МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

**Таврический национальный университет
им. В.И. Вернадского**

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**Специальный курс лекций
для студентов специальности "Математика"**

Симферополь
2012

ББК 22.311
К65
УДК 517.[958+983+984]

Печатается
по решению научно-методического совета
Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
(протокол № 2 от 22.12.2011 г.)

Рецензенты :

Белан Е.П. – д. ф.-м. н., профессор кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Закора Д.А. – к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д. ***Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве*: **Специальный курс лекций. – Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. – 152 с. – На русском языке.

Учебное пособие посвящено изучению интегродифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго порядков в гильбертовом пространстве с ограниченными и неограниченными операторными коэффициентами. Рассматриваются динамические системы, обладающие свойством сильной, слабой и средней демпфированности. Приводятся основные факты теории сильно непрерывных и аналитических полугрупп операторов, операторных косинус– и синус–функций, операторных $(M - N)$–функций.

Для студентов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области классической и прикладной математики.

Оглавление

Введение

Данное учебное пособие соответствует программе специального курса для студентов–магистров специальности ”классическая математика”, однако оно будет полезно также студентам специальности ”прикладная математика”, аспирантам и преподавателям, интересующимся приложениями функционального анализа к задачам, возникающим в теории уравнений в частных производных.

Учебное пособие основано на материалах известных монографий по функциональному анализу и теории дифференциальных уравнений, а также на последних исследованиях автора и его учеников. Оно предполагает знание основ обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, функционального анализа, а также некоторых специальных разделов: теории полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве, теории интегральных уравнений, принципов неподвижной точки и др.

В книге рассматриваются абстрактные задачи, возникающие, как правило, на базе конкретных линейных задач о малых движениях сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы. Изложение теоретических положений сопровождается примерами и упражнениями, рассмотрение которых позволяет полнее усвоить излагаемый учебный материал.

1. О содержании книги

В данном учебном пособии изучаются задачи Коши для линейных вольтерровых интегродифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Сначала рассматриваются интегродифференциальные уравнения первого порядка вида

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds + f(t), \quad t \geqslant 0, \quad u(0) = u^0, \quad (0.1.1)$$

в произвольном банаховом пространстве $\mathcal{E}$. Здесь $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $\mathcal{E}$, $f(t)$ — заданная функция, A_0, $A_1, \ldots, A_m$ — операторы, вообще говоря, неограниченные и действующие в $\mathcal{E}$, а $G_k(t,s)$ — оператор-функции переменных t, $s \in \mathbb{R}$ со значениями во множестве $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{E}$. К интегродифференциальным уравнениям такого вида приводят задачи о малых движениях вязкоупругой жидкости.

Второй класс задач, которые изучаются здесь, — это задачи Коши для линейных вольтерровых интегродифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \;\; u(0) = u^0, \; u'(0) = u^1, \; (0.1.2)$$

где общие свойства операторных коэффициентов и оператор-функций — те же, что и в проблеме (0.1.1). К задачам такого вида приводит, в частности, проблема малых движений идеальной релаксирующей жидкости в произвольной ограниченной области.

Уравнение (0.1.2) относится к виду так называемых неполных интегродифференциальных уравнений, так как его главная часть, т.е. выражение $\dfrac{d^2u}{dt^2} + A_0 u$, не содержит слагаемого с первой производной du/dt. Кроме того, уравнения (0.1.1) и (0.1.2) являются уравнениями, разрешенными относительно старшей производной d^2u/dt^2.

Более общее линейное вольтеррово интегродифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$\begin{gathered} A\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \end{gathered} \qquad (0.1.3)$$

и рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{H}$. Операторные коэффициенты имеют четко выраженный физический смысл: $B = B^* \geqslant c_B I$, $c_B \in \mathbb{R}$, — оператор потенциальной энергии; $F = F^* \geqslant 0$

— оператор диссипации энергии; $G = G^*$ — гироскопический оператор; а $u = u(t)$ — поле смещений сплошной среды (из состояния равновесия), A_k и $G_k(t, s)$ — описывают так называемые силы релаксации. Их свойства обсуждаются позже. Предполагается, что оператор A является обратимым, хотя обратный может быть и неограниченным.

Перед изучением уравнений (0.1.1)–(0.1.3) рассматриваются так называемые "укороченные" задачи (см. [7]), в которых $G_k(t, s) \equiv 0$. Тогда возникают невозмущенные (интегральными членами) проблемы

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + f(t), \quad u(0) = u^0,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \qquad (0.1.4)$$

которые до сих пор (в частности, задача (0.1.4)) не исследованы с достаточной полнотой. Некоторые новые результаты о разрешимости задачи (0.1.4) подробно обсуждаются в данной книге.

2. О методах исследования

При исследовании задач Коши вида (0.1.1)–(0.1.3) в данной книге применяются несколько общих приемов функционального анализа и существенным образом — теория полугрупп операторов, действующих в гильбертовом либо банаховом пространстве. Рассматриваются такие случаи, когда решения "укороченных" задач выражаются через полугруппу и данные задачи. Для дифференциальных уравнений второго порядка наряду с этим применяются методы операторных косинус- и синус-функций (для неполного уравнения), теория операторных $(M - N)$-функций (для полного уравнения с коммутирующими операторными коэффициентами) и другие.

Далее интегродифференциальное уравнение на основе теории полугрупп заменяется равносильным интегральным уравнением Вольтерра второго рода и при определенных условиях устанавливается существование единственного решения этого уравнения в некоторых классах функций. Затем проверяется, что решение интегрального уравнения является также решением исходного интегродифференциального уравнения.

Эти простые и хорошо известные приемы позволяют получить новые результаты о разрешимости абстрактных задач Коши (0.1.1)–(0.1.3) и на этой основе установить теоремы о существовании и единственности решений некоторых задач, возникающих в приложениях.

3. О спектральных задачах, порожденных задачами Коши

В гильбертовом случае ($\mathcal{E} = \mathcal{H}$) задачи вида (0.1.1), (0.1.2) для ядер специального вида

$$G_k(t,s) = \alpha_k \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)}, \;\; k = 1, \ldots, m, \;\; \alpha_k, \gamma_k \in \mathbb{R},$$

могут быть приведены к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений в ортогональной сумме пространств $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus\limits_{k=0}^{m} \mathcal{H}_k$, $k = 0, \ldots, m$. Эта система в векторно-матричной форме приобретает вид

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \mathcal{A}_0 \widetilde{u} + \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0,$$

где $\mathcal{A}_0$ — операторная матрица, обладающая рядом интересных свойств. В частности, в задаче (0.1.1) матрица $\mathcal{A}_0$ после замыкания становится максимальным диссипативным оператором, и возникает классическая задача Коши

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \mathcal{A} \widetilde{u} + \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0, \;\; \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_0. \tag{0.3.1}$$

Это позволяет не только доказать независимо от прежних рассмотрений теорему о разрешимости исходной задачи (0.1.1), но и исследовать ассоциированную спектральную задачу, если искать решения однородной задачи (0.3.1) в виде $\widetilde{u}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \widetilde{u}$, где $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ — так называемый амплитудный элемент, а λ — спектральный параметр (комплексный декремент затухания нормальных движений системы). Для элемента $\widetilde{u}$ приходим к задаче

$$\mathcal{A}\widetilde{u} = \lambda \widetilde{u},$$

которая может быть исследована в некоторых случаях методами теории операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой, а также методами спектральной теории оператор-функций (операторных пучков).

Глава 1

Задача Коши для вольтеррова интегродифференциального уравнения первого порядка

В данной главе изучаются задачи Коши вида (0.1.1) на основе теории полугрупп и интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Предварительно приводятся общие теоремы о разрешимости задач Коши для дифференциальных уравнений первого порядка, интегрального уравнения Вольтерра второго рода (в произвольном банаховом пространстве), а также принципы неподвижной точки.

1.1 Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

1.1.1 Сильно непрерывные полугруппы и дифференциальные уравнения первого порядка

В произвольном банаховом пространстве $\mathcal{E}$ рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.1.1}$$

Здесь $u = u(t)$ — искомая функция переменной $t \in \mathbb{R}_+$ со значениями в $\mathcal{E}$, $f(t)$ — заданная функция, $u^0 \in \mathcal{E}$, а A — линейный оператор, заданный на области определения $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E}$ и действующий в $\mathcal{E}$. Далее будем предполагать, что A является генератором сильно непрерывной либо аналитической полугруппы операторов $\mathcal{U}(t)$, $t \geqslant 0$.

Напомним, что семейство операторов $\{\mathcal{U}(t)\}_{t\geqslant 0}$ называется сильно непрерывной полугруппой (C_0-полугруппой), действующей в банаховом пространстве $\mathcal{E}$, если выполнены следующие условия:

1°. $\mathcal{U}(t+s) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}(s) = \mathcal{U}(s)\mathcal{U}(t)$, $\forall\, t, s \geqslant 0$;

2°. $\mathcal{U}(0) = I$;

3°. $\mathcal{U}(t)v \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{E}))$, $\forall\, v \in \mathcal{E}$.

Генератором полугруппы $\mathcal{U}(t)$ называется оператор A, заданный на тех элементах $v \in \mathcal{E}$, для которых существует предел

$$\lim_{\eta\to+0} \frac{\mathcal{U}(\eta) - I}{\eta} v =: Av \in \mathcal{E}, \quad v \in \mathcal{D}(A).$$

Для сильно непрерывной полугруппы операторов имеет место оценка

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, \quad M \geqslant 1, \quad \omega \geqslant 0.$$

Если, в частности, $\omega = 0$, то полугруппа $\mathcal{U}(t)$ является ограниченной: $\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant M$. При $M \leqslant 1$, $\omega = 0$, имеем сжимающую полугруппу

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant 1.$$

Для того, чтобы оператор A был генератором сжимающей полугруппы $\mathcal{U}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнут ($A = \overline{A}$), плотно определен ($\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$), любое $\lambda > 0$ должно принадлежать $\rho(A)$ и $\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1$ (теорема Хилле–Иосида).

Спектр генератора сжимающей полугруппы лежит в замкнутой левой полуплоскости: $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0\}$.

Сформулируем теоремы о разрешимости задачи Коши (1.1.1). Предварительно дадим определение ее сильного решения.

Определение 1.1.1. *Сильным решением задачи Коши* (1.1.1) *на отрезке* $[0, T]$ *называется такая функция* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{E}$, *для которой выполнены следующие условия:*

а) $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ *при* $t \in [0, T]$ *и* $Au(t) \in C([0, T]; \mathcal{E})$*;*

б) $u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E})$*;*

в) при $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (1.1.1)*;*

г) выполнено начальное условие (1.1.1). $\square$

Очевидно, необходимыми и достаточными условиями существования сильного решения являются условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad f(t) \in C([0,T];\mathcal{E}). \tag{1.1.2}$$

Теорема 1.1.1. ***(Р.С. Филлипс)*** *Пусть в задаче* (1.1.1) *оператор* A *является генератором* C_0*-полугруппы, выполнено условие* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$*, а также одно из условий:*

$$а)\ \ f(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A)); \quad б)\ \ f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E}). \tag{1.1.3}$$

Тогда задача (1.1.1) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *на отрезке* $[0,T]$*, и оно выражается формулой*

$$u(t) = \mathcal{U}(t)u^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)f(s)ds, \tag{1.1.4}$$

где $\mathcal{U}(t)$ *— полугруппа, отвечающая генератору* A. $\square$

Замечание 1.1.1. *Если рассматривается однородная задача* (1.1.1)*, т.е.* $f(t) \equiv 0$*, то формула* $u(t) = \mathcal{U}(t)u^0$ *дает сильное решение из* $C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E}) \cap C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(A))$ *при* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$*. В этом случае условие* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$ *является необходимым и достаточным условием существования сильного решения на полуоси* $t \geqslant 0$. $\square$

Некоторым усилением теоремы Р.С. Филлипса является следующий результат (см. [15]). Введем пространство функций $u(t)$, заданных на отрезке $[0,T]$, с нормой

$$\|u(t)\|_{W_p^1([0,T];\mathcal{E})} := \sum_{k=0}^{1} \Big(\int\limits_0^T \|u^{(k)}(t)\|^p dt\Big)^{1/p}, \ \ p > 1.$$

Это пространство занимает промежуточное положение между $C([0,T];\mathcal{E})$ и $C^1([0,T];\mathcal{E})$, именно, $W_p^1([0,T];\mathcal{E})$ плотно в $C([0,T];\mathcal{E})$, а $C^1([0,T];\mathcal{E})$ плотно в $W_p^1([0,T];\mathcal{E})$.

Теорема 1.1.2. *(**С.Я. Якубов**) Утверждения теоремы Р.С. Филлипса справедливы и в случае, когда вместо условий* (1.1.3) *выполнено условие*

$$f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{E}), \quad p > 1.$$

□

1.1.2 Голоморфные полугруппы

Перейдем теперь к определению голоморфных полугрупп и их генераторов. Прежде всего, заметим, что голоморфные полугруппы определены не только при $t \geqslant 0$, а в некотором секторе комплексной плоскости, с вершиной в нуле и симметричном относительно положительной полуоси. Голоморфные (аналитические) полугруппы являются важным подклассом C_0-полугрупп.

Определение 1.1.2. *Пусть оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ действует в $\mathcal{E}$. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{GA}_b(\theta, M)$, где $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, $M \geqslant 1$, если A замкнут, плотно определен, все*

$$\lambda \in \Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \theta\}$$

принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и

$$\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant M.$$

□

Очевидно, любой неположительный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{H}$, т.е. $A \leqslant 0$, принадлежит классу $\mathcal{GA}_b(\theta, M)$. В этом случае $\theta = \pi$ и $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))$.

Определение 1.1.3. *Будем говорить, что $A \in \mathcal{GA}_b(\theta)$, $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, если для любого ε, $0 < \varepsilon < \theta - \pi/2$, существует такая постоянная $M_\varepsilon \geqslant 1$, что $A \in \mathcal{GA}_b(\theta - \varepsilon, M_\varepsilon)$.* □

Обозначение $A \in \mathcal{GA}_b(\theta)$ означает, что A порождает равномерно ограниченную C_0-полугруппу, имеющую аналитическое продолжение в сектор комплексной плоскости.

Определение 1.1.4. *Аналитической полугруппой типа (α, M), $0 < \alpha \leqslant \pi/2$, $M \geqslant 1$, называется такое семейство операторов $\mathcal{U}(t)$, $t \in \Sigma_\alpha \cup \{0\}$, для которого выполнены следующие условия:*

а) $\mathcal{U}(t+s) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}(s) = \mathcal{U}(s)\mathcal{U}(t)$ *для всех* $t, s \in \Sigma_\alpha$, $\mathcal{U}(0) = I$*;*

б) для любых $v \in \mathcal{E}$ *и* $\eta \in \mathcal{E}^*$ *комплекснозначная функция* $\langle \mathcal{U}(t)v, \eta\rangle$ *(т.е. значение функционала* $\eta \in \mathcal{E}^*$ *на элементе* $\mathcal{U}(t)v$*) аналитична на* Σ_α*;*

в) $\lim\limits_{t\to 0, t\in\Sigma_{\alpha-\varepsilon}} \mathcal{U}(t)v = v$ *для любого* $v \in \mathcal{E}$ *и* $\varepsilon \in (0, \alpha)$*;*

г) из свойств а)–в) следует, что $\{\mathcal{U}(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *— сильно непрерывная полугруппа на* $\mathcal{E}$*; если* A *— ее генератор, то* $\mathcal{U}(t)v \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, v \in \mathcal{E}$*, для всех* $t \in \Sigma_\alpha$ *и* $\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant M$*,* $\|tA\mathcal{U}(t)\| \leqslant M$*,* $t \in \Sigma_\alpha$*.* □

Так введенный оператор A будем называть генератором аналитической полугруппы $\mathcal{U}(t)$, $t \in \Sigma_\alpha \cup \{0\}$.

Определение 1.1.5. *Будем говорить, что* $\mathcal{U}(t)$*,* $t \in \Sigma_\alpha \cup \{0\}$*, — аналитическая полугруппа типа* α*,* $0 < \alpha < \pi/2$*, если для каждого* ε*,* $0 < \varepsilon < \alpha$*, существует такая постоянная* $M_\varepsilon \geqslant 1$*, что полугруппа* $\mathcal{U}(t)$*,* $t \in \Sigma_{\alpha-\varepsilon} \cup \{0\}$*, является аналитической полугруппой типа* $(\alpha - \varepsilon, M_\varepsilon)$*.* □

Теорема 1.1.3. ***(Э. Хилле)*** *Пусть* $A \in \mathcal{GA}_b(\theta;M)$ *для некоторого* $\theta \in (\pi/2, \pi]$*. Тогда* A *является генератором аналитической полугруппы типа* $\alpha = \theta - \pi/2$*.* □

Теорема 1.1.4. ***(Э. Хилле)*** *Оператор* $A \in \mathcal{GA}_b(\theta)$*,* $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$*, тогда и только тогда, когда* A *порождает аналитическую полугруппу типа* $\alpha = \theta - \pi/2$*.* □

После введения класса аналитических полугрупп теперь можно сформулировать результат о разрешимости задачи Коши (1.1.1) в случае, когда A — генератор такой полугруппы.

Предварительно дадим следующее

Определение 1.1.6. *Будем говорить, что функция* $f(t)$*,* $t \in \mathbb{R}_+$*, со значениями в* $\mathcal{E}$ *удовлетворяет условию Гельдера, если найдутся такие числа* $c > 0$ *и* $\gamma \in (0, 1]$*, что*

$$\|f(t) - f(s)\|_{\mathcal{E}} \leqslant c|t - s|^\gamma, \quad 0 \leqslant t, s.$$

□

Класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера на отрезке $[0, T]$, будем обозначать $C^\gamma([0, T]; \mathcal{E})$. При $\gamma = 1$ он совпадает с $C^1([0, T]; \mathcal{E})$ и при любом $\gamma : 0 < \gamma \leqslant 1$ выполнены следующие свойства: $C^\gamma([0, T]; \mathcal{E})$ плотно в $C([0, T]; \mathcal{E})$, а $C^1([0, T]; \mathcal{E})$ плотно в $C^\gamma([0, T]; \mathcal{E})$.

Теорема 1.1.5. ***(Кренделл, Паци)*** *Пусть* $A \in \mathcal{GA}_b(\theta)$, $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, *и выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A), \quad f(t) \in C^\gamma([0,T];\mathcal{E}), \quad 0 < \gamma \leqslant 1.$$

Тогда задача (1.1.1) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$, *и оно выражается формулой* (1.1.4). □

Сформулированные выше теоремы 1.1.1, 1.1.2 и 1.1.5 будут использованы в дальнейшем при исследовании задач Коши вида (0.1.1), (0.1.2) и (0.1.3) для интегродифференциальных уравнений первого и второго порядков.

1.2 Об интегральных уравнениях Вольтерра в банаховом пространстве

1.2.1 Интегральные уравнения Вольтерра второго рода

Для функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{E}$ рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$u(t) - \int_0^t V(t,s)u(s)ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.2.1}$$

Далее будем предполагать, что

$$f(t) \in C([0,T];\mathcal{E}). \tag{1.2.2}$$

Относительно ядра $V(t,s)$ из (1.2.1) будем считать, что эта оператор-функция является сильно непрерывной по своим переменным t,s. Соответствующий класс функций (strong continuous) будем обозначать через $SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$. Таким образом, далее требуем, чтобы

$$V(t,s) \in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})), \quad \Delta_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}. \tag{1.2.3}$$

Отметим некоторые простые свойства сильно непрерывных оператор-функций (см., например, [3], с. 19–22), которые можно установить непосредственно.

1°. Пусть $V(t,s)$ сильно непрерывна в треугольнике Δ_T, т.е. $V(t,s)u \in C(\Delta_T;\mathcal{E})$ для любого $u \in \mathcal{E}$. Тогда (по теореме Банаха–Штейнгауза) эта функция равномерна ограничена:

$$\exists\, M > 0 : \ \|V(t,s)\| \leqslant M, \quad (t,s) \in \Delta_T.$$

Отсюда следует, что $V(t,s)$ можно рассматривать как ограниченный линейный оператор, отображающий $\mathcal{E}$ в $C(\Delta_T;\mathcal{E})$.

2°. Если $u(t) \in C([0,T];\mathcal{E})$ и $V(t,s) \in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, то $V(t,s)u(s) \in C(\Delta_T;\mathcal{E})$.

3°. Если $V(t,s) \in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, а $W(s,\xi) \in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, то $V(t,s)W(s,\xi)$ сильно непрерывна по переменным t, s, ξ. Это же свойство имеет место, если $V(t,s)$ и $W(s,\xi)$ действуют из одного банахова пространства в другое.

4°. Класс $SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ сильно непрерывных оператор-функций, заданных в Δ_T, содержит множество равномерно непрерывных функций:

$$C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})) \subset SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})).$$

Теорема 1.2.1. *Пусть в задаче* (1.2.1) *выполнены условия* (1.2.2), (1.2.3)*. Тогда эта задача имеет единственное непрерывное решение* $u(t) \in C([0,T];\mathcal{E})$*, и это решение может быть найдено методом последовательных приближений:*

$$u_0(t) = f(t), \ \ u_1(t) = f(t) - \int\limits_0^t V(t,s)f(s)ds, \ \dots \ ,$$

$$u_{n+1}(t) = f(t) + \int\limits_0^t V_{n+1}(t,s)f(s)ds, \ \ V_1(t,\xi) := V(t,\xi), \tag{1.2.4}$$

$$V_{n+1}(t,s) := \int\limits_0^t V_n(t,\xi)V(\xi,s)d\xi, \ \ n = 1, \dots .$$

Здесь $V_n(t,s)$ *— итерированные ядра.* □

Доказательство теоремы проводится по тому же плану, что и для случая $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, когда искомой является обычная скалярная функция переменной $t \in [0,T]$. При этом используется принцип сжимающих отображений (теорема Банаха) либо его модификация (теорема Пикара–Банаха о неподвижной точке). В частности, используется тот факт, что отображение, задающееся правой частью (1.2.4) с итерированным ядром, является сжимающим при достаточно большом n.

1.2.2 Теоремы о неподвижных точках

Обе упомянутые выше теоремы являются частными случаями следующего важного факта.

Теорема 1.2.2. *Пусть в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ рассматривается уравнение*

$$u = Bu, \tag{1.2.5}$$

причем отображение $B : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ коммутирует с отображением $A : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, а отображение A является сжимающим на $\mathcal{M}$.

Тогда отображение B имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение (1.2.5) *имеет единственное решение $u_* \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Так как отображение A является сжимающим, то для уравнения

$$u = Au,$$

по теореме Банаха существует единственная неподвижная точка $u_* \in \mathcal{M}$, т.е. $u_* = Au_*$. Далее, так как отображения A и B коммутируют, то

$$ABu_* = BAu_* = Bu_*,$$

и потому Bu_* — единственное решение для сжимающего отображения A. Значит, $Bu_* = u_*$, т.е. уравнение (1.2.5) имеет единственное решение $u_* \in \mathcal{M}$. □

Частным случаем разобранной ситуации является вариант, когда $A = B^n$. Тогда, очевидно, отображения B и B^n коммутируют, и если B^n является сжимающим отображением при некотором n, то задача (1.2.5) имеет единственное решение $u_* \in \mathcal{M}$. Именно такой факт использован при доказательстве теоремы 1.2.1.

Теорема 1.2.1 в дальнейшем будет существенно использоваться для доказательства разрешимости интегродифференциальных уравнений как первого, так и второго порядков.

1.3 Теоремы о сильной разрешимости задачи Коши для вольтеррова интегродифференциального уравнения первого порядка

1.3.1 Сильные решения задачи Коши. Вспомогательные предложения

В банаховом пространстве $\mathcal{E}$ рассмотрим задачу Коши для вольтеррова интегродифференциального уравнения первого порядка следующего вида

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0. \tag{1.3.1}$$

Здесь A_0 — генератор сильно непрерывной либо голоморфной полугруппы, $u(t)$ — искомая функция со значениями в $\mathcal{E}$, $f(t)$ — заданная функция, $G_k(t,s)$ — ограниченные оператор-функции, действующие в $\mathcal{E}$, A_k — операторы, действующие в $\mathcal{E}$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Наша цель — выяснить ограничения на операторы A_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k = 1, 2, \ldots m$, при которых теорема о существовании и единственности сильного решения задачи (1.3.1) имеет место при тех же требованиях на u^0 и $f(t)$, которые достаточны для существования сильного решения соответствующего дифференциального уравнения, т.е. при $G_k(t,s) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Определение 1.3.1. *Сильным решением задачи Коши* (1.3.1) *на отрезке* $[0,T]$ *называется такая функция* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{E}$*, для которой выполнены следующие условия:*

а) $u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E}) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A_0))$*;*

б) все слагаемые в (1.3.1) *непрерывны, т.е. принадлежат пространству* $C([0,T];\mathcal{E})$*;*

в) при любом $t \in [0,T]$ *справедливо уравнение* (1.3.1)*;*

г) $u(0) = u^0$. □

Замечание 1.3.1. *Для существования сильного решения необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$а)\ \ u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad б)\ \ f(t) \in C([0,T];\mathcal{E}).$$

□

Для исследования разрешимости задачи (1.3.1) мы применим следующий подход: а) заменим уравнение (1.3.1) равносильным уравнением Вольтерра второго рода; б) затем выясним условия, при которых это уравнение имеет единственное не только непрерывное, но и непрерывно дифференцируемое решение; в) проверим, наконец, что решение интегрального уравнения является также решением исходного интегродифференциального уравнения.

Реализуя эту схему, будем считать, что задача (1.3.1) имеет сильное решение, введем формальное обозначение

$$\widehat{f}(t) := f(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds \tag{1.3.2}$$

и будем полагать, что эта функция известна. Тогда решение задачи

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + \widehat{f}(t), \quad u(0) = u^0,$$

дается формулой

$$u(t) = \mathcal{U}(t) u^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \widehat{f}(t) ds, \tag{1.3.3}$$

где $\mathcal{U}(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, отвечающая генератору A_0.

Соотношение (1.3.3) с учетом (1.3.2) приводит к интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра второго рода:

$$u(t) - \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \Big(\int_0^s G_k(s,\xi) A_k u(\xi) d\xi \Big) ds = u_0(t), \tag{1.3.4}$$

$$u_0(t) = \mathcal{U}(t) u^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) f(t) ds. \tag{1.3.5}$$

Здесь $u_0(t)$ — известная функция, являющаяся решением задачи Коши соответствующего ("укороченного") дифференциального уравнения, т.е. при $G_k(t,s) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots m$.

Осуществим в (1.3.4) перемену порядка интегрирования:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\int\limits_0^s G_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi\Big)ds = \\
= \int\limits_0^t \Big(\int\limits_\xi^t \mathcal{U}(t-s)G_k(s,\xi)ds\Big)A_k u(\xi)d\xi =: \int\limits_0^t V_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi.
\end{gathered} \tag{1.3.6}
$$

Тогда уравнение (1.3.4) принимает вид

$$
u(t) - \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t V_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi = u_0(t). \tag{1.3.7}
$$

Сформулируем теперь предположения относительно операторов A_k и оператор-функций $G_k(t,s)$, $k = 1,2,\dots m$. Именно, будем далее считать, что в уравнении (1.3.1) выполнены следующие условия:

$$
\mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(A_0), \ \ k = 1,2,\dots m, \tag{1.3.8}
$$

$$
G_k(t,s), \frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})),\ \Delta_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}. \tag{1.3.9}
$$

Докажем предварительно ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1.3.1. *Пусть A_0 — генератор C_0-полугруппы $\mathcal{U}(t)$ и*

$$
v(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E}). \tag{1.3.10}
$$

Тогда имеет место формула

$$
\begin{gathered}
A_0 \int\limits_\xi^t \mathcal{U}(t-s)v(s)ds = \\
= \mathcal{U}(t-\xi)v(\xi) - v(t) + \int\limits_\xi^t \mathcal{U}(t-s)v'(s)ds, \ \ t \geqslant \xi \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{1.3.11}
$$

Доказательство. Будем сначала считать, что

$$
v(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A_0)).
$$

Тогда выражение $\mathcal{U}(t-s)v(s)$ при фиксированном s и $t \geqslant s$ является непрерывно дифференцируемым решением однородной задачи Коши с начальным условием в точке s:

$$\frac{du}{dt} = A_0 u, \quad u(s) = v(s).$$

Поэтому, используя свойство замкнутости оператора A_0, будем иметь

$$A_0 \int_\xi^t \mathcal{U}(t-s)v(s)ds = \int_\xi^t A_0\mathcal{U}(t-s)v(s)ds = \int_\xi^t \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{U}(t-s)v(s))ds =$$

$$= \int_\xi^t \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{U}(t-s))v(s)ds = -\int_\xi^t \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t-s)v(s)ds = -\{\mathcal{U}(t-s)v(s)|_{s=\xi}^{s=t} -$$

$$-\int_\xi^t \mathcal{U}(t-s)v'(s)ds\} = \mathcal{U}(t-\xi)v(\xi) - v(t) + \int_\xi^t \mathcal{U}(t-s)v'(s)ds. \quad (1.3.12)$$

Здесь правая часть является непрерывной функцией переменных t и ξ со значениями в $\mathcal{D}(A_0)$. Так как $\mathcal{D}(A_0)$ плотно в $\mathcal{E}$, то $C^1([0,T];\mathcal{D}(A_0))$ плотно в $C^1([0,T];\mathcal{E})$, и после замыкания, т.е. после перехода к элементам $v(t)$ из $C^1([0,T];\mathcal{E})$, правая часть (1.3.12) является непрерывной функцией переменных t и ξ со значениями в $\mathcal{E}$. $\square$

Следствием леммы 1.3.1 являются соотношения

$$A_0 \int_\xi^t \mathcal{U}(t-s)v(s)ds = \mathcal{U}(t-\xi)v - v,$$

$$A_0 \int_0^t \mathcal{U}(t-s)v(s)ds = \mathcal{U}(t)v - v, \quad v \in \mathcal{E},$$

применяющиеся в теории C_0–полугрупп.

