E), если выполнены следующие условия:*

$$
\begin{aligned}
&1^\circ.\ U(t)U(s) = U(t+s) \ \text{для всех } t,\ s \in \mathbb{R}_+,\\
&2^\circ.\ U(0) = I, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.1.2)\\
&3^\circ.\ U(t)u^0 \in C(\mathbb{R}_+, E) \quad \text{для любого } u^0 \in E.
\end{aligned}
$$

□

Определение 3.1.2. *Сжимающей (C_0)–полугруппой $\{U(t)\}$ на E называется такая (C_0)-полугруппа на E, что все операторы $U(t)$ являются сжатиями:*

$$\|U(t)\| \leqslant 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

□

Как уже было видно из рассмотренного выше примера, с помощью полугруппы $U(t)$ может быть выражено решение однородной задачи Коши (3.1.1), и потому *полугруппа* $\{U(t)\}$ в таком случае *строится по оператору A*. Оказывается, *по полугруппе $\{U(t)\}$ оператор A также можно построить.*

Определение 3.1.3. *Пусть $\{U(t)\}$ является (C_0)–полугруппой на E. Посредством формулы*

$$Av := \lim_{t\to+0} \frac{U(t)v - v}{t} = \frac{d}{dt}\big(U(t)v\big)\Big|_{t=0} \tag{3.1.3}$$

определим генератор(или инфинитезимальный оператор, или производящий оператор) полугруппы. Здесь оператор A задан на тех элементах $v \in E$, для которых предел (3.1.3) *существует.*

□

Возникает естественный вопрос: какими свойствами должен обладать оператор A из (3.1.3), т. е. генератор для $\{U(t)\}$, чтобы соответствующие решения задач Коши (3.1.1), выражаемые через оператор-функции $U(t)$, удовлетворяли свойствам (3.1.2), т. е. семейство $\{U(t)\}$ было (C_0)–полугруппой операторов? Ответ на этот вопрос будет вскоре получен.

Рассмотрим сначала уже разобранный ранее случай, когда $A \in \mathcal{L}(E)$ и $U(t) = \exp(tA)$.

Теорема 3.1.1. 1°. *Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то семейство*

$$\Big\{U(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} : t \in \mathbb{R}_+\Big\}$$

является (C_0)–полугруппой, удовлетворяющей условию

$$\|U(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0). \tag{3.1.4}$$

Кроме того, A — генератор полугруппы $\{U(t)\}$.
2°. *Обратно, если $\{U(t)\}$ — (C_0)–полугруппа, удовлетворяющая условию (3.1.4), то ее генератор $A \in \mathcal{L}(E)$ и $U(t) = \exp(tA)$.*

Доказательство. 1°. Прямое утверждение доказывается просто. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ сходится в равномерной операторной топологии (т. е. по норме пространства $\mathcal{L}(E)$), а полугрупповое свойство следует из тождества для формальных степенных рядов

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!}$$

или из спектрального представления

$$\exp(tA) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{t\lambda} R_\lambda(A)\, d\lambda \quad (\sigma(A) \text{ внутри } \Gamma).$$

Ясно также, что $U(0) = I$ и

$$\|U(t) - I\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}\Big\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = (e^{t\|A\|} - 1) \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0).$$

Аналогично

$$\Big\|\frac{U(t) - I}{t} - A\Big\| = \Big\|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!}\Big\| \leqslant t\|A\|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}\|A^{n-2}\|}{n!} \leqslant$$
$$\leqslant t\|A\|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}\|A\|^{n-2}}{(n-2)!} = t\|A\|^2 e^{t\|A\|} \to 0 \quad (t \to 0).$$

Поэтому A является генератором для $\{U(t)\}$.

2°. Доказательство обратного утверждения не столь просто и будет проведено позже. □

В качестве следствия из теоремы 3.1.1 и свойств (3.1.3) полугруппы класса (C_0) отметим такое важное обстоятельство: полугруппы класса (C_0), удовлетворяющие условию *сильной непрерывности* $U(t)v \in C(\mathbb{R}_+, E)$, но не условию *равномерной непрерывности* $\|U(t) - I\| \to 0$ $(t \to 0)$, это в точности полугруппы с *неограниченными генераторами*, т. е. такими, которые наиболее часто встречаются в задачах математической физики.

3.1.3 Замкнутые операторы

Естественным обобщением понятия непрерывности линейного ограниченного оператора, действующего в банаховом пространстве E или из E в F, является для неограниченного оператора понятие замкнутости.

Определение 3.1.4. *Аддитивный и однородный оператор A, действующий из E в F, называется замкнутым, если его график*

$$G(A) := \big\{(u; Au) : u \in \mathcal{D}(A) \subset E\big\} \subset E \times F$$

является замкнутым подпространством в $E \times F$ или, что эквивалентно, если из условий $u_n \in \mathcal{D}(A) \subset E$, $u_n \to u \in E$ и $Au_n \to v \in F$ следует, что $u \in \mathcal{D}(A)$ и $Au = v$. □

Отметим некоторые свойства замкнутых операторов, действующих из E в F. Эти свойства доказываются в курсе функционального анализа.

1. Если оператор A замкнут из E в F, то оператор $A + B$, заданный на $\mathcal{D}(A) \subset E$, замкнут при любом $B \in \mathcal{L}(E, F)$.

2. Оператор A^{-1} замкнут, если оператор A инъективен, т. е. из свойства $Au_1 = Au_2$ следует, что $u_1 = u_2$.

3. Теорема о замкнутом графике (теорема Банаха). Оператор A ограничен, если множество $\mathcal{D}(A)$ замкнуто в E.

4. Ограниченный оператор замкнут в точности тогда, когда его область определения замкнута.

Доказательство свойств 1 – 4.

1. Если оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ замкнут, то оператор $A + B$, заданный на $\mathcal{D}(A) \subset E$, замкнут при любом $B \in \mathcal{L}(E, F)$.

Доказательство. Пусть $v_n \in \mathcal{D}(A)$, $v_n \to v$ (в E), $Av_n \to u \in F$. Тогда $(A+B)v_n = Av_n + Bv_n \to u + Bv \in F$ $(B \in \mathcal{L}(E,F))$. Так как A замкнут, то $u = Av$ и потому

$$(A+B)v_n \to (A+B)v, \quad v_n \to v.$$

Значит, $v \in \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$ и $(A+B)v = u + Bu \in F$. □

2. Оператор A^{-1} замкнут, если оператор A инъективен, т. е. из свойства $Au_1 = Au_2$ следует, что $u_1 = u_2$.

Доказательство. Прежде всего, оператор A^{-1} существует, так как если $Au = 0_F = A0_E$, то $u = 0_E$.

Далее, так как

$$G(A^{-1}) := \{(v; A^{-1}v) : v \in \mathcal{D}(A^{-1}) \subset F\},$$

то условие

$$(0; y) \in G(A^{-1})$$

дает

$$v = 0, \quad y = A^{-1}v = A^{-1}0 = 0,$$

что и требовалось доказать. □

3. Доказательство теоремы о замкнутом графике (см., например, Като [12, с. 211]), достаточно длинное (и сложное). □

4. *Ограниченный* оператор замкнут в точности тогда, когда его область определения замкнута.

Доказательство. 1) Если замкнута $\mathcal{D}(A)$ в E, то из сходимости $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ следует, что $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда $Au_n \to Au := v$, так как $\|Au_n - Au\|_F \leqslant \|A\|\,\|u - u_n\|_E \to 0$. Эти свойства означают, что A — замкнутый оператор.

2) Пусть теперь A ограничен и замкнут. Тогда если $u_n \to u$, $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $Au_n \to v \in F$, то в силу замкнутости имеем $Au = v$, $u \in \mathcal{D}(A)$. Значит, $u_n \to u \in \mathcal{D}(A)$, если $u_n \in \mathcal{D}(A)$, т. е. $\mathcal{D}(A)$ — замкнутое подпространство из E. □

Определение 3.1.5. *Оператор A из E в F называется замыкаемым, если замыкание его графика $\overline{G(A)}$ является графиком, т. е. $(0, y) \in \overline{G(A)}$ означает, что $y = 0$. Тогда $\overline{G(A)}$ будет графиком замкнутого оператора, называемого замыканием оператора A и обозначаемого $\overline{A}$.* □

Приведем примеры замкнутых операторов и операторов, допускающих замыкание. Заметим, что оператор называют *плотно определенным* (*плотно заданным*), если его область определения $\mathcal{D}(A)$ обладает свойством $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$ (замыкание в норме E).

Пример 3.1.1. Пусть $E = H = L_2(a,b)$, а оператор A определен по закону $Au := (d/dx)u$ на плотном в E множестве $\mathcal{D}(A) = C^1[a,b]$. $\square$

Утверждение 3.1.1. *Введенный в примере 3.1.1 оператор A незамкнут, но замыкаем, причем становится замкнутым, если его область определения $\mathcal{D}(A)$ дополнить теми непрерывными функциями $u(x)$, у которых производные $u^{'}(x)$ принадлежат $E = L_2(a,b)$, т. е. суммируются с квадратом по (a,b):*

$$\int\limits_a^b |u^{'}(x)|^2\,dx < \infty.$$

Доказательство. Покажем, что A допускает замыкание, т. е. оператор $\overline{A}$ с введенной выше областью определения

$$\mathcal{D}(\overline{A}) := \{u(x) \in L_2(a,b) : u^{'}(x) \in L_2(a,b)\},$$

является замкнутым.

Пусть последовательность $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$\|u_n(x) - u(x)\|_{L_2(a,b)} \to 0, \quad \|u_n^{'}(x) - v(x)\|_{L_2(a,b)} \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{3.1.5}$$

где $u_n^{'}(x)$, а потому и $u_n(x)$ — непрерывные на $[a,b]$ функции, а $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции из $L_2(a,b)$. Покажем, что $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$ и $u^{'}(x) = v$. Действительно, при любой $\varphi \in C_0^{\infty}[a,b]$ имеем

$$(u_n^{'}, \varphi)_{L_2(a,b)} = -(u_n, \varphi^{'})_{L_2(a,b)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если теперь перейти к пределу с учетом (3.1.5), получим

$$(v, \varphi)_{L_2(a,b)} = -(u, \varphi^{'})_{L_2(a,b)} \quad (\forall \varphi \in C_0^{\infty}[a,b]).$$

Это тождество, согласно определению обобщенной производной, означает, что $u(x)$ имеет обобщенную производную $u^{'}(x) = v$, т. е. $\overline{A}u = v$. $\square$

Пример 3.1.2. Пусть $E = C[a,b]$, а оператор A по-прежнему определен по закону $Au = (d/dx)u$ на множестве

$$\mathcal{D}(A) := \big\{u(x) \in C[a,b] : u^{'}(x) \in C[a,b]\big\}.$$

$\square$

Утверждение 3.1.2. *Оператор A замкнут в E.*

Доказательство. В самом деле, пусть последовательность $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$\|u_n(x) - u(x)\|_{C[a,b]} \to 0, \quad \|u_n^{'}(x) - v(x)\|_{C[a,b]} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где $u_n(x)$, $u_n^{'}(x)$, $u(x)$ и $v(x)$ из $C[a,b]$. Так как последовательность $\{u_n^{'}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится и состоит из непрерывных функций, а последовательность $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $u(x)$, то по известной из математического анализа теореме о дифференцировании функциональной последовательности получаем, что предельная функция $u(x) \in C^1[a,b]$ и $Au := u^{'}(x) = v$, т. е. оператор A замкнут. □

Замечание 3.1.1. Замечание. Как видно из приведенных примеров, даже если оператор A, действующий в E, замкнут, его область определения не обязательно замкнута. На самом деле, если оператор A замкнут и имеет замкнутую область определения, то A ограничен. В частности, если A замкнут и определен на всем пространстве E, то A ограничен. Как уже упоминалось выше (свойство 3), по теореме о замкнутом графике оператор A ограничен, если множество $\mathcal{D}(A)$ замкнуто в E. □

3.1.4 Сжимающие полугруппы. Теорема Хилле–Иосида

Важным классом (C_0)–полугрупп является класс *сжимающих полугрупп*. Сейчас будет рассмотрен вопрос о связи сжимающей (C_0)–полугруппы $\{U(t)\}$ и ее генератора A.