Небольшим обобщением леммы 1.3.1 является следующее утверждение, которое далее будет использовано.

Лемма 1.3.2. *Пусть* A_0 *— генератор* C_0*-полугруппы* $\mathcal{U}(t)$ *и*

$$v(t,\eta) \in C^1(\Delta_T;\mathcal{E}). \quad (1.3.13)$$

Тогда имеет место формула

$$A_0 \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s)v(s,\xi)ds =$$

$$= \mathcal{U}(t-\xi)v(\xi,\xi) - v(t,\xi) + \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s)\frac{\partial v}{\partial s}(s,\xi)ds. \quad (1.3.14)$$

Доказательство. Если выполнено условие (1.3.13), то, повторяя доказательство леммы 1.3.1 и пользуясь тем, что $C^1(\Delta_T; \mathcal{D}(A_0))$ плотно в $C^1(\Delta_T; \mathcal{E})$, сначала доказываем формулу (см. (1.3.11))

$$A_0 \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s)v(s,\eta)ds =$$

$$= \mathcal{U}(t-\xi)v(\xi,\eta) - v(t,\eta) + \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s)\frac{\partial v}{\partial s}(s,\eta)ds \quad (1.3.15)$$

для элементов из $C^1(\Delta_T; \mathcal{D}(A_0))$, непрерывно зависящих от t и от $\eta \in [\xi, t]$, а затем по замыканию — для таких же элементов из $C^1(\Delta_T; \mathcal{E})$. Полагая далее в (1.3.15) $\eta = \xi$, приходим к (1.3.14). $\square$

Далее без ограничения общности будем считать, что оператор A_0 непрерывно обратим, т.е. $0 \in \rho(A_0)$. В самом деле, если нуль принадлежит $\sigma(A_0)$, то, осуществляя в исходной задаче (1.3.1) замену искомой функции по закону

$$u(t) = e^{at}v(t), \quad a > 0,$$

приходим к задаче

$$\frac{dv}{dt} = (A_0 - aI)v + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{0}^{t} G_k(t,s)e^{-a(t-s)}A_k v(s)ds + e^{-at}f(t),$$

$$v(0) = u^0,$$

где оператор $A_0 - aI$ является генератором полугруппы $\mathcal{U}(t)e^{-at}$ и при достаточно большом $a > 0$ обратим.

Лемма 1.3.3. *Операторы* $V_k(t,\xi)$ *из* (1.3.6), (1.3.7) *допускают представление*

$$V_k(t,\xi) = A_0^{-1} W_k(t,\xi), \tag{1.3.16}$$

$$W_k(t,\xi) := \mathcal{U}(t-\xi) G_k(\xi,\xi) - G_k(t,\xi) + \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi) ds, \tag{1.3.17}$$

$$W_k(t,\xi) \in SC(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{E})). \tag{1.3.18}$$

Доказательство. В самом деле, воспользуемся формулой (1.3.14) для функций $v(s,\xi) := G_k(s,\xi) A_k u(\xi)$ при $u(\xi) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0))$. Так как A_k ограниченно действует из $\mathcal{D}(A_0)$ в $\mathcal{E}$, а $G_k(s,\xi) \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{E}))$ (см. (1.3.9)), то $v(s,\xi) \in C(\Delta_T; \mathcal{E})$, и тогда для нее справедлива формула (1.3.14), т.е.

$$V_k(t,\xi) A_k u(\xi) = \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s) G_k(s,\xi) A_k u(\xi) ds =$$
$$= A_0^{-1} \{ \mathcal{U}(t-\xi) G_k(\xi,\xi) A_k u(\xi) - G_k(t,\xi) A_k u(\xi) +$$
$$+ \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi) A_k u(\xi) ds \} = A_0^{-1} W_k(t,\xi) A_k u(\xi).$$

Отсюда и следует представление (1.3.16). Свойство (1.3.18) следует из определения (1.3.17) для $W_k(t,\xi)$ и из (1.3.9). □

1.3.2 Теоремы о сильной разрешимости задачи Коши

Опираясь на леммы 1.3.1–1.3.3, докажем следующий промежуточный результат.

Теорема 1.3.1. *Если выполнены условия* (1.3.8) *и* (1.3.9), *а также условие*

$$u_0(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{E}) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)), \tag{1.3.19}$$

то интегральное уравнение Вольтерра (1.3.7) *имеет единственное решение*

$$u(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{E}) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)). \tag{1.3.20}$$

Доказательство. Введем банахово пространство $\mathcal{E}(A_0) = \mathcal{D}(A_0)$ с нормой графика

$$\|u\|_{\mathcal{E}(A_0)} := \|A_0 u\|_{\mathcal{E}} + \|u\|_{\mathcal{E}}, \ \ \forall u \in \mathcal{D}(A_0),$$

и рассмотрим (1.3.7) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в этом пространстве. Из условий (1.3.8) следует, что операторы A_k ограниченно действуют из $\mathcal{E}(A_0)$ в $\mathcal{E}$:

$$\|A_k u\|_{\mathcal{E}} \leqslant c_k \|A_0 u\|_{\mathcal{E}} \leqslant c_k \|u\|_{\mathcal{E}(A_0)}, \ \ \forall u \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{E}(A_0).$$

Далее, функции $W_k(t,\xi)$ являются сильно непрерывными по t, ξ оператор-функциями со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Наконец, оператор A_0^{-1} ограниченно действует из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}(A_0)$:

$$\|A_0^{-1} u\|_{\mathcal{E}(A_0)} = \|u\|_{\mathcal{E}} + \|A_0^{-1} u\|_E \leqslant (1 + \|A_0^{-1}\|_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}})\|u\|_{\mathcal{E}}.$$

Отсюда следует, что

$$T_k(t,\xi) := A_0^{-1} W_k(t,\xi) A_k, \ \ k = 1, \ldots, m,$$

являются сильно непрерывными по t, ξ оператор-функциями со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E}(A_0))$.

Если выполнено условие (1.3.19), то уравнение Вольтерра (1.3.7), записанное в виде

$$u(t) - \int\limits_0^t T(t,\xi) u(\xi) d\xi = u_0(t), \tag{1.3.21}$$

$$T(t,\xi) := \sum_{k=1}^m T_k(t,\xi),$$

обладает следующими свойствами: $u_0(t)$ непрерывна по t со значениями в $\mathcal{E}(A_0)$, а ядро $T(t,\xi)$ сильно непрерывно по t, ξ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E}(A_0))$. Поэтому по теореме 1.2.1 уравнение (1.3.21) имеет единственное решение

$$u(t) \in C([0,T]; \mathcal{E}(A_0)).$$

Докажем теперь, что выполнено второе свойство (1.3.20), т.е.

$$u(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{E}). \tag{1.3.22}$$

Для выяснения этого факта вернемся от уравнений (1.3.21), (1.3.7) к исходной форме (1.3.4) уравнения Вольтерра, которое получено из (1.3.1) применением эволюционной формулы (1.3.3). Так как $u_0(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E})$, то достаточно проверить, что

$$\widetilde{u}_k(s) := \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\int\limits_0^s G_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi\Big)ds \in C^1([0,T];\mathcal{E}),$$

$$k = 1,\ldots,m. \quad (1.3.23)$$

Однако функция

$$\widetilde{f}_k(s) := \int\limits_0^s G_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi \in C^1([0,T];\mathcal{E}), \quad (1.3.24)$$

поскольку по доказанному выше $A_k u(\xi) \in C([0,T];\mathcal{E})$ и выполнены условия (1.3.9). Действительно,

$$\frac{d}{ds}\widetilde{f}_k(s) \;=\; G_k(s,s)A_k u(s) + \int\limits_0^s \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi \;\in\; C([0,T];\mathcal{E}).$$

Отсюда следует, что выражение (1.3.23) является сильным решением неоднородной задачи

$$\frac{d\widetilde{u}_k}{dt} = A_0\widetilde{u}_k + \widetilde{f}_k(t), \quad \widetilde{u}_k(0) = 0, \quad (1.3.25)$$

поэтому

$$\widetilde{u}_k(s) = \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\widetilde{f}_k(s)ds \in C^1([0,T];\mathcal{E}).$$

Таким образом, свойство (1.3.22), а вместе с ним и свойство (1.3.20), т.е. вся теорема, доказаны. $\square$

Следствием этой теоремы является такой основной в данном параграфе факт.

Теорема 1.3.2. *Пусть в задаче* (1.3.1) *выполнены условия* (1.3.8) *и* (1.3.9)*, а также условие*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0). \quad (1.3.26)$$

Пусть, далее, оператор A_0 является генератором C_0-полугруппы, а $f(t)$ удовлетворяет условию

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{E}). \tag{1.3.27}$$

Тогда задача (1.3.1) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то функция $u_0(t)$, выражаемая формулой (1.3.5), обладает свойствами (1.3.19) и потому по теореме 1.3.1 интегральное уравнение (1.3.4) и равносильные ему уравнения (1.3.7) и (1.3.21) имеют решение $u(t)$, обладающее свойствами (1.3.20).

Проверим, что эта функция является решением уравнения (1.3.1). Действительно, согласно формулам (1.3.2), (1.3.3) и (1.3.24) имеем

$$u(t) = u_0(t) + \widetilde{u}(t),$$

$$\widetilde{u}(t) := \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\sum_{k=1}^m \int_0^s G_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi\Big)ds = \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\sum_{k=1}^m \widetilde{f}_k(s)\Big)ds.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dt} - A_0 u - f(t) = \Big(\frac{du_0}{dt} - A_0 u_0 - f(t)\Big) + \Big(\frac{d\widetilde{u}}{dt} - A_0\widetilde{u}\Big) = \frac{d\widetilde{u}}{dt} - A_0\widetilde{u}.$$

Однако в силу (1.3.24) и (1.3.25) имеем

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} - A_0\widetilde{u} = \sum_{k=1}^m \Big(\frac{d\widetilde{u}_k}{dt} - A_0\widetilde{u}_k\Big) = \sum_{k=1}^m \widetilde{f}_k(t) = \sum_{k=1}^m \int_0^t G_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi,$$

и потому выполнено уравнение (1.3.1), где все слагаемые являются непрерывными функциями t при $t \in [0,T]$. Значит, $u(t)$ является сильным решением задачи (1.3.1). □

Теорема 1.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.3.2, однако условие* (1.3.27) *заменено условием*

$$f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{E}), \quad p > 1. \tag{1.3.28}$$

Тогда задача (1.3.1) *также имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. При условиях (1.3.26), (1.3.28), согласно теореме 1.1.2 С.Я. Якубова, функция $u_0(t)$ (см. формулу (1.3.5)) является сильным решением задачи (1.3.1) без интегральных членов и поэтому обладает свойствами (1.3.19). Поэтому достаточно лишь повторить доказательство теоремы 1.3.2. $\square$

Теорема 1.3.4. *Пусть в задаче* (1.3.1) *выполнены условия* (1.3.8), (1.3.9), (1.3.26) *а также следующие условия: оператор* A_0 *является генератором аналитической полугруппы и*

$$f(t) \in C^{\alpha}([0,T];\mathcal{E}), \;\; 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Тогда задача (1.3.1) *имеет единственное сильное решение на* $[0,T]$.

Доказательство. Как и в теореме 1.3.3, достаточно заметить, что функция $u_0(t)$ из (1.3.5) согласно теореме 1.1.5 является сильным решением задачи (1.3.1) без интегральных членов. $\square$

Замечание 1.3.2. *Требования* (1.3.9) *на ядра* $G_k(t,s)$ *можно ослабить. Как следует из доказательства леммы 1.1.1, достаточно потребовать, чтобы функции* $W_k(t,\xi)$ *из* (1.3.10) *были сильно непрерывны, в частности, достаточно сильной непрерывности по* t, ξ *оператор-функций*

$$G_k(t,\xi), \;\; \int\limits_{\xi}^{t} \mathcal{U}(t-s)\frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)ds, \;\; k = 1,\ldots,m.$$

$\square$

1.4 Интегродифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к дифференциальному уравнению в прямой сумме пространств

Такие уравнения возникают при исследовании начально-краевых задач о малых движениях вязкоупругой жидкости в ограниченной области. Здесь будет рассмотрено математическое обобщение этих задач — интегродифференциальное уравнение первого порядка в гильбертовом пространстве с ядрами экспоненциального вида, зависящими от разности аргументов.

1.4.1 Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} + A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0. \tag{1.4.1}$$

Здесь $u = u(t)$ — искомая функция со значениями в $\mathcal{H}$, γ_k — положительные постоянные, $0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m < \infty$, $f(t)$ – заданная функция со значениями в $\mathcal{H}$, $u^0 \in \mathcal{H}$. Через A_k, $k = 0, \ldots, m$, в (1.4.1) обозначены неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы ($A_k \gg 0$) с областями определения $\mathcal{D}(A_k)$ такими, что

$$\mathcal{D}(A_k) = \mathcal{D}(A_0), \;\; k = 1, \ldots, m. \tag{1.4.2}$$

В качестве примера операторов такого вида в случае гильбертова пространства $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, можно взять набор равномерно эллиптических операторов

$$A_k u := -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big), \;\; k = 0, \ldots, m, \;\; x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega,$$

заданных на одном и том же множестве

$$\mathcal{D}(A_k) = H_0^2(\Omega) := \{u(x) \in H^2(\Omega) : u = 0 \;\; (\text{на } \partial\Omega)\}.$$

Уравнение (1.4.1), очевидно, является частным случаем уравнения (1.3.1), когда

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}, \;\; A_0 \mapsto -A_0, \;\; G_k(t,s) = -e^{-\gamma_k(t-s)}, \;\; k = 1, \ldots, m.$$

Поэтому для данного уравнения справедливы теоремы о сильной разрешимости, в частности, теоремы 1.3.2, 1.3.3 и 1.3.4. Так как оператор $-A_0$ является генератором аналитической полугруппы ($-A_0 \ll 0$), то по теореме 1.3.4 получаем, что при условиях

$$f(t) \in C^\alpha([0,T]; \mathcal{H}), \;\; 0 < \alpha \leqslant 1, \;\; u^0 \in \mathcal{D}(A_0),$$

задача (1.4.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Конкретный вид уравнения (1.4.1) позволяет, однако, привести эту проблему к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств и на этой основе не только доказать теорему существования сильного решения, но и исследовать в дальнейшем сопутствующую спектральную задачу.

Переходя к осуществлению этого подхода, будем считать, что задача (1.4.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, и введем новые переменные согласно формулам

$$u_0(t) := u(t), \;\; u_k(t) := \int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u_0(s)ds, \;\; k = 1, \dots, m, \qquad (1.4.3)$$

Далее верхним индексом "τ" будем обозначать операцию транспонирования.

Так как $u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$ и при каждом $t \in [0,T]$ будет $u(t) \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_k)$, то функции $u_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u_0(s)ds = A_k^{1/2} u_0(t) -$$

$$-\gamma_k \int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k^{1/2} u_0(s)ds = A_k^{1/2} u_0(t) - \gamma_k u_k(t), \; k = 1, \dots, m. \quad (1.4.4)$$

Вместе с (1.4.3), (1.4.1) уравнения (1.4.4) приводят к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \mathcal{A}_0 \widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \;\; \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0, \qquad (1.4.5)$$

в гильбертовом пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H}_0 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_1, \; \mathcal{H}_0 := \mathcal{H}, \; \widehat{\mathcal{H}}_1 := \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{H}_k, \; \mathcal{H}_k := \mathcal{H}, \; k = 1, \dots, m. \quad (1.4.6)$$

При этом

$$\widetilde{u}(t) := (u_0(t); \widehat{u}_1(t))^\tau, \;\; \widehat{u}_1(t) := (u_1(t); \dots; u_m(t))^\tau,$$

$$\widetilde{f}(t) := (f(t); \widehat{0})^\tau, \;\; \widetilde{u}(0) := (u^0(t); \widehat{0})^\tau, \;\; \widehat{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m} \;,$$

а оператор $\mathcal{A}_0$ в ортогональном разложении (1.4.6) имеет следующее матричное представление:

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_0 = (A_{ij})_{i,j=0}^1, \ \ A_{00} := A_0, \ \ A_{01} := (A_1^{1/2}; \ldots; A_m^{1/2}),\\ &A_{10} := -(A_1^{1/2}; \ldots; A_m^{1/2})^\tau, \ \ A_{11} := \operatorname{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^m.\end{aligned} \qquad (1.4.7)$$

В частности, при $m = 2$ имеем

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & A_1^{1/2} & A_2^{1/2} \\ -A_1^{1/2} & \gamma_1 I & 0 \\ -A_2^{1/2} & 0 & \gamma_2 I \end{pmatrix}.$$

1.4.2 О свойствах основной операторной матрицы

Дальнейшее исследование свойств решений задачи Коши (1.4.1) для интегродифференциального уравнения в пространстве $\mathcal{H}$ и уравнения в ортогональной сумме пространств $\mathcal{H}^{m+1}$ основано на изучении свойств операторной матрицы $\mathcal{A}_0$.

Отметим предварительно, что условия $A_k \gg 0$ и (1.4.2) позволяют воспользоваться следующим утверждением (см. [18], с. 254).

Лемма 1.4.1. *(**Неравенство Гайнца**) Пусть A и B — положительные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такие, что $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ и $\|Bu\| \leqslant \|Au\|$ ($u \in \mathcal{D}(A)$). Тогда $\|B^\alpha u\| \leqslant \|A^\alpha u\|$, $0 < \alpha < 1$.* $\square$

В исследуемой задаче из леммы 1.1.4 получаем такие выводы: так как $\mathcal{D}(A_k) = \mathcal{D}(A_0)$, $k = 1, \ldots, m$, и потому операторы $A_k A_0^{-1}$ и $A_0^{-1} A_k$ ограничены, то справедливы соотношения

$$\mathcal{D}(A_k^\alpha) = \mathcal{D}(A_0^\alpha), \ \ 0 < \alpha < 1, \ \ k = 1, \ldots, m, \qquad (1.4.8)$$

и найдутся такие положительные константы $c_{k,\alpha}$ и $d_{k,\alpha}$, что

$$c_{k,\alpha} \leqslant \|A_k^\alpha u\| / \|A_0^\alpha u\| \leqslant d_{k,\alpha}, \ \ 0 < \alpha < 1, \ \ k = 1, \ldots, m. \qquad (1.4.9)$$

Неравенства (1.4.9) и соотношения (1.4.8) далее будут использованы при $\alpha = 1/2$.

Лемма 1.4.2. *Оператор $\mathcal{A}_0$, заданный формулами* (1.4.7) *на плотном в $\widetilde{\mathcal{H}}$ множестве*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \mathcal{D}(A_0) \oplus \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}, \qquad (1.4.10)$$

$$\widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2} := \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{D}(A_k^{1/2}), \ \ \mathcal{D}(A_k^{1/2}) = \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \ \ k = 1, \ldots, m, \tag{1.4.11}$$

является равномерно аккретивным оператором, т.е.

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 \widetilde{u}, \widetilde{u})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \geqslant c \|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}}, \ \ c := \min(\lambda_1(A_0); \gamma_1) > 0, \tag{1.4.12}$$

где $\lambda_1(A_0)$ *— нижняя грань самосопряженного положительно определенного оператора* A_0*. (Если* $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$*, то* $\lambda_1(A_0)$ *— минимальное собственное значение оператора* A_0*.)*

Доказательство. Из определения (1.4.7) оператора $\mathcal{A}_0$ следует, что при $\widetilde{u} := (u_0; \widehat{u}_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$

$$\operatorname{Re}\left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & A_{01} \\ A_{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \widehat{u}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \widehat{u}_1 \end{pmatrix} \right)_{\widetilde{\mathcal{H}}} \right\} =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{m} (A_k^{1/2} u_k, u_0)_{\mathcal{H}} - \sum_{k=1}^{m} (A_k^{1/2} u_0, u_k)_{\mathcal{H}} \right\} = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 \widetilde{u}, \widetilde{u})_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \operatorname{Re}\left\{ \left(\begin{pmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \widehat{u}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \widehat{u}_1 \end{pmatrix} \right)_{\widetilde{\mathcal{H}}} \right\} =$$
$$= (A_{00} u_0, u_0)_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \|u_k\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant c \sum_{k=0}^{m} \|u_k\|^2_{\mathcal{H}} = c \|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}}.$$

□

Лемма 1.4.3. *Оператор* $\mathcal{A}_0$ *является в существенном максимальным равномерно аккретивным оператором, т.е. замыкание* $\mathcal{A}_0 := \overline{\mathcal{A}}_0$ *— максимальный равномерно аккретивный оператор.*

Доказательство. Как известно, (см. [19], а также [5], с. 106–110), каждый плотно определенный аккретивный оператор допускает расширение до замкнутого максимального аккретивного оператора и при этом максимальным аккретивным будет и его сопряженный. Поэтому и каждый равномерно аккретивный оператор допускает расширение до максимального аккретивного оператора, являющегося равномерным вместе с сопряженным. Следовательно, так как $\mathcal{A}_0$ равномерно аккретивен (лемма 1.1.5) и потому непрерывно обратим (докажите это!), то замыкание оператора $\mathcal{A}_0$ будет максимальным аккретивным оператором тогда и только тогда, когда замыкание его области значений $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$ совпадает со всем пространством $\widetilde{\mathcal{H}}$. Покажем, что в наших условиях $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A}_0)} = \widetilde{\mathcal{H}}$.

Пусть $\widetilde{v} := (v_0; \widehat{v}_1)^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}}$ ортогонален к $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$. Тогда согласно определению матричного оператора $\mathcal{A}_0$ выполняется соотношение

$$\begin{gathered}
(A_{00}u_0 + A_{01}\widehat{u}_1, v_0)_{\mathcal{H}} + (A_{10}u_0 + A_{11}\widehat{u}_1, \widehat{v}_1)_{\widehat{\mathcal{H}}_1} = (A_0 u_0, v_0)_{\mathcal{H}} + \\
+ \sum_{k=1}^m (A_k^{1/2} u_k, v_0)_{\mathcal{H}} - \sum_{k=1}^m (A_k^{1/2} u_0, v_k)_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^m \gamma_k (u_k, v_k)_{\mathcal{H}} = 0, \\
\forall \widetilde{u} = (u_0; \widetilde{u}_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \ \ \forall \widehat{u}_1 := (u_1; \ldots; u_m)^\tau \in \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}. \quad (1.4.13)
\end{gathered}$$

Положим здесь $u_0 = 0$. Тогда

$$\begin{gathered}
(A_{01}\widehat{u}_1, v_0)_{\mathcal{H}} + (A_{11}\widehat{u}_1, \widehat{v}_1)_{\widehat{\mathcal{H}}_1} = \\
= \sum_{k=1}^m (A_k^{1/2} u_k, v_0)_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^m \gamma_k (u_k, v_k)_{\mathcal{H}} = 0.
\end{gathered}$$

Эта формула показывает, что элемент v_0 принадлежит области определения оператора A_{01}^*, т.е. $v_0 \in \mathcal{D}(A_{01}^*) = \mathcal{D}(A_k^{1/2}) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, и

$$A_{01}^* v_0 = -A_{11}\widehat{v}_1 \iff A_k^{1/2} v_0 = -\gamma_k v_k, \ \ k = 1, \ldots, m. \tag{1.4.14}$$

Пусть теперь в (1.4.13) $\widehat{u}_1 = 0$, $u_0 \in \mathcal{D}(A_0)$. Тогда с учетом (1.4.14) имеем

$$\begin{gathered}
(A_{00}u_0, v_0)_{\mathcal{H}} + (A_{10}u_0, \widehat{v}_1)_{\widehat{\mathcal{H}}_1} = \\
= (A_0^{1/2} u_0, A_0^{1/2} v_0)_{\mathcal{H}} + \sum_{k=1}^m \gamma_k^{-1} (A_k^{1/2} u_0, A_k^{1/2} v_0)_{\mathcal{H}} = 0.
\end{gathered} \tag{1.4.15}$$

Введем, опираясь на вид соотношения (1.4.15), в множестве $\mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_k^{1/2})$, $k = 1, \ldots, m$, два новых скалярных произведения:

$$\begin{gathered}
[u_0, v_0] := (A_0^{1/2} u_0, A_0^{1/2} v_0)_{\mathcal{H}} = (u_0, v_0)_{A_0}, \ \ u_0, v_0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \\
\langle u_0, v_0 \rangle := [u_0, v_0] + \sum_{k=1}^m \gamma_k^{-1} (A_k^{1/2} u_0, A_k^{1/2} v_0)_{\mathcal{H}},
\end{gathered} \tag{1.4.16}$$

а также соответствующие нормы. Нетрудно видеть, что эти нормы эквивалентны:

$$1 \leqslant \frac{\langle u_0, u_0 \rangle}{[u_0, u_0]} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^m \gamma_k^{-1} \| A_k^{1/2} A_0^{-1/2} \|^2.$$

Отсюда следует, что $\langle u_0, v_0\rangle := [u_0, Tv_0]$, где T — положительно определенный ограниченный оператор, действующий в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{A_0} = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ (оператора A_0) со скалярным произведением $[u_0, v_0]$.

В терминах скалярных произведений (1.4.16) соотношение (1.4.15) переписывается в виде

$$\langle u_0, v_0\rangle := [u_0, Tv_0] = 0, \ \ \forall u_0 \in \mathcal{D}(A_0). \tag{1.4.17}$$

Так как $\mathcal{D}(A_0)$ плотно в $\mathcal{H}_{A_0} = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, то из (1.4.17) имеем $Tv_0 = 0$, а в силу ограниченной обратимости операторов T и A_{11} получаем, что $v_0 = 0$, $\widehat{v}_1 = 0$, т.е. $\widetilde{v} = 0$. $\square$

Таким образом, возникает проблема замыкания оператора $\mathcal{A}_0$. Чтобы понять, как это сделать, осуществим следующие построения. Введем вспомогательные операторы

$$\begin{gathered}Q_k := A_k^{1/2}A_0^{-1/2}, \ \ \mathcal{D}(Q_k) := \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_0,\\ Q_k^+ := A_0^{-1/2}A_k^{1/2}, \ \ \mathcal{D}(Q_k^+) := \mathcal{D}(A_k^{1/2}), \ \ k = 1, \ldots, m,\end{gathered}$$

а также операторные столбцы и строки

$$\begin{gathered}Q_{10} := (Q_1; \ldots; Q_m)^\tau, \ \ \mathcal{D}(Q_{10}) = \mathcal{H}_0,\\ Q_{01}^+ := (Q_1^+; \ldots; Q_m^+), \ \ \mathcal{D}(Q_{01}^+) = \widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2} \subset \widehat{\mathcal{H}}_1.\end{gathered}$$

Оказывается, с помощью этих операторов можно произвести замыкание оператора $\mathcal{A}_0$.

Лемма 1.4.4. *Справедливы соотношения*

$$Q_k^+ = Q_k^*|\mathcal{D}(A_k^{1/2}) \ \ (k = 1, \ldots, m), \ \ Q_{01}^+ = Q_{10}^*|\widehat{\mathcal{D}}_1^{1/2}, \tag{1.4.18}$$

причем замыкание по непрерывности оператора Q_k^+ совпадает с Q_k^*, а оператора Q_{01}^+ — с Q_{10}^*.

Доказательство. Отметим сначала, что операторы Q_k ограничены и потому определены на всем пространстве $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. В самом деле, оператор $A_0^{-1/2}$ ограниченно действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{A_0} = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_k^{1/2})$, а оператор $A_k^{1/2}$ — ограниченно действует из $\mathcal{H}_{A_k} = \mathcal{H}_{A_0} = \mathcal{D}(A_k^{1/2}) = \mathcal{D}(A_0^{1/2})$ в $\mathcal{H}$. Поэтому этот оператор, заданный на всем пространстве $\mathcal{H}$, ограничен:

$$\|Q_k\| = \|A_k^{1/2}A_0^{-1/2}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leqslant \|A_k^{1/2}\|_{\mathcal{H}_{A_k}\to\mathcal{H}} \cdot \|A_0^{-1/2}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}_{A_0}=\mathcal{H}_{A_k}}.$$

Докажем теперь первое соотношение (1.4.18). Пусть $v \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_k^{1/2})$, $u \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(Q_k u, v)_{\mathcal{H}} = (A_k^{1/2} A_0^{-1/2} u, v)_{\mathcal{H}} = (u, A_0^{-1/2} A_k^{1/2} v)_{\mathcal{H}} = \\ = (u, Q_k^+ v)_{\mathcal{H}}, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}).$$

Это соотношение показывает, что

$$v \in \mathcal{D}(Q_k^*) \;\text{ и }\; Q_k^* | \mathcal{D}(A_k^{1/2}) = Q_k^+.$$

Так как оператор Q_k ограничен, то ограничен и Q_k^*, а потому Q_k^+, совпадающий с Q_k^* на плотном множестве $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ из $\mathcal{H}$, также ограничен на этом множестве. Значит, замыкание по непрерывности оператора Q_k^+ (с $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ на все $\mathcal{H}$) совпадает с Q_k^*.

Второе свойство (1.4.18) для оператора Q_{01}^+ доказывается аналогично. □

Следствием доказанной леммы является

Теорема 1.4.1. ***(О факторизации операторной матрицы и ее замыкании)*** *Оператор* $\mathcal{A}_0$, *введенный формулами* (1.4.7) *на множестве* (1.4.10)–(1.4.11), *допускает следующие факторизации:*

а) в форме Шура–Фробениуса:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ -Q_{10} A_0^{-1/2} & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_{11} + Q_{10} Q_{10}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & A_0^{-1/2} Q_{01}^+ \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{1.4.19}$$

б) с симметричным окаймлением:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & Q_{01}^+ \\ -Q_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}. \tag{1.4.20}$$

Замыкание $\mathcal{A}$ *оператора* $\mathcal{A}_0$ *допускает представления:*

а) в форме Шура–Фробениуса:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ -Q_{10} A_0^{-1/2} & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_{11} + Q_{10} Q_{10}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & A_0^{-1/2} Q_{10}^* \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{1.4.21}$$

б) с симметричным окаймлением:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 & Q_{10}^* \\ -Q_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4.22)$$

Оператор $\mathcal{A}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ \widetilde{u} = (u_0; \widehat{u}_1)^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} : u_0 + A_0^{-1/2} Q_{10}^* \widehat{u}_1 \in \mathcal{D}(A_0) \Big\} \qquad (1.4.23)$$

посредством формулы

$$\mathcal{A}\widetilde{u} = \begin{pmatrix} A_0(u_0 + A_0^{-1/2} Q_{10}^* \widehat{u}_1) \\ -Q_{10} A_0^{1/2} u_0 + A_{11} \widehat{u}_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \qquad (1.4.24)$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что если $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $u_0 + A_0^{-1/2} Q_{10}^* \widehat{u}_1 \in \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, а так как здесь второе слагаемое также из $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$, то $u_0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$. Поэтому формула (1.4.24) определена корректно (см. второй элемент столбца).

Далее, формулы (1.4.19), (1.4.20) проверяются непосредственно на элементах из $\mathcal{D}(A_0)$ (проделайте это!). В формуле (1.4.19) второй и третий сомножители справа допускают замыкание путем замены оператора Q_{01}^+ на Q_{10}^* (см. лемму 1.4.4), и возникает оператор (1.4.21). После этого каждый сомножитель в (1.4.21) будет замкнутым оператором, имеющим ограниченный обратный. Тогда этот ограниченный обратный будет задан на всем пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$, т.е. оператор $\mathcal{A}$ из (1.4.21) будет иметь в качестве области значений все $\widetilde{\mathcal{H}}$. Поэтому оператор $\mathcal{A}$ будет замкнутым оператором. Из леммы 1.4.3 тогда следует, что оператор $\mathcal{A}$ из (1.4.21) — максимальный равномерно аккретивный оператор. Отметим, что для оператора $\mathcal{A}$ сохраняется неравенство равномерной аккретивности, которое имело место для оператора $\mathcal{A}_0$ (см. (1.4.12)):

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\widetilde{u}, \widetilde{u})_{\widetilde{\mathcal{H}}} \geqslant c \|\widetilde{u}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2, \quad \forall \widetilde{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Аналогичные рассуждения позволяют установить, что оператор $\mathcal{A}$, определяемый формулой (1.4.22) и являющийся расширением оператора $\mathcal{A}_0$ из (1.4.20), — максимальный равномерно аккретивный. Здесь крайние сомножители являются неограниченными самосопряженными операторами, имеющими ограниченный обратный, а средний множитель — ограниченный оператор, имеющий следующий ограниченный обратный оператор (проверьте эту формулу!)

$$\begin{pmatrix} I_0 & Q_{10}^* \\ -Q_{10} & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} (I_0 + Q_{10}^* A_{11}^{-1} Q_{10})^{-1} & -Q_{10}^*(A_{11} + Q_{10}Q_{10}^*)^{-1} \\ (A_{11} + Q_{10}Q_{10}^*)^{-1} Q_{10} & (A_{11} + Q_{10}Q_{10}^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$, представленный в виде (1.4.21) либо (1.4.22), является максимальным равномерно аккретивным оператором. Можно непосредственно проверить (проделайте это!), что он задан на области определения (1.4.23) и определен формулой (1.4.24). Естественно, эта формула следует как из (1.4.21), так и из (1.4.22).

$\square$

1.4.3 Теоремы о сильной разрешимости задач Коши

Опираясь на установленные свойства матричного оператора $\mathcal{A}$, можно независимо от общих теорем 1.3.2–1.3.4 доказать теорему существования и единственности сильного решения задачи (1.4.1). Попутно будет установлена связь между задачей (1.4.1), задачей (1.4.5), где операторная матрица $\mathcal{A}_0$ является незамкнутым равномерно аккретивным оператором, а также задачей

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \mathcal{A}\widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0, \quad \mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}}_0. \tag{1.4.25}$$

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены условия*

$$\text{а) } u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1, \tag{1.4.26}$$

либо условия

$$\text{б) } u^0 \in \mathcal{D}(A_0),\ f(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}),\ 0 < \alpha \leqslant 1,\ A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{1.4.27}$$

Тогда каждая из задач (1.4.1), (1.4.5) *и* (1.4.25) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$, *и из существования такого решения любой из них следует существование решения двух других.*

Доказательство. Если задача (1.4.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, то, как показали построения в начале этого параграфа, связанные с переходом от (1.4.1) к (1.4.5), задача (1.4.5) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, причем в этой задаче

$$\widetilde{u}^0 := (u^0;\widehat{0})^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0),\ \widetilde{f}(t) := (f(t);\widehat{0})^\tau \in W_p^1([0,T];\widetilde{\mathcal{H}}),\ p>1, \quad (1.4.28)$$

либо $\widetilde{f}(t) \in C^\alpha([0,T];\widetilde{\mathcal{H}})$ (соответственно случаям а) и б)). Нетрудно видеть, что и обратно, от задачи (1.4.5) при этих условиях можно вернуться к задаче (1.4.1) и условиям (1.4.26), (1.4.27). Поэтому достаточно убедиться, что аналогичное соответствие можно установить между задачами (1.4.5) и (1.4.25).

Если $\widetilde{u}(t)$ — сильное решение задачи (1.4.5) и $\widetilde{u}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, а $\widetilde{f}(t)$ удовлетворяет одному из выписанных условий, то эта же функция $\widetilde{u}(t)$ является сильным решением задачи (1.4.25), поскольку оператор $\mathcal{A}$ является расширением (замыканием) оператора $\mathcal{A}_0$ и потому $\mathcal{A}\widetilde{u}(t) \equiv \mathcal{A}_0\widetilde{u}(t)$. Значит, для завершения доказательства теоремы осталось лишь убедиться, что при сформулированных условиях из существования сильного решения задачи (1.4.25) следует существование сильного решения задачи (1.4.5).

Пусть выполнены условия (1.4.26). Тогда выполнены условия (1.4.28), причем $\widetilde{u}^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Так как оператор $\mathcal{A}$ по теореме 1.4.1 является максимальным равномерно аккретивным оператором, то оператор $(-\mathcal{A})$ является генератором C_0-полугруппы и при сформулированных условиях на данные задачи по теореме 1.4.1 получаем, что задача (1.4.25) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Для этого решения выполнено уравнение (1.4.25), т.е. справедлива система уравнений

$$\frac{du_0}{dt} + A_0(u_0 + A_0^{-1/2}\sum_{k=1}^m Q_k^* u_k) = f(t), \quad u_0(0) = u^0, \qquad (1.4.29)$$

$$\frac{du_k}{dt} + \gamma_k u_k - Q_k A_0^{1/2} u_0 = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad k = 1,\dots,m. \qquad (1.4.30)$$

Здесь каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в $\mathcal{H}$, $t \in [0,T]$.

Заметим теперь, что уравнение(1.4.5) также представляется в виде системы уравнений

$$\frac{du_0}{dt} + A_0 u_0 + A_0^{1/2}\sum_{k=1}^m Q_k^+ u_k = f(t), \quad u_0(0) = u^0, \qquad (1.4.31)$$

$$\frac{du_k}{dt} + \gamma_k u_k - Q_k A_0^{1/2} u_0 = 0, \quad u_k(0) = 0, \quad k = 1,\dots,m. \qquad (1.4.32)$$

Таким образом, возникает проблема доказать, что от (1.4.29), (1.4.30) можно перейти к системе (1.4.31), (1.4.32), т.е. раскрыть скобки в (1.4.29) и заменить Q_k^* на Q_k^+.

Проинтегрируем обе части (1.4.30) по t в пределах от 0 до t, с учетом начальных условий имеем

$$u_k(t) = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)} Q_k A_0^{1/2} u_0(s)ds, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Подставляя эти функции в (1.4.29), приходим к соотношению

$$\frac{du_0}{dt} + A_0(u_0 + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)} T_k u_0(s)ds) = f(t),$$

$$T_k := A_0^{-1/2} Q_k^* Q_k A_0^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что здесь, как установлено выше, функция

$$u_0(t) + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)} T_k u_0(s)ds =: v_0(t) \qquad (1.4.33)$$

при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит $\mathcal{D}(A_0)$ и $A_0 v_0(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$.

Заметим теперь, что если $u_0 \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_k)$, то $A_0^{1/2} u_0(t) \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_k^{1/2})$, $k = 1, \ldots, m$, а потому по лемме 1.4.4

$$T_k u_0 = A_0^{-1/2} Q_k^* Q_k A_0^{1/2} u_0 = A_0^{-1/2} Q_k^+ A_0^{1/2} u_0 = A_0^{-1} A_k u_0 \in \mathcal{D}(A_0). \quad (1.4.34)$$

Отсюда следует, что $T_k|\mathcal{D}(A_0)$ является ограниченным оператором, действующим в $\mathcal{D}(A_0)$.

Опираясь на это обстоятельство, введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathcal{H}(A_0) := \mathcal{D}(A_0)$ с нормой, эквивалентной норме графика: $\|u\|_{\mathcal{H}(A_0)} := \|A_0 u\|_{\mathcal{H}}$, и рассмотрим пространство $C([0, T]; \mathcal{H}(A_0))$. Далее, будем рассматривать соотношение (1.4.33) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C([0, T]; \mathcal{H}(A_0))$. Здесь $v_0(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}(A_0))$ — заданная функция, а ядро

$$T(t, s) = \sum_{k=1}^m \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)} T_k = \sum_{k=1}^m \mathrm{e}^{-\gamma_k(t-s)} A_0^{-1} A_k,$$

в силу (1.4.34), является непрерывной по переменным t, s оператор-функцией со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(A_0))$. Поэтому по теореме 1.2.1 задача (1.4.33) имеет единственное решение $u_0(t) \in C([0,T];\mathcal{H}(A_0))$, выполнены свойства (1.4.34) и потому в (1.4.29) каждое слагаемое в скобках является элементом из $C([0,T];\mathcal{H}(A_0))$.

Значит, в уравнении (1.4.29) можно раскрыть скобки и заменить Q_k^* на Q_k^+, что равносильно переходу от системы уравнений (1.4.29), (1.4.30) к системе уравнений (1.4.31), (1.4.32). Таким образом, при условиях (1.4.26) теорема доказана.

Пусть теперь выполнены условия (1.4.27). Преобразуем задачу (1.4.25), опираясь на факторизацию (1.4.21) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура–Фробениуса:

$$\mathcal{A} = (\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}^0(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2), \;\; \mathcal{A}^0 = \operatorname{diag}(A_0; A_{11} + Q_{10}Q_{10}^*),$$

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1) := \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ -Q_{10}A_0^{-1/2} & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \;\; (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2) := \begin{pmatrix} I_0 & A_0^{-1/2}Q_{10}^* \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}; \tag{1.4.35}$$

будем иметь

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + (\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}^0(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \tag{1.4.36}$$

$$\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0 := (u^0; \widehat{0})^\tau, \;\; \widetilde{f}(t) := (f(t); \widehat{0})^\tau. \tag{1.4.37}$$

Осуществим в (1.4.36) замену искомой функции по формуле

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\widetilde{u}(t) = \widetilde{v}(t). \tag{1.4.38}$$

Так как $\mathcal{I} + \mathcal{S}_2$ является треугольной операторной матрицей, то существует ограниченный обратный оператор

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} I_0 & -A_0^{-1/2}Q_{10}^* \\ 0 & \widehat{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{1.4.39}$$

и потому вместо задачи (1.4.36), (1.4.37) будем иметь задачу Коши

$$\frac{d\widetilde{v}}{dt} = -(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}^0\widetilde{v} + \widetilde{f}(t), \;\; \widetilde{v}(0) = \widetilde{u}^0, \tag{1.4.40}$$

где уже учтено, что в силу (1.4.37) и (1.4.39)

$$\widetilde{v}(0) = (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\widetilde{u}^0 = \widetilde{u}^0, \;\; (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\widetilde{f}(t) = \widetilde{f}(t). \tag{1.4.41}$$

Заметим теперь, что уравнение (1.4.40) является неоднородным абстрактным параболическим уравнением (см. [3]). В нем оператор $\mathcal{A}^0$ является самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$, и потому оператор $(-\mathcal{A}^0)$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось ($\alpha = \pi/2$). Далее, так как оператор $A_0^{-1/2}$ компактен вместе с A_0^{-1} (см. последнее условие (1.4.27)), то в (1.4.35) операторы $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2$, — компактные и потому

$$(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1) = (\mathcal{I} + \mathcal{S}), \;\; \mathcal{S} \in \mathfrak{S}_\infty(\widetilde{\mathcal{H}}).$$

Отсюда следует (см. [3], с. 180–183), что оператор $-(\mathcal{I} + \mathcal{S})\mathcal{A}^0$ также является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось.

Так как в силу условий (1.4.27) в задаче (1.4.40), (1.4.41) выполнены условия $\widetilde{v}(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^0)$, $\widetilde{f}(t) \in C^\alpha([0,T]; \widetilde{\mathcal{H}})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то по теореме 1.1.5 эта задача имеет сильное решение $\widetilde{v}(t)$ на отрезке $[0,T]$. Поэтому ввиду замены (1.4.38) задача (1.4.36), (1.4.37), т.е. задача (1.4.25), имеет сильное решение $\widetilde{u}(t)$ на отрезке $[0,T]$. Для завершения доказательства теоремы теперь осталось лишь повторить те же соображения, которые уже были проведены при доказательстве первой части теоремы, когда от формул(1.4.29), (1.4.30) осуществлялся переход к (1.4.31), (1.4.32). Теорема доказана.

$\square$

Глава 2

Некоторые классы вольтерровых интегродифференциальных уравнений второго порядка

В этой главе пособия излагается теория линейных дифференциальных и вольтерровых интегродифференциальных уравнений второго порядка. Многие задачи механики сплошных сред приводят к задачам подобного вида. Это, в частности, задача о малых движениях релаксирующей идеальной жидкости и другие.

Сначала рассматривается теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка: неполных (теория операторных косинус- и синус–функций), а также полных с коммутирующими операторными коэффициентами (теория операторных $(M-N)$-функций).

Затем излагаются вопросы разрешимости интегродифференциальных уравнений Вольтерра: неполных, с коммутирующими операторными коэффициентами.

2.1 Неполные дифференциальные уравнения второго порядка

2.1.1 Классическое гиперболическое уравнение

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{2.1.1}$$

Здесь $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $\mathcal{H}$, $f = f(t)$ — заданная функция, B — самосопряженный положительно определенный оператор ($B \gg 0$), действующий в $\mathcal{H}$ и заданный на плотном множестве $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}$.

Дифференциальное уравнение (2.1.1) называют неполным, так как оно не содержит членов с первой производной от искомой функции. Такие уравнения описывают движения так называемых консервативных систем, когда отсутствует диссипация энергии. Здесь оператор B является оператором потенциальной энергии (малых движений системы), и эта энергия равна $\frac{1}{2}(Bu(t), u(t))$; роль оператора кинетической энергии играет единичный оператор, стоящий при второй производной, поскольку кинетическая энергия равна квадратичному функционалу $\frac{1}{2}(u'(t), u'(t))$.

Определение 2.1.1. *Назовем сильным решением задачи Коши* (2.1.1) *на отрезке* $[0, T]$ *функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{H}$, *для которой выполнены следующие условия:*

а) $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ *при любом* $t \in [0, T]$ *и* $Bu(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$;

б) $u(t) \in C^2([0, T]; \mathcal{H})$;

в) $u'(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(B^{1/2}))$;

г) выполнено уравнение (2.1.1) *при любом* $t \in [0, T]$;

д) выполнены начальные условия. □

Заметим, что требование в) при определении сильного решения возникает в процессе доказательства теоремы о сильной разрешимости задачи (2.1.1). Отметим еще, что необходимыми условиями разрешимости задачи (2.1.1) являются следующие условия:

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}). \tag{2.1.2}$$

Как сейчас будет видно, первые два условия являются также и достаточными (для однородной задачи), а последнее условие (2.1.2) будет заменено на более жесткое требование.

Теорема 2.1.1. *Пусть в задаче* (2.1.1) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}). \tag{2.1.3}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ *и для этого решения выполнен закон баланса полной энергии:*

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|B^{1/2}u(t)\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\|u^1\|^2 + \frac{1}{2}\|B^{1/2}u^0\|^2 + \mathrm{Re}\int_0^t (f(s), u'(s))ds. \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Приведем задачу (2.1.1) к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Будем считать, что задача (2.1.1) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$, и введем новую неизвестную функцию соотношениями

$$\frac{dv}{dt} = -iB^{1/2}u, \quad v(0) = 0. \tag{2.1.5}$$

В силу условия в) из определения сильного решения функция dv/dt непрерывно дифференцируема, и тогда

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -iB^{1/2}\frac{du}{dt}, \quad v'(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{2.1.6}$$

Вместе с уравнением (2.1.1) соотношения (2.1.6) приводят к задаче Коши

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + iB^{1/2}\frac{dv}{dt} = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \\ &\frac{d^2v}{dt^2} + iB^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = -iB^{1/2}u^0, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

которая не содержит искомых функций и потому может быть переписана в векторно-матричной форме в виде одного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dw}{dt} + i\mathcal{B}w = \widehat{f}(t), \quad w(0) = w^0, \tag{2.1.8}$$

$$w(t) := \left(\frac{du}{dt}; \frac{dv}{dt}\right)^\tau, \quad \widehat{f}(t) := (f(t); 0)^\tau,$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & B^{1/2} \\ B^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad w^0 := (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau,$$

где верхним индексом "τ" обозначена операция транспонирования вектор-строки.

Здесь $w = w(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в пространстве $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $\widehat{f}(t)$ — заданная функция, а w^0 — заданный начальный элемент.

Нетрудно видеть, что операторная матрица $\mathcal{B}$ является неограниченным самосопряженным оператором, заданным на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) := \mathcal{D}(B^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}),$$

плотной в $\mathcal{H}^2$. Отсюда следует, что оператор $-i\mathcal{B}$ является консервативным оператором, т.е. таким максимальным диссипативным оператором, для которого

$$\mathrm{Re}(i\mathcal{B}w, w)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad w \in \mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

Поэтому (см. теорему 1.1.1), если выполнены условия

$$w^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad \widehat{f}(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2), \tag{2.1.9}$$

то задача Коши (2.1.8) имеет единственное сильное решение

$$w(t) = \mathcal{U}(t)w^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{f}(s)ds,$$

где $\mathcal{U}(t)$ — полугруппа, отвечающая генератору $-i\mathcal{B}$. Однако в рассматриваемом случае семейство $\mathcal{U}(t)$ является не только C_0-полугруппой операторов, а группой унитарных операторов

$$\mathcal{U}(t) := \exp(-it\mathcal{B}) = \int_{\sigma(\mathcal{B})} \mathrm{e}^{-it\lambda} dE_\lambda,$$

где E_λ — семейство проекторов, отвечающих спектральному разложению

$$\mathcal{B} = \int_{\sigma(\mathcal{B})} \lambda \, dE_\lambda$$

самосопряженного оператора $\mathcal{B}$.

Нетрудно видеть, что условия (2.1.9) выполнены, если выполнены условия (2.1.3). Поэтому при выполнении этих условий задача (2.1.8) имеет единственное сильное решение $w(t)$ на отрезке $[0,T]$. Это означает, что в уравнениях (2.1.7) все слагаемые являются непрерывными функциями t на отрезке $[0,T]$. В частности, $d^2u/dt^2 \in C([0,T];\mathcal{H})$, т.е. выполнено условие б) из определения сильного решения задачи (2.1.1), а также условие в), т.е. свойство $du/dt \in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2}))$. Кроме того, очевидно, $u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$.

Второе уравнение (2.1.7) можно проинтегрировать по t в пределах от 0 до t, и получится соотношение (2.1.5), где dv/dt, как следует из первого уравнения (2.1.7), есть функция из $C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2}))$. Поэтому ее можно подставить в первое уравнение (2.1.7), и возникает уравнение (2.1.1), где теперь

$$iB^{1/2}\frac{dv}{dt} = Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{H}),$$

т.е. выполнено условие а) из определения сильного решения задачи (2.1.1), а также условие г).

Таким образом, при условиях (2.1.3) задача (2.1.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Проверим теперь, что для этого решения выполнен закон баланса полной энергии.

Умножим обе части (2.1.8) слева и справа на $w(t)$ и сложим. Тогда будем иметь соотношение

$$\Big(w, \frac{dw}{dt}\Big)_{\mathcal{H}^2} + \Big(\frac{dw}{dt}, w\Big)_{\mathcal{H}^2} - i(w, \mathcal{B}w)_{\mathcal{H}^2} + i(\mathcal{B}w, w)_{\mathcal{H}^2} = 2\mathrm{Re}(\widehat{f}(t), w)_{\mathcal{H}^2},$$

откуда получаем тождество

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{\mathcal{H}^2} = \mathrm{Re}(\widehat{f}(t), w)_{\mathcal{H}^2}.$$

Так как $w(t) = (du/dt; dv/dt)^\tau = (du/dt; -iB^{1/2}u(t))^\tau$, $\widehat{f}(t) := (f(t); 0)^\tau$, то отсюда следует соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u'(t)\|^2 + \|B^{1/2}u(t)\|^2\Big) = \mathrm{Re}(f(t), u'(t)),$$

а из него — закон баланса полной энергии (см. (2.1.4)). Это закон утверждает, что полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия изменяется только за счет работы внешних сил над системой, а если эти силы отсутствуют ($f(t) \equiv 0$), то имеет место закон сохранения полной энергии. $\square$

2.1.2 Обобщение на случай положительного оператора кинетической энергии

В некоторых задачах о малых движениях консервативных систем с бесконечным числом степеней свободы оператор кинетической энергии является не единичным оператором, а самосопряженным положительным. В этом случае вместо (2.1.1) возникает задача Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{2.1.10}$$

Далее будем предполагать, что для операторных коэффициентов A и B выполнены условия

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad B = B^* \gg 0, \quad \overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}. \tag{2.1.11}$$

Теорема 2.1.1 о существовании и единственности сильного решения задачи допускает обобщение на случай задачи (2.1.10). Точнее, далее будет рассматриваться задача

$$A^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}\Big(A^{1/2}u\Big) + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.1.12}$$

которая совпадает с (2.1.10), если оператор A ограниченно обратим, в частности, если $A \gg 0$.

Определение 2.1.2. *Назовем функцию $u(t)$, заданную на отрезке $[0,T]$, сильным решением задачи* (2.1.12) *со значениями в $\mathcal{H}_{A^{-1}} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, если выполнены следующие условия:*

а) $u(t) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B)$ и $Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

б) $A^{1/2}u(t) \in C^2([0,T];\mathcal{H})$;

в) $u'(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2}))$;

г) выполнено уравнение (2.1.12)*, причем в нем все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$;*

д) выполнены начальные условия. □

Теорема 2.1.2. *Пусть в задаче* (2.1.12) *выполнены условия* (2.1.11)*, а также условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{2.1.13}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ и для этого решения выполнен закон баланса полной энергии:

$$\frac{1}{2}\Big(\|A^{1/2}u'(t)\|^2 + \|B^{1/2}u(t)\|^2\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\|A^{1/2}u^1\|^2 + \|B^{1/2}u^0\|^2\Big) + \operatorname{Re}\int_0^t (f(s), u'(s))ds. \quad (2.1.14)$$

Доказательство. Осуществим в задаче (2.1.12) преобразования, близкие к тем, которые проведены при доказательстве теоремы 2.1.1.

Будем считать, что эта задача имеет сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. Тогда в (2.1.12) каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$. Применим слева в (2.1.12) оператор $A^{-1/2}$ и осуществим замену искомой функции по закону

$$A^{1/2}u(t) = v(t). \quad (2.1.15)$$

Тогда взамен (2.1.12) возникает задача Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v = A^{-1/2}f(t),\ v(0) = A^{1/2}u^0,\ v'(0) = A^{1/2}u^1. \quad (2.1.16)$$

Так как оператор A положителен, то операторы A^{-1} и $A^{-1/2}$ положительно определенные и потому оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$, заданный на области определения

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}),$$

является самосопряженным положительно определенным оператором. В самом деле, его область значений

$$\mathcal{R}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}) = \mathcal{H},$$

а свойство положительной определенности следует из свойств $B \gg 0$, $A^{-1} \gg 0$:

$$(A^{-1/2}BA^{-1/2}u, u) = (BA^{-1/2}u, A^{-1/2}u) \geqslant c_B\|A^{-1/2}u\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant c_B c_{A^{-1}}\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}).$$

Если задача (2.1.12) имеет сильное решение $u(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, то задача (2.1.16) имеет сильное решение $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$. Введем в (2.1.16) новую искомую функцию $w(t)$ соотношениями

$$\frac{dw}{dt} = -iB^{1/2}A^{-1/2}v, \quad w(0) = 0. \quad (2.1.17)$$

Из условия в) определения 2.1.2 сильного решения задачи (2.1.12) следует, что функция dw/dt непрерывно дифференцируема и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt}, \quad w'(0) = -iB^{1/2}A^{-1/2}v^0 = -iB^{1/2}u^0. \quad (2.1.18)$$

Уравнения (2.1.16), (2.1.17) и (2.1.18) приводят к задаче Коши

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dt^2} + iA^{-1/2}B^{1/2}\frac{dw}{dt} = A^{-1/2}f(t), \quad v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1, \\ &\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = -iB^{1/2}u^0, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

не содержащей первых производных по t. Поэтому ее можно переписать в векторно-матричной форме в виде дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $\mathcal{H}^2$:

$$\frac{dz}{dt} + i\mathcal{B}z = \widehat{f}(t), \quad z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau. \quad (2.1.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} &z(t) := \left(\frac{dv}{dt}; \frac{dw}{dt}\right)^\tau, \quad \widehat{f}(t) := (A^{-1/2}f(t); 0)^\tau, \\ &\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Нетрудно видеть, что оператор $\mathcal{B}$, заданный на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1/2}) \oplus \mathcal{R}(B^{-1/2}A^{1/2}),$$

является самосопряженным (вообще говоря, неограниченным) оператором, действующим в $\mathcal{H}^2$. Поэтому оператор $-i\mathcal{B}$ консервативен и является генератором унитарной полугруппы операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(-it\mathcal{B})$. Если выполнены условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad \widehat{f}(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2),$$

то задача (2.1.20) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$ и для этого решения выполнен закон баланса энергии в форме

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^2} = \mathrm{Re}(\widehat{f}(t), z(t))^2_{\mathcal{H}^2}. \quad (2.1.22)$$

Если выполнены условия (2.1.13), то

$$z^0 = (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}),$$

$$\widehat{f}(t) = (A^{-1/2}f(t); 0)^\tau \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2),$$

и потому задача (2.1.20) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Значит, выполнены уравнения (2.1.19), а также начальные условия для $v'(0)$ и $w'(0)$. При этом все слагаемые в уравнениях (2.1.19) являются непрерывными функциями переменной t при $t \in [0,T]$.