Отметим предварительно, что для неограниченных операторов, действующих в E и заданных на (плотном) множестве $\mathcal{D}(A)$, сохраняются те же определения резольвентного множества $\rho(A)$ и спектра $\sigma(A)$, которые были введены ранее для операторов из $\mathcal{L}(E)$. Именно,

$$\rho(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ биективен и } (A - \lambda I)^{-1} =: R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(E)\big\}, \quad \sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Необходимые и достаточные условия принадлежности (C_0)–полугруппы к классу сжимающих полугрупп дает следующая теорема.

Теорема 3.1.2 (Хилле–Иосида)**.** *Для того, чтобы оператор A был генератором сжимающей (C_0)–полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

а) A замкнут, т. е. $\overline{A} = A$;

б) A плотно определен: $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$;

в) любое $\lambda > 0$ принадлежит $\rho(A)$ и

$$\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1. \tag{3.1.6}$$

Доказательство этой центральной теоремы проведем по этапам.

Необходимость. 1°. Пусть A является генератором сжимающей (C_0)–полугруппы $\{U(t)\}$ и $v \in \mathcal{D}(A)$. Вычислим

$$\begin{aligned}\frac{d^+}{dt}U(t)v := \lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(t+s) - U(t)\big)v = \lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(t)U(s) - U(t)\big)v = \\ = U(t)\lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(s) - I\big)v =: U(t)Av.\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\frac{d^+}{dt}U(t)v = \lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(s)U(t) - U(t)\big)v = \\ = \lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(s) - I\big)U(t)v =: AU(t)v.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Из формул (3.1.7) и (3.1.8) следует, что

$$U(t)\big\{\mathcal{D}(A)\big\} \subset \mathcal{D}(A)$$

и выполнено свойство

$$\frac{d^+}{dt}U(t)v = AU(t)v = U(t)Av \quad (\forall v \in \mathcal{D}(A)). \tag{3.1.9}$$

Если $t > 0$, то справедливо аналогичное утверждение для левой производной:

$$\begin{aligned}\frac{d^-}{dt}U(t)v = \lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(t) - U(t-s)\big)v = \lim_{s\to 0+} U(t-s)s^{-1}\big(U(s) - I\big)v = \\ = U(t)Av = \lim_{s\to 0+} s^{-1}\big(U(s) - I\big)U(t-s)v = AU(t)v.\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

2°. Из формул (3.1.9) и (3.1.10) следует такой важный вывод: *производящий оператор A (C_0)–полугруппы $\{U(t)\}$ коммутирует с полугруппой на своей области определения $\mathcal{D}(A)$*:

$$U(t)Av = AU(t)v \quad (\forall v \in \mathcal{D}(A)). \tag{3.1.11}$$

Это свойство понадобится в дальнейшем.

Из (3.1.9)–(3.1.11) следует также, что

$$\frac{d}{dt}U(t)v = U(t)Av = AU(t)v \quad (v \in \mathcal{D}(A)),$$

и поэтому для любого $v \in \mathcal{D}(A)$ функция

$$U(t)v \in C^1(\mathbb{R}_+, E)$$

и

$$U(t)v - v = \int\limits_0^t \frac{d}{ds}\big[U(s)v\big]\,ds = \int\limits_0^t AU(s)v\,ds = \int\limits_0^t U(s)Av\,ds. \tag{3.1.12}$$

3°. Опираясь на это соотношение, покажем, что $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. С этой целью *для любого элемента* $v \in E$ введем элемент

$$v_t := \int\limits_0^t U(s)v\,ds \quad (v_0 = 0).$$

Так как $U(0) = I$ и $U(t)v \in C(\mathbb{R}_+, E)$, то

$$\begin{gathered}\lim_{t\to 0+}\frac{v_t - v_0}{t - 0} = \lim_{t\to 0+} t^{-1}v_t = \lim_{t\to 0+}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t U(s)v\,ds = \lim_{t\to 0}U(t)v = v \\ \Big(\int\limits_0^t U(s)v\,ds = U(\psi)v\int\limits_0^t ds, \quad 0 \le \psi \le t\Big)\end{gathered} \tag{3.1.13}$$

и справедливы соотношения

$$\begin{aligned}A_\eta v_t &:= \eta^{-1}\big(U(\eta) - I\big)v_t = \eta^{-1}U(\eta)\int\limits_0^t U(s)v\,ds - \eta^{-1}\int\limits_0^t U(s)v\,ds = \\ &= \eta^{-1}\int\limits_0^t U(s+\eta)v\,d(s+\eta) - \eta^{-1}\int\limits_0^t U(s)v\,ds = \begin{vmatrix} s+\eta = \xi \\ ds = d\xi \end{vmatrix} = \\ &= \eta^{-1}\Big[\int\limits_\eta^{\eta+t} U(\xi)v\,d\xi - \int\limits_0^t U(\xi)v\,d\xi\Big] = \eta^{-1}\Big[\int\limits_t^{t+\eta} U(s)v\,ds - \int\limits_0^\eta U(s)v\,ds\Big] =\end{aligned}$$

$$= U(t)\eta^{-1}\int\limits_t^{t+\eta} U(s-t)v\,d(s-t) - \eta^{-1}\int\limits_0^{\eta} U(s)v\,ds = U(t)\eta^{-1}\int\limits_0^{\eta} U(\xi)v\,d\xi -$$

$$-\eta^{-1}\int\limits_0^{\eta} U(\xi)v\,d\xi \to U(t)v - v\,(= Av_t) \quad (\eta \to 0+). \quad (3.1.14)$$

Отсюда следует, что $v_t \in \mathcal{D}(A)$, и так как $\dfrac{1}{t}v_t \to v$ при $t \to 0$, то выполнено свойство плотной определенности оператора A:

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = E.$$

Кроме того, из (3.1.14) получаем, что

$$U(t)v - v = A\int\limits_0^t U(s)v\,ds \quad (\forall v \in E). \quad (3.1.15)$$

4°. Убедимся теперь, что *оператор A замкнут.* В самом деле, пусть $v_n \in \mathcal{D}(A)$, $v_n \to v$, $Av_n \to g$. Тогда согласно (3.1.12) имеем

$$A_\eta v_n = \eta^{-1}\bigl[U(\eta) - I\bigr]v_n = \eta^{-1}\int\limits_0^{\eta} U(s)Av_n\,ds.$$

При $n \to \infty$ отсюда получаем

$$A_\eta v = \eta^{-1}\bigl[U(\eta) - I\bigr]v = \eta^{-1}\int\limits_0^{\eta} U(s)g\,ds,$$

и при $\eta \to 0+$ имеем в силу (3.1.13)

$$\lim_{\eta\to 0+} A_\eta v = \lim_{\eta\to 0+} \eta^{-1}\int\limits_0^{\eta} U(s)g\,ds = g.$$

Значит, элемент $v \in \mathcal{D}(A)$ и $\lim_{\eta\to 0+} A_\eta v = Av = g$, т. е. оператор A замкнут.

5°. Докажем, наконец, что $0 < \lambda \in \rho(A)$ и выполнено свойство (3.1.6).

Отметим предварительно, что при любом $\lambda > 0$ множество $\bigl\{e^{-\lambda t}U(t) : t \in \mathbb{R}_+\bigr\}$ также является сжимающей (C_0)-полугруппой с генератором $A - \lambda I$ (с областью определения $\mathcal{D}(A)$).

Применим тождество (3.1.15) к этой полугруппе, получим (с учетом нового генератора)

$$e^{-\lambda t}U(t)v - v = (A-\lambda I)\int\limits_0^t e^{-\lambda s}U(s)v\,ds, \quad v \in E. \tag{3.1.16}$$

Далее, для элементов $v \in \mathcal{D}(A)$ из (3.1.12) аналогично имеем

$$e^{-\lambda t}U(t)v - v = \int\limits_0^t e^{-\lambda s}U(s)(A-\lambda I)v\,ds, \quad v \in \mathcal{D}(A). \tag{3.1.17}$$

Пусть теперь $t \to \infty$. Так как полугруппа $\{U(t)\}$ сжимающая, то

$$\Big\|\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)v\,ds\Big\| \leqslant \|v\|\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,ds = \frac{\|v\|}{\lambda} < \infty \quad (\lambda > 0), \tag{3.1.18}$$

и потому $e^{-\lambda t}U(t)v \to 0$ $(t \to \infty)$ (необходимое условие сходимости несобственного интеграла $\int\limits_0^\infty \ldots$). Поэтому, в силу доказанного выше свойства замкнутости оператора A, после предельного перехода при $t \to \infty$ получаем из (3.1.16), (3.1.17), что

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)v\,ds \in \mathcal{D}(A) \quad \text{и}$$

$$v = -(A-\lambda I)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)v\,ds = (A-\lambda I)B_\lambda v, \quad v \in E,$$

$$v = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)(A-\lambda I)v\,ds = B_\lambda(A-\lambda I)v, \quad v \in \mathcal{D}(A) \subset E.$$

Из этих соотношений следует, что $0 < \lambda \in \rho(A)$ и

$$(A-\lambda I)^{-1}v = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}U(s)v\,ds \quad (\lambda > 0,\ v \in E),$$

откуда с учетом (3.1.18) имеем

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

т.е. неравенство (3.1.6). Доказательство свойств необходимости завершено. □

3.1.5 Теорема Хилле–Иосида. Доказательство достаточности условий а)–в)

Это доказательство также будет проведено по этапам.

1°. Пусть оператор A замкнут, плотно определен в E и выполнено условие (3.1.6). Покажем, что он является генератором некоторой сжимающей (C_0)–полугруппы $U(t)$.

Введем по оператору A ограниченный оператор

$$A_\lambda := -\lambda A(A-\lambda I)^{-1} = -\lambda I - \lambda^2 (A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \quad (\lambda > 0),$$

а по нему оператор-функцию

$$U_\lambda(t) := \exp(tA_\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA_\lambda)^k}{k!}.$$

Покажем, что эта функция будет сжимающей (C_0)–полугруппой.