В частности, $v(t) = A^{1/2}u(t) \in C^2([0,T]; \mathcal{H})$, т.е. выполнено свойство б) из определения 2.1.2. Далее, из второго уравнения (2.1.19) имеем свойство

$$B^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = B^{1/2}A^{-1/2}\frac{d}{dt}(A^{1/2}u) = B^{1/2}\frac{du}{dt} \in C([0,T]; \mathcal{H}),$$

т.е. выполнено свойство в) из определения 2.1.2. Кроме того, отсюда получаем, что $u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$.

Интегрируя второе соотношение (2.1.19) по t в пределах от 0 до t и используя начальное условие для $w'(0)$, приходим к соотношению (2.1.17), где все слагаемые, как следует из первого уравнения (2.1.19), являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2})$.

Подставляя выражение для dw/dt из (2.1.17) в первое уравнение (2.1.19), приходим к уравнению (2.1.16), где все слагаемые из $C([0,T]; \mathcal{H})$. Наконец, осуществляя обратную замену (2.1.15) и применяя слева (ограниченный) оператор $A^{1/2}$, приходим к выводу, что выполнено уравнение (2.1.12), где все слагаемые — функции из $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$.

Заметим еще, что при $t = 0$ выполнено условие $u(0) = u^0$, так как $z(0) = z^0 = (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau = (A^{1/2}u'(0); -iB^{1/2}u(0))^\tau$.

Этим доказано утверждение о существовании сильного решения задачи Коши (2.1.12) и это решение удовлетворяет всем требованиям из определения 2.1.2.

Доказательство закона баланса полной энергии (см. (2.1.14)) для этого сильного решения следует из (2.1.22), определения $z(t)$ из (2.1.21), формулы (2.1.17) и замены (2.1.15). Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.1.1. *Уравнение* (2.1.12) *можно записать и в форме* (2.1.10)*, если допустить, что* d^2u/dt^2 *является непрерывной функцией* t *со значениями не в* $\mathcal{H}$*, а в пространстве с негативной нормой, отвечающей оснащению*

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{H}_{A^{-1}} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow (\mathcal{H}_{A^{-1}})^*.$$

Тогда оператор A ограниченно действует из $(\mathcal{H}_{A^{-1}})^*$ в $\mathcal{H}_{A^{-1}}$, а A^{-1} ограниченно действует из $\mathcal{H}_{A^{-1}}$ в $(\mathcal{H}_{A^{-1}})^*$, оператор $A^{-1/2}$ ограниченно действует из $\mathcal{H}_{A^{-1}}$ в $\mathcal{H}$ и из $\mathcal{H}$ в $(\mathcal{H}_{A^{-1}})^*$, а оператор $A^{1/2}$ ограничен из $(\mathcal{H}_{A^{-1}})^*$ в $\mathcal{H}$ и из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{A^{-1}}$. Поэтому в уравнении (2.1.10) *будет*

$$\frac{d^2u}{dt^2} \in C([0,T];(\mathcal{H}_{A^{-1}})^*), \quad A^{1/2}\frac{d^2u}{dt^2} \in C([0,T];\mathcal{H}),$$
$$A\frac{d^2u}{dt^2} \in C([0,T];\mathcal{H}_{A^{-1}}) = C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

□

2.1.3 Операторные косинус-функции и их свойства

Вернемся к задаче Коши (2.1.1) и напомним, что она при условиях (2.1.3) имеет единственное сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$. Это решение можно представить в виде суммы трех функций:

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t),$$

где $u_0(t)$ — решение задачи (2.1.1) при $u^1 = 0$, $f(t) \equiv 0$, $u_1(t)$ — решение при $u^0 = 0$, $f(t) \equiv 0$, а $u_2(t)$ — решение при $u^0 = u^1 = 0$. Оказывается (проверьте это!), каждую из этих функций можно выразить через функции

$$C(t) := \cos(tB^{1/2}) := \int\limits_{\sigma(B)} \cos(t\lambda^{1/2})dE_\lambda, \tag{2.1.23}$$

$$S(t) := B^{-1/2}\sin(tB^{1/2}) := \int\limits_{\sigma(B)} \lambda^{-1/2}\sin(t\lambda^{1/2})dE_\lambda, \tag{2.1.24}$$

где E_λ — спектральная мера самосопряженного положительно определенного оператора B, т.е.

$$B = \int\limits_{\sigma(B)} \lambda dE_\lambda.$$

Именно, решение $u(t)$ задачи (2.1.1) имеет вид

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int\limits_0^t S(t-s)f(s)ds \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Функции $C(t)$ и $S(t)$ называются операторными косинус- и синус-функциями; как следует из элементарных разложений (2.1.23), (2.1.24), они являются ограниченными на всей оси $t \in \mathbb{R}$, причем

$$S(t)u = \int_0^t C(s)uds.$$

Оказывается, описанный выше подход, связанный с введением операторных косинус- и синус-функций, можно применить и при изучении задачи Коши для неполного дифференциального уравнения второго порядка в произвольном банаховом пространстве. Соответствующая теория была впервые построена польским математиком М. Совой [20] (с. 182, 184). Опишем кратко положения этой теории.

В банаховом пространстве $\mathcal{E}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Bu, \quad t \geqslant 0, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.1.25}$$

где B — линейный оператор с $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{E}$. (Здесь перед B стоит другой знак, чем в уравнении (2.1.1)).

Определение 2.1.3. *Задача Коши (2.1.25) называется (равномерно) корректной на $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}$, где $\overline{\mathcal{E}^0} = \overline{\mathcal{E}^1} = \mathcal{E}$, если:*

а) решение существует для любых $u^0 \in \mathcal{E}^0$, $u^1 \in \mathcal{E}^1$;

б) решение единственно и (для любого $T > 0$ равномерно по $t \in [0,T]$) устойчиво относительно изменения $u^0 \in \mathcal{E}^0$, $u^1 \in \mathcal{E}^1$.

□

Дадим теперь общее определение семейства операторных косинус-функций, непосредственно связанных с решениями задачи (2.1.25).

Определение 2.1.4. *Однопараметрическое семейство ограниченных операторов $\{C(t)\}$ называется сильно непрерывным семейством операторных косинус-функций, если:*

1°. $C(t+h) + C(t-h) = 2C(t)C(h)$, $t, h \in \mathbb{R}$;

2°. $C(0) = I$;

3°. $C(t)$ сильно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$, т.е. $C(t)v$ — непрерывная по t функция со значениями в $\mathcal{E}$ при $t \in \mathbb{R}$ и любом $v \in \mathcal{E}$. □

Операторные косинус-функции для дифференциального уравнения второго порядка играют ту же роль, что и сильно непрерывные полугруппы для дифференциального уравнения первого порядка. Для семейства $\{C(t)\}$ операторных косинус-функций вводится понятие производящего оператора.

Определение 2.1.5. *Оператор* $C''(0)$ *называется производящим оператором семейства операторных косинус-функций* $\{C(t)\}$. *Его областью определения являются те элементы* $v \in \mathcal{E}$, *для которых существует предел*

$$\lim_{t\to 0} C''(0)v \in \mathcal{E}.$$

□

Пусть $\{C(t)\}$ — сильно непрерывное семейство операторных косинус-функций; определим по нему семейство операторных синус-функций:

$$S(t)v := \int\limits_0^t C(s)v ds, \quad v \in \mathcal{E}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1.26}$$

Введем также множество

$$\mathcal{E}_1 := \{v \in \mathcal{E} : \ C(t)v \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{E})\} \subset \mathcal{E}.$$

Операторные косинус- и синус-функции обладают целым рядом свойств, которые обобщают свойства обычных скалярных функций:

$$C(t) := \mathrm{ch}(t\sqrt{b}), \quad S(t) := (\sqrt{b})^{-1}\mathrm{sh}(t\sqrt{b}), \quad \forall b \in \mathbb{C}. \tag{2.1.27}$$

Предоставляем читателю проверить формулируемые ниже свойства на примере функций (2.1.27).

Сформулируем и докажем эти свойства оператор-функций $C(t)$ и $S(t)$, считая, что $C(t)$ имеет генератор B.

$$1) \quad C(t) = C(-t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (\textit{четность косинус-функции}). \tag{2.1.28}$$

В самом деле, положим $t = 0$ в тождестве 1° определения 2.1.4 семейства операторных косинус-функций и воспользуемся свойством 2°, тогда

$$C(h) + C(-h) = 2C(0)C(h) = 2C(h).$$

Отсюда и следует (2.1.28) при $t = h$.

2) $C(t)$, $S(t)$, $C(h)$, $S(h)$ — *коммутируют при всех* $t, h \in \mathbb{R}$.

Свойство коммутирования для $C(t)$ и $C(h)$ следует из 1° (определение 2.1.4) и свойства 1):

$$2C(t)C(h) = C(t+h) + C(t-h) = C(h+t) + C(h-t) = 2C(h)C(t).$$

Коммутируемость $S(t)$ и $C(h)$ следует из (2.1.26):

$$S(t)C(h)v := \int_0^t C(s)C(h)v\,ds = \int_0^t C(h)C(s)v\,ds = C(h)S(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

Аналогично устанавливаем

$$S(t)S(h)v := \int_0^t C(s)S(h)v\,ds = \int_0^t S(h)C(s)v\,ds = S(h)S(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

3) *Оператор-функция* $S(t)$ *сильно непрерывна по* $t \in \mathbb{R}$.

Это свойство следует из определения $S(t)$ и того факта, что $C(t)v$ непрерывна по t при любом v. Таким образом, $S(t)v$ не только непрерывна, но и непрерывно дифференцируема по t.

$$4) \quad S(t+h) + S(t-h) = 2S(t)C(h), \quad t, h \in \mathbb{R}. \qquad (2.1.29)$$

В самом деле, используя свойство 1° (определение 2.1.4), имеем

$$\int_0^t [C(s+h) + C(s-h)]v\,ds = 2\int_0^t C(s)C(h)v\,ds =$$
$$= 2\int_0^t C(h)C(s)v\,ds = 2C(h)S(t)v = 2S(t)C(h)v.$$

С другой стороны, осуществляя замены переменных ($s + h = \zeta$ и $s - h = \zeta$), получаем

$$\int_0^t C(s+h)v\,ds + \int_0^t C(s-h)v\,ds = \int_h^{t+h} C(\zeta)v\,ds + \int_{-h}^{t-h} C(\zeta)v\,ds =$$
$$= \Big(\int_0^{t+h} - \int_0^h + \int_0^{t-h} - \int_{-h}^0\Big)C(\zeta)v\,ds = S(t+h)v + S(t-h)v,$$

так как интегралы в пределах от 0 до h и от $-h$ до 0 равны между собой (почему?)

5) $S(t) = -S(-t)$ (*нечетность синус-функций*).

Положим в (2.1.29) $t = 0$ и используем свойство $S(0) = 0$ (см. (2.1.26)):

$$S(h) + S(-h) = 2S(0)C(h) = 0.$$

6) $S(t+h) = S(t)C(h) + S(h)C(t), \quad t, h \in \mathbb{R}.$ (2.1.30)

Из (2.1.29), меняя местами t и h, имеем:

$$S(t+h) + S(t-h) = 2S(t)C(h), \quad S(h+t) + S(h-t) = 2S(h)C(t).$$

После сложения левых и правых частей и использования свойства 5) приходим к (2.1.30).

7) $\exists\, K > 0, \quad \omega \geqslant 0$:

$$\max\{\|C(t)\|, \|S(t)\|\} \leqslant K \exp(\omega|t|), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1.31}$$

Докажем свойства (2.1.31). Так как $\|C(t)\|$ ограничена при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то можно выбрать числа K_0 и ω такие, что

$$\|C(t)\| \leqslant K_0 \exp(\omega t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1; \quad 2\|C(1)\| \exp(-\omega) + \exp(-2\omega) \leqslant 1. \tag{2.1.32}$$

Рассуждая далее по индукции, допустим, что условия (2.1.32) выполнены на промежутке $0 \leqslant t \leqslant n$, и докажем, что (2.1.32) имеют место при $0 \leqslant t \leqslant n+1$. Из основного свойства операторной косинус-функции при $h = 1$ имеем $C(t) + C(t-1) = 2C(t)C(1)$, и тогда

$$\begin{aligned}\|C(t+1)\| &\leqslant 2\|C(1)\| \cdot \|C(t)\| + \|C(t-1)\| \leqslant \\ &\leqslant 2\|C(1)\| K_0 \exp(\omega t) + K_0 \exp(\omega(t-1)) = \\ &= K_0 \exp(\omega(t+1))[2\|C(1)\| \exp(-\omega) + \exp(-2\omega)] \leqslant K_0 \exp(\omega|t+1|),\end{aligned}$$

т.е. первая оценка (2.1.32) верна при $0 \leqslant t \leqslant n+1$, а потому и при всех $t \geqslant 0$. Значит, ввиду свойства четности $C(t)$, эта оценка верна при всех $t \in \mathbb{R}$.

Далее, из определения операторной синус-функции имеем

$$\begin{aligned}\|S(t)v\| &= \|\int_0^t C(s)v ds\| \leqslant \int_0^t K_0 \exp(\omega s) ds \cdot \|v\| = \\ &= K_0 \omega^{-1} \exp(\omega|t| - 1)\|v\| \leqslant K \exp(\omega|t|)\|v\|, \quad \omega > 0.\end{aligned}$$

8) $\forall v \in \mathcal{E}$ *элемент* $S(t)v$ *принадлежит множеству* $\mathcal{E}_1$, *т.е.* $C(r)S(t)v$ *непрерывно дифференцируема по* $r \in \mathbb{R}$.

В самом деле,

$$C(r)S(t)v = \int\limits_0^t C(r)C(s)vds = \frac{1}{2}\int\limits_0^t [C(r+s)+C(r-s)]vds =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int\limits_r^{r+t} C(\xi)vd\xi - \int\limits_r^{r-t} C(\xi)vd\xi\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^{r+t} - \int\limits_0^{r} - \int\limits_0^{r-t} + \int\limits_0^{r}\Big)C(\xi)vd\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{r-t}^{r+t} C(\xi)vd\xi.$$

Так как $C(\xi)v$ непрерывна по ξ, то $C(r)S(t)v$ непрерывно дифференцируема по r и

$$\frac{d}{dr}C(r)S(t)v = \frac{1}{2}[C(r+t)-C(r-t)]v, \tag{2.1.33}$$

т.е. $S(t)v \in \mathcal{E}_1$ при любом $t \in \mathbb{R}$.

9) *При любом $v \in \mathcal{E}_1$ имеют место равенства*

$$S(t)v \in \mathcal{D}(B) \quad \textit{и} \quad C'(t)v = BS(t)v.$$

Действительно, так как $v \in \mathcal{E}_1$, то функции $C(r+t)v$ и $C(r-t)v$ непрерывно дифференцируемы по r и потому из (2.1.33) имеем

$$\frac{d^2}{dr^2}C(r)S(t)v = \frac{1}{2}\Big[\frac{d}{dr}C(r+t) - \frac{d}{dr}C(r-t)\Big]v$$

и существует предел

$$\lim_{r\to 0}\frac{d^2}{dr^2}C(r)S(t)v =: BS(t)v = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\Big[\frac{d}{dr}C(r+t)v - \frac{d}{dr}C(r-t)v\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\Big[\frac{d}{dt}C(r+t)v + \frac{d}{dt}C(r-t)v\Big] = \frac{d}{dt}C(t)v,$$

так как $C(-t) = C(t)$.

10) *Имеют место свойства*

$$\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{E}, \quad \overline{B} = B,$$

т.е. $\mathcal{D}(B)$ плотно в $\mathcal{E}$ и оператор B замкнут.

11) *При любом $v \in \mathcal{D}(B)$ имеют место соотношения*

$$C(t)v \in \mathcal{D}(B), \quad C''(t)v = BC(t)v = C(t)Bv. \tag{2.1.34}$$

Докажем сначала первое свойство 10). Пусть v — произвольный элемент из $\mathcal{E}$, $b > 0$; тогда $v_b := S(b)v = \int\limits_0^b C(\xi)vd\xi \in \mathcal{E}_1$ (по свойству 8)), а $u_b := S(b)v_b \in \mathcal{D}(B)$ (по свойству 9)). Так как

$$b^{-2}u_b = b^{-2}\int\limits_0^b C(\eta)\Big(\int\limits_0^b C(\xi)vd\xi\Big)d\eta,$$

а функция двух переменных $C(\eta)C(\xi)$ непрерывна по ξ, η из отрезка $[0,b]$ и $C(\eta)C(\xi)v \to v$ при $b \to 0$, то $b^{-2}u_b \to v$ при $b \to 0$. Отсюда следует свойство $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{E}$.

Докажем теперь свойство 11). Используя свойство 1° определения 2.1.4, имеем тождество

$$\begin{aligned} h^{-2}[C(t+h)-2C(t)+C(t-h)]v = h^{-2}[-2C(t)+(C(t+h)+C(t-h))]v = \\ = h^{-2}[-2C(t)+C(t)C(h)]v = C(t)\frac{2}{h^2}[C(h)-I]v = \\ = C(t)\frac{C(h)-2C(0)+C(-h)}{h^2}v = \frac{C(h)-2C(0)+C(-h)}{h^2}C(t)v. \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Если здесь $v \in \mathcal{D}(B)$, то

$$\frac{C(h)-2C(0)+C(-h)}{h^2}v \to Bv \quad (h \to 0)$$

и потому существуют пределы левой и правой частей (2.1.35), т.е. $C(t)v \in \mathcal{D}(B)$ и выполнены свойства (2.1.34).

Докажем, наконец, свойство замкнутости производящего оператора B. Пусть $\{v_n\}$ — последовательность элементов из $\mathcal{D}(B)$ такая, что $v_n \to v$, $Bv_n \to u \in \mathcal{E}$. Тогда по свойствам 11) имеем

$$C''(t)v_n = BC(t)v_n = C(t)Bv_n, \quad C'(t)v_n = \int\limits_0^t C(s)Bv_n ds.$$

(Во втором соотношении использовано свойство 9): $C'(0)v_n = BS(0)v_n = 0$.) Из этих соотношений следует, что последовательность $\{C(t)v_n\}$ сходится равномерно по t на компактных множествах из $\mathbb{R}$ вместе с первой и второй производными. Поэтому

$$C(t)v = \lim_{n\to\infty} C(t)v_n \in C^2(\mathbb{R};\mathcal{E}), \quad Bv = C''(0)v = \lim_{n\to\infty} C(0)Bv_n = u.$$

Этим свойства 10) и 11) полностью доказаны.

12) *Для любого $v \in \mathcal{E}_1$ выполнены свойства*

$$S(t)v \in \mathcal{D}(B), \quad S''(t)v = BS(t)v.$$

В самом деле, первое свойство уже доказано в 9), а второе следует из второго соотношения 9):

$$BS(t)v = C'(t)v = \frac{d}{dt}(C(t)v) = \frac{d^2}{dt^2}\Big(\int\limits_0^t C(s)vds\Big) = \frac{d^2}{dt^2}(S(t)v).$$

13) *Для любого $v \in \mathcal{D}(B)$ выполнены свойства*

$$S(t)v \in \mathcal{D}(B), \quad BS(t)v = S(t)Bv.$$

Действительно, если $v \in \mathcal{D}(B)$, то по первому свойству 11) имеем $C(t)v \in \mathcal{D}(B)$, а тогда и $\int\limits_0^t C(s)vds = S(t)v \in \mathcal{D}(B)$. Отсюда

$$BS(t)v = B\int\limits_0^t C(s)vds = \int\limits_0^t BC(s)vds = \int\limits_0^t C(s)Bvds = S(t)Bv,$$

где использовано последнее свойство 11).

14) *Имеет место тождество*

$$C(t+h) - C(t-h) = 2BS(t)S(h), \quad t,h \in \mathbb{R}. \tag{2.1.36}$$

Для доказательства этого свойства воспользуемся формулой (2.1.30):

$$S(t+h)v = S(t)C(h)v + C(t)S(h)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

Так как здесь $S(t+h)v$ и $S(t)C(h)v$ непрерывно дифференцируемы, то и последнее слагаемое справа также непрерывно дифференцируемо и тогда

$$C(t+h)v = C(t)C(h)v + C'(t)S(h)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

Здесь согласно свойству 8) элемент $S(h)v \in \mathcal{E}_1$, поэтому по свойству 9) имеем

$$S(t)S(h)v \in \mathcal{D}(B), \quad BS(t)S(h)v = C'(t)S(h)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

Поэтому

$$C(t+h)v = C(t)C(h)v + BS(t)S(h)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

Тогда

$$C(t-h)v = C(t)C(h)v - BS(t)S(h)v, \quad \forall v \in \mathcal{E},$$

и из двух последних формул следует (2.1.36).

2.1.4 Теоремы о разрешимости задачи Коши

Доказанные свойства семейства операторных косинус-функций позволяют установить теорему существования, единственности и корректности задачи (2.1.25), а также соответствующей неоднородной задачи. Приведем без доказательства результаты о разрешимости этих задач.

Теорема 2.1.3. *Пусть B — замкнутый линейный оператор с плотной в пространстве $\mathcal{E}$ областью определения $\mathcal{D}(B)$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1°. *Задача Коши* (2.1.25) *равномерно корректна на* $\mathcal{E}^0 = \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{E}^1 = \mathcal{D}(B)$.

2°. *Оператор B является производящим оператором сильно непрерывного семейства операторных косинус-функций $C(t)$, т.е.* $C''(0)v = Bv$, $\forall v \in \mathcal{D}(B)$.

3°. $\exists$ $K > 0$, $\omega \geqslant 0$ *такие, что любое λ с* $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ *принадлежит резольвентному множеству оператора B, точнее, существует ограниченный обратный оператор* $R(\lambda^2; B) := (B - \lambda^2 I)^{-1}$,

$$\frac{1}{n!}\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\lambda R(\lambda^2; B)\|^2 \leqslant K(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{-(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

При этом решение задачи (2.1.25) *имеет вид*

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1, \quad u^0, u^1 \in \mathcal{D}(B),$$

а для резольвенты оператора B при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ *имеют место равенства*

$$\lambda R(\lambda^2; B)v = -\int_0^\infty \exp(-\lambda t)C(t)v dt, \; R(\lambda^2; B)v = -\int_0^\infty \exp(-\lambda t)S(t)v dt, \; \forall v \in \mathcal{E}.$$

□

Для неоднородной задачи Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Bu + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.1.37}$$

справедлив следующий факт.

Теорема 2.1.4. *Пусть B — замкнутый линейный оператор с плотной в пространстве $\mathcal{E}$ областью определения $\mathcal{D}(B)$. Пусть, далее,*

$$\mathcal{E}^f := \{f(t) \in C^1(\mathbb{R};\mathcal{E}) : Bf(t) \in C(\mathbb{R};\mathcal{E})\}.$$

Предположим, что однородная задача Коши (2.1.25) *равномерно корректна на $\mathcal{E}^0 = \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{E}^1 = \mathcal{D}(B)$.*

Тогда, если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B), \quad f(t) \in \mathcal{E}^f,$$

то функция

$$u(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int\limits_0^t S(t-s)f(s)ds, \tag{2.1.38}$$

является сильным решением задачи Коши (2.1.37)*. Обратно, если $f(t) \in C(\mathbb{R};\mathcal{E})$ и $u(t)$ являются решением задачи Коши* (2.1.37)*, то $u(t)$ определяется по формуле* (2.1.38)*.* □

Заметим в заключение этого параграфа, что теоремы 2.1.3 и 2.1.4 могут быть использованы при исследовании разрешимости задачи Коши для вольтеррова интегродифференциального уравнения, обобщающего задачу (2.1.37).

Доказательства теорем 2.1.3 и 2.1.4 получаются как частный случай доказательств теорем существования более общих задач для полных дифференциальных уравнений второго порядка в произвольном банаховом пространстве $\mathcal{E}$. Поэтому они здесь не приводятся.

2.2 Полные дифференциальные уравнения второго порядка. Теория операторных $(M-N)$- функций

В этом параграфе рассматривается задача Коши для полного дифференциального уравнения второго порядка в произвольном банаховом пространстве. Предполагается, что операторные коэффициенты, стоящие при производной и искомой функциях, являются коммутирующими. Это позволяет построить аналог семейств операторных косинус- и синус-функций, обобщающий соответствующие построения из параграфа 2.1.

2.2.1 Задача Коши для полного дифференциального уравнения второго порядка с коммутирующими операторными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.2.1}$$

в банаховом пространстве $\mathcal{E}$, где A, B — линейные коммутирующие операторы,

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}, \quad \overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{E}.$$

Определение 2.2.1. *Функция $u(t)$ со значениями в $\mathcal{E}$ называется сильным решением задачи Коши* (2.2.1)*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

а) $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ для любого $t \geqslant 0$ и $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$;

б) $du/dt \in \mathcal{D}(A)$ и $Au/dt \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$;

в) выполнено уравнение (2.2.1) *при $t \geqslant 0$;*

г) выполнены начальные условия при $t = 0$. □

Заметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (2.2.1) являются условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A).$$

Определение 2.2.2. *Задача Коши* (2.2.1) *называется (равномерно) корректной на $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}$, где $\overline{\mathcal{E}^0} = \mathcal{E}$, $\overline{\mathcal{E}^1} = \mathcal{E}$, если:*

а) решение $u(t)$ существует при любых $u^0 \in \mathcal{E}^0$, $u^1 \in \mathcal{E}^1$;

б) решение единственно и (для любого $T > 0$ равномерно по $t \in [0, T]$) устойчиво относительно изменения $u^0 \in \mathcal{E}^0$, $u^1 \in \mathcal{E}^1$. □

В монографии Х. Фатторини [21] отмечается, что теория полных уравнений второго порядка, т.е. уравнений вида (2.2.1), существенно сложнее по сравнению с теорией уравнений первого порядка (где применяется теория полугрупп операторов) и неполных уравнений второго порядка (группы операторов, операторные косинус- и синус-функции), так как здесь решение равномерно корректной задачи Коши (2.2.1) в отличие от уравнений первого порядка и неполных уравнений второго порядка может не обладать свойством экспоненциальной ограниченности. Это приводит к включению требования экспоненциальной ограниченности решения в понятие равномерно корректной задачи Коши.

Определение 2.2.3. *Задача Коши* (2.2.1) *называется ω-равномерно корректной на $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1$, где $\overline{\mathcal{E}^0} = \overline{\mathcal{E}^1} = \mathcal{E}$, если:*

а) решение $u(t)$ существует при любых $u^0 \in \mathcal{E}^0$, $u^1 \in \mathcal{E}^1$;

б) $\exists\, K > 0$, $\omega \geqslant 0$ такие, что

$$\|u(t)\| \leqslant K \exp(\omega t)[\|u^0\| + \|u^1\|], \quad t \geqslant 0. \qquad \Box$$

Определение 2.2.4. *Резольвентой операторов A, B называется оператор*

$$R(\lambda; A, B) := (B + \lambda A - \lambda^2 I)^{-1}, \tag{2.2.2}$$

ограниченный на $\mathcal{E}$. $\Box$

Формально вид (2.2.2) для резольвенты получается из уравнения (2.2.1), если его решения искать в форме $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$, $v \in \mathcal{E}$. Тогда возникает задача на собственные значения

$$L(\lambda)v := (B + \lambda A - \lambda^2)v = 0 \tag{2.2.3}$$

для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$. Точки λ комплексной плоскости, в которых пучок $L(\lambda)$ ограниченно обратим, принадлежат резольвентному множеству для $L(\lambda)$, т.е. $\lambda \in \rho(L(\lambda))$ и возникает $R(\lambda; A, B) = L(\lambda)^{-1} = (B + \lambda A - \lambda^2 I)^{-1}$.

2.2.2 Определение и свойства операторных $(M - N)$-функций

Введем теперь определение операторных $(M - N)$-функций, играющих важную роль при исследовании задачи Коши (2.2.1).

Определение 2.2.5. *Однопараметрическое семейство ограниченных коммутирующих операторов $M(t)$ и $N(t)$ называется ω-сильно непрерывным семейством операторных $(M - N)$-функций, порожденных операторами A и B, если:*

1°. *$M(t+h) = M(t)M(h) + BN(t)N(h)$;*
$N(t+h) = M(t)N(h) + M(h)N(t) + AN(t)N(h), \quad t,h \in \mathbb{R}$;

2°. *$N(0) = 0, \quad M(0) = I, \quad \exists N'(0) = I, \quad M'(0) = 0$;*

3°. *Оператор-функции $M(t)$ и $N(t)$ сильно непрерывны по $t \in \mathbb{R}$;*

4°. *$\exists\, K > 0, \quad \omega \geqslant 0$:*

$$\max\{\|M(t)\|, \|N(t)\|\} \leqslant K \exp(\omega t), \quad t \geqslant 0. \qquad \square$$

Для семейства операторных $(M-N)$-функций вводятся понятия производящих операторов семейства; для задачи (2.2.1) их теперь два.

Определение 2.2.6. *Операторы*

$$\widetilde{M}''(0)v := \lim_{h\to 0} \frac{M(2h) - 2M(h) + I}{h^2} v, \quad \widetilde{N}''(0)v := \lim_{h\to 0} \frac{N(2h) - 2N(h) + 0}{h^2} v,$$

определенные на тех элементах $v \in \mathcal{E}$, для которых соответствующие пределы существуют, называются производящими операторами семейства операторных $(M-N)$-функций. $\square$

Определение 2.2.7. *Операторы A и B называются коммутирующими, если*

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(BA) =: \widetilde{\mathcal{D}}, \quad ABv = BAv, \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{D}}. \qquad \square$$

Так же, как и для операторных косинус- и синус-функций $C(t)$ и $S(t)$ в предыдущем параграфе, установим здесь общие свойства операторных $(M-N)$-функций, исходя из определения 2.2.5. Заметим, что в скалярном случае, т.е. для обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' = au' + bu, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

функции $M(t)$ и $N(t)$ имеют вид (проверьте!)

$$\begin{aligned} &M(t) = \mathrm{e}^{at/2}\Big(\mathrm{ch}\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}t - \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}\mathrm{sh}\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}t\Big),\\ &\quad M(0) = 1, \quad M'(0) = 0,\\ &N(t) = \frac{2}{\sqrt{a^2+4b}}\mathrm{e}^{at/2}\mathrm{sh}\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}t, \quad N(0) = 0, \quad N'(0) = 1, \end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

и переходят при $a = 0$ соответственно в функции

$$M(t)|_{a=0} = \mathrm{ch}(\sqrt{b}\,t) = C(t), \quad N(t)|_{a=0} = \frac{1}{\sqrt{b}}\mathrm{sh}(\sqrt{b}\,t) = S(t)$$

(см. (2.1.27)). Отметим еще, что для функций (2.2.4)

$$M''(0) = b, \quad N''(0) = a.$$

Будем далее считать, что семейство $(M(t)-N(t))$-функций является ω-сильно непрерывным семейством оператор-функций, для которого A и B являются производящими операторами, т.е.

$$M''(0) = B, \quad N''(0) = A.$$

Тогда имеют место следующие свойства:

1) *первая группа свойств (коммутируемость)*:

$$M(t)Av = AM(t)v, \quad N(t)Av = AN(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A); \tag{2.2.5}$$

$$M(t)Bv = BM(t)v, \quad N(t)Bv = BN(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(B); \tag{2.2.6}$$

$$M'(t)v = N(t)Bv = BN(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(B); \tag{2.2.7}$$

$$N'(t)v = M(t)v + N(t)Av = [M(t) + AN(t)]v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A). \tag{2.2.8}$$

Докажем свойства (2.2.5)–(2.2.8).

Если $v \in \mathcal{D}(A)$, то

$$M(t)Av := M(t) \lim_{h\to 0} \frac{N(2h) - 2N(h)}{h^2} v = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{N(2h) - 2N(h)}{h^2} M(t)v = AM(t)v.$$

Аналогично проверяем:

$$N(t)Av := N(t) \lim_{h\to 0} \frac{N(2h) - 2N(h)}{h^2} v = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{N(2h) - 2N(h)}{h^2} N(t)v = AN(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A),$$

т.е. тождества (2.2.5) справедливы.

Далее, для $\forall v \in \mathcal{D}(B)$ верны равенства

$$M(t)Bv = M(t) \lim_{h\to 0} \frac{M(2h) - 2M(h) + I}{h^2} v =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{M(2h) - 2M(h) + I}{h^2} M(t)v = BM(t)v,$$

$$N(t)Bv = N(t) \lim_{h\to 0} \frac{M(2h) - 2M(h) + I}{h^2} v =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{M(2h) - 2M(h) + I}{h^2} N(t)v = BN(t)v,$$

т.е. справедливы формулы (2.2.6).

Снова для $\forall v \in \mathcal{D}(B)$ с использованием свойств 1° и 2° определения 2.2.5 имеем

$$\lim_{h\to 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} v = \lim_{h\to 0} \left\{ M(t) \frac{M(h) - I}{h} v + N(t) \frac{N(h)}{h} Bv \right\} =$$

$$= M(t)M'(0)v + N(t)N'(0)Bv = N(t)Bv = BN(t)v,$$

откуда следует (2.2.7).

Аналогично для $\forall v \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$N'(t)v = \lim_{h\to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} v =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ M(t) \frac{N(h)}{h} v + N(t) \frac{N(h)}{h} Av + N(t) \frac{M(h) - I}{h} v \right\} =$$

$$= M(t)N'(0)v + N(t)N'(0)Av + N(t)M'(0)v =$$

$$= M(t)v + N(t)Av = \{M(t) + AN(t)\}v,$$

т.е. свойства (2.2.8).

2) *вторая группа свойств*:

$$M''(t)v = [BM(t) + ABN(t)]v =$$

$$= [AM'(t) + BM(t)]v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(AB); \quad (2.2.9)$$

$$N''(t)v = [BN(t) + AM(t) + A^2N(t)]v =$$

$$= [AN'(t) + BN(t)]v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B). \quad (2.2.10)$$

Докажем эти свойства. Если $v \in \mathcal{D}(AB)$, то $v \in \mathcal{D}(B)$, $Bv \in \mathcal{D}(A)$ и по свойствам (2.2.7) и (2.2.8) имеем

$$M''(t)v = \frac{d}{dt}M'(t)v = (N(t)Bv)'_t = N'(t)Bv = M(t)Bv + N(t)ABv =$$
$$= BM(t)v + N(t)BAv = BM(t)v + M'(t)Av = [BM(t) + AM'(t)]v,$$

т.е. свойство (2.2.9).

При $v \in \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B)$ аналогично имеем $v \in \mathcal{D}(A^2)$, $Av \in \mathcal{D}(A)$, $v \in \mathcal{D}(B)$ и потому по формулам (2.2.8) и (2.2.7)

$$N''(t)v = \frac{d}{dt}(N'(t)v) = \frac{d}{dt}(M(t)v + N(t)Av) = M'(t)v + N'(t)Av =$$
$$= N(t)Bv + M(t)Av + N(t)A^2v = [BN(t) + AM(t) + A^2N(t)]v =$$
$$= [BN(t) + AN'(t)]v,$$

и свойство (2.2.10) доказано.

2.2.3 Теоремы о сильной разрешимости задачи Коши

Свойства (2.2.5)–(2.2.10) используются при доказательстве теорем о корректной разрешимости задачи Коши (2.2.1), а также соответствующей неоднородной задачи.

Приведем без доказательства эти теоремы. Их доказательства можно найти в параграфе 2 монографии [1].

Теорема 2.2.1. *Пусть A, B — линейные коммутирующие операторы с непустыми резольвентными множествами и областями определения такими, что множества*

$$\mathcal{E}^0 := \mathcal{D}(AB), \quad \mathcal{E}^1 := \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B)$$

плотны в пространстве $\mathcal{E}$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

ω-равномерно корректна на $\mathcal{E}^0 := \mathcal{D}(AB)$, $\mathcal{E}^1 := \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B)$;

2) операторы A, B являются производящими операторами ω-сильно непрерывного семейства операторных $(M - N)$-функций: $\widetilde{N}''(0) = A$, $\widetilde{M}''(0) = B$.

При этом решение $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = M(t)u^0 + N(t)u^1, \quad u^0 \in \mathcal{E}^0, \quad u^1 \in \mathcal{E}^1,$$

а для резольвенты $R(\lambda; A, B)$ операторов A, B (см. (2.2.3)*) при $Re\,\lambda >\ \omega$ имеют место равенства*

$$R(\lambda; A, B)u = -\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)N(t)u dt, \quad u \in \mathcal{E},$$

$$(\lambda I - A)R(\lambda; A, B)u = -\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)M(t)u dt, \quad u \in \mathcal{E}.$$

□

Рассмотрим теперь неоднородную задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.2.11}$$

и введем множество функций

$$\mathcal{E}^f := \{f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}) :\ Af(t), Af'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})\}.$$

Определение 2.2.8. *Задача Коши* (2.2.11) *называется ω-равномерно корректной на $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^f$, где $\overline{\mathcal{E}^0} = \overline{\mathcal{E}^1} = \mathcal{E}$, если:*

а) решение $u(t)$ существует при любых $u^0 \in \mathcal{E}^0$, $u^1 \in \mathcal{E}^1$, $f(t) \in \mathcal{E}^f$;

б) $\exists K > 0$, $\omega \geqslant 0$, такие, что

$$\|u(t)\| \leqslant K \exp(\omega t)[\|u^0\| + \|u^1\| + \|f(t)\|], \quad t \geqslant 0.$$

□

Теорема 2.2.2. *Пусть A, B — линейные коммутирующие операторы с непустыми резольвентными множествами и областями определения такими, что плотны в пространстве $\mathcal{E}$ множества $\mathcal{E}^0 := \mathcal{D}(AB)$, $\mathcal{E}^1 := \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B)$.*

Если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{E}^0, \quad u^1 \in \mathcal{E}^1, \quad f(t) \in \mathcal{E}^f,$$

то функция

$$u(t) := M(t)u^0 + N(t)u^1 + \int\limits_0^t N(t-s)f(s)ds \tag{2.2.12}$$

является решением задачи Коши (2.2.11). *Обратно, если* $f(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$ *и* $u(t)$ *является решением задачи Коши* (2.2.11), *то* $u(t)$ *определяется по формуле* (2.2.12). $\square$

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.2 для того, чтобы задача Коши* (2.2.11) *была* ω*-равномерно корректной на* $\mathcal{E}^0 := \mathcal{D}(AB)$, $\mathcal{E}^1 := \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{E}^f$ $(\overline{\mathcal{E}^0} = \overline{\mathcal{E}^1} = \mathcal{E})$, *необходимо и достаточно, чтобы операторы* A, B *были производящими операторами* ω*-сильно непрерывного семейства операторных* $(M-N)$*-функций, порожденного операторами* A, B. $\square$

При изучении прикладных задач очень важно максимально расширить классы начальных данных и правых частей. Здесь можно воспользоваться следующим фактом.

Теорема 2.2.3. *Пусть* A, B *— линейные коммутирующие операторы с непустыми резольвентными множествами и плотными в пространстве* $\mathcal{E}$ *областями определения.*

$$\mathcal{E}^0 := \mathcal{D}(AB), \quad \mathcal{E}^1 := \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B).$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Однородная задача Коши (2.2.1) *равномерно корректна на* $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A)$*;*

2) Задача Коши (2.2.1) *равномерно корректна на* $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A)$*;*

3) Операторы A, B *являются производящими операторами* ω*-сильно непрерывного семейства операторных* $(M-N)$*-функций, порожденных операторами* A, B*, такого что оператор-функция* $AN(t)$ *сильно непрерывна по* $t \geqslant 0$*, а оператор-функция* $BN(t)$ *непрерывна по* $t \geqslant 0$ *на* $\mathcal{D}(A)$. $\square$

Далее понадобится и такой результат.

Теорема 2.2.4. *Пусть* A, B *— линейные коммутирующие операторы с непустыми резольвентными множествами и плотными в пространстве* $\mathcal{E}$ *областями определения.*

$$\mathcal{E}^0 := \mathcal{D}(AB), \quad \mathcal{E}^1 := \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(B).$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Однородная задача Коши (2.2.1) *равномерно корректна на* $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A)$ *с* B*-условием: для* $Bu(t)$*, где* $u(t)$ *— решение задачи Коши с* *начальными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(A)$, имеет место оценка*

$$\|Bu(t)\| \leqslant c\|u^1\|, \quad c > 0, \quad \forall t \in [0, T];$$

2) Операторы A, B являются производящими операторами ω-сильно непрерывного семейства операторных $(M-N)$-функций, такого что оператор-функции $AN(t)$ и $BN(t)$ сильно непрерывны по $t \geqslant 0$.

$\square$

2.3 Неполные интегродифференциальные уравнения второго порядка

При исследовании малых движений идеальной релаксирующей жидкости в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ возникает следующая задача Коши для неполного линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u - \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)} A_1 u(s) ds = f(t), \quad \gamma > 0,$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.3.1}$$

где операторные коэффициенты A_0 и A_1 обладают свойствами

$$A_0 = A_0^* \gg 0, \quad A_1 = A_1^* \gg 0, \quad \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_1) \subset L_2(\Omega). \tag{2.3.2}$$

2.3.1 К постановке задачи

Рассмотрим задачу, обобщающую проблему (2.3.1), (2.3.2). Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное сепарабельное гильбертово пространство. Будем исследовать задачу Коши вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1, \tag{2.3.3}$$

где операторы A_k удовлетворяют условиям

$$A_0 = A_0^* \gg 0, \quad \mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(A_0), \quad k = 1, \dots, m, \tag{2.3.4}$$

а $G_k(t,s)$ — оператор-функции переменных t и s со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ограничения на эти функции будут сформулированы позже.

Заметим сначала, что при условиях $A_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, задача (2.3.3) превращается в задачу Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.3.5}$$

уже разобранную в параграфе 2.1. Напомним, что если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H}), \tag{2.3.6}$$

то задача (2.3.5) имеет единственное сильное решение $u = u(t)$ на отрезке $[0,T]$, выражаемое формулой

$$u(t) = \cos(tA_0^{1/2})u^0 + \sin(tA_0^{1/2})A_0^{-1/2}u^1 + \\ + \int_0^t \sin((t-s)A_0^{1/2})A_0^{-1/2}f(s)ds, \tag{2.3.7}$$

где $\cos(tA_0^{1/2})$ и $A_0^{-1/2}\sin(tA_0^{1/2})$ — семейство операторных косинус- и синус-функций, построенное по генератору A_0. Соответствующая теория изложена в параграфе 2.1.

2.3.2 Теорема о сильной разрешимости задачи Коши

Определение 2.3.1. *Назовем сильным решением задачи Коши* (2.3.3) *на отрезке* $[0,T]$ *такую функцию* $u(t)$ *переменной* t *со значениями в* $\mathcal{H}$*, для которой выполнены следующие условия:*

а) $u(t) \in \mathcal{D}(A_0)$ *для любого* $t \in [0,T]$ *и* $A_0u(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$*;*

б) $u'(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A_0^{1/2}))$*;*

в) $u''(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$*;*

г) выполнены уравнение (2.3.3)*, где все слагаемые — функции из* $C([0,T];\mathcal{H})$*, и начальные условия.* □

Заметим предварительно, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (2.3.3) являются условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}), \quad f(t) \in C([0,T];\mathcal{H}).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть в задаче* (2.3.3) *выполнены условия* (2.3.4), (2.3.6), *а также условия*

$$G_k(t,s) \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H})), \tag{2.3.8}$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{2.3.9}$$

где $\Delta_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ *— треугольник изменения переменных* t, s. *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Перенесем в (2.3.3) интегральные слагаемые в правую часть и обозначим

$$\widehat{f}(t) := f(t) - \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds.$$

Считая, что $\widehat{f}(t)$ известна, и используя формулу (2.3.7) для решения задачи Коши (2.3.5), приходим для искомой функции $u(t)$ к следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$u(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A_0^{-1/2} \sin((t-s)A_0^{1/2}) ds \int_0^s G_k(s,\xi) A_k u(\xi) d\xi = u_0(t). \tag{2.3.10}$$

Здесь $u_0(t)$ задана формулой (2.3.7) и строится по данным (2.3.6), причем она в силу условий (2.3.6) является сильным решением задачи (2.3.5). Это означает, в частности, что

$$u_0(t) \in C^2([0,T]; \mathcal{H}) \cap C^1([0,T]; \mathcal{D}(A_0^{1/2})) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)). \tag{2.3.11}$$

Преобразуем интегральное уравнение (2.3.10). С этой целью осуществим в повторных интегралах замену порядка интегрирования:

$$\int_0^t \sin((t-s)A_0^{1/2}) ds \int_0^s G_k(s,\xi) A_k u(\xi) d\xi =$$
$$= \int_0^t \Big(\int_\xi^t \sin((t-s)A_0^{1/2}) G_k(s,\xi) ds \Big) A_k u(\xi) d\xi. \tag{2.3.12}$$

Здесь в силу условий (2.3.8), (2.3.9) внутренний интеграл преобразуется интегрированием по частям (для оператор-функций!):

$$\int\limits_{\xi}^{t} \sin((t-s)A_0^{1/2})G_k(s,\xi)ds =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \sin((t-s)A_0^{1/2})ds = dv(s), & G_k(s,\xi) = u(s) \\ v = A_0^{-1/2}\cos((t-s)A_0^{1/2}), & du = \dfrac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)ds \end{array} \right| =$$

$$= A_0^{-1/2}\cos((t-s)A_0^{1/2})G_k(s,\xi)|_{s=\xi}^{t} - A_0^{-1/2}\int\limits_{\xi}^{t}\cos((t-s)A_0^{1/2})\frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)ds =$$

$$= -A_0^{-1/2}\Big\{\cos((t-\xi)A_0^{1/2})G_k(\xi,\xi) - G_k(t,s) + \int\limits_{\xi}^{t}\cos((t-s)A_0^{1/2})\frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)ds\Big\} =$$

$$=: A_0^{-1/2}V_k(t,\xi), \quad V_k(t,t) \equiv 0. \qquad (2.3.13)$$

С учетом (2.3.12), (2.3.13) уравнение (2.3.10) приобретает вид

$$u(t) + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{0}^{t} A_0^{-1}V_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi = u_0(t), \qquad (2.3.14)$$

где в силу (2.3.8), (2.3.9) операторные функции

$$V_k(t,\xi) \in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})). \qquad (2.3.15)$$

Докажем, опираясь на свойства (2.3.11) функции $u_0(t)$ и вид ядра операторного интегрального уравнения (2.3.14), что это уравнение имеет решение $u(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A_0))$. С этой целью рассмотрим это уравнение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(A_0) := \mathcal{D}(A_0)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{H}(A_0)} := (A_0u, A_0v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall u,v \in \mathcal{D}(A_0),$$

порождающим норму, эквивалентную, в силу свойства $A_0 \gg 0$, норме графика оператора A_0, т.е. норме

$$\|u\|_{A_0}^2 := \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A_0u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

В уравнении (2.3.14) оператор-функции

$$W_k(t,\xi) := A_0^{-1} V_k(t,\xi) A_k, \quad k = 1,\dots,m,$$

обладают свойством

$$W_k(t,\xi) \in SC(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}(A_0))), \quad k = 1,\dots,m.$$

В самом деле, в силу второго условия (2.3.4) оператор A_k ограниченно действует из $\mathcal{H}(A_0)$ в $\mathcal{H}$, а функция $V_k(t,\xi)$ обладает свойством (2.3.15), т.е. является сильно непрерывной по t, s оператор-функцией со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, а оператор A_0^{-1} ограниченно действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}(A_0)$.

Поэтому, записывая (2.3.14) в виде

$$u(t) + \int\limits_0^t W(t,\xi) u(\xi) d\xi = u_0(t), \tag{2.3.16}$$

$$W(t,\xi) := \sum_{k=1}^m W_k(t,\xi) \in SC(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}(A_0))),$$

приходим к выводу, что это уравнение имеет единственное решение

$$u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)) = C([0,T]; \mathcal{H}(A_0)). \tag{2.3.17}$$

Действительно, (2.3.16) имеет сильно непрерывное ядро $W(t,\xi)$ в $\mathcal{H}(A_0)$, а $u_0(t)$ также непрерывна в $\mathcal{H}(A_0)$ (см. (2.3.11)).

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства б), в) и г) из определения сильного решения задачи (2.3.3).

Формальное дифференцирование обеих частей (2.3.14) приводит к формулам (проверьте их в качестве упражнения и учтите последнее свойство (2.3.13))

$$u'(t) = u_0'(t) - \sum_{k=1}^m A_0^{-1/2} \int\limits_0^t \Big\{ \sin((t-\xi)A_0^{1/2}) G_k(\xi,\xi) + \\ + \int\limits_\xi^t \sin((t-s)A_0^{1/2}) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi) ds \Big\} A_k u(\xi) d\xi, \tag{2.3.18}$$

$$u''(t) = u_0''(t) - \sum_{k=1}^{m} \Big\{ \int_0^t \cos((t-\xi)A_0^{1/2}) G_k(\xi,\xi) A_k u(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \Big[\int_\xi^t \cos((t-s)A_0^{1/2}) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi) ds \Big] A_k u(\xi) d\xi \Big\}. \quad (2.3.19)$$

Из этих формул можно сделать следующие выводы. Так как в силу (2.3.11), (2.3.17) и (2.3.4) выполнены свойства

$$u_0'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0^{1/2})), \quad A_k u(t) \in C([0,T]; \mathcal{H}),$$

то из (2.3.18), а также предположений (2.3.8), (2.3.9) следует свойство б) из определения сильного решения, т.е. $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0^{1/2}))$. Далее, так как $u_0''(t) \in C([0,T]; \mathcal{H})$, то из (2.3.19) получаем свойство в), т.е. $u''(t) \in C([0,T]; \mathcal{H})$.

Наконец, непосредственный подсчет показывает, что функция $u(t)$, являющаяся решением интегрального уравнения (2.3.14), удовлетворяет также исходному интегродифференциальному уравнению (2.3.3), причем все слагаемые в нем — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$. В самом деле, вычисляя выражение $u''(t) + A_0 u(t)$ на основе формул (2.3.19), (2.3.14) и используя определение (2.3.13) для $V_k(t,\xi)$ будем иметь

$$u''(t) + A_0 u(t) = u_0''(t) - \sum_{k=1}^{m} \Big\{ \int_0^t \cos((t-\xi)A_0^{1/2}) G_k(\xi,\xi) A_k u(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \Big[\int_\xi^t \cos((t-s)A_0^{1/2}) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi) ds \Big] A_k u(\xi) d\xi \Big\} +$$

$$+ A_0 \Big\{ u_0(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A_0^{-1} \Big[\cos((t-\xi)A_0^{1/2}) G_k(\xi,\xi) d\xi - G_k(t,\xi) +$$

$$+ \int_\xi^t \cos((t-s)A_0^{1/2}) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi) ds \Big] A_k u(\xi) d\xi \Big\} = [u_0''(t) + A_0 u_0(t)] -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,\xi) A_k u(\xi) d\xi = f(t) - \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,\xi) A_k u(\xi) d\xi.$$

Заметим еще, что из (2.3.14) следует, что $u(0) = u_0(0) = u^0$, а из (2.3.18) имеем $u'(0) = u_0'(0) = u^1$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.3.1. *Как следует из теоремы 1.1.1, требование* (2.3.9) *в этой теореме можно ослабить и заменить на условие (см.* (2.3.13)*)*

$$\int_0^t \cos((t-s)A_0^{1/2})\frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)ds \in SC(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

$\square$

Замечание 2.3.2. *Используя теорему С.Я. Якубова (см. теорему 1.1.2), требование* (2.3.6) *для функции* $f(t)$ *также можно ослабить и заменить его на условие*

$$f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1. \tag{2.3.20}$$

$\square$

В самом деле, при выполнении условия (2.3.20), а также первых двух условий (2.3.6) задача (2.3.5) имеет единственное сильное решение $u_0(t)$ из (2.3.7) и это решение обладает свойствами (2.3.11). Только эти свойства и использовались при доказательстве теоремы 2.3.1.

2.4 Полные интегродифференциальные уравнения второго порядка с коммутирующими главными операторными коэффициентами

Вернемся к рассмотрениям параграфа 2.2 и изучим обобщение проблемы, описанной там. Именно, будем теперь исследовать в произвольном банаховом пространстве $\mathcal{E}$ задачу Коши для интегродифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds + f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2.4.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.4.2}$$

где A, B — коммутирующие операторные коэффициенты, удовлетворяющие условиям параграфа 2.2, A_k, $k = 1, \ldots, m$, — неограниченные операторы, а $G_k(t,s)$, $k = 1, \ldots, m$, — оператор-функции переменных t, s, заданные в треугольнике

$$\Delta_T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$$

и принимающие значения из $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

2.4.1 Теорема о сильной разрешимости задачи Коши (первый этап доказательства)

Определение 2.4.1. *Сильным решением задачи* (2.4.1), (2.4.2) *на отрезке* $[0,T]$ *назовем такую функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{E}$, $t \in [0,T]$, *для которой выполнены следующие свойства:*

а) $u(t)$ *при любом* $t \in [0,T]$ *принадлежит* $\mathcal{D}(B)$ *и* $Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{E})$*;*

б) $u'(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A))$*;*

в) $u''(t) \in C([0,T];\mathcal{E})$*;*

г) при $t \in [0,T]$ *все слагаемые в уравнении* (2.4.1) *непрерывны и выполнено это уравнение, а при* $t = 0$ *— начальные условия* (2.4.2). □

Отметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи Коши (2.4.1), (2.4.2) на отрезке $[0,T]$ являются условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A), \quad f(t) \in C([0,T];\mathcal{E}).$$

Опираясь на теоремы 2.2.2–2.2.4 и следствие 2.2.1, сформулируем и докажем основной результат о разрешимости задачи Коши (2.4.1), (2.4.2).

Теорема 2.4.1. *Пусть* A, B *— линейные коммутирующие операторы с непустыми резольвентными множествами и плотными в пространстве* $\mathcal{E}$ *областями определения. Пусть также* $0 \in \rho(B)$ *и однородная задача Коши*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{2.4.3}$$

равномерно корректна на $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A)$ *(см. определение 2.2.2) с* B*-условием (см. теорему 2.2.4).*

Тогда, если выполнены следующие условия:

а) $G_k(t,s)$, $\dfrac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{E}))$, $k = 1, \ldots, m$;
б) $\mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(B)$, $k = 1, \ldots, m$;
в) $u^0 \in \mathcal{D}(B)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A)$,

$$f(t) \in \mathcal{E}^f := \{f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{E}) : \ Af(t), Af'(t) \in C([0,T]; \mathcal{E})\},$$

то задача (2.4.1), (2.4.2) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем по тому же плану, что и теоремы 2.3.1. Рассмотрим сначала первый этап доказательства.

Будем считать, что задача (2.4.1), (2.4.2) имеет сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$. Так как по условиям теоремы однородная задача (2.4.3) с операторными коэффициентами A, B является равномерно корректной на $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A)$ с B-условием, то, по теоремам 2.2.3 и 2.2.4, она является ω-равномерно корректной, операторы A, B являются производящими операторами ω-сильно непрерывного семейства операторных $(M-N)$-функций, причем $AN(t)$ и $BN(t)$ сильно непрерывны при $t \geqslant 0$.