2°. По теореме 3.1.1 (доказательство обратного утверждения в этой теореме еще не проведено) функция $\exp(tA_\lambda)$ является (C_0)–полугруппой и при всех $t \geqslant 0$, $\lambda > 0$

$$\begin{gathered}\|\exp(tA_\lambda)\| = \|\exp\big(-t\lambda I - t\lambda^2(A-\lambda I)^{-1}\big)\| = \|\exp(-t\lambda I)\times \\ \times \exp\big(-t\lambda^2(A-\lambda I)^{-1}\big)\| \leqslant e^{-t\lambda}\|\exp\big(-t\lambda^2(A-\lambda I)^{-1}\big)\| \\ \leqslant e^{-t\lambda}\exp\big(t\lambda\|\lambda(A-\lambda I)^{-1}\|\big) \leqslant \big|\text{см. свойство (3.1.6)}\big| \leqslant e^{-t\lambda}\cdot e^{t\lambda} = 1.\end{gathered}$$

3°. Покажем теперь, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda u = Au, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{3.1.19}$$

а) Действительно, если $v \in \mathcal{D}(A)$, то

$$(A-\lambda I)^{-1}Av - \lambda(A-\lambda I)^{-1}v = v, \quad (A-\lambda I)^{-1}Av \to 0 \quad (\lambda \to +\infty)$$

(так как

$$\|(A-\lambda I)^{-1}Av\| \leqslant \|(A-\lambda I)^{-1}\|\cdot\|Av\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|Av\| \to 0 \quad (\lambda\to+\infty)\Big);$$

поэтому

$$-\lambda(A-\lambda I)^{-1}v \to v \quad (\lambda\to\infty)$$

для всех $v \in \mathcal{D}(A)$, а потому и всех $v \in E = \overline{\mathcal{D}(A)}$.

б) Отсюда следует, что для любого $u \in \mathcal{D}(A)$ будет

$$\begin{aligned} A_\lambda u &:= -\lambda(A-\lambda I)^{-1}Au = \\ &= -\lambda(A-\lambda I)^{-1}Au \to Au \quad (\lambda \to \infty), \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

т. е. формула (3.1.19) имеет место.

4°. Докажем теперь, что

$$\begin{gathered} \|\exp(tA_\lambda)u - \exp(tA_\mu)u\| \leqslant t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \to 0 \\ \big(\lambda, \mu \to +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\big), \end{gathered} \tag{3.1.21}$$

т.е. существует $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \exp(tA_\lambda)u$. Действительно,

$$\exp(tA_\lambda)u - \exp(tA_\mu)u = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\Big\{\exp(tsA_\lambda)\exp[t(1-s)A_\mu]u\Big\}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big\{\exp(tsA_\lambda)\exp[t(1-s)A_\mu](tA_\lambda) + \exp(tsA_\lambda)\exp[t(1-s)A_\mu]\times$$

$$\times(-tA_\mu)\Big\}u\,ds = \int\limits_0^1 \exp(stA_\lambda)\exp[t(1-s)A_\mu]t(A_\lambda u - A_\mu u)\,ds,$$

откуда в силу свойства сжимаемости полугрупп $\exp(stA_\lambda)$, $\exp[t(1-s)A_\mu]$

$$\Big(A_\lambda u \to Au, \quad A_\mu u \to Au \Longrightarrow \|A_\lambda u - A_\mu u\| \to 0 \quad (\lambda, \mu \to \infty)\Big)$$

следует оценка (3.1.21). Наконец, правая часть (3.1.21) стремится к нулю при $\lambda, \mu \to +\infty$, так как выполнено свойство (3.1.20).

5°. Опираясь на установленные свойства оператора A_λ и полугруппы $\exp(tA_\lambda)$, определим оператор-функцию $U(t)$ при $t \in \mathbb{R}_+$ по закону:

$$U(t)u := \lim_{\lambda\to+\infty} U_\lambda(t)u = \lim_{\lambda\to+\infty} \exp(tA_\lambda)u, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

(предел существует в силу полноты E). Из свойства сжимаемости для полугруппы $\exp(tA_\lambda)$ следует, что

$$\|U(t)\| \leqslant 1,$$

и поэтому оператор-функция $U(t)$ определена не только на элементах $u \in \mathcal{D}(A)$, *а на всем пространстве* $E = \overline{\mathcal{D}(A)}$. Кроме того, легко проверяется, что выполнены свойства

$$U(t)U(s) = U(t+s), \quad U(0) = I,$$

так как они имеют место в допредельной ситуации для полугруппы $\exp(tA_\lambda)$ при любом $\lambda > 0$.

6°. Докажем, наконец, что $U(t)u \in C(\mathbb{R}_+, E)$, т. е. $\{U(t)\}$ является (сжимающей) (C_0)-полугруппой.

Имеем при любом $u \in \mathcal{D}(A)$

$$U(t)u - u = \lim_{\lambda\to+\infty} \exp(tA_\lambda)u - u = \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^t \frac{d}{ds}\big[\exp(sA_\lambda)u\big]\, ds =$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^t \exp(sA_\lambda)A_\lambda u\, ds = \int\limits_0^t \big[\lim_{\lambda\to+\infty} \exp(sA_\lambda)A_\lambda\big] u\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \lim_{\lambda\to+\infty} \exp(sA_\lambda) \cdot \lim_{\lambda\to+\infty} (A_\lambda u)\, ds = \int\limits_0^t U(s)Au\, ds. \tag{3.1.22}$$

Здесь при доказательстве использованы определение полугруппы $U(t)$, свойство (3.1.19), а также возможность перехода к пределу под знаком интеграла.

Из формулы (3.1.22) следует, что функция $U(t)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}_+$ *при любом* $u \in \mathcal{D}(A)$, а потому *и при любом* $u \in E$. Значит $U(t)$ — (C_0)–полугруппа.

7°. Покажем в заключение, что *генератор полугруппы* $U(t)$ *совпадает с* A.

Обозначим генератор для $U(t)$ через B и убедимся, что $B = A$. Из формулы (3.1.22) согласно определению генератора полугруппы следует, что

$$Bu := \lim_{t\to0} \frac{U(t)u - u}{t} =$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{1}{t} \int\limits_0^t U(s)Au\, ds = \lim_{t\to0} \frac{(Au)_t}{t} = Au \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)).$$

Поэтому оператор B является расширением оператора A, т.е. $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$, и $Bu = Au$ $(\forall u \in \mathcal{D}(A))$.

Согласно доказанному выше *в первой части теоремы Хилле–Иосида* любое число $\lambda > 0$ принадлежит $\rho(B)$, и потому $1 \in \rho(B)$. По условию теоремы также $1 \in \rho(A)$. Так как A и B совпадают на плотном множестве $\mathcal{D}(A) \subset E$, то

$$(B - I)w = (A - I)w \quad (\forall w \in \mathcal{D}(A)). \tag{3.1.23}$$

Заметим теперь, что для принадлежности элемента w к $\mathcal{D}(A) \subset E$ необходимо и достаточно, чтобы $w = (A - I)^{-1}v$, $v \in E$, т. е.

$$\mathcal{D}(A) = \{w \in E : w = (A - I)^{-1}v, \ \forall v \in E\}.$$

Полагая в (3.1.23) $w = (A - I)^{-1}v$, $v \in E$, получим

$$(B - I)(A - I)^{-1}v = v,$$

и тогда

$$(A - I)^{-1}v = (B - I)^{-1}v \quad (\forall v \in E),$$

т. е.

$$(A - I)^{-1} = (B - I)^{-1} \Longrightarrow \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A).$$

Поэтому $B = A$, т. е. генератор полугруппы $U(t)$ совпадает с A.

Теорема Хилле–Иосида полностью доказана. □

3.1.6 Дополнительные замечания

Вернемся к теореме 3.1.1 и докажем обратное утверждение из этой теоремы.

Доказательство. 1°. Пусть $\{U(t)\}$ — (C_0)–полугруппа, удовлетворяющая условию

$$\|U(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} \to 0 \quad (t \to 0). \tag{3.1.24}$$

Установим, что ее генератор $A \in \mathcal{L}(E)$ и $U(t) = \exp(tA)$.

Введем оператор $B(t) \in \mathcal{L}(E)$, $\forall t > 0$, по закону:

$$B(t)u := \frac{1}{t}\int\limits_0^t U(s)u\,ds \quad (\forall u \in E, \ t > 0).$$

Из условия (3.1.24) следует, что

$$\|B(t)u - u\| = \Big\|\frac{1}{t}\int\limits_0^t U(s)u\,ds - u\Big\| = \frac{1}{t}\Big\|\int\limits_0^t [U(s) - I]u\,ds\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{t}\int\limits_0^t \|U(s)-I\|\,ds\cdot\|u\| = \left|\begin{matrix}\text{по теореме о среднем}\\ 0<\xi<t,\ \xi\to 0(t\to 0)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{t}\|U(\xi)-I\|\cdot\int\limits_0^t ds\cdot\|u\| \longrightarrow 0 \quad (t\longrightarrow 0). \qquad (3.1.25)$$

2°. Из (3.1.25) следует, что для некоторого $\delta>0$

$$\|B(t)-I\| < \frac{1}{2}, \quad 0<t<\delta.$$

Так как

$$B(t) = I + [B(t)-I],$$

то обычная формула для операторной геометрической прогрессии показывает, что существует оператор $[B(t)]^{-1}\in\mathcal{L}(E)$ для $0<t<\delta$ и

$$[B(t)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[B(t)-I]^k.$$

3°. Пусть A является генератором для полугруппы $U(t)$. Введем пространство $E_A := \mathcal{D}(A)$ с нормой графика

$$\|u\|_A := \|Au\| + \|u\| \quad (\forall u\in\mathcal{D}(A)=E_A).$$

Воспользуемся выведенной ранее формулой (3.1.15):

$$U(t)u - u = A\int\limits_0^t U(s)u\,ds \quad (u\in E).$$

Из нее следует, что $[B(t)]^{-1}\in\mathcal{L}(E,E_A)$, так как

$$\|B(t)u\|_A := \left\|\frac{A}{t}\int\limits_0^t U(s)u\,ds\right\| + \left\|\frac{1}{t}\int\limits_0^t U(s)u\,ds\right\| = \frac{1}{t}\|U(t)u-u\|+$$

$$+\|B(t)u\| \leqslant \left[\frac{\|U(t)-I\|}{t} + \|B(t)\|\right]\|u\| =: c(t)\|u\|. \qquad (3.1.26)$$

Заметим теперь, что $A\in\mathcal{L}(E_A,E)$. В самом деле, для любого $u\in\mathcal{D}(A)=E_A$ имеем

$$\|Au\| \leqslant \|Au\| + \|u\| = \|u\|_A,$$

откуда следует, что
$$\|A\|_{\mathcal{L}(E_A,E)} \leqslant 1.$$

Из последних двух фактов заключаем, что

$$AB(t) \in \mathcal{L}(E), \quad 0 < t < \delta,$$

так как
$$\|AB(t)u\| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(E_A,E)} \cdot \|B(t)\|_{\mathcal{L}(E,E_A)} \cdot \|u\|.$$

4°. *Зафиксируем* $t \in (0, \delta)$. Тогда при всех $u \in E$ имеет смысл выражение
$$Au = AB(t)[B(t)]^{-1}u,$$
поскольку $[B(t)]^{-1}u \in E$, $B(t)[B(t)]^{-1}u \in E_A = \mathcal{D}(A)$. Следовательно,

$$\|Au\| \leqslant \|AB(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \|[B(t)]^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \|u\|,$$

т. е. $A \in \mathcal{L}(E)$.

5°. Покажем, наконец, что *полугруппа* $\{U(t)\}$ *однозначно определяется своим генератором* A.

Пусть, напротив, $\{U(t)\}$ и $\{V(t)\}$ — две (C_0)–полугруппы, имеющие один и тот же генератор A. Пусть $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ и $t > 0$. Определим функцию $u : [0, t] \longrightarrow E$ по закону

$$u(s) = U(s)V(t - s)u^0 \quad (t - \text{фиксировано},\ 0 < s < t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{du(s)}{ds} =& \frac{dU(s)}{ds}\big(V(t-s)u^0\big) + U(s)\frac{d}{ds}\big(V(t-s)u^0\big) = \\ =& \big(U(s)A\big)V(t-s)u^0 + U(s)(-A)V(t-s)u^0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $u(t)$ постоянна на $[0, t]$. Поэтому

$$U(t)u^0 = u(t) = u(0) = V(t)u^0 \quad (\forall t > 0,\ \forall u^0 \in \mathcal{D}(A)).$$

Отсюда следует, что $U(t) \equiv V(t) = \exp(tA)$ (последнее равенство — уже было в начале доказательства теоремы: $U(t) = \exp(tA)$).

□

Доказанными фактами заканчивается краткое изучение сжимающих (C_0)–полугрупп в банаховом пространстве E. Оказывается, общий случай (C_0)–полугрупп может быть сведен к уже разобранному случаю сжимающих (C_0)–полугрупп (см. п. 3.1.8). Однако сначала перейдем к случаю гильбертова пространства: $E = \mathcal{H}$.

3.1.7 Сжимающие полугруппы в гильбертовом пространстве. Диссипативные операторы

Рассмотрим на основании теоремы Хилле-Иосиды сжимающие полугруппы операторов в том случае, когда $E = \mathcal{H}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Как сейчас будет установлено, здесь генераторы соответствующих полугрупп обладают свойством диссипативности.

Определение 3.1.6. *Линейный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и имеющий область определения $\mathcal{D}(A)$, плотную в H, называется* диссипативным, *если*

$$\mathrm{Re}(Au, u) \leqslant 0 \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)).$$

□

Диссипативный оператор называется *максимальным диссипативным*, если он не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

В качестве тривиального расширения здесь имеется в виду замыкание оператора.

Теорема 3.1.3. *Диссипативный оператор всегда допускает замыкание, и это замыкание является диссипативным оператором.*

Доказательство. 1^0. Действительно, пусть $u_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $Au_n \to v \in \mathcal{H}$. Покажем, что $v = 0$, т. е. A допускает замыкание. Для любого $u \in \mathcal{D}(A)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathrm{Re}\big(A(u + \alpha u_n), u + \alpha u_n\big) \leqslant 0.$$

Отсюда в пределе (при $n \to \infty$) получаем

$$\mathrm{Re}(Au, u) + \mathrm{Re}[\alpha(v, u)] \leqslant 0.$$

Это неравенство может быть выполнено при любом комплексном α лишь в том случае, когда $(v, u) = 0$. В силу плотности $\mathcal{D}(A)$ в $\mathcal{H}$ и произвольности $u \in \mathcal{D}(A)$ отсюда следует, что $v = 0$, т. е. A допускает замыкание.

2^0. Замыкание $\overline{A}$ диссипативного оператора A будет также диссипативным оператором, так как из условий $\mathrm{Re}(Au_n, u_n) \leqslant 0$, $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $Au_n \to Au$, $u_n \to u$, следует, что

$$\mathrm{Re}(\overline{A}u, u) \leqslant 0.$$

□

Теорема 3.1.4. *Для того, чтобы оператор A был генератором сжимающей (C_0)–полугруппы $\{U(t)\}$, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, необходимо и достаточно, чтобы он был максимальным диссипативным оператором.*

Доказательство. а) *Необходимость.* Пусть $\{U(t)\}$ — (C_0)–*полугруппа сжимающих операторов.* Тогда *функция* $\psi(t) := \|U(t)u\|^2$ $(\forall u \in \mathcal{D}(A))$ *будет невозрастающей*, так как

$$\|U(t+\tau)u\|^2 = \|U(\tau)U(t)u\|^2 \leqslant \|U(t)u\|^2 \quad (\tau > 0).$$

Поэтому производная этой функции неположительна:

$$\frac{d}{dt}\Big(U(t)u, U(t)u\Big) = \Big(\frac{d}{dt}U(t)u, U(t)u\Big) + \Big(U(t)u, \frac{d}{dt}U(t)u\Big) =$$
$$\big(AU(t)u, U(t)u\big) + \big(U(t)u, AU(t)u\big) = 2\operatorname{Re}\big(AU(t)u, U(t)u\big) \leqslant 0.$$

Полагая здесь $t = 0$, получаем свойство диссипативности:

$$\operatorname{Re}(Au, u) \leqslant 0 \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)).$$

Так как генератор A полугруппы $\{U(t)\}$ по теореме Хилле–Иосиды задан на плотном множестве $\mathcal{D}(A)$, замкнут и любое $\lambda > 0$ принадлежит $\rho(A)$, то *область значений оператора* $A - \lambda I$ *есть все пространство* $\mathcal{H}$. Значит, оператор A является *максимальным* диссипативным оператором.

б) *Достаточность.* Пусть A — максимальный диссипативный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Проверим, что для него выполнены условия теоремы Хилле-Иосиды. По условию оператор A задан на плотном множестве и замкнут. Далее, при любом $\lambda > 0$ имеем

$$\operatorname{Re}\big((A - \lambda I)u, u\big) = \operatorname{Re}(Au, u) - \lambda(u, u) \leqslant -\lambda(u, u) \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)).$$

Поэтому

$$\|(A - \lambda I)u\| \cdot \|u\| \geqslant |\big((A - \lambda I)u, u\big)| \geqslant -\operatorname{Re}\big((A - \lambda I)u, u\big) \geqslant \lambda\|u\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\|(A - \lambda I)u\| \geqslant \lambda\|u\|,$$

поэтому $0 < \lambda \in \rho(A)$, т.е. $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ и

$$\|(A - \lambda I)^{-1}v\| \leqslant \lambda^{-1}\|v\| \quad (v = (A - \lambda I)u \in \mathcal{H}).$$

Значит $\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1$, и по теореме Хилле-Иосида полугруппа $U(t)$, построенная по генератору A, является сжимающей (C_0)–полугруппой. Как уже отмечалось в п.6.6, по генератору A полугруппа $U(t)$ строится однозначно. □

Замечание 3.1.2. Легко проверить, что для максимального диссипативного оператора A вся полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$. $\square$

Важным критерием максимальной диссипативности оператора A является следующее утверждение.

Теорема 3.1.5. *Для того, чтобы диссипативный оператор A был максимальным диссипативным оператором, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнут и выполнялись условия*

$$\operatorname{Re}(Au, u) \leq 0 \ (u \in \mathcal{D}(A)), \quad \operatorname{Re}(A^* v, v) \leq 0 \ (v \in \mathcal{D}(A^*)),$$

где A^* – оператор, сопряженный к оператору A.

Доказательство теоремы здесь не приводится, его можно найти в монографии С. Г. Крейна [2, с. 106–110]. $\square$

3.1.8 Общий случай сильно непрерывной полугруппы операторов

Вернемся к задаче характеризации произвольных (C_0)–полугрупп в банаховом пространстве E. Общая теорема о генераторах полугрупп здесь будет выведена как следствие теоремы Хилле–Иосиды, т. е. общий случай следует из случая сжимающих полугрупп.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Теорема 3.1.6. *Пусть $\{U(t)\}$ является (C_0)–полугруппой в E. Тогда существуют постоянные $M \geqslant 1$ и $\omega \geqslant 0$ такие, что*

$$\|U(t)\| \leqslant M\,\mathrm{e}^{\omega t} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

Доказательство. Поскольку для полугруппы $\{U(t)\}$ при любом $u \in E$ функция $U(t)u \in C([0,1], E)$, то

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|U(t)u\| < \infty \quad (\forall u \in E).$$

Поэтому по теореме Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) следует существование такой постоянной M, что

$$\|U(t)\| \leqslant M, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

При этом $M \geqslant 1$, так как $U(0) = I$.

Положим $\omega = \ln M \geqslant 0$. Для каждого $t \geqslant 0$ обозначим через n наименьшее целое число, превосходящее t. Тогда

$$\|U(t)\| = \|U(t/n)^n\| \leqslant M^n \leqslant M^{t+1} = M\,\mathrm{e}^{\omega t}.$$

□

На основе этой теоремы и теоремы Хилле–Иосиды можно теперь установить основной результат.

Теорема 3.1.7. *(о генераторах полугрупп). Для того, чтобы оперетор A был генератором (C_0)–полугруппы $\{U(t)\}$, необходимо и достаточно, чтобы A был замкнут, плотно определен и существовали такие постоянные $M \geqslant 1$ и $\omega \geqslant 0$, что $\lambda \in \rho(A)$ при любом $\lambda > \omega$ и*

$$\|(\lambda-\omega)^n(A-\lambda I)^{-n}\| \leqslant M \quad (n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega). \tag{3.1.27}$$

В этом случае

$$\|U(t)\| \leqslant M\,\mathrm{e}^{\omega t} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

Более того, на E существует эквивалентная норма $\|\cdot\|_U$ такая, что

$$\{V(t)\} = \{\mathrm{e}^{-\omega t}\,U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$$

является сжимающей (C_0)–полугруппой (на E с нормой $\|\cdot\|_U$) с генератором $A-\omega I$.

Доказательство этой теоремы эдесь будет приведено лишь *для случая необходимости.* 1) Пусть $\{U(t)\}$ является (C_0)–полугруппой. Тогда по теореме 3.1.6 найдутся такие постоянные $M \geqslant 1$ и $\omega \geqslant 0$, что $\|U(t)\| \leqslant M\,\mathrm{e}^{\omega t}(t \in \mathbb{R}_+)$. Отсюда следует, что оператор $A-\omega I$ порождает (C_0)–полугруппу

$$\{V(t)\} = \{\mathrm{e}^{-\omega t}\,U(t) : t \in \mathbb{R}_+\},$$

которая равномерно ограничена:

$$\|V(t)\| = \|\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,U(t)\| \leqslant M \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+). \tag{3.1.28}$$

2) Введем в пространстве E новую норму $\|\cdot\|_U$ по формуле

$$\|v\|_U := \sup_{t\geqslant 0}\|V(t)v\| = \sup_{t\geqslant 0}\|\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,U(t)u\|.$$

В силу (3.1.28) и неравенств

$$\|v\| = \|V(0)v\| \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\|V(t)v\| = \|v\|_U \leqslant M\cdot\|v\| \tag{3.1.29}$$

новая норма $\|\cdot\|_U$ эквивалентна старой норме $\|\cdot\|$.

3) Покажем, что в новой норме полугруппа $\{V(t)\}$ является сжимающей. В самом деле,

$$\|V(t)u\|_U = \sup_{t\geqslant 0} \|V(t+\tau)u\| \leqslant \sup_{t\geqslant 0} \|V(t)u\| = \|u\|_U.$$

Поэтому по теореме Хилле–Иосиды оператор $A - \lambda I$, являющийся генератором полугруппы $\{V(t)\|\}$, замкнут, плотно определен и для всех $\mu > 0$ выполнены свойства

$$\mu \in \rho(A - \omega I), \quad \|\mu\big((A-\omega I) - \mu I\big)^{-1} v\|_U \leqslant \|v\|_U \tag{3.1.30}$$

при любом $v \in E$.