Введем обозначение

$$\widehat{f}(t) := f(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds$$

и будем считать эту функцию заданной для неоднородной задачи Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu + \widehat{f}(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{2.4.4}$$

Если $\widehat{f}(t) \in C([0,T]; \mathcal{E})$ (этот факт будет доказан апостериори), а также выполнены первые два условия в) данной теоремы, то, согласно теоремам 2.2.1–2.2.2, решение задачи (2.4.4) имеет вид

$$u(t) = M(t)u^0 + N(t)u^1 + \int_0^t N(t-s)\widehat{f}(s)ds =$$
$$= u_0(t) + \int_0^t N(t-s) \sum_{k=1}^{m} \Big(\int_0^s G_k(s,\xi) A_k u(\xi) d\xi \Big) ds, \tag{2.4.5}$$

$$u_0(t) := M(t)u^0 + N(t)u^1 + \int\limits_0^t N(t-s)f(s)ds. \qquad (2.4.6)$$

Здесь $u_0(t)$ — решение "укороченной" задачи (2.4.1), (2.4.2), которое, в силу условий теоремы, является сильным решением этой задачи на отрезке $[0, T]$.

Соотношение (2.4.5) можно переписать в виде

$$u(t) - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t N(t-s)\Big(\int\limits_0^s G_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi\Big)ds = u_0(t) \qquad (2.4.7)$$

и считать его интегральным уравнением Вольтерра второго рода на отрезке $[0, T]$. Докажем, что это уравнение имеет единственное решение $u(t)$ с теми же общими свойствами, что и у функции $u_0(t)$ из (2.4.6).

С этой целью поменяем порядок интегрирования в интегральных слагаемых и преобразуем их интегрированием по частям. Имеем

$$\int\limits_0^t N(t-s)\Big(\int\limits_0^s G_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi\Big)ds = \int\limits_0^t d\xi\Big(\int\limits_\xi^t N(t-s)G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big). \qquad (2.4.8)$$

Заметим теперь, что в силу (2.2.7) выполнено соотношение

$$M'(t)v = BN(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(B),$$

а так как $BN(t)$, как упоминалось выше, сильно непрерывна по $t \geqslant 0$, то $BN(t)v$ непрерывна при любом $v \in \mathcal{E}$ и потому

$$M'(t)v = BN(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{E},$$

т.е. $M'(t)$ — сильно непрерывная функция. Поскольку $0 \in \rho(B)$, то существует ограниченный обратный оператор B^{-1} и тогда

$$N(t)v = B^{-1}M'(t)v, \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

Аналогичное тождество справедливо и для непрерывных функций $v = v(\xi)$ либо $v = v(s,\xi)$ (докажите это!). Поэтому если

$$N(t-s)ds = dV(s), \quad \widetilde{u}(s) := G_k(s,\xi)A_k u(\xi), \qquad (2.4.9)$$

то

$$V(s) = -B^{-1}M(t-s), \quad d\widetilde{u}(s) := \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,\xi)A_k u(\xi)ds. \tag{2.4.10}$$

Формулы (2.4.9), (2.4.10) позволяют произвести в (2.4.8) интегрирование по частям:

$$\int\limits_{\xi}^{t} N(t-s)G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds = -B^{-1}M(t-s)G_k(s,\xi)A_k u(\xi)|_{s=\xi}^{t} +$$

$$+ B^{-1}\int\limits_{\xi}^{t} M(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds = -B^{-1}G_k(t,\xi)A_k u(\xi) +$$

$$+ B^{-1}M(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi) + B^{-1}\int\limits_{\xi}^{t} M(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds$$

$$=: -B^{-1}W_k(t,\xi)A_k u(\xi), \quad W_k(t,t) \equiv 0, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{2.4.11}$$

С учетом (2.4.11) интегральное уравнение (2.4.7) приобретает вид

$$u(t) + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{0}^{t} B^{-1}W_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi = u_0(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.4.12}$$

Так как по условиям теоремы $G_k(t,s)$ и $\dfrac{\partial G_k}{\partial t}(t,s) \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{E}))$, то функции $W_k(t,\xi)$, определяемые формулами (2.4.11), обладают свойствами:

$$W_k(t,\xi) \in SC(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{E})), \quad k = 1,\ldots,m. \tag{2.4.13}$$

Для доказательства существования решения задачи (2.4.12) введем банахово пространство $\mathcal{E}(B)$ с нормой графика:

$$\|u\|_{\mathcal{E}(B)} := \|Bu\|_{\mathcal{E}} + \|u\|_{\mathcal{E}}, \ \ \forall u \in \mathcal{D}(B).$$

Введем также обозначение

$$W(t,\xi) := B^{-1}\sum_{k=1}^{m} W_k(t,\xi)A_k. \tag{2.4.14}$$

Тогда уравнение (2.4.12) принимает вид

$$u(t)+\int\limits_0^t W(t,\xi)u(\xi)d\xi=u_0(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.4.15}$$

Рассмотрим (2.4.15) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в банаховом пространстве $\mathcal{E}(B)$. Так как $u_0(t)$ — сильное решение "укороченной" задачи, то $u_0(t)\in C([0,T];\mathcal{E}(B))$. Далее, так как выполнено условие $\mathcal{D}(A_k)\supset\mathcal{D}(B)$, то оператор A_k ограниченно действует из $\mathcal{D}(B)=\mathcal{E}(B)$ в $\mathcal{E}$, $k=1,\ldots,m$. Оператор-функции $W_k(t,\xi)$, согласно (2.4.13), являются сильно непрерывными по t,ξ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, а оператор B^{-1} ограниченно действует из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}(B)$, так как

$$\|B^{-1}u\|_{\mathcal{E}(B)}:=\|B^{-1}u\|_{\mathcal{E}}+\|u\|_{\mathcal{E}}\leqslant(\|B^{-1}\|+1)\|u\|_{\mathcal{E}}.$$

Значит, операторы $B^{-1}W_k(t,\xi)A_k$, а вместе с ними и $W(t,\xi)$ из (2.4.14) являются сильно непрерывными по $(t,\xi)\in\Delta_T$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{E}(B))$. Поэтому по теореме 1.2.1 задача (2.4.15) имеет единственное решение $u(t)\in C([0,T];\mathcal{E}(B))$. □

2.4.2 Второй этап доказательства теоремы

Докажем теперь, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи (2.4.1), (2.4.2), т.е. выполнены все условия из определения 2.4.1. Свойство а) уже только что установлено, так как $Bu(t)\in C([0,T];\mathcal{E})$. Для проверки свойства б) продифференцируем обе части (2.4.12) по t; имеем

$$\frac{du}{dt}=\frac{du_0}{dt}-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=1}^m\int\limits_0^t B^{-1}W_k(t,\xi)A_ku(\xi)d\xi\Big)=$$

$$=\frac{du_0}{dt}-\sum_{k=1}^m B^{-1}\Big(W_k(t,t)A_ku(t)+\int\limits_0^t\frac{\partial W_k(t,\xi)}{\partial t}A_ku(\xi)d\xi\Big)=$$

$$=\frac{du_0}{dt}-\sum_{k=1}^m B^{-1}\int\limits_0^t\Big\{\frac{\partial G_k}{\partial t}(t,\xi)A_ku(\xi)-M'(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_ku(\xi)-$$

$$-M(0)\frac{\partial}{\partial t}G_k(t,\xi)A_ku(\xi)-\int\limits_\xi^t M'(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_ku(\xi)ds\Big\}d\xi=$$

$$= \frac{du_0}{dt}+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t\Big\{N(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)+\int_\xi^t N(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi. \tag{2.4.16}$$

По условиям теоремы $\rho(A)\neq\emptyset$, т.е. найдется точка $\lambda_0\in\rho(A)$ такая, что существует оператор $R(\lambda_0;A):=(A-\lambda_0 I)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Поэтому соотношение (2.4.16) можно записать в виде

$$\frac{du}{dt}=\frac{du_0}{dt}+(A-\lambda_0 I)^{-1}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t (A-\lambda_0 I)N(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)d\xi+$$

$$+(A-\lambda_0 I)^{-1}\sum_{k=1}^{m}\int_0^t\Big(\int_\xi^t (A-\lambda_0 I)N(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big)d\xi.$$

Так как здесь $du_0/dt\in C([0,T];\mathcal{D}(A))$, а функция $AN(t)$ сильно непрерывна по t (см. начало доказательства этой теоремы), то

$$\frac{du}{dt}\in C([0,T];\mathcal{D}(A)), \tag{2.4.17}$$

т.е. выполнено свойство б) из определения 2.4.1 сильного решения задачи (2.4.1), (2.4.2).

Исходя из соотношения (2.4.16), вычислим вторую производную от $u(t)$, имеем

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2u_0}{dt^2}+\sum_{k=1}^{m}\Big(N(0)G_k(t,t)A_k u(t)+\int_t^t N(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,t)A_k u(t)ds\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t\Big\{N'(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)+\frac{\partial}{\partial t}\int_\xi^t N(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi=$$

$$=\frac{d^2u_0}{dt^2}+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t\Big\{N'(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)+N(0)\frac{\partial}{\partial t}G_k(t,\xi)A_k u(\xi)+$$

$$+\int_\xi^t N'(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi=\frac{d^2u_0}{dt^2}+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t\Big\{N'(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{t} N'(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi. \quad (2.4.18)$$

Воспользуемся теперь соотношением (2.2.8):

$$N'(t)v = [M(t) + AN(t)]v, \quad v \in \mathcal{D}(A). \quad (2.4.19)$$

Так как функция $M(t)$ сильно непрерывна и $AN(t)$, как следует из условий теоремы, также сильно непрерывна, а $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{E}$, то из (2.4.19) следует, что $N'(t)$ сильно непрерывна. Отсюда, в свою очередь, устанавливаем, что $N'(t-\xi)v(\xi)$ и $N'(t-\xi)v(s,\xi)$ непрерывны по ξ и s,ξ соответственно и для этих функций справедливы соответствующие формулы вида (2.4.19) (докажите эти свойства!).

Поскольку, как доказано выше, функции $v(\xi) := G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)$ и $v(s,\xi) := \dfrac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)$ являются непрерывными функциями своих переменных, то

$$N'(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi) = [M(t-\xi) + AN(t-\xi)]G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi),$$

$$N'(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi) = [M(t-s)+AN(t-s)]\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi). \quad (2.4.20)$$

Поэтому из (2.4.18)–(2.4.20) получаем

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u_0}{dt^2} + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \Big\{[M(t-\xi) + AN(t-\xi)]G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi) +$$

$$+\int\limits_{\xi}^{t}[M(t-s) + AN(t-s)]\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi, \quad (2.4.21)$$

откуда следует, что

$$\frac{d^2u}{dt^2} \in C([0,T];\mathcal{E}),$$

т.е. выполнено свойство в) из определения 2.4.1 сильного решения для функции $u(t)$. В самом деле, в (2.4.21) $\dfrac{d^2u_0}{dt^2} \in C([0,T];\mathcal{E})$, а остальные оператор-функции непрерывны, в то время как $A_k u(\xi)$ также непрерывны, так как $u(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(B))$, а A_k ограниченно действуют из $\mathcal{D}(B)$ в $\mathcal{E}$.

Заметим теперь, что в силу уравнения (2.4.7) при $t = 0$ имеем $u(0) = u_0(0) = u^0$, а из (2.4.16) при $t = 0$ получаем $u'(0) = u_0'(0) = u^1$. Осталось лишь проверить, что выполнено уравнение (2.4.1) при $t \in [0, T]$.

Так как выполнено условие (2.4.17), то из (2.4.16) получаем

$$A\frac{du}{dt} = A\frac{du_0}{dt} + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \Big\{AN(t-\xi)G_k(\xi,\xi)A_k u(\xi) + \\ + \int_\xi^t AN(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi. \quad (2.4.22)$$

Соответственно из (2.4.11), (2.4.12) имеем

$$Bu(t) = Bu_0(t) + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t [-G_k(t,\xi) + M(t-\xi)G_k(\xi,\xi)]A_k u(\xi)d\xi + \\ + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \Big\{\int_\xi^t M(t-s)\frac{\partial}{\partial s}G_k(s,\xi)A_k u(\xi)ds\Big\}d\xi. \quad (2.4.23)$$

Из (2.4.21), (2.4.22), (2.4.23), а также из соотношения

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = A\frac{du_0}{dt} + Bu_0 + f(t) \quad (2.4.24)$$

следует, что при любом $t \in [0, T]$ выполнено уравнение (2.4.1). $\square$

Глава 3

Полные интегродифференциальные уравнения Вольтерра второго порядка в гильбертовом пространстве

В этой главе изучается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задача Коши для вольтеррова интегродифференциального уравнения второго порядка следующего вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds = f(t),$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

где операторные коэффициенты сравнимы, т.е. можно указать один из них такой, что его область определения ýже остальных.

Сначала изучаются дифференциальные уравнения, т.е. случай, когда все $A_k = 0$, $k = 1, \dots, m$. Более того, основным является вариант, когда $A = I$, т.е. дифференциальное уравнение разрешено относительно старшей производной. Рассматриваются случаи параболического уравнения, гиперболического уравнения, а также промежуточный между ними.

3.1 Интегродифференциальные уравнения с доминирующим коэффициентом при производной (сильно демпфированные динамические системы)

3.1.1 Предварительные соображения

В произвольном комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F+iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds = f(t),$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.1.1}$$

для полного интегродифференциального уравнения второго порядка. Такие уравнения описывают, в частности, малые движения сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы. Тогда искомая функция $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ представляет собой поле смещений изучаемой физической системы, соответственно du/dt и d^2u/dt^2 — поля скорости и ускорения.

Операторы A, B, F и G имеют в этом случае отчетливый физический смысл. Так, оператор A есть оператор кинетической энергии, поскольку квадратичная форма $\frac{1}{2}\Big(A\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\Big)$ есть кинетическая энергия системы. Поэтому естественно предполагать, что $A = A^* > 0$. Далее, квадратичная форма $\frac{1}{2}\Big(B\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\Big)$ есть потенциальная энергия малых движений системы относительно состояния равновесия, поэтому далее предполагается, что оператор потенциальной энергии B самосопряжен и в состоянии устойчивого равновесия неотрицателен: $B = B^* \geqslant 0$. Будем также предполагать, что в статически неустойчивом состоянии равновесия оператор B ограничен снизу: $B \geqslant \gamma_B I$, $\gamma_B \in \mathbb{R}$.

Оператор F играет роль оператора диссипации энергии, именно, квадратичный функционал $\frac{1}{2}\Big(F\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\Big)$ равен скорости диссипации энергии. Поэтому далее будем считать, что $F = F^* \geqslant \gamma_F I$,

$\gamma_F \in \mathbb{R}$. Наконец, при движении системы в неинерциальных системах координат возникают кориолисовы (гироскопические) силы, и тогда в (3.1.1) появляется слагаемое $iG\dfrac{du}{dt}$, отвечающее этим силам. Здесь $G = G^*$ — гироскопический оператор, который обычно является ограниченным: $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Однако ниже будут рассмотрены случаи, когда G неограничен.

Будем рассматривать далее случай, когда $A = I$, т.е. уравнение (3.1.1) разрешимо относительно старшей производной:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds = f(t),$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{3.1.2}$$

В этом параграфе будем также предполагать, что доминирующим операторным коэффициентом (главным по задаче Коши) является оператор F:

$$\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B), \tag{3.1.3}$$

а оператор G также подчинен оператору F. Предположение (3.1.3) соответствует случаю, когда в рассматриваемой сплошной среде, движение которой описывается уравнением (3.1.2), диссипативные силы достаточно велики.

3.1.2 Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим сначала "укороченную" задачу (3.1.2):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.1.4}$$

т.е. задачу Коши для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка с неограниченными, но сравнимыми операторными коэффициентами (см. (3.1.3)).

Будем сначала изучать простейший случай, когда выполнены условия

$$F = F^* \gg 0, \quad B = B^* \gg 0, \quad G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B). \tag{3.1.5}$$

Определение 3.1.1. *Функция $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ называется сильным решением задачи Коши* (3.1.4) *на промежутке* $[0, T]$, *если выполнены следующие условия:*

а) $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ *для любого* $t \in [0, T]$ *и* $Bu(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$*;*

б) $\dfrac{du}{dt} \in \mathcal{D}(F)$ *и* $F\dfrac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{H})$*;*

в) $u(t) \in C^2([0, T]; \mathcal{H})$*;*

г) выполнено уравнение (3.1.4) *при* $t \in [0, T]$*;*

д) выполнены начальные условия (3.1.4). □

Из этого определения следует, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.1.4) на отрезке $[0, T]$ являются условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}).$$

Как уже отмечалось выше, в данном учебном пособии одним из основных методов изучения задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка является переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка и использование теории сжимающих либо аналитических полугрупп.

Осуществляя эту идею, будем считать, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи (3.1.4), (3.1.2), (3.1.5) на промежутке $[0, T]$. Тогда в силу (3.1.3), (3.1.5) функция $v(t)$, определяемая соотношениями

$$\frac{dv}{dt} = -iB^{1/2}u(t), \quad v(0) = 0, \tag{3.1.6}$$

принадлежит $C^2([0, T]; \mathcal{H})$ и, следовательно,

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -iB^{1/2}\frac{du}{dt}, \quad v'(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{3.1.7}$$

В самом деле, так как $\mathcal{D}(B^{1/2}) \supset \mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(F)$, а $F\dfrac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{H})$, то $B^{1/2}u(t)$ непрерывно дифференцируема и $B^{1/2}\dfrac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{H})$, а потому и $v(t) \in C^2([0, T]; \mathcal{H})$.

С учетом (3.1.6), (3.1.7) задача (3.1.2) может быть (в векторно-матричной форме) записана в виде задачи Коши

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F + iG & iB^{1/2} \\ iB^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.8}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{3.1.9}$$

Введем новую искомую функцию $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ по закону

$$u(t) = (u'(t); v'(t))^\tau,$$

где индекс $(\cdot, \cdot)^\tau$ означает транспонирование (в данном случае вектор-строки), а также операторную матрицу

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} F + iG & iB^{1/2} \\ iB^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3.1.10}$$

Заметим, что операторная матрица $\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ определена корректно, так как по предположению (3.1.3)

$$\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(G) = \mathcal{H}, \quad \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}).$$

Если функции $u(t)$, $v(t)$ являются решениями задачи (3.1.8), (3.1.9), то функция $y(t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{3.1.11}$$

$$y^0 := (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \quad f_0(t) := (f(t); 0)^\tau, \tag{3.1.12}$$

для дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $\mathcal{H}^2$. Обратно, если $y(t) = (y_1(t); y_2(t))^\tau$ является решением задачи (3.1.11), (3.1.12), то функции $u(t)$ и $v(t)$, определяемые соотношениями

$$u(t) := \int_0^t y_1(s)ds + u^0, \quad v(t) := \int_0^t y_2(s)ds, \quad t \in [0, T], \tag{3.1.13}$$

являются решениями задачи (3.1.8), (3.1.9).

Лемма 3.1.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}_0$ является аккретивным оператором в $\mathcal{H}^2$, т.е.*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant 0, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{3.1.14}$$

Доказательство. В самом деле, ввиду самосопряженности G и $B^{1/2}$, а также свойства $F \gg 0$ имеем

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}^2} = (Fy_1, y_1) \geqslant 0.$$

□

Учитывая свойство (3.1.14), введем в задаче (3.1.11), (3.1.12) новую искомую функцию соотношением

$$y(t) = \mathrm{e}^{at} z(t), \quad a > 0, \tag{3.1.15}$$

с тем, чтобы новая возникшая операторная матрица имела ограниченную обратную. Тогда вместо (3.1.11), (3.1.12) приходим к задаче

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_a z = f_a(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.1.16}$$

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{A}_0 + aI = \begin{pmatrix} F_a + iG & iB^{1/2} \\ iB^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \quad F_a := F + aI,$$

$$f_a(t) := \mathrm{e}^{-at}(f(t); 0)^\tau. \tag{3.1.17}$$

Из (3.1.14) и (3.1.17) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}_a$ равномерно аккретивна:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_a z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant a\|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{3.1.18}$$

Если оператор $B \gg 0$ ограничен, то операторная матрица $\mathcal{A}_a$ из (3.1.17) является максимальным равномерно аккретивным оператором на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_a)$. Однако это свойство, вообще говоря, не имеет места, если B неограничен. Далее будет установлено, что замыкание оператора $\mathcal{A}_a$ указанным свойством обладает, т.е. $\mathcal{A}_a$ — в существенном максимальный равномерно аккретивный оператор.

Введем в рассмотрение следующие вспомогательные операторы:

$$Q_a := B^{1/2} F_a^{-1/2}, \quad Q_a^+ = F_a^{-1/2} B^{1/2}, \quad \mathcal{D}(Q_a^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}).$$

Лемма 3.1.2. *Оператор Q_a ограничен, а Q_a^+ обладает свойствами*

$$Q_a^+ = Q_a^* | \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad \overline{Q_a^+} = Q_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{3.1.19}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $Q_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. В самом деле, по неравенству Гайнца (см. лемму 1.4.1) для положительно определенных операторов F и B из условия $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B)$ следует, что $\mathcal{D}(F^\alpha) \subset \mathcal{D}(B^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Поэтому $\mathcal{D}(B^{1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}) = \mathcal{D}(F_a^{1/2})$, и потому оператор $Q_a = B^{1/2} F_a^{-1/2}$ определен на всем $\mathcal{H}$. Так как этот оператор замкнут, то он ограничен. Далее, свойство $Q_a^+ \subset Q_a^*$ следует непосредственно из определения сопряженного оператора: если $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, то

$$(Q_a u, v) = (B^{1/2} F_a^{-1/2} u, v) = (F_a^{-1/2} u, B^{1/2} v) = (u, F_a^{-1/2} B^{1/2} v) = (u, Q_a^+ v).$$

Так как $Q_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и потому $Q_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то Q_a^+ — ограниченный оператор, заданный на множестве $\mathcal{D}(B^{1/2})$, и $Q_a^+ = Q_a^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}$. Поскольку $\mathcal{D}(B^{1/2})$ плотно в $\mathcal{H}$, то $\overline{Q_a^+} = Q_a^*$. □

Использование вспомогательных операторов Q_a, Q_a^+ и Q_a^* позволяет получить факторизацию операторной матрицы $\mathcal{A}_a$ и осуществить ее замыкание по той же схеме, которая уже проводилась в параграфе 1.4 (см. леммы 1.4.2–1.4.4 и теорему 1.4.1). Поэтому, не повторяя тех же аргументов в рассматриваемом случае, сформулируем лишь итоговый результат.

Теорема 3.1.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}_a$, заданная на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2})$, имеет следующие представления:*

1°. *в форме Шура–Фробениуса:*

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_a F_a^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & aI + Q_a Q_a^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iF_a^{-1/2} Q_a^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.1.20)$$

2°. *с симметрическими крайними множителями:*

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} & iQ_a^+ \\ iQ_a & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.1.21)$$

Оператор $\mathcal{A}_a$ замыкаем и его замыкание $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$ является максимальным равномерно аккретивным оператором:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant a\|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (3.1.22)$$

Он допускает два представления:

1°. *в форме Шура–Фробениуса:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_a F_a^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & aI + Q_a Q_a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iF_a^{-1/2} Q_a^* \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.1.23)$$

2°. *с симметрическими крайними множителями:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} & iQ_a^* \\ iQ_a & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.1.24)$$

Оператор $\mathcal{A}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}^2 : z_1 + iF_a^{-1/2} Q_a^* z_2 \in \mathcal{D}(F_a) \right\} \qquad (3.1.25)$$

и действует на ней по закону

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} F_a(z_1 + iF_a^{-1/2} Q_a^* z_2) + iGz_1 \\ iQ_a F_a^{1/2} z_1 + a z_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} F_a^{1/2}(F_a^{1/2} z_1 + iQ_a^* z_2) + iGz_1 \\ iQ_a F_a^{1/2} z_1 + a z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.26)$$

□

В качестве замечания к доказательству теоремы 3.1.1 отметим только, что средний множитель в представлении (3.1.21) после замыкания путем замены Q_a^+ на Q_a^* обладает свойством

$$\operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} I + iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} & iQ_a^* \\ iQ_a & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \\ = \|z_1\|^2 + a\|z_2\|^2 \geqslant \min(1; a) \|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad \forall z \in \mathcal{H}^2,$$

т.е. является равномерно аккретивным оператором и потому имеющим ограниченный обратный. Отсюда и следуют утверждения теоремы для представления (3.1.24).

Следствие 3.1.1. *Операторная матрица $(-\mathcal{A})$ является генератором сжимающей полугруппы $\mathcal{U}(t)$, причем*

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-at}, \quad t \geqslant 0. \qquad (3.1.27)$$

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{A}_0$ из (3.1.10) аккретивен (лемма 3.1.1), а $\mathcal{A} - a\mathcal{I} = \overline{\mathcal{A}_a} - a\mathcal{I}$ — максимальный аккретивный оператор (см. (3.1.17) и (3.1.22)), то оператор $-\mathcal{A} + a\mathcal{I}$ — максимальный диссипативный оператор, который, очевидно, является генератором сжимающей полугруппы $\mathcal{V}(t)$. Тогда полугруппа $\mathcal{U}(t) := \mathcal{V}(t)\mathrm{e}^{-at}$ имеет генератор $(-\mathcal{A})$ и потому для нее выполнена оценка (3.1.27). □

Дальнейшие построения, связанные с проблемой существования сильного решения задачи (3.1.11), основаны на теореме 2.1.1; они повторяют в новой ситуации те выкладки, которые уже были проведены в параграфе 1.4 главы 1.

Теорема 3.1.2. *Пусть в задаче* (3.1.4)*,* (3.1.3)*,* (3.1.5) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \tag{3.1.28}$$

а также одно из условий

$$f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1, \tag{3.1.29}$$

$$F^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad f(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}), \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{3.1.30}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1°*. Задача* (3.1.4)*,* (3.1.3)*,* (3.1.5) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$*.*

2°*. Задача* (3.1.16)*–*(3.1.17) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$*.*

3°*. Задача Коши*

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z = f_a(t), \quad z(0) = y^0 = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \tag{3.1.31}$$

имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$*.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет соответствующие этапы доказательства теоремы 1.4.2.

1) Если задача (3.1.4), (3.1.3), (3.1.5) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, то, как уже выше было проверено, задача (3.1.8)–(3.1.9), а также задача (3.1.16)–(3.1.17) имеют единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, причем

$$z(0) = y^0 = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{3.1.32}$$

а функция $\widehat{f}(t) = \mathrm{e}^{-at}(f(t);0)^\tau$ удовлетворяет условию (3.1.29) либо (3.1.30) с заменой $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^2$.

Обратно, если задача (3.1.16)–(3.1.17) имеет единственное сильное решение $z(t)$ и при начальном условии (3.1.32), а также функции $f_a(t)$, удовлетворяющей условию вида (3.1.29) либо (3.1.30) (т.е. для u^0, u^1 и $f(t)$ выполнены свойства (3.1.28)–(3.1.30)), то, возвращаясь по проведенным выше преобразованиям сначала к задаче (3.1.8)–(3.1.9), и затем к задаче (3.1.4), (3.1.3), (3.1.5) (см. также (3.1.13)), приходим к выводу, что задача (3.1.4), (3.1.3), (3.1.5) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что при условиях (3.1.28)–(3.1.30) задачи (3.1.16)–(3.1.17) и (3.1.31) имеют одновременно сильное решение, т.е. из существования сильного решения одной из них следует существование сильного решения другой.

2) Заметим теперь, что из существования сильного решения задачи (3.1.16)–(3.1.17) на отрезке $[0,T]$ следует существование сильного решения задачи (3.1.31) на этом отрезке, так как оператор $\mathcal{A}$ в задаче (3.1.31) является расширением (замыканием) оператора $\mathcal{A}_a$. Поэтому для доказательства теоремы осталось лишь убедиться, что из существования сильного решения задачи (3.1.31) следует существование сильного решения задачи (3.1.16)–(3.1.17).

Будем сначала считать, что выполнены условия (3.1.28), а также условие (3.1.29). Тогда, как уже упоминалось, выполнено условие $f_a(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}^2)$, $p > 1$, а также условие (3.1.32). Так как по теореме 3.1.1 оператор $\mathcal{A}$ максимальный равномерно аккретивный, то по теореме 1.1.2 задача Коши (3.1.31) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, в силу (3.1.25), (3.1.26), что для всех $t \in [0,T]$ выполнены уравнения

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a(z_1(t) + iF_a^{-1/2}Q_a^* z_2(t)) + iGz_1(t) = \mathrm{e}^{-at}f(t), \tag{3.1.33}$$

$$\frac{dz_2}{dt} + az_2(t) + iQ_aF_a^{1/2}z_1(t) = 0, \tag{3.1.34}$$

а также начальные условия

$$z_1(0) = u^1, \quad z_2(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{3.1.35}$$

При этом все слагаемые в (3.1.33), (3.1.34) являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{H}$, причем

$$z_1(t) + iF_a^{-1/2}Q_a^* z_2(t) \in \mathcal{D}(F_a) = \mathcal{D}(F) \tag{3.1.36}$$

для любого $t \in [0,T]$.