Из формулы (3.1.30) последовательно получаем

$$\|\mu^2\big(A - (\omega+\mu)I\big)^{-2} v\|_U \leqslant \|v\|_U, \ \dots ,$$
$$\|\mu^n\big(A - (\omega+\mu)I\big)^{-n} v\|_U \leqslant \|v\|_U, \ n \in \mathbb{N}, \ \forall \mu > 0. \tag{3.1.31}$$

Из этих неравенств следуют формулы (3.1.27) с $\lambda = \mu + \omega$. Точнее, из (3.1.31) и (3.1.29) получаем:

$$\|\mu^n\big(A - (\omega+\mu)I\big)^{-n} v\| \leqslant \|\mu^n\big(A - (\omega+\mu)I\big)^{-n} v\|_U \leqslant \|v\|_U \leqslant M\|v\|$$
$$\Rightarrow \|\mu^n\big(A - (\omega+\mu)I\big)^{-n}\| \leqslant M \Rightarrow \lambda = \mu + \omega \Rightarrow$$
$$\|(\lambda-\omega)^n (A - \lambda I)^{-n}\| \leqslant M \qquad (n \in \mathbb{N}, \lambda > \omega).$$

Попутно установлено (теорема Хилле–Иосиды для полугруппы $\{V(t)\}$ и ее генеретора $A - \omega I$), что оператор A плотно определен и замкнут. Этим доказательство необходимости в теореме 3.1.7 завершено.

□

Доказательство достаточности условий теоремы 3.1.7 можно найти в монографии Дж. Голдстейна [16, с. 37–38].

3.1.9 Сильно непрерывные группы операторов. Консервативные операторы

При изучении физических процессов на промежутке времени $-\infty < t < \infty$ важную роль играют группы операторов, краткое изучение которых сейчас будет приведено.

Определение 3.1.7. *(C_0)–группой на E называется семейство операторов $\{U(t)\} \subset \mathcal{L}(E)$, удовлетворяющее условиям из определения (C_0)–полугруппы с заменой условия $t \in \mathbb{R}_+$ на условие $t \in \mathbb{R}$.*

□

Генератор A для (C_0)–группы на E определяется равенством

$$Au := \lim_{t\to 0} t^{-1}(U(t)u - u), \tag{3.1.32}$$

причем имеется ввиду двусторонний предел $t \to 0$. Как и для полугрупп, область определения $\mathcal{D}(A)$ генератора A группы $\{U(t)\}$ состоит из тех элементов $u \in E$, для которых предел (3.1.32) существует.

Важным примером (C_0)–группы с генератором $A \in \mathcal{L}(E)$ является операторная экспонента:

$$U(t) := \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{3.1.33}$$

Нетрудно видеть, что ряд (3.1.33) сходится по операторной норме при всех $t \in \mathbb{R}$ (и даже $t \in \mathbb{C}$), а оператор A является генератором для $\{U(t)\}$.

Основные утверждения для (C_0)–групп ниже будут сформулированы в виде теорем, доказательства которых даются в качестве упражнений.

Теорема 3.1.8. *Оператор A является генератором (C_0)–группы $\{U(t)\}$ тогда и только тогда, когда операторы $\pm A$ порождают (C_0)–полугруппы $\{U_\pm(t)\}$; в этом случае искомая группа $\{U(t)\}$ имеет вид*

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t)\,, & t \geqslant 0, \\ U_-(-t), & t \leqslant 0. \end{cases}$$

□

Теорема 3.1.9. *(о генераторах групп). Для того, чтобы оператор A порождал (C_0)–группу $\{U(t)\}$ на E, необходимо и достаточно, чтобы A был замкнут, плотно определен и существовали такие постоянные $M \geqslant 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$, что $\lambda \in \rho(A)$, если $|\lambda| > \omega$, и*

$$\|(|\lambda| - \omega)^n (A - \lambda I)^{-n}\| \leqslant M \quad (|\lambda| > \omega,\ n \in \mathbb{N}).$$

В этом случае

$$\|U(t)\| \leqslant M\,\mathrm{e}^{\omega|t|} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□

Перейдем теперь к рассмотрению (C_0)–групп в гильбертовом пространстве $E = \mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Определение 3.1.8. *Линейный оператор A с плотной областью определения $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ называется консервативным, если*

$$\mathrm{Re}(Au, u) = 0 \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)).$$

□

Отметим простые свойства консервативных операторов.
1°. Если A — консервативный оператор, то оператор $(-A)$ также является консервативным.
2°. Всякий консервативный оператор является диссипативным.
3°. Оператор A консервативен тогда и только тогда, когда оператор $B = iA$ симметричен.

В самом деле, если $\mathrm{Re}(Au, u) = 0$, то $\mathrm{Re}(-iBu, u) = = \mathrm{Im}(Bu, u) = 0$, т. е. $(Bu, u) \in \mathbb{R}$ $(\forall u \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H})$. Отсюда уже легко установить, что

$$(Bu, v) = (u, Bv) \quad (u, v \in \mathcal{D}(A)).$$

(Для этого следует рассмотреть выражения $(B(u + v), u + v)$ и $(B(u + iv), u + iv)$ с произвольными u, $v \in \mathcal{D}(A)$ и воспользоваться установленными выше свойствами.)
4°. Если для замкнутого оператора A операторы A и A^* одновременно (т. е. на одном и том же множестве $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$) являются консервативными, то $A = iB$, где B — самосопряженный оператор, т. е. $B = B^*$ и $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B^*)$.

Данное утверждение следует из того, что B и B^* *одновременно* будут симметрическими операторами, а тогда $B^* = (B^*)^* = \overline{B} = B$. (Свойство $(B^*)^* = \overline{B}$ доказывается в курсе функционального анализа.)

□

Переходя к изучению свойств групп и полугрупп операторов, у которых генераторы являются консервативными операторами, напомним следующие определения.

Определение 3.1.9. *Линейный оператор U, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется изометрическим, если $\|Uv\| = \|v\|$ $(\forall v \in \mathcal{H})$. Это равносильно тому, что*

$$(Uu, Uv) = (u, v) \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}). \tag{3.1.34}$$

Определение 3.1.10. *Если для изометрического оператора U существует ограниченный обратный оператор U^{-1}, то оператор U называют унитарным. Для этого оператора выполнено свойство $U^* = U^{-1}$.*

□

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях семейство операторов $\{U(t)\}$ будет (C_0)–полугруппой изометрических либо унитарных операторов.

Теорема 3.1.10. *Семейство $\{U(t)\}$ является (C_0)–полугруппой изометрических операторов тогда и только тогда, когда ее генератор A является максимальным диссипативным консервативным оператором.*

Доказательство. 1°. *Необходимость.* Пусть $\{U(t)\}$ есть (C_0)–полугруппа изометрических, а потому и сжимающих операторов. Поэтому по теореме 3.1.4 ее генератор A является максимальным диссипативным оператором. Покажем, что он обладает свойством консервативности.

Пусть $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\Big(U(t)u, U(t)u\Big)\Big|_{t=0} = 2\,\mathrm{Re}(Au, u) = \frac{d}{dt}(u, u) = 0.$$

2°. *Достаточность.* Если A — максимальный диссипативный оператор, то снова по теореме 3.1.4 ему отвечает сжимающая (C_0)–полугруппа $\{U(t)\}$. Проверим, что она обладает свойством изометричности. Если $u \in \mathcal{D}(A)$, то

$$\frac{d}{dt}(U(t), U(t)u) = 2\,\mathrm{Re}(AU(t)u, U(t)u) = 0,$$

и потому

$$(U(t)u, U(t)u) = (U(0)u, U(0)u) = (u, u) \quad (\forall \in \mathcal{D}(A)).$$

Так как $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}$, то это соотношение, а вместе с ним и (3.1.34) справедливы при любом $u \in \mathcal{H}$. □

Теорема 3.1.11. *Для того, чтобы семейство $\{U(t)\}$ было полугруппой унитарных операторов, необходимо и достаточно, чтобы ее генератор $A = iB$, где B — самосопряженный оператор, действующий в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. 1°. *Необходимость.* Если $\{U(t)\}$ – полугруппа унитарных операторов, то по теореме 3.1.10 ее генератор A яляется максимальным диссипативным консервативным оператором.

Заметим теперь, что семейство $\{U^{-1}(t)\} = \{U^{*}(t)\}$, как легко проверить, также является унитарной полугруппой, и тогда ее генератор снова по теореме 3.1.10 является максимальным диссипативным консервативным оператором. Можно установить (здесь этот факт не доказывается, см., например, монографию Дж. Голстейна [16], с. 52–53, теорема 4.3), что этот генератор совпадает с A^*. Тогда

$$\mathrm{Re}(A^*v, v) = 0 \quad (\forall v \in \mathcal{D}(A^*)).$$

Отсюда по свойству 4° консервативных операторов получаем, что $A = iB$, где $B = B^*$.

2°.*Достаточность.* Если $A = iB$, $B = B^*$, то

$$\mathrm{Re}(Au, u) = 0 \ (\forall u \in \mathcal{D}(A)), \quad \mathrm{Re}(A^*v, v) = 0 \ (\forall v \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)).$$

Поэтому по теореме 3.1.10 семейства $\{U(t)\}$ и $\{U^*(t)\}$ являются (C_0)–полугруппами изометрических операторов. Так как обе полугруппы заданы на всем $\mathcal{H}$ и взаимно сопряжены, то обе они унитарны.

□

Замечание 3.1.3. В условиях теоремы 3.1.11 полугруппа $\{U(t)\}$ может быть продолжена до группы унитарных операторов, если положить

$$U(-t) := U^*(t) = U^{-1}(t) \quad (t > 0).$$

□

Приведем в заключение этого пункта простейший пример унитарной группы операторов: если $B = B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то

$$U(t) := \exp(itB) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itB)^k}{k!} = \cos(tB) + i\sin(tB). \tag{3.1.35}$$

Формула (3.1.35) есть операторный аналог известной формулы Эйлера для комплексных чисел. □

3.1.10 Теория возмущений полугрупп

В практических задачах часто возникает такая ситуация, когда операторный коэффициент в задаче Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $A + B$, где A – генератор (C_0)–полугруппы, а оператор B в определенном смысле подчинен оператору A. Возникает естественный вопрос о том, при каких условиях, связывающих A и B, оператор $A + B$ также будет генератором (C_0)–полугруппы. Некоторые самые простые результаты в этом направлении сейчас будут сформулированы и доказаны.

Установим сначала следующий вспомогательный факт.

Теорема 3.1.12. *Пусть A – замкнутый неограниченный линейный оператор с плотной в E областью определения $\mathcal{D}(A)$. Пусть оператор B допускает замыкание и имеет область определения $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$.*

Тогда справедливо неравенство

$$\|Bu\| \leqslant c(\|u\| + \|Au\|) =: c\|u\|_A \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)). \tag{3.1.36}$$

Доказательство. Превратим $\mathcal{D}(A)$ в банахово пространство E_A с нормой (3.1.36). Покажем, что оператор B определен на всем E_A и замкнут. Проверим сначала, что этот оператор замкнут на E_A. В самом деле, если $u_n \to u$ в E_A и $Bu_n \to v$ в E, то $u_n \to u$ в E и $v = \overline{B}u$, так как B допускает замыкание. Однако замыкание $\overline{B}$ совпадает с B на $\mathcal{D}(A)$, и потому $v = Bu$, так что B замкнут на E_A.

Далее, замкнутый оператор B, определенный на всем простанстве E_A, ограничен на этом пространстве (по теореме Банаха, см. свойства 3° и 4° из п. 3.1.3). Из этого факта следует свойство (3.1.36), точнее $\|Bu\| \leqslant \|Bu\|_A \leqslant C\|u\|_A = C(\|u\| + \|Au\|)$.