Заметим теперь, что доказательство эквивалентности задач (3.1.31) и (3.1.16)–(3.1.17) равносильно, в силу определения $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{A}$ из (3.1.10), (3.1.17) и (3.1.26), тому, что в уравнении (3.1.33) не только сумма (3.1.36) принадлежит $\mathcal{D}(F_a)$, но и каждое слагаемое в отдельности, и тогда в (3.1.33) можно раскрыть скобки.

Покажем, что это в действительности можно сделать. Из (3.1.34) и второго условия (3.1.35) имеем

$$z_2(t) = -i\mathrm{e}^{-at}B^{1/2}u^0 - i\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}Q_aF_a^{1/2}z_1(s)ds, \quad t\in[0,T].$$

Подставляя эту функцию в (3.1.33), получаем, что $z_1(t)$ является сильным решением задачи Коши

$$\frac{dz_1}{dt}+F_a\Big(z_1(t)+\mathrm{e}^{-at}F_a^{-1/2}Q_a^*B^{1/2}u^0+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}F_a^{-1/2}Q_a^*Q_aF_a^{1/2}z_1(s)ds\Big)+$$
$$+\,iGz_1(t)=\mathrm{e}^{-at}f(t), \quad z_1(0)=u^1.$$

В частности, $z_1(t)\in C^1([0,T];\mathcal{H})$. При этом для любого $t\in[0,T]$ функции

$$\varphi(t):=z_1(t)+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}F_a^{-1/2}Q_a^*Q_aF_a^{1/2}z_1(s)ds+\varphi_0(t), \qquad (3.1.37)$$

$$\varphi_0(t):=\mathrm{e}^{-at}F_a^{-1/2}Q_a^*B^{1/2}u^0, \qquad (3.1.38)$$

принадлежат $C([0,T];\mathcal{D}(F_a))$. Для $\varphi(t)$ это свойство следует из предыдущего, а для $\varphi_0(t)$ — в силу того, что $u^0\in\mathcal{D}(B)$. Действительно, $B^{1/2}u^0\in\mathcal{D}(B^{1/2})$ и по лемме 3.1.1 имеем

$$F_a^{-1/2}Q_a^*B^{1/2}u^0=F_a^{-1/2}Q_a^+B^{1/2}u^0=F_a^{-1}Bu^0\in\mathcal{D}(F_a).$$

Учитывая эти свойства, перепишем соотношение (3.1.37) в виде

$$z_1(t)+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}F_a^{-1/2}Q_a^*Q_aF_a^{1/2}z_1(s)ds=\varphi_1(t):=\varphi(t)-\varphi_0(t), \quad (3.1.39)$$

где теперь $\varphi_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(F_a))$. Рассмотрим (3.1.39) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C([0,T];\mathcal{H}(F_a))$, где $\mathcal{H}(F_a)$ — пространство с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{H}(F_a)}:=\|F_au\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall u\in\mathcal{D}(F_a),$$

эквивалентной, в силу условия $F\gg 0$, обычной норме графика оператора F_a.

Так как $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(F_a)$, то при любом $u \in \mathcal{D}(F_a) = \mathcal{H}(F_a)$ имеем

$$Tu := F_a^{-1/2} Q_a^* Q_a^{1/2} F_a^{1/2} u = F_a^{-1/2} Q_a^+ B^{1/2} u = F_a^{-1} B u \in \mathcal{D}(F_a).$$

Следовательно, сужение $T|_{\mathcal{H}(F_a)}$ оператора $T := F_a^{-1/2} Q_a^* Q_a F_a^{1/2}$ на $\mathcal{H}(F_a)$ является ограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H}(F_a)$. Отсюда следует, что ядро интегрального оператора (3.1.39) является непрерывной оператор-функцией со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(F_a))$. Так как согласно установленному выше $\varphi_1(t) \in C([0,T];\mathcal{H}(F_a))$, то интегральное уравнение (3.1.39) по теореме 1.2.1 имеет единственное сильное решение

$$z_1(t) \in C([0,T];\mathcal{H}(F_a)). \tag{3.1.40}$$

Отсюда следует, что в первом уравнении (3.1.33) можно раскрыть скобки, и теорема при условии (3.1.29) доказана.

3) Будем теперь считать, что выполнены условия (3.1.30) и потому

$$f_a(t) = \mathrm{e}^{-at}(f(t);0)^\tau \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}^2), \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Воспользуемся факторизацией (3.1.23) операторной матрицы $\mathcal{A}$ и перепишем задачу (3.1.31) в виде

$$\frac{dz}{dt} + (\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)z + i\mathcal{G}z = f_a(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.1.41}$$

$$\mathcal{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ iQ_aF_a^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & iF_a^{-1/2}Q_a^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.42}$$

$$\mathcal{A}_{00} := \mathrm{diag}(F_a; aI + Q_aQ_a^*), \quad \mathcal{G} := \mathrm{diag}(G;0). \tag{3.1.43}$$

Здесь в силу условия $F^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ операторы F_a^{-1} и $F_a^{-1/2}$ компактны, а потому компактны и матрицы $\mathcal{S}_i$ из (3.1.42). Так как матрицы $\mathcal{I}+\mathcal{S}_i$ имеют треугольный вид, то они имеют ограниченные обратные и

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_i)^{-1} = \mathcal{I}-\mathcal{S}_i, \quad i = 1,2. \tag{3.1.44}$$

Осуществим в (3.1.41) замену искомой функции по формуле

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)z(t) =: w(t). \tag{3.1.45}$$

Тогда с учетом (3.1.44) вместо (3.1.41) придем к задаче Коши

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{dt} + (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}w + i(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{G}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}w = f_a(t), \\ &w(0) = (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)y^0, \end{aligned} \tag{3.1.46}$$

где уже учтено, что
$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)f_a(t) \equiv f_a(t).$$

В уравнении (3.1.46) $\mathcal{A}_{00}$ — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00}) = \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{H}.$$

Далее, очевидно свойство

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1) =: (\mathcal{I}+\mathcal{S}), \quad \mathcal{S} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2),$$

так как операторы $\mathcal{S}_i$ компактны.

Отсюда следует, что оператор

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00} = (\mathcal{I}+\mathcal{S})\mathcal{A}_{00}$$

является слабым возмущением самосопряженного положительно определенного оператора $\mathcal{A}_{00}$. Поэтому, как доказано в монографии [3], с. 92, 183, оператор $-(\mathcal{I}+\mathcal{S})\mathcal{A}_{00}$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось $t \geqslant 0$. Так как к тому же оператор $i(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{G}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}$ ограничен в $\mathcal{H}^2$, то и оператор

$$\mathcal{B} := -[(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00} + i(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{G}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}] \tag{3.1.47}$$

также является генератором аналитической полугруппы (см. [2], с. 66), а уравнение (3.1.46) является так называемым абстрактным параболическим уравнением.

Заметим теперь, что если выполнены условия (3.1.28), то, как уже упоминалось (см. (3.1.32)), $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а потому $w(0) = (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{00})$. Далее, если выполнены условия (3.1.30), то $f_a(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}^2)$, $\alpha > 0$. Поэтому по теореме 1.1.5 задача Коши (3.1.46) имеет единственное сильное решение $w(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Используя обратную замену (3.1.45), формулы (3.1.44) и возвращаясь от (3.1.46) к задаче (3.1.41), т.е. к задаче (3.1.31), приходим к выводу, что при выполнении условий (3.1.28), (3.1.30) задача (3.1.31) имеет имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$. Теперь для завершения доказательства данной теоремы осталось лишь повторить те же рассуждения, что и в первой части доказательства, начиная от формул (3.1.33)–(3.1.35) и до (3.1.40). $\square$

Из теоремы 3.1.2 получаем также следующие выводы.

Следствие 3.1.2. *При условиях* (3.1.3), (3.1.5) *необходимыми и достаточными условиями разрешимости однородной задачи* (3.1.2), *когда* $f(t) \equiv 0$, *являются условия* (3.1.28). □

Следствие 3.1.3. *Для необходимых и достаточных условий в неоднородной задаче* (3.1.2) *соответствующий "зазор" в требованиях на правую часть* $f(t)$ *(см.* (3.1.3) *и* (3.1.29)–(3.1.30)*) в проблеме сильной разрешимости на* $[0, T]$ *имеет такой же характер, как и в задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором сильно непрерывной либо аналитической полугруппы (см. формулы* (1.1.2) *и теоремы 1.1.1, 1.1.2 и 1.1.5).* □

3.1.3 Случай ограниченных снизу операторов диссипации и потенциальной энергии и ограниченного гироскопического оператора

Рассмотрим теперь задачу Коши (3.1.2) в случае, когда взамен условий (3.1.5) выполнены условия

$$F \geqslant \gamma_F I, \quad B \geqslant \gamma_B I, \quad \gamma_F, \gamma_B \in \mathbb{R}, \quad G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.1.48}$$

т.е. операторные коэффициенты F и B ограничены снизу, а оператор G по-прежнему ограничен.

Основная идея последующих построений состоит в приведении задачи (3.1.4), (3.1.3), (3.1.48) к такому виду, когда главная операторная матрица обладает теми же свойствами, что и матрица $\mathcal{A}_a$ из (3.1.17). С этой целью представим оператор B в виде

$$B = (B + bI) - bI =: B_b - bI, \quad b \in \mathbb{R}, \tag{3.1.49}$$

и константу b выберем из требования

$$b + \gamma_B =: \alpha_B > 0 \iff B_b \geqslant \alpha_B I. \tag{3.1.50}$$

Тогда задача (3.1.2) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + B_b u = f_u(t) =: f(t) + bu(t), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \end{gathered} \tag{3.1.51}$$

где теперь в правую часть входит и искомая функция $u(t)$.

Для сильного решения задачи (3.1.51) осуществим те же преобразования, которые были проделаны выше в задаче (3.1.4), (3.1.3), (3.1.5). Именно, введем новую неизвестную функцию соотношениями

$$\frac{dv}{dt} = -iB_b^{1/2}u(t), \quad v(0) = 0,$$

и тогда

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -B_b^{1/2}\frac{du}{dt}, \quad v'(0) = -iB_b^{1/2}u^0.$$

Для функций $u(t)$ и $v(t)$ получаем задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + iB_b^{1/2}\frac{dv}{dt} = f_u(t) \quad u'(0) = u^1,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + iB_b^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad v'(0) = -iB_b^{1/2}u^0,$$

которая переписывается в векторно-матричной форме в виде

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_{0,b}y = f_{0,u}(t), \quad y(0) = y^0, \tag{3.1.52}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}, \; f_{0,u}(t) = \begin{pmatrix} f_u(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; y^0 = \begin{pmatrix} u^1 \\ -iB_b^{1/2}u^0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.53}$$

$$\mathcal{A}_{0,b} = \begin{pmatrix} F + iG & iB_b^{1/2} \\ iB_b^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0,b}) := \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}).$$

Осуществим теперь в (3.1.52) замену искомой функции

$$y(t) = \mathrm{e}^{at}z(t), \quad a > 0, \tag{3.1.54}$$

и подберем параметр a из условия

$$a + \gamma_F =: \alpha_F > 0 \implies F_a := F + aI \geqslant \alpha_F I. \tag{3.1.55}$$

Тогда взамен (3.1.52) приходим к задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_{a,b}z = f_{a,u}(t) := \mathrm{e}^{-at}f_{0,u}(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.1.56}$$

$$\mathcal{A}_{a,b} := \mathcal{A}_{0,b} + a\mathcal{I} = \begin{pmatrix} F_a + iG & iB_b^{1/2} \\ iB_b^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \tag{3.1.57}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0,b}) := \mathcal{D}(F_a) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \qquad (3.1.58)$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_{a,b}$, очевидно, равномерно аккретивен:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{a,b}z, z)_{\mathcal{H}^2} = (F_a z_1, z_1)_{\mathcal{H}} + a\|z_2\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant c\|z\|^2_{\mathcal{H}^2},\ c := \min(\alpha_F; a) > 0. \qquad (3.1.59)$$

Общие свойства операторной матрицы $\mathcal{A}_{a,b}$, как нетрудно видеть, те же, что и для операторной матрицы $\mathcal{A}_a$ из (3.1.17). В частности, вводя вспомогательные операторы

$$Q_{a,b} := B_b^{1/2}F_a^{-1/2}, \quad Q_{a,b}^{+} := F_a^{-1/2}B_b^{1/2}, \quad \mathcal{D}(Q_{a,b}^{+}) = \mathcal{D}(B_b^{1/2}), \quad (3.1.60)$$

приходим к выводу, учитывая соотношение $\mathcal{D}(F_a^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B_b^{1/2})$, следующее из условия $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(F_a) \subset \mathcal{D}(B_b) = \mathcal{D}(B)$ и неравенства Гайнца (см. лемму 1.4.1) для операторов F_a и B_b, что

$$Q_{a,b}^{+} = Q_{a,b}^{*}|\mathcal{D}(B_b^{1/2}), \quad \overline{Q_{a,b}^{+}} = Q_{a,b}^{*} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Поэтому для операторов $\mathcal{A}_{a,b}$ и $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ имеют место все утверждения теоремы 2.3.1, а также формулы (3.1.20)–(3.1.26) с соответствующими изменениями.

Отсюда следует, что оператор $-\mathcal{A} := -\overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$ с оценкой для нормы

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-ct}, \quad c > 0, \quad t \geqslant 0,$$

где c — константа из (3.1.59). Установленные факты позволяют доказать следующий результат.

Теорема 3.1.3. *Пусть в задаче Коши* (3.1.4)*,* (3.1.3) (3.1.48) *выполнены условия* (3.1.28)*,* (3.1.29)*, т.е.*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1. \qquad (3.1.61)$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. 1) Рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 3.1.2, задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z = f_{a,u}(t), \quad z(0) = y^0, \qquad (3.1.62)$$

с оператором $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ и

$$f_{a,u}(t) = \mathrm{e}^{-at}(f(t) + bu(t); 0)^{\tau}, \quad y^0 := (u^1; -iB_b^{1/2}u^0)^{\tau}. \tag{3.1.63}$$

В силу условий (3.1.61) имеем

$$u^0 \in \mathcal{D}(B_b),\ u^1 \in \mathcal{D}(F_a),\ \mathrm{e}^{-at}(f(t); 0)^{\tau} \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H}^2),\ p > 1, \tag{3.1.64}$$

и потому

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Значит, если выполнено условие

$$f_{a,u}(t) \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H}^2),$$

то по теореме 1.1.2 задача Коши (3.1.62) имеет единственное сильное решение, которое представимо в виде

$$z(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)f_{a,u}(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{3.1.65}$$

2) Представим функцию $f_{a,u}(t)$ из (3.1.63) в виде

$$f_{a,u}(t) = \mathrm{e}^{-at}(f(t); 0)^{\tau} + b\mathrm{e}^{-at}(u(t); 0)^{\tau} =: f_{a,0}(t) + b\mathrm{e}^{-at}\Big(u^0 + \int_0^t u'(\xi)d\xi; 0\Big)^{\tau} =$$

$$= f_{a,0}(t) + b\mathrm{e}^{-at}(u^0; 0)^{\tau} + b\mathrm{e}^{-at}P_1 \int_0^t \Big(\frac{du}{d\xi}(\xi); \frac{dv}{d\xi}(\xi)\Big)^{\tau} d\xi$$

$$=: f_{a,b}(t) + b\mathrm{e}^{-at}\int_0^t P_1(\mathrm{e}^{a\xi}z(\xi))d\xi, \quad t \in [0,T], \tag{3.1.66}$$

где P_1 — ортопроектор из $\mathcal{H}^2$ на первый экземпляр $\mathcal{H}$ и учтены формулы связи (3.1.53) (первая формула) и (3.1.54). Подставляя (3.1.66) в (3.1.65), приходим к интегральному уравнению для неизвестной функции $z(t)$:

$$z(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)f_{a,b}(s)ds + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)ds \int_0^s b\mathrm{e}^{-a(s-\xi)}P_1 z(\xi))d\xi =$$

$$= \Big\{\mathcal{U}(t)y^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)f_{a,b}(s)ds\Big\} + b\int\limits_0^t \Big\{\int\limits_\xi^s \mathrm{e}^{-a(s-\xi)}\mathcal{U}(t-s)P_1 ds\Big\}z(\xi)d\xi$$

$$=: \varphi_0(t) + \int\limits_0^t V(t,\xi)z(\xi)d\xi. \quad (3.1.67)$$

Таким образом, возникает интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$z(t) - \int\limits_0^t V(t,\xi)z(\xi)d\xi = \varphi_0(t), \quad t\in[0,T], \qquad (3.1.68)$$

где $V(t,\xi)$ является непрерывной по t,ξ оператор-функцией со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$.

3) Заметим теперь, что в (3.1.68) в силу предыдущих построений и теоремы 1.1.2 С.Я. Якубова функция $\varphi_0(t)$ является сильным решением задачи (3.1.62) с заменой $f_{a,u}(t)$ на $f_{a,0}(t)$ (см. (3.1.66)). Поэтому она непрерывно дифференцируема по t. Отсюда и из свойств $V(t,s)$ следует, что интегральное уравнение (3.1.68) имеет единственное решение $z(t) \in C([0,T];\mathcal{H}^2)$. Однако это решение и непрерывно дифференцируемо, так как $\varphi_0(t)$ обладает этим свойством, а интегральное слагаемое в (3.1.68) — также непрерывно дифференцируемая функция.

В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t V(t,\xi)z(\xi)d\xi = b\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Big(\int\limits_\xi^t \mathrm{e}^{-as}\mathcal{U}(t-s)P_1 ds\Big)\mathrm{e}^{a\xi}z(\xi)d\xi =$$

$$= |t-s=\eta,\ -ds=d\eta| = b\frac{d}{dt}\Big(\mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^{t-\xi}\mathrm{e}^{a\eta}\mathcal{U}(\eta)P_1 d\eta\Big)\mathrm{e}^{a\xi}z(\xi)d\xi\Big) =$$

$$= b\Big\{-a\mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^{t-\xi}\mathrm{e}^{a\eta}\mathcal{U}(\eta)P_1 d\eta\Big)\mathrm{e}^{a\xi}z(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-\xi)P_1 z(\xi)d\xi\Big\}, \quad (3.1.69)$$

и в силу непрерывности $z(t)$ правая часть (3.1.69) непрерывна по t.

Следовательно, если выполнены условия (3.1.61), то решение $z(t)$ уравнения (3.1.68) непрерывно дифференцируемо по t на $[0,T]$ и потому является сильным решением задачи Коши (3.1.62).

4) Последняя часть доказательства данной теоремы повторяет соответствующие шаги доказательства теоремы 3.1.2, т.е. рассуждения, приводящие к формулам (3.1.33)–(3.1.40). □

Рассмотрим теперь ситуацию, близкую к условиям (3.1.30).

Теорема 3.1.4. *Пусть в задаче* (3.1.2), (3.1.3), (3.1.48) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}), \quad \alpha > 0,$$

а также условие

$$(F_a)^{-1} := (F + aI)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}).$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Оно состоит в комбинировании основных моментов доказательств теорем 3.1.2 и 3.1.3.

1) Осуществим в задаче (3.1.4), (3.1.3), (3.1.48) те же преобразования, которые были проведены при доказательстве теоремы 3.1.3, а также после формул (3.1.48). Именно, выберем константы a и b из условий (3.1.50), (3.1.55) и осуществим переход к задаче (3.1.56). Как установлено выше (см. формулы (3.1.59), (3.1.60) и последующий вывод), для операторов $\mathcal{A}_{a,b}$ и $\overline{\mathcal{A}_{a,b}} = \mathcal{A}$ справедливы все утверждения теоремы 3.1.1. В частности, имеет место аналог формулы (3.1.23):

$$\mathcal{A} = (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2) + i\mathcal{G}, \tag{3.1.70}$$

где операторы $\mathcal{S}_i$, $i = 1,2$, $\mathcal{A}_{00}$ и $\mathcal{G}$ определены формулами (3.1.42), (3.1.43) с заменой Q_a на $Q_{a,b}$, Q_a^* на $Q_{a,b}^*$ (см. (3.1.19)). Поэтому после указанных преобразований приходим к задаче

$$\frac{dz}{dt} + (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)z + i\mathcal{G}z = f_{a,u}(t) = \mathrm{e}^{-at}(f(t) + bu(t); 0)^\tau,$$
$$z(0) = y^0, \tag{3.1.71}$$

близкой к задаче (3.1.41).

2) Осуществим в (3.1.71) замену искомой функции $z(t)$ по формуле (3.1.45), т.е. $z(t) = (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}w(t)$. Тогда для $w(t)$ возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt}+(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}w+i(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{G}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}w=f_{a,u}(t)=$$
$$=f_{a,b}(t)+b\mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{a\xi}P_1w(\xi)d\xi, \quad w(0)=(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)y^0, \quad (3.1.72)$$

где снова учтено соотношение $(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)f_{a,u}(t)=f_{a,u}(t)$.

Здесь, как и в пункте 3) доказательства теоремы 3.1.2, появляется оператор вида (3.1.47), являющийся генератором аналитической полугруппы, которую снова обозначим через $\mathcal{U}(t)$.

3) Считая правую часть в (3.1.72) известной функцией и выписывая решение, приходим к интегральному уравнению Вольтерра

$$w(t)=\mathcal{U}(t)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)y^0+\int\limits_0^t\mathcal{U}(t-s)f_{a,b}(s)ds+$$
$$+b\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-as}\mathcal{U}(t-s)\Big(\int\limits_0^s \mathrm{e}^{a\xi}P_1w(\xi)d\xi\Big)ds, \quad (3.1.73)$$

аналогичному уравнению (3.1.67), возникшему при доказательстве теоремы 3.1.3.

Здесь снова функция

$$\varphi_0(t)=\mathcal{U}(t)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)y^0+\int\limits_0^t\mathcal{U}(t-s)f_{a,b}(s)ds,$$

согласно теореме 3.1.2 (применительно к условиям (3.1.30)) и в силу условий данной теоремы, является сильным решением задачи Коши (3.1.72) при формальной замене правой части $f_{a,u}(t)$ на $f_{a,b}(t)$. Поэтому она непрерывно дифференцируема по $t\in[0,T]$. Проводя далее применительно к (3.1.73) те же рассуждения, которые были осуществлены в пункте 3) доказательства теоремы 3.1.2, приходим к выводу, что существует единственное решение $w(t)$ задачи (3.1.73), которое является непрерывно дифференцируемым на $[0,T]$ и удовлетворяет уравнению и начальному условию задачи (3.1.72).

4) Осуществляя теперь в (3.1.72) обратную замену и возвращаясь к задаче Коши (3.1.62), получаем, что эта задача имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$. Теперь осталось лишь снова повторить шаг 2) доказательства теоремы 3.1.2, т.е. установить, что от

задачи (3.1.62) (с оператором $\mathcal{A}$) можно вернуться к задаче (3.1.56) (с оператором $\mathcal{A}_{a,b}$), а от нее — к задаче (3.1.4), (3.1.3), (3.1.48). □

3.1.4 Случай неограниченного гироскопического оператора

До сих пор предполагалось, что кориолисов оператор $K = iG \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Далее будут рассмотрены случаи, когда G неограничен и подчинен оператору $F_a^{1/2}$ (см. (3.1.55)) либо оператору F.

Установим сначала более простой результат.

Теорема 3.1.5. *Пусть в задаче* (3.1.4) *выполнены условия*

$$\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B),\ F \geqslant \gamma_F I,\ B \geqslant \gamma_B I,\ B_b := B + bI \geqslant \alpha_B I,\ \alpha_B > 0,$$

$$F_a := F + aI \geqslant \alpha_F I, \quad \alpha_F > 0, \quad \mathcal{D}(G) \supset \mathcal{D}(F_a^{1/2}), \tag{3.1.74}$$

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F),$$

а также одно из условий

$$f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1, \tag{3.1.75}$$

$$f(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}),\ 0 < \alpha < 1,\ F_a^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),\ GF_a^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{3.1.76}$$

Тогда задача Коши (3.1.4) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Из последнего условия (3.1.74) следует, что оператор $GF_a^{-1/2}$ определен на всем $\mathcal{H}$ и ограничен. Это позволяет провести доказательство данной теоремы, комбинируя доказательства теорем 3.1.2–3.1.4.

1°. Будем сначала считать, что выполнено условие (3.1.75), и осуществим в задаче (3.1.4) те же преобразования, которые были проведены выше, начиная с формулы (3.1.49) и до формулы (3.1.58). Нетрудно видеть, что формулы (3.1.57),(3.1.58) справедливы и в рассматриваемом случае, поскольку $GF_a^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Тогда для оператора $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ справедлива формула (см. (3.1.24))

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} & iQ_{a,b}^* \\ iQ_{a,b} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где $GF_a^{-1/2}$ — ограниченный оператор. Поэтому, как и в (3.1.25), получаем, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}^2 : z_1 + iF_a^{-1/2} Q_{a,b}^* z_2 \in \mathcal{D}(F_a) \Big\},$$

поскольку для элементов $z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеем свойства

$$\begin{gathered} z_1 \in \mathcal{D}(F_a^{1/2}) \subset \mathcal{D}(G), \\ iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} F_a^{1/2} z_1 = iF_a^{-1/2} G z_1 \in \mathcal{D}(F_a^{1/2}). \end{gathered} \tag{3.1.77}$$

Отсюда следует, что далее можно повторить те же рассуждения, которые были уже приведены при доказательстве теоремы 3.1.3, т.е. буквально повторить все выкладки, начиная от задачи (3.1.62) и до конца доказательства этой теоремы.

2°. Будем теперь считать, что выполнены условия (3.1.76). Здесь следует воспользоваться представлением оператора $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ в форме Шура–Фробениуса (см. (3.1.23)):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_{a,b} F_a^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & aI + Q_{a,b} Q_{a,b}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iF_a^{-1/2} Q_{a,b}^* \\ 0 & I \end{pmatrix} + \\ + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и тогда после тех же преобразований, как и выше, возникает задача (3.1.62), которую запишем в виде

$$\frac{dz}{dt} + (\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2) z + i\mathcal{G} z = f_{a,u}(t), \ z(0) = y^0 = (u^1; -iB_b^{1/2} u^0)^\tau,$$

где снова операторы $\mathcal{S}_i$ и $\mathcal{G}$ определены формулами (3.1.42), (3.1.43) с заменой Q_a на $Q_{a,b}$ и Q_a^* на $Q_{a,b}^*$.

Осуществляя далее те же преобразования, которые были проделаны при доказательстве теоремы 3.1.4 (см. (3.1.70)–(3.1.72)), устанавливаем, что уравнение (3.1.72) и при неограниченном операторе $\mathcal{G} := \operatorname{diag}(G; 0)$ является абстрактным параболическим. В силу теоремы 7.2 из [3] для доказательства этого факта достаточно убедиться, что оператор $(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{G}(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)^{-1}$ вполне подчинен оператору $-(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}$, поскольку последний оператор, как и в теореме 3.1.4, является генератором аналитической полугруппы.

Проверим, что при выполнении последнего условия (3.1.76) этот факт имеет место, т.е. оператор

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{G}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}\mathcal{A}_{00}^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}$$

компактен. Действительно, здесь оператор

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}\mathcal{A}_{00}^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -iF_a^{1/2}Q_{a,b}^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{-1} & 0 \\ 0 & (aI+Q_{a,b}Q_{a,b}^*)^{-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} GF_a^{-1} & -GF_a^{-1/2}Q_{a,b}^*(aI+Q_{a,b}Q_{a,b}^*)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2), \quad (3.1.78)
\end{aligned}$$

так как $GF_a^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ и потому $GF_a^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а остальные операторы в (3.1.78) ограничены.

Эти рассуждения показывают, что и при условиях (3.1.76) данной теоремы уравнение (3.1.72) является абстрактным параболическим, а соответствующий оператор $\mathcal{B}$ вида (3.1.47), т.е. операторный коэффициент задачи Коши (3.1.72), является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось.