□

Замечание 3.1.4. В некоторых случаях подчиненность оператора B оператору A взамен (3.1.36) определяют неравенством

$$\|Bu\| \leqslant C\|Au\| \quad (\forall \in \mathcal{D}(A)),$$

или неравенством

$$\|Bu\| \leqslant a\|Au\| + b\|u\|, \quad a > 0,\ b \geqslant 0\ (\forall u \in \mathcal{D}(A)).$$

□

Теорема 3.1.13. *Пусть оператор A порождает сжимающую (C_0)–полугруппу на $E = \mathcal{H}$. Пусть оператор B диссипативен, $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ и существуют постоянные $0 \leqslant a < 1$ и $b \geqslant 0$ такие, что*

$$\|Bu\| \leqslant a\|Au\| + b\|u\| \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)). \tag{3.1.37}$$

Тогда $A + B$ (с областью определения $\mathcal{D}(A)$) порождает сжимающую (C_0)–полугруппу.

Доказательство этой теоремы можно найти в монографии Дж. Голдстейна [16], с. 63–64.

□

Для общих (C_0)–полугрупп в $E = \mathcal{H}$ имеет место следующий результат.

Теорема 3.1.14. *Пусть оператор A порождает (C_0)–полугруппу $\{U(t)\}$ в $\mathcal{H}$, а $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда $A+B$ порождает (C_0)–полугруппу в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. 1°. Представим $A+B = (A-\omega I) + (B+\omega I)$, где $\omega \geqslant 0$ — постоянная из теоремы 3.1.7 (о генераторах полугрупп). Тогда по теореме 3.1.6 полугруппа $\{\mathrm{e}^{-\omega t}\, U(t)\}$ равномерно ограничена:

$$\|\, \mathrm{e}^{-\omega t}\, U(t)\| \leqslant M \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

Учитывая это обстоятельство, можно сразу считать, что $\omega = 0$ и полугруппа $U(t)$, порожденная оператором A, равномерно ограничена.

2°. Введем, как и при доказательстве теоремы 3.1.7, эквивалентную норму $\|v\|_U := \sup\limits_{t \geqslant 0} \|U(t)v\|$. Тогда, как было установлено в теореме 3.1.7, оператор A будет в новой норме генератором сжимающей (C_0)–полугруппы $\{U(t)\}$ в $\mathcal{H}$, а потому A — максимальный диссипативный оператор в новой норме.

3°. Рассмотрим оператор $\tilde{B} := B - \|B\|_U \cdot I$. Нетрудно видеть, что для этого оператора выполнены свойства

$$\left.\begin{array}{lll} \text{а)} & \mathrm{Re}\,\big((B-\|B\|_U I)u, u\big)_U \leqslant 0 & (\forall u \in E = \mathcal{H}), \\ \text{б)} & \|\big(B - \|B\|_U I\big)u\|_U \leqslant 2\|B\|_U \cdot \|u\|_U & (u \in \mathcal{D}(A) \subset E = \mathcal{H}). \end{array}\right\}$$

В самом деле,

$$\mathrm{Re}\,\big((B-\|B\|_U I)u, u\big)_U = \mathrm{Re}(Bu,u)_U - \|B\|_U \|u\|_U^2 \leqslant$$
$$\leqslant |(Bu,u)_U| - \|B\|_U \cdot \|u\|_U^2 \leqslant \|B\|_U \cdot \|u\|_U^2 - \|B\|_U \cdot \|u\|_U^2 = 0.$$

Отсюда следует, что оператор $\tilde{B}$ диссипативен и удовлетворяет неравенству подчиненности (3.1.37) с константами $a = 0$ и $b = 2\|B\|_U$.

4°. По теореме 3.1.13 получаем, что оператор $A + \tilde{B} = A + B - \|B\|_U I$ порождает (C_0)–полугруппу на $\mathcal{H}$ (являющуюся сжимающей в норме $\|\cdot\|_U$).

Поэтому и оператор

$$A + B = (A + B - \|B\|_U I) + \|B\|_U I$$

порождает (C_0)–полугруппу на $\mathcal{H}$ с нормой $\|\cdot\|$. □

Отметим в заключение этого параграфа, что изученные здесь свойства (C_0)–полугрупп и (C_0)–групп операторов действующих в банаховом пространстве E либо гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и имеющих неограниченные генераторы, будут далее существенно использованы при исследовании вопросов разрешимости задачи Коши для абстрактных линейных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

3.2 Линейные абстрактные задачи Коши

На примере линейного однородного и неоднородного уравнений здесь будет видно, как работает теория (C_0)–полугрупп в банаховом пространстве.

3.2.1 Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset E, \tag{3.2.1}$$

в банаховом пространстве E.

Определение 3.2.1. *Задача (3.2.1) называется корректно поставленной, если* $\rho(A) \neq \emptyset$ *и для любого* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ *имеется единственное решение* $u = u(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{D}(A)$ *задачи, которое является функцией из* $C^1(\mathbb{R}_+; E)$. □

Замечание 3.2.1. "Корректность" означает больше, чем существование и единственность, а именно, *дополнительно требуется непрерывная зависимость решения* $u(t)$ *от начального элемента* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$. Только существование и единственность еще не гарантируют, что задаче (3.2.1) отвечает (C_0)-полугруппа $\{U(t)\}$ с генератором A. Простейшим дополнительным условием, которое обеспечивает упомянутую непрерывность, является техническое требование $\rho(A) \neq \emptyset$. □

Сформулируем основной результат для однородной задачи.

Теорема 3.2.1. *Для того, чтобы задача (3.2.1) была корректно поставлена, необходимо и достаточно, чтобы оператор* A *был генератором* (C_0)*- полугруппы* $\{U(t)\}$ *на* E*. В этом случае решение* $u(t)$ *дается формулой*

$$u(t) = U(t)u^0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.2.2}$$

Доказательство. 1^0. *Достаточность.* Предположим, что A порождает (C_0)-полугруппу $\{U(t)\}$. Тогда $\rho(A) \neq \emptyset$, так как

$$\|U(t)\| \leqslant M\, \mathrm{e}^{\omega t}, \quad M \geqslant 1,\ \omega \geqslant 0,\ \lambda > \omega \Rightarrow \lambda \in \rho(A),$$

для $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ функция (3.2.2) является решением задачи (3.2.1) и, как следует из рассмотрений свойств (C_0)-полугрупп в параграфе 3.1, функцией из пространства $C^1(\mathbb{R}_+; E)$. Остается для доказательства корректности постановки задачи (3.2.1) убедиться, что решение этой задачи единственно.

Пусть $v(t)$ — произвольное решение задачи (3.2.1). Для $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ вычислим

$$\frac{d}{dt}[U(t-s)v(s)] = U(t-s)(-A)v(s) + U(t-s)Av(s) = 0.$$

Поэтому функция $U(t-s)v(s)$ не зависит от s; в частности, при $s = t$ и при $s = 0$ имеем соответственно

$$v(t) = U(t)v(0) = U(t)u^0.$$

2^0. *Необходимость.* Пусть задача (3.2.1) корректно поставлена. Покажем, что в этом случае оператор A порождает (C_0)-полугруппу $\{U(t)\}$ на E.

а) Выберем $\lambda \in \rho(A)$ (это можно сделать!) и будем считать для простоты, что $\lambda = 0$. (В противном случае можно сделать замену оператора A на оператор $B = A - \lambda I$, решение $u(t)$ на $v(t) = \exp(-\lambda t)u(t)$; тогда $0 \in \rho(B)$).

б) Определим банаховы пространства

$$F := C^1([0,1]; E), \quad G := \{u \in \mathcal{D}(A) : \|u\|_G := \|Au\|_E < \infty\},$$
$$\|u(t)\|_F := \sup\{\|u(t)\|_E + \|u'(t)\|_E : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Введем линейный оператор $L : G \to F$ равенством

$$Lu^0 := u(t),$$

где $u(t)$ – *единственное решение задачи* (3.2.1). Очевидно, что $\mathcal{D}(L) = G$.

в) Покажем, что *оператор* L *замкнут*. В самом деле, пусть

$$\|u_n^0\|_G = \|Au_n^0\|_E \to 0, \quad \|u_n(t) - u(t)\|_F \to 0 \ (n \to \infty), \quad u_n(t) = Lu_n^0.$$

Тогда для $0 \leqslant t \leqslant 1$ (в силу определения нормы в F) имеем при $n \to \infty$:

$$u_n(t) \to u(t) \ (\text{ в } E\ ), \quad Au_n(t) = u_n'(t) \to u'(t) \ (\text{ в } E\ ).$$

Так как $0 \in \rho(A)$, то оператор A замкнут, и потому $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ и $u'(t) = Au(t)$. Поскольку, кроме того,

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} A^{-1}(Au_n^0) = A^{-1} \lim_{n\to\infty} A(u_n^0) = 0,$$

то $u(t) \equiv 0$ (здесь использовано свойство единственности решений задачи (3.2.1)). Этим свойство замкнутости оператора L доказано.

г) Так как оператор L определен на всем пространстве $G = \mathcal{D}(A)$, то по теореме о замкнутом графике он ограничен (как оператор из G в F), и поэтому

$$\|Lu^0\|_F := \|u(t)\|_F = \sup\{\|u(t)\| + \|u'(t)\| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \|L\| \cdot \|Au^0\|_E. \tag{3.2.3}$$

д) Введем теперь семейство $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ согласно соотношению

$$u(t) =: U(t)u^0, \quad U(t) : \mathcal{D}(A) \subset E \to E.$$

Из корректности задачи (3.2.1) следует, что для $U(t)$ выполнены полугрупповые свойства

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad (t, s \geqslant 0),\ U(0) = I.$$

Кроме того, из (3.2.3) следует, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция $u(t) = U(t)u^0$ является непрерывной на $\mathcal{D}(A) = G$, так как

$$\|u(t)\|_{C([0,1];E)} = \sup\{\|u(t)\| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\|u(t)\| + \|u'(t)\| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \|L\| \cdot \|Au^0\| < \infty.$$

е) Докажем теперь, что $\|U(t)\| \leqslant M \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$. В самом деле, предполагая противное, получим, что найдется последовательность $\{t_n\} \subset [0,1]$ и $u_n^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\|u_n^0\| = 1$, такие, что

$$\|U(t_n)u_n^0\| \geqslant n.$$

Полагая $v_n^0 := u_n^0/n \in \mathcal{D}(A)$, имеем $\|v_n^0\| \to 0$, $\|U(t_n)v_n^0\| \geqslant 1 \quad (n \in N)$, что противоречит свойству корректности задачи (3.2.1).

ж) Далее, из принадлежности $u(t) = U(t)u^0 \in C([0,1];E)$ при $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ и ограниченности нормы $\|U(t)\|$ при $t \in [0,1]$ получаем, что $u(t) = U(t)u^0 \in C([0,1];E)$ при любом $u^0 \in E$.

Действительно, пусть $u_n^0 \in \mathcal{D}(A)$ и $u_n^0 \to u^0 \in E$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$\|U(t+\Delta t)u^0 - U(t)u^0\| \leqslant \|U(t+\Delta t)(u^0 - u_n^0)\| + \|(U(t+\Delta t)-$$
$$- U(t))u_n^0\| + \|U(t)(u_n^0 - u^0)\| \to 0 \qquad (\Delta t \to 0,\ \ n \to \infty),$$

поскольку каждое слагаемое справа стремится к нулю, причем среднее — в силу свойства сильной непрерывности $U(t)u_n^0$ $(u_n^0 \in \mathcal{D}(A))$.

з) Из принадлежности $u(t) \in C([0,1];E)$ и корректности задачи, как и в теореме 6.6, получаем, что $u(t) \in C(\mathbb{R}_+;E)$ и

$$\|U(t)\| \leqslant M\exp(\omega t) \quad (M \geqslant 1, \omega \geqslant 0, t \in \mathbb{R}_+).$$

Таким образом, полугруппа $\{U(t)\}$ является (C_0)-полугруппой, и теорема доказана полностью. При этом оператор A является генератором $U(t)$.

□

3.2.2 Неоднородная задача Коши

Рассмотрим теперь абстрактную задачу Коши для неоднородного уравнения:

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad u(0) = u^0. \tag{3.2.4}$$

Здесь основной результат дается следующей теоремой.

Теорема 3.2.2. *Пусть оператор A порождает (C_0)–полугруппу на E и $u^0 \in \mathcal{D}(A)$. Предположим, что выполнено одно из двух условий:*
1°. *$f(t) \in C(\mathbb{R}_+; E)$, принимает значения в $\mathcal{D}(A)$ и*

$$Af(t) \in C(\mathbb{R}_+; E); \tag{3.2.5}$$

2°. *$f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$.*

Тогда задача (3.2.4) имеет единственное решение $u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$ со значениями в $\mathcal{D}(A)$; оно дается формулой

$$u(t) = U(t)u^0 + \int_0^t U(t-s)f(s)\,ds.$$

Доказательство. 1°. Проверим сначала, что задача (3.2.4) имеет единственное решение. Если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения этой задачи, то $u(t) := u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет равенствам

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (t \in \mathbb{R}_+),\ u(0) = 0.$$

Отсюда $u(t) = U(t)0 \equiv 0$.

2°. Для доказательства существования решения задачи (3.2.4) будем искать его в виде

$$u(t) = U(t)u^0 + \int_0^t U(t-s)f(s)ds.$$

Здесь $w(t) := U(t)u^0$ — решение однородной задачи Коши (3.2.4) с тем же начальным условием. Проверим, что

$$v(t) := \int_0^t U(t-s)f(s)ds$$

есть решение неоднородной задачи (3.2.4) с нулевым начальным условием, и тогда $u(t) = w(t) + v(t)$.

Заметим, что $w(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$, так как $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, а оператор A является генератором (C_0)–полугруппы $U(t)$ (см. теорему 3.2.1). Поэтому $u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$ в точности тогда, когда $v(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$). В этом случае

$$u'(t) = AU(t)u^0 + v'(t) \equiv Au(t) + f(t) =$$
$$= A(w+v) + f(t) = AU(t)u^0 + Av + f(t).$$

Таким образом, исходное уравнение (3.2.4) справедливо в точности тогда, когда

$$v'(t) = Av(t) + f(t). \tag{3.2.6}$$

3°. Проверим сначала, что соотношение (3.2.6) выполнено в предположении 1° теоремы. Для замкнутого оператора A имеем $Av(t) = \int_0^t AU(t-s)f(s)ds\left(= \int_0^t U(t-s)Af(s)ds\right)$. Далее, так как $f(s) \in \mathcal{D}(A)$, то $U(t-s)f(s) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$, поскольку $U(t-s)f(s)$ — решение однородного уравнения с начальными данными при $t = s$, и поэтому существует производная

$$v'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t U(t-s)f(s)\,ds = U(0)f(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[U(t-s)f(s)]\,ds =$$

$$= f(t) + \int_0^t [AU(t-s)f(s)]\,ds = f(t) + A\int_0^t U(t-s)f(s)\,ds = f(t) + Av(t),$$

так как $(\partial/\partial t)[U(t-s)f(s)] \equiv AU(t-s)f(s)$ как решение однородного уравнения с начальными данными при $t = s$. Свойство (7.7) доказано.

4°. а) Пусть теперь выполнено условие 2° теоремы. Напомним, что при доказательстве теоремы Хилле-Иосиды было установлено, что

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t U(s)u\,ds \in \mathcal{D}(A) \quad (\forall u \in E),\\ A\int\limits_0^t U(s)u\,ds = U(t)u - u \quad (\forall u \in E).\end{gathered} \tag{3.2.7}$$

б) Проверим, опираясь на свойства (3.2.7), что $v(t) \in \mathcal{D}(A)$. Имеем

$$\begin{gathered}v(t) = \int\limits_0^t U(t-s)[f(0) + \int\limits_0^s f'(\xi)d\xi]\,ds = \int\limits_0^t U(t-s)f(0)\,ds +\\ + \int\limits_0^t d\xi \int\limits_\xi^t U(t-s)f'(\xi)ds = \begin{vmatrix} t-s=\tau \\ -ds = d\tau \end{vmatrix} = \int\limits_0^t U(\tau)f(0)\,d\tau +\\ + \int\limits_0^t d\xi \int\limits_0^{t-\xi} U(\tau)f'(\xi)\,d\tau \in \mathcal{D}(A).\end{gathered} \tag{3.2.8}$$

в) Далее, так как $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$, то $v(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; E)$ и

$$\begin{gathered}v'(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t U(t-s)f(s)\,ds = \begin{vmatrix} t-s=\tau \\ -ds = d\tau \end{vmatrix} = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t U(\tau)f(t-\tau)\,d\tau =\\ = U(t)f(0) + \int\limits_0^t U(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau = U(t)f(0) + \int\limits_0^t U(t-s)f'(s)\,ds.\end{gathered} \tag{3.2.9}$$

г) Вычислим теперь, используя вторую формулу (3.2.7), а также представление (3.2.8), выражение $Av(t)$; имеем

$$
\begin{aligned}
Av(t) &= A\{\int\limits_0^t U(\tau)f(0)\,d\tau + \int\limits_0^t d\xi \int\limits_0^{t-\xi} U(\tau)f'(\xi)\,d\tau\} = \\
&= [U(t)f(0) - f(0)] + \int\limits_0^t \{U(t-\xi)f'(\xi) - f'(\xi)\}\,d\xi = \qquad (3.2.10)\\
&= U(t)f(0) - f(0) - [f(t) - f(0)] + \int\limits_0^t U(t-\xi)f'(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Из (3.2.9) и (3.2.10) следует формула (3.2.6). Теорема доказана.

□

3.2.3 Примеры

Рассмотрим, опираясь на доказанные факты, некоторые абстрактные примеры, а также классические задачи математической физики.

Пример 3.2.1. Пусть $E = \mathcal{H}$ — абстрактное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, а оператор $A = -B$, где B — самосопряженный положительно определенный (вообще говоря, неограниченный) оператор:

$$(Bu, u) \geqslant \gamma \|u\|^2 \quad (\gamma > 0,\ u \in \mathcal{D}(A)).$$

Так как данный оператор самосопряжен, а потому плотно определен и замкнут, и, кроме того, $B_\gamma := B - \gamma I \geqslant 0$, то оператор $-B_\gamma$ является максимальным диссипативным оператором. Поэтому по теореме 3.1.4 оператору $-B_\gamma$ отвечает сжимающая (C_0)–полугруппа

$$U_\gamma(t) := \exp(-tB_\gamma) = \exp(-t(B - \gamma I)), \quad \|U_\gamma(t)\| \leqslant 1.$$

Соответственно оператору $-B$ отвечает сжимающая (C_0)–полугруппа

$$U(t) = \exp(-tB), \quad \|U(t)\| \leqslant \exp(-\gamma t).$$

Эти рассуждения показывают, что задача Коши

$$\frac{du}{dt} = -Bu + f(t), \quad u(0) = u^0,$$

имеет при любом $u^0 \in \mathcal{D}(B)$ и при $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ единственное решение $u(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, причем $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ и $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

□

Замечание 3.2.2. Отметим, что в проведенных рассуждениях можно взять $\gamma \geqslant 0$, т. е. оператор B может быть лишь неотрицательным, и даже ограниченным снизу, а именно, $\gamma < 0$. □

Пример 3.2.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, причем $\partial\Omega$ — достаточно гладкая. Рассмотрим в области Ω классическую начально-краевую задачу Дирихле для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,\ \ u = 0 \text{ (на } \partial\Omega),\\
&u(0,x) = u^0(x), \quad \Delta := \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Введем на множестве

$$\mathcal{D}(A) := \{u(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\} \subset L_2(\Omega)$$

оператор A по закону

$$Au := -\Delta u.$$

Можно убедиться, что этот оператор самосопряжен, положительно определен и неограничен в $L_2(\Omega)$. В частности, его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \ldots$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а собственные элементы $\{u_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортогональный базис в $L_2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&(u_k, u_m)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u_k(x)\overline{u_m(x)}d\Omega = \delta_{km},\\
&(Au_k, u_m)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_k \cdot \overline{\nabla u_m} d\Omega = \lambda_k(A)\delta_{km}.
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Считая, что $u(t,x)$ при каждом t является элементом $L_2(\Omega)$, перепишем задачу (3.2.11) как абстрактную задачу Коши вида

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = u^0. \tag{3.2.13}$$

Как следует из разобранного выше примера 3.2.1, задача (3.2.13) при выполнении условий $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $f(t,x) \in C^1([0,T];\ L_2(\Omega))$ имеет единственное решение $u(t,x) \in C^1([0,T]; L_2(\Omega))$, причем $u(t,x) \in \mathcal{D}(A)$ при любом $t \in [0,T]$, а функция $(\Delta u)(t,x) \in C([0,T]; L_2(\Omega))$.

Таким образом, теорема о корректной разрешимости классической задачи Дирихле для уравнения теплопроводности есть прямое следствие теоремы 3.2.2. Аналогичные утверждения можно также получить для задач Неймана и третьей краевой задачи.

Отметим, что однородная задача (3.2.11) имеет решение

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda_k(A)t)(u^0, u_k)u_k, \tag{3.2.14}$$

где $\lambda_k(A)$ и $u_k = u_k(A)$ — собственные значения и собственные элементы оператора A, для которых справедливы соотношения (3.2.12). Аналогично (3.2.14) можно выписать в виде функционального ряда решение неоднородной задачи (3.2.11). □

Пример 3.2.3. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности $\rho > 0$ и кинематической вязкости $\nu > 0$ целиком заполняет полость Ω равномерно вращающегося вокруг оси Ox_3 твердого тела. Малые движения жидкости, близкие к равномерному вращению, описываются следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 2\omega_0(\vec{u} \times \vec{e}_3) + \nu\Delta\vec{u} - \rho^{-1}\nabla p + \vec{f}(t,x), \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \ (\text{в } \Omega\ ), \\ &\vec{u} = \vec{0} \ \ (\text{на } \partial\Omega\ ), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x). \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Здесь $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ — поле относительной скорости, $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$ — угловая скорость вращения тела, $p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного поля

$$P_0(x) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + \text{const},$$

$\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенных на гравитационные.

С помощью приема ортогонального проектирования, изложенного в случае вращающейся идеальной жидкости в параграфе 1.3, можно от начально-краевой задачи (3.2.15) об отыскании полей $\vec{u}(t,x)$ и $\nabla p(t,x)$ перейти к абстрактной задаче Коши

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nu A_0\vec{u} + iG\vec{u} + \vec{f}(t), \ \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \tag{3.2.16}$$

в гильбертовом пространстве $\vec{J}_0(\Omega)$. Здесь $\vec{u} = \vec{u}(t)$ — искомая функция со значениями в $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{f}(t)$ — заданная функция, $G = G^*$

— гироскопический оператор, $\sigma(G) = [-2\omega_0, 2\omega_0]$, а оператор A_0 (его называют оператором Стокса) обладает свойствами

$$A_0 = A_0^* \gg 0, \quad 0 < A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Доказательство этих свойств, а также таких же свойств спектра, как и у оператора A из примера 3.2.2, можно найти в монографии Н.Д. Копачевского, С.Г. Крейна и Нго Зуй Кана [6], с. 243–245.

Очевидно, оператор $B := -\nu A_0 + iG$ задачи (3.2.16) плотно определен ($D(B) = D(A_0)$), замкнут и обладает свойствами

$$\mathrm{Re}(B\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)} = -\nu(A_0\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)} \leqslant -\nu\lambda_1(A_0)\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} \leqslant 0,$$

т. е. является максимальным диссипативным оператором. Поэтому по теореме 3.1.4 этому оператору отвечает сжимающая полугруппа $\{U(t)\}$, причем

$$\|U(t)\| \leqslant \exp(-\nu\lambda_1(A_0)t).$$

Соответственно задача (3.2.16), а вместе с ней и исходная задача (3.2.15) имеют при $\vec{u^0}(x) \in D(A_0) = \vec{H}^2(\Omega) \cap \vec{J}_0^1(\Omega)$, $\vec{f}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{J}_0(\Omega))$ единственное решение

$$\vec{u}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{J}_0(\Omega)),$$

для которого $\vec{u}(t,x)$ и $A_0\vec{u}(t,x) \in C([0,T]; \vec{J}_0(\Omega))$. При этом предполагается, что $\partial\Omega$ достаточно гладкая.

Для этого решения справедлив закон баланса полной энергии, который здесь не выписывается. □

3.2.4 Основные факты теории дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве

1°. Переход к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка и использование теории (C_0)–групп.

В абстрактной задаче Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au \quad (t \in \mathbb{R}), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.2.17}$$

осуществляется переход к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка: если $u(t) =: u_1(t), u'(t) =: u_2$, то

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad (u_1(t); u_2(t))^\tau \in E \times E.$$

Если у оператора A исходной задачи (3.2.17) имеется квадратный корень B ($B^2 = A$), порождающий (C_0)-группу $\{V(t)\}$ на E, причем $0 \in \rho(B)$, то оператор $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ может порождать (C_0)-группу на $E \times E$. Эта группа имеет вид

$$U(t) = \operatorname{ch}(tB) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + B^{-1} \operatorname{sh}(tB) \begin{pmatrix} 0 & I \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.18}$$

$$\operatorname{ch}(tB) := 2^{-1}[V(t) + V(-t)], \ \operatorname{sh}(tB) := 2^{-1}[V(t) - V(-t)]. \tag{3.2.19}$$

Теорема α. *Пусть $0 \in \rho(B)$ и B является генератором (C_0)–группы $\{V(t)\}$ на E. Тогда оператор $\mathcal{A}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := D(B^2) \times E \subset D(B) \times E$ порождает (C_0)–группу $\{U(t)\}$ на $D(B) \times E$, определенную формулами (3.2.18)-(3.2.19). Более того, $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Задача Коши (3.2.17) корректна, если $A = B^2$, $u^0 \in D(B^2)$, $u^1 \in D(B)$. Для ее решения $u(t) : \mathbb{R} \to D(B^2) = \mathcal{D}(A)$ выполнено $u'(t) : \mathbb{R} \to D(B)$ и существуют такие постоянные K, ω, что*

$$\|Bu(t)\| + \|u(t)\| + \|u'(t)\| \leqslant K \exp(\omega|t|)(\|Bu^0\| + \|u^0\| + \|u^1\|)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $u^0 \in D(B^2)$, $u^1 \in D(B)$. □

Теорема β. *Пусть $E = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство и оператор C самосопряжен в $\mathcal{H}$. Тогда задача Коши*

$$\begin{aligned} &u''(t) + C^2 u = 0 \ (t \in \mathbb{R}), \\ &u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(C^2), \quad u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(C), \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

корректна, а соответствующая (C_0)–группа $\{U(t)\}$ взамен (3.2.18)–(3.2.19) принимает вид

$$U(t) = \cos(tC) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + C^{-1} \sin(tC) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Теорема γ (***о возмущениях***). *Пусть выполнены условия теоремы α (или теоремы β с $B = iC$). Пусть F — замкнутый оператор в E, такой, что $\mathcal{D}(F) \supset \mathcal{D}(B)$. Тогда задача Коши*

$$u''(t) = (B^2 + F)u(t) \ (t \in \mathbb{R}), \ u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(B^2), \ u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(B),$$

корректна. □

Теорема *δ. Если B порождает (C_0)–группу на E, то $\mathcal{A}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(B^2) \times \mathcal{D}(B)$ порождает (C_0)–группу на $E_B := \mathcal{D}(B) \times E$.* □

2^0. Операторные косинус– и синус–функции.

Эти функции находятся в таком же отношении к задаче Коши $u'' = Au$, как (C_0)–полугруппы — к задаче Коши $u' = Au$.

Определение 3.2.2. *Сильно непрерывной операторной косинус–функцией называется семейство операторов $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(E)$, удовлетворяющее условиям*

1. $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R};$
2. $C(0) = I;$
3. $C(t)u \in C(\mathbb{R}; E), \quad \forall u \in E.$

□

Определение 3.2.3. *Генератором A операторной косинус–функции $C(t)$ называется $A := C''(0)$. Область определения $\mathcal{D}(A)$ генератора A — это множество всех тех $u \in E$, для которых $C(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$ или, что равносильно,*

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in E : C(t)u \in C^2(\mathbb{R}, E)\}$$

□

Определение 3.2.4. *Пусть B — линейный оператор из $\mathcal{D}(B) \subset E$ в E. Задача Коши $u'' = Bu$ называется корректной типа ω на $\mathbb{R}_+$(или $\mathbb{R}$), где $\omega \in \mathbb{R}$, если выполнены следующие три условия:*

1°. *Существует плотное подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(B)$ такое, что для любых $u^0, u^1 \in \mathcal{D}$ найдется единственное решение $u(t)$ на $\mathbb{R}_+$(или $\mathbb{R}$) задачи $u'' = Bu,\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1$.*

2°. *Для каждого решения $u(t)$ такого, как в 1^0,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \ln \|u(t)\| \leqslant \omega.$$

3°. *Если $\{u_n(t)\}$ — последовательность решений уравнения*

$$u'' = Bu \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} u_n'(0) = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n'(t) = 0$ и сходимость равномерна по t в ограниченных подмножествах $\mathbb{R}_+$(или $\mathbb{R}$). □

Теорема α **(*о корректности*).** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1^0. *Задача Коши для уравнения* $u'' = Au$ *корректна типа* ω *на* $\mathbb{R}_+$ *для некоторого* ω.

2^0. *Эта задача корректна типа* ω *на* $\mathbb{R}$ *для некоторого* ω.

3^0. A *порождает операторную косинус–функцию.*

4^0. $\rho(A) \neq \emptyset$ *и для каждого* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ *задача* $u'' = Au$ $(t \geqslant 0)$, $u(0) = u^0$, $u'(0) = 0$, *имеет единственное решение* $u(t \in C^2(\mathbb{R}_+; E))$. □

Теорема β **(о генераторах).** *Для того, чтобы* A *порождал операторную косинус–функцию* $C(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы* A *был замкнут, плотно определен и существовали постоянные* $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$, *такие, что при* $\lambda > \omega$ *было* $\lambda^2 \in \rho(A)$ *и*

$$\Big\| \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda(A - \lambda^2 I)^{-1}) \Big\| \leqslant M m! (\lambda - \omega)^{-m-1} \quad (\forall m \in N \cup \{0\}).$$

В этом случае

$$\|C(t)\| \leqslant M m^{\omega|t|} \quad (\forall t \in \mathbb{R}),$$

$$\lambda(A - \lambda^2 I)^{-1} u = -\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t) C(t) u \, dt \quad (\lambda > \omega,\ u \in E).$$

□

Определение 3.2.5. *Пусть оператор* A *порождает операторную косинус–функцию* $\{C(t)\}$. *Определим*

$$\mathcal{D}_{1/2}(A) := \{u \in E : C(t)u \in C^1(\mathbb{R}, E)\},$$

$$S(t)u := \int\limits_0^t C(s) u \, ds \quad (\forall u \in E,\ t \in \mathbb{R}).$$

Семейство $\{S(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *называется операторной синус– функцией, ассоциированной с* $C(t)$. □

Теорема β. *Пусть* A *порождает операторную косинус–функцию* $C(t)$. *Пусть* $f(t) \in C^1(\mathbb{R}, E)$. *Единственное решение задачи*

$$u'' = Au + f(t), \quad u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}_{1/2}(A)$$

дается формулой

$$u(t) = C(t)\ u^0 + S(t) u^1 + \int\limits_0^t S(t-s) f(s) ds \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Теорема γ **(*о возмущениях*).** *Пусть оператор A порождает операторную косинус–функцию и $B \in \mathcal{L}(E)$. Тогда оператор $A+B$ порождает операторную косинус–функцию.* □

Связь между операторными косинус–функциями и (C_0)–полугруппами дается следующим утверждением.

Теорема δ**.** *Пусть оператор A порождает операторную косинус–функцию $C(t)$. Тогда A порождает (C_0)–полугруппу $\{U(t)\}$, задаваемую формулой*

$$U(t)u := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-y^2/4t} C(y)u\, dy.$$

□

Литература

1. Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

2. С.Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

3. А.В. Балакришнан. Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

4. А.Т. Талдыкин. Элементы прикладного функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982. — 383 с.

5. В.А. Треногин. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

6. Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

7. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 830 с.

8. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

9. А.С. Маркус. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

10. I. Gohberg, S. Goldberg, M. Kaashoek. Classes of Linear Operators. Vol. I. — Basel: Birkhauser, 1990. — 468 p.

11. H.O. Fattorini. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam: North–Holland, 1985. — 314 p.

12. Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. — М.:Мир, 1972. — 740 с.

13. К. Иосида. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

14. J.V. Ralston. On stationary modes in inviscid rotating fluids //J. Math.Analysis and Appl.— 1973. — V. 44. — pp. 366–383.

15. Н.Д. Копачевский, М.Ю. Царьков. К вопросу о спектре оператора плавучести //Журнал вычислит. математ. и математ. физики. — 1987. — 27, № 3. — С. 463–466.

16. Дж. Голдстейн. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.: Выща школа, 1989. — 347 с.

17. Д.А. Закора, Н.Д. Копачевский. Задачи и указания к их решению по курсу "Прикладной функциональный анализ"//Таврический национальный ун–т им. В.И. Вернадского, каф. математ. анализа, Симферополь, 2004. — 48 с.

18. M. Sowa Cosine operator functions // Rozpr. Math. — 1966. — V.49. — pp. 1–47.

Предметный указатель

Николай Дмитриевич Копачевский

**Дифференциальные уравнения
в банаховом пространстве**

Специальный курс лекций
для студентов специальности "Математика"

Корректура и верстка: *Э.Л. Газиев*

Подписано к печати 22.02.2012г. Формат 80x84 1/16.
Бумага тип. ОП. Объем 7 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. Москалева 15/1.
ФЛП "Бондаренко О.А."