Теперь для завершения доказательства второй части данной теоремы осталось лишь повторить те же рассуждения, которые были проведены при доказательстве теоремы 3.1.4, начиная с (3.1.72) и до конца доказательства. □

Рассмотрим теперь более сложную ситуацию, когда кориолисов оператор G не подчинен оператору $F_a^{1/2}$, но подчинен самому оператору F (либо $F_a \gg 0$).

Теорема 3.1.6. *Пусть в задаче* (3.1.4) *выполнены условия, менее ограничительные, чем в теореме 3.1.5, именно, условия*

$$B \geqslant \gamma_B I, \quad B_b := B + bI \geqslant \alpha_B I, \quad \alpha_B > 0,$$

$$F \geqslant \gamma_F I,\ F_a := F + aI \geqslant \alpha_F I,\ \alpha_F > 0,\ \mathcal{D}(G) \supset \mathcal{D}(F_a) = \mathcal{D}(F),$$

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1,$$

а также техническое требование

$$(I + GF_a^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \qquad (3.1.79)$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Повторим снова преобразования, которые были проведены выше при переходе от задачи (3.1.4) к задаче Коши (3.1.56):

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_{a,b} z = f_{a,u}(t), \quad z(0) = y^0.$$

Здесь операторная матрица $\mathcal{A}_{a,b}$ снова имеет вид (3.1.57) и допускает факторизацию вида

$$\mathcal{A}_{a,b} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} & iQ_{a,b}^+ \\ iQ_{a,b} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{3.1.80}$$

на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}) = \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \tag{3.1.81}$$

(Отметим, что формула (3.1.80) на области определения (3.1.81) определена корректно, поскольку в силу условия $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(G)$ имеем $z_1 \in \mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(F_a)$, $Gz_1 \in \mathcal{H}$ для $z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b})$.)

Покажем, что оператор

$$\mathcal{G}_{a,b} := \begin{pmatrix} I + iF_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} & iQ_{a,b}^+ \\ iQ_{a,b} & aI \end{pmatrix} \tag{3.1.82}$$

из представления (3.1.80) ограничен и плотно определен. Для этого воспользуемся полярным представлением (самосопряженного неограниченного) оператора G, имеем

$$G = J_G|G| = |G|^{1/2} J_G |G|^{1/2}, \quad |G| = (G^2)^{1/2} \geqslant 0,$$
$$J_G = J_G^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(|G|).$$

Тогда оператор $F_a^{-1/2} G F_a^{-1/2}$, который плотно определен, можно записать в виде

$$F_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} = (F_a^{-1/2}|G|^{1/2}) J_G (|G|^{1/2} F_a^{-1/2}) =: V_a^+ J_G V_a, \tag{3.1.83}$$
$$V_a := |G|^{1/2} F_a^{-1/2},\ V_a^+ := F_a^{-1/2}|G|^{1/2},\ \mathcal{D}(V_a^+) := \mathcal{D}(|G|^{1/2}),$$

причем имеют место свойства

$$V_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{D}(V_a^+) = \mathcal{D}(|G|^{1/2}) \supset \mathcal{D}(|G|) = \mathcal{D}(G),$$
$$V_a^+ = V_a^* | \mathcal{D}(|G|^{1/2}). \tag{3.1.84}$$

Доказательство этих свойств повторяет (с заменой B на B_b) доказательство леммы 3.1.2.

Из (3.1.83)–(3.1.84) следует, что оператор $F_a^{-1/2}GF_a^{-1/2}$ ограничен на плотном множестве из $\mathcal{H}$ и поэтому допускает замыкание в форме

$$\overline{F_a^{-1/2}GF_a^{-1/2}} = V_a^* J_G V_a.$$

Поэтому оператор $\mathcal{G}_{a,b}$ из (3.1.82) ограничен и плотно определен, а его замыкание $\overline{\mathcal{G}_{a,b}}$ получается заменой в (3.1.82) $Q_{a,b}^+$ на $Q_{a,b}^*$ и $F_a^{-1/2}GF_a^{-1/2}$ на $V_a^* J_G V_a$:

$$\overline{\mathcal{G}_{a,b}} := \begin{pmatrix} I + iV_a^* J_G V_a & iQ_{a,b}^* \\ iQ_{a,b} & aI \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}(\overline{\mathcal{G}_{a,b}}z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant \|z_1\|_{\mathcal{H}}^2 + a\|z_2\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant (\min(1; a))\|z\|_{\mathcal{H}^2}^2,$$
$$z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}^2. \tag{3.1.85}$$

Поэтому, как и в теореме 3.1.1, приходим к выводу, что оператор $\mathcal{A}_{a,b}$ из (3.1.80) в условиях данной теоремы замыкаем и его замыкание $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iV_a^* J_G V_a & iQ_{a,b}^* \\ iQ_{a,b} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.1.86}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}^2 :$$
$$z_1 + iF_a^{-1/2}V_a^* J_G V_a F_a^{-1/2} z_1 + iF_a^{-1/2} Q_{a,b}^* z_2 \in \mathcal{D}(F_a) \Big\},$$

причем

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} F_a(z_1 + iF_a^{-1/2}V_a^* J_G V_a F_a^{-1/2} z_1 + iF_a^{-1/2} Q_{a,b}^* z_2) \\ iQ_{a,b}F_a^{1/2} z_1 + a z_2 \end{pmatrix},$$
$$z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{3.1.87}$$

Используя свойство (3.1.85), приходим к неравенству

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant \|F_a^{1/2} z_1\|_{\mathcal{H}}^2 + a\|z_2\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant (\min(\alpha_F; a))\|z\|_{\mathcal{H}^2}^2, \ z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ является максимальным равномерно аккретивным оператором. Это позволяет повторить ту же схему доказательства, которая была применена в теореме 3.1.3. Именно, рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z = f_{a,u}(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.1.88}$$

$$f_{a,u}(t) := \mathrm{e}^{-at}(f(t) + bu(t); 0)^\tau =: f_{a,0}(t) + b\mathrm{e}^{-at}(u(t); 0)^\tau,$$

и применим далее те же рассуждения, которые проделаны в пп. 1)–3) доказательства теоремы 3.1.3. Тогда будет установлено, что задача (3.1.88) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Это означает, что $z(t) = (z_1(t); z_2(t))^\tau$ является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a\Big(z_1(t) + iF_a^{-1/2}V_a^* J_G V_a F_a^{1/2} z_1(t) + iF_a^{-1/2} Q_{a,b}^* z_2(t)\Big) = \\ = \mathrm{e}^{-at}(f(t) + bu(t)), \quad z_1(0) = u^1, \quad t \in [0, T], \tag{3.1.89}$$

$$\frac{dz_2}{dt} + az_2(t) + iQ_{a,b}F_a^{1/2} z_1(t) = 0, \quad z_2(0) = -iB_b^{1/2} u^0. \tag{3.1.90}$$

Из (3.1.90) приходим к выводу, что

$$z_2(t) = -i\mathrm{e}^{-at} B_b^{1/2} u^0 - i \int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} Q_{a,b} F_a^{1/2} z_1(s) ds.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (3.1.89), получаем соотношение

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a\Big(z_1(t) + iF_a^{-1/2}V_a^* J_G V_a F_a^{1/2} z_1(t) + F_a^{-1/2} Q_{a,b}^* B_b^{1/2} u^0 \mathrm{e}^{-at} + \\ + F_a^{-1/2} Q_{a,b}^* \int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} Q_{a,b} F_a^{1/2} z_1(s) ds\Big) = \mathrm{e}^{-at}(f(t) + bu(t)), \quad z_1(0) = u^1. \tag{3.1.91}$$

Здесь функция

$$\varphi(t) := z_1(t) + iF_a^{-1/2}V_a^* J_G V_a F_a^{1/2} z_1(t) + F_a^{-1/2} Q_{a,b}^* B_b^{1/2} u^0 \mathrm{e}^{-at} + \\ + F_a^{-1/2} Q_{a,b}^* \int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} Q_{a,b} F_a^{1/2} z_1(s) ds, \quad t \in [0, T], \tag{3.1.92}$$

является непрерывной по t функцией со значениями в $\mathcal{D}(F_a) = \mathcal{D}(F)$, так как $z(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.1.86)–(3.1.87)). Однако этим же свойством обладает и функция

$$\varphi_0(t) := F_a^{-1/2} Q_{a,b}^* B_b^{1/2} u^0 \mathrm{e}^{-at} = F_a^{-1/2} Q_{a,b}^+ B_b^{1/2} u^0 \mathrm{e}^{-at} = F_a^{-1} B_b u^0 \mathrm{e}^{-at},$$

так как $u^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_b)$. Поэтому (3.1.92) можно переписать в виде

$$z_1(t) + iF_a^{-1/2} V_a^* J_G V_a F_a^{1/2} z_1(t) + F_a^{-1/2} Q_{a,b}^* \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} Q_{a,b} F_a^{1/2} z_1(s) ds =$$
$$= \varphi_1(t) := \varphi(t) - \varphi_0(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1.93)$$

где $\varphi_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(F_a))$. Следовательно,

$$\varphi_1(t) = F_a^{-1} \eta(t), \quad \eta(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}).$$

Рассмотрим уравнение

$$\psi(t) + iF_a^{1/2} V_a^* J_G V_a F_a^{-1/2} \psi(t) +$$
$$+ \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} F_a^{1/2} Q_{a,b}^* Q_{a,b} F_a^{-1/2} \psi(s) ds = \eta(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1.94)$$

ассоциированное с уравнением (3.1.93) и получающееся из него после замены $z_1(t) = F_a^{-1} \psi(t)$ и формального применения слева оператора F_a. Здесь

$$F_a^{1/2} Q_{a,b}^* Q_{a,b} F_a^{-1/2} = F_a^{1/2} Q_{a,b}^* B_b^{1/2} F_a^{-1} =$$
$$= F_a^{1/2} Q_{a,b}^+ B_b^{1/2} F_a^{-1} = B_b F_a^{-1}. \quad (3.1.95)$$

Далее, согласно свойству $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(G)$ имеем

$$|G|^{1/2} F_a^{-1} \psi \in \mathcal{D}(|G|^{1/2}) = \mathcal{D}(J_G |G|^{1/2}) = \mathcal{D}(|G|^{1/2} J_G),$$

и тогда для любого $\psi \in \mathcal{H}$

$$F_a^{1/2} V_a^* J_G V_a F_a^{-1/2} \psi = F_a^{1/2} V_a^* J_G |G|^{1/2} F_a^{-1} \psi =$$
$$= F_a^{1/2} V_a^+ J_G |G|^{1/2} F_a^{-1} \psi = |G|^{1/2} J_G |G|^{1/2} F_a^{-1} \psi = G F_a^{-1} \psi. \quad (3.1.96)$$

Следовательно, уравнение (3.1.94) принимает вид

$$\psi(t)+iGF_a^{-1}\psi(t)+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}B_bF_a^{-1}\psi(s)ds = \eta(t),\ t\in[0,T]. \quad (3.1.97)$$

Здесь, согласно предыдущему, операторы GF_a^{-1} и $B_bF_a^{-1}$ ограничены, а оператор $I+iGF_a^{-1}$ имеет ограниченный обратный (см. условие (3.1.79)). Поэтому уравнение (3.1.97) равносильно уравнению

$$\psi(t)+\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}(I+iGF_a^{-1})^{-1}B_bF_a^{-1}\psi(s)ds = \\ = (I+iGF_a^{-1})^{-1}\eta(t), \quad (3.1.98)$$

т.е. интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром

$$\mathrm{e}^{-a(t-s)}(I+iGF_a^{-1})^{-1}B_bF_a^{-1},$$

которое является непрерывной по t,s оператор–функцией со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, и непрерывной заданной функцией $(I+iGF_a^{-1})^{-1}\eta(t)$, $t\in[0,T]$. Следовательно, уравнение (3.1.98), а вместе с ним и уравнение (3.1.97) имеют единственное решение $\psi(t)\in C([0,T];\mathcal{H})$. Отсюда после замены $\psi(t) = F_az_1(t)$, $z_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(F_a))$, и с учетом формул (3.1.95)–(3.1.96) получаем, что

$$F_a\Big(z_1(t)+iF_a^{-1/2}V_a^*J_GV_aF_a^{1/2}z_1(t)+ \\ + F_a^{-1/2}Q_{a,b}^*\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}Q_{a,b}F_a^{1/2}z_1(s)ds-\varphi_1(t)\Big)=0.$$

Отсюда следует, что интегральное уравнение (3.1.93) имеет единственное решение $z_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(F_a))$, причем в этом уравнении каждое слагаемое обладает этим свойством, так как в силу (3.1.95)

$$F_a^{-1/2}Q_{a,b}^*Q_{a,b}F_a^{1/2}z_1(s)=F_a^{-1}\Big(F_a^{1/2}Q_{a,b}^*Q_{a,b}F_a^{-1/2}\Big)F_az_1(s)= \\ =F_a^{-1}B_bF_a^{-1}F_az_1(s)=F_a^{-1}B_bz_1(s)\in C([0,T];\mathcal{D}(F_a)).$$

Попутно получаем также соотношения

$$F_a^{1/2}V_a^*J_GV_aF_a^{1/2}z_1(t)=Gz_1(t),\ F_a^{1/2}Q_{a,b}^*B_b^{1/2}u^0=B_bu^0 \qquad (u^0\in\mathcal{D}(B)),$$

$$\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}F_a^{1/2}Q_{a,b}^*Q_{a,b}F_a^{1/2}z_1(s)ds=\mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{as}B_bz_1(s)ds,\ \ t\in[0,T].$$

Используя соотношения и связи

$$z_1(t)=\mathrm{e}^{-at}(du(t)/dt),\quad f_{a,u}(t)=\ \mathrm{e}^{-at}(f(t)+bu(t)),$$

(см. (3.1.15), (3.1.51), (3.1.52), (3.1.56)) в интегродифференциальном уравнении (3.1.91) (с раскрытыми скобками), видим, что функция $u(t)$ является сильным решением уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(F_a-aI+iG)\frac{du}{dt}+B_bu=f(t)+bu(t),$$

т.е. сильным решением задачи Коши (3.1.4). $\square$

Замечание 3.1.1. *Из доказательства теоремы 3.1.6 видно, что ее утверждения справедливы, если уравнение* (3.1.97) *имеет единственное решение* $\psi(t)\in C([0,T];\mathcal{H})$*, а требование* (3.1.79) *не обязательно выполнено.* $\square$

Замечание 3.1.2. *Оператор* $I+iGF_a^{-1}$ *обратим в* $\mathcal{H}$*, быть может, с неограниченным обратным. Действительно, если* $u\in\mathcal{H}$ *— такой элемент, что* $(I+iGF_a^{-1})u=0$*, то*

$$(F_a^{-1}u,u)_{\mathcal{H}}+i(F_a^{-1}GF_a^{-1}u,u)_{\mathcal{H}}=0,$$

и, следовательно, $u=0$*, так как* $F_a^{-1}>0$ *и* $G=G^*$*.* $\square$

Следствие 3.1.4. *Оператор* $(I+iGF_a^{-1})$ *имеет ограниченный обратный в любом из следующих случаев:*

1°*. имеет место равенство* $\|GF_a^{-1}\|<1$ *или для спектрального радиуса* $r(GF_a^{-1})$ *оператора* GF_a^{-1} *выполнено условие* $r(GF_a^{-1})<1$*;*

2°*. оператор* GF_a^{-1} *компактен;*

3°*. операторы* G *и* F *коммутируют.*

Доказательство. 1°. Первое утверждение очевидно, так как в этом случае ограниченный обратный оператор существует и выражается в виде ряда Неймана

$$(I + iGF_a^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (iGF_a^{-1})^k,$$

$$\|(I + iGF_a^{-1})^{-1}\| \leqslant 1/(1 - \|GF_a^{-1}\|), \quad \|GF_a^{-1}\| < 1.$$

2°. Если оператор GF_a^{-1} компактен, то обратимый (согласно замечанию 3.1.2) оператор $I + iGF_a^{-1}$ имеет ограниченный обратный согласно теореме Фредгольма.

3°. Если G и F коммутируют, то ограниченный оператор GF_a^{-1} самосопряжен и может быть представлен в виде $GF_a^{-1} = V_a J_G V_a$ (здесь $V_a = |G|^{1/2} F_a^{-1/2} = V_a^*$, $J_G = J_G^*$). Следовательно,

$$\operatorname{Re}((I \pm iGF_a^{-1})u, u)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}((I \pm iV_a J_G V_a u, u)_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

откуда следует, что оператор $I + iGF_a^{-1}$ равномерно аккретивен и потому имеет ограниченный обратный с $\|(I + iGF_a^{-1})^{-1}\| \leqslant 1$. $\square$

Замечание 3.1.3. *Если в задаче* (3.1.4) *условие* $u^0 \in \mathcal{D}(B)$ *заменить на более жесткое условие* $u^0 \in \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B)$, *то сильное решение задачи* (3.1.4), *существование и единственность которого доказаны в теоремах 3.1.2–3.1.6, принадлежит пространству* $C([0,T]; \mathcal{D}(F)) \subset C([0,T]; \mathcal{D}(B))$. *Действительно, согласно определению 3.1.1 сильного решения,* $F(du/dt) \in C([0,T]; \mathcal{H})$ *и потому*

$$\int_0^t F \frac{du}{d\xi}\, d\xi = F \int_0^t \frac{du}{d\xi}\, d\xi = F(u(t) - u(0)) \in C([0,T]; \mathcal{H}),$$

и если $u(0) = u^0 \in \mathcal{D}(F)$, *то* $Fu(t) \in C([0,T]; \mathcal{H})$. $\square$

Замечание 3.1.4. *Пусть* $G = 0$. *Если выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(F), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H}), \quad p > 1,$$

то задача Коши (3.1.4) *устойчива по отношению к любой замене искомой функции по закону*

$$u(t) = e^{ct} v(t), \quad c > 0. \tag{3.1.99}$$

Это означает, что после такой замены сильное решение $u(t)$ *задачи* (3.1.4) *переходит снова в сильное решение* $v(t)$ *преобразованной задачи Коши. Если потребовать лишь условия* $u^0 \in \mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(F)$, *то при замене* (3.1.99) *сильное решение* $u(t)$ *задачи* (3.1.4) *может перейти в решение* $v(t)$, *которое не является сильным в смысле определения 3.1.1.* $\square$

3.1.5 Задача Коши для интегродифференциального уравнения

Опираясь на доказанные утверждения о разрешимости задачи Коши (3.1.4), т.е. "укороченной" задачи (3.1.2), вернемся к изучению вопросов разрешимости этой проблемы:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds = f(t),$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B). \qquad (3.1.100)$$

Наша цель — сформулировать такие ограничения на (неограниченные) операторные коэффициенты A_k, $k = \overline{1,m}$, и ядро $G_k(t,s)$, которые позволили бы доказать утверждения о разрешимости задачи Коши (3.1.100) при тех же условиях, что и для "укороченной" задачи, т.е. при $A_k = 0$, $k = \overline{1,m}$.

Заметим предварительно, что определение сильного решения задачи (3.1.100) для интегродифференциального уравнения — такое же, как и для "укороченной" задачи (см. определение 3.1.1), с тем добавлением, что в уравнении (3.1.100) все слагаемые, в том числе и интегральные, должны быть непрерывными по t функциями, т.е. элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Начнем рассмотрение задачи (3.1.100) с простейшего случая (см. (3.1.5))

$$F = F^* \gg 0, \quad B = B^* \gg 0, \quad G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \qquad (3.1.101)$$

Будем считать, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи (3.1.100), и для уравнения (3.1.100) проведем те же преобразования, которые в п. 3.1.2 были проделаны для сильных решений "укороченной" задачи (3.1.4). Соответствующие переходы снова описываются формулами (3.1.6)–(3.1.17), и возникает операторная матрица $\mathcal{A}_a$ из (3.1.17), которая является равномерно аккретивной (см. (3.1.18)) и допускает расширение (замыкание) согласно утверждениям леммы 3.1.2 и теоремы 3.1.1, а по следствию 3.1.1 операторная матрица $(-\mathcal{A}) = (-\overline{\mathcal{A}_a})$ является генератором сжимающей полугруппы $\mathcal{U}(t)$ с $\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-ta}$, $t \geqslant 0$.

Итогом таких преобразований для задачи (3.1.100) будет переход сначала к задаче Коши

$$\frac{dz}{dt}+\mathcal{A}_a z+\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)}V_k(t,\xi)A_k z_1(\xi)ds \\ 0 \end{pmatrix}=\widehat{f}_a(t), \quad z(0)=z^0,$$

$$z(t)=\mathrm{e}^{-at}y(t)=\mathrm{e}^{-at}(du/dt;dv/dt)^\tau,\ \ dv/dt:=-iB^{1/2}u(t),\ \ v(0)=0,$$

$$\widehat{f}_a(t):=(\mathrm{e}^{-at}(f(t)-\varphi_0(t));0)^\tau, \quad \varphi_0(t):=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t G_k(t,s)A_k u^0 ds,$$

$$V_k(t,\xi):=\int\limits_\xi^t G_k(t,s)ds,\ k=\overline{1,m},\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_a)=\mathcal{D}(F_a)\oplus\mathcal{D}(B^{1/2}), \quad (3.1.102)$$

а затем, после замыкания оператора $\mathcal{A}_a$, к следующей задаче:

$$\frac{dz}{dt}+\mathcal{A}z+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)}\mathcal{V}_k(t,\xi)\mathcal{A}_k z(\xi)ds=\widehat{f}_a(t), \quad z(0)=z^0, \quad (3.1.103)$$

$$\mathcal{V}_k(t,\xi)\ :=\ \mathrm{diag}(V_k(t,\xi);0),\ \ \mathcal{A}_k\ :=\ \mathrm{diag}(A_k;0),\ \ k\ =\ \overline{1,m}. \quad (3.1.104)$$

Теорема 3.1.7. *Пусть в задаче* (3.1.100) *выполнены условия* (3.1.101), *условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(B), \quad u^1\in\mathcal{D}(F), \quad (3.1.105)$$

а также одно из условий

$$f(t)\in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p>1, \quad (3.1.106)$$

$$F^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad f(t)\in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}), \quad 0<\alpha\leqslant 1. \quad (3.1.107)$$

Пусть, кроме того, выполнены те же ограничения на оператор-функции $G_k(t,s)$, *которые уже встречались в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка:*

$$G_k(t,s),\ \ \partial G_k(t,s)/\partial t\in C(\triangle_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$
$$\triangle_T:=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}, \quad k=\overline{1,m}; \quad (3.1.108)$$

наконец, потребуем еще, чтобы

$$\mathcal{D}(A_k)\supset\mathcal{D}(F^{1/2}), \quad k=\overline{1,m}. \quad (3.1.109)$$

Тогда задача (3.1.103), (3.1.104) *имеет единственное сильное решение* $z(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Проверим, что при выполнении условий (3.1.101), (3.1.105)–(3.1.109) для задачи (3.1.103), (3.1.104) выполнены условия теорем 1.3.3–1.3.4, а потому имеют место и их утверждения.

В самом деле, в (3.1.103) оператор $(-\mathcal{A})$ при условиях (3.1.101) и $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B)$ является генератором сжимающей полугруппы, а при дополнительном первом условии (3.1.107) — генератором аналитической полугруппы, заданной в некотором секторе, содержащем положительную полуось (см. доказательство теорем 3.1.2 и 3.1.4). Далее, если выполнены условия (3.1.105), то в задаче (3.1.103) выполнено условие

$$z^0 = y^0 = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}). \qquad (3.1.110)$$

Что касается заданной функции $\widehat{f}_a(t)$ (см. (3.1.102)), то она, очевидно, обладает свойством $\widehat{f}_a(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}^2)$, $p > 1$, если $f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H})$, и свойством $\widehat{f}_a(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H}^2)$, если $f(t) \in C^\alpha([0,T];\mathcal{H})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, так как в обоих случаях функция

$$\varphi_0(t) := \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t G_k(t,s) A_k u^0 ds \in C^1([0,T];\mathcal{H}), \quad u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad (3.1.111)$$

при выполнении условий (3.1.108).

Проверим, наконец, что в задаче (3.1.103) выполнены условия

$$\mathcal{V}_k(t,s), \ \ \partial\mathcal{V}_k(t,s)/\partial t \in C(\triangle_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)), \quad k = \overline{1,m},$$

а также условия

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad k = \overline{1,m}.$$

В самом деле, условия (3.1.111) непосредственно следуют из (3.1.108) и первых формул (3.1.104). Далее, очевидно, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_k) = \mathcal{D}(A_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m},$$

в то время как согласно (3.1.25)

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{z = (z_1, z_2)^\tau : z_1 \in \mathcal{D}(F_a^{1/2}), \quad z_1 + iF_a^{-1/2}Q_a^* z_2 \in \mathcal{D}(F_a)\} \subset \\ \subset \mathcal{D}(F_a^{1/2}) \oplus \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_k), \quad k = \overline{1,m}. \qquad (3.1.112)$$

Итак, для задачи (3.1.103) выполнены условия теорем 1.3.3 и 1.3.4 соответственно случаям (3.1.106) и (3.1.107), а потому, согласно утверждениям этих теорем, в обоих случаях задача (3.1.103) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$.

□

Следствием теоремы 3.1.7 является такое утверждение.

Теорема 3.1.8. *При выполнении условий теоремы 3.1.7 задача Коши* (3.1.100) *для интегродифференциального уравнения второго порядка имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Так как по теореме 3.1.7 задача (3.1.103) при выполнении условий (3.1.101), (3.1.105)–(3.1.109) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, то для этого решения выполнено уравнение (3.1.103) и начальное условие. При этом в уравнении все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$, $t \in [0,T]$. Это означает, что имеют место соотношения

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a(z_1(t) + iF_a^{-1/2}Q_a^* z_1(t)) + iGz_1(t) + \\ + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)}V_k(t,\xi)A_k z_1(\xi)d\xi = \\ = \mathrm{e}^{-at}(f(t) - \varphi_0(t)), \quad z_1(0) = u^1, \quad (3.1.113)$$

$$\frac{dz_2}{dt} + az_2(t) + iQ_aF_a^{1/2}z_1(t)) = 0, \quad z_2(0) = -iB^{1/2}u^0, \quad (3.1.114)$$

где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Здесь, в частности, $z_1(t) \in \mathcal{D}(F_a^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_k)$, а потому $A_k z_1(t)$ — непрерывная функция со значениями в $\mathcal{H}$, а тогда соответствующие интегральные слагаемые — также непрерывные по t функции. Остальная часть доказательства данной теоремы полностью повторяет те части доказательства теоремы 3.1.2, где проводятся рассуждения, связанные с рассмотрением интегрального уравнения Вольтерра (3.1.37), (3.1.38) и соответствующими рассуждениями в п. 2) доказательства этой теоремы (см. формулы (3.1.36)–(3.1.40)) при условии (3.1.106), а также аналогичные рассуждения в п. 3) доказательства при условии (3.1.107) (см. формулы (3.1.41)–(3.1.47)).

В итоге снова приходим к выводу, что $z_1(t) \in C([0,T];\mathcal{H}(F_a)$. Поэтому в (3.1.113) можно раскрыть скобки, и после исключения $z_2(t)$

в (3.1.113), (3.1.114) и введения функции $u(t)$, $du/dt \equiv \mathrm{e}^{-at} z_1(t)$, $u(0) = u^0$, получаем, что задача Коши (3.1.100) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$.

□

3.2 Интегродифференциальные уравнения с доминирующим коэффициентом при искомой функции (слабо демпфированные динамические системы)

В этом параграфе изучается более легкая в теоретическом отношении задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \qquad (3.2.1)$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

а также "укороченная" задача для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \qquad (3.2.2)$$

Будем предполагать, что в этих задачах доминирующим коэффициентом (т.е. главным по задаче Коши) является оператор B. Заметим, что при $F = G = 0$, $A_k = 0$ $(k = \overline{1, m})$, уравнение (3.2.1) является абстрактным гиперболическим.

3.2.1 Простейший случай

Будем сначала считать, что в задаче (3.2.2) выполнены условия

$$G = 0, \quad F = F^* \geqslant 0, \quad B = B^* \gg 0, \qquad (3.2.3)$$

а также условие сравнения коэффициентов:

$$\mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{H}. \qquad (3.2.4)$$

Определение 3.2.1. *Сильным решением задачи* (3.2.2)–(3.2.4) *на отрезке* $[0,T]$ *назовем такую функцию* $u(t)$ *со значениями в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$, *для которой все слагаемые в* (3.2.2), *а также функция* $B^{1/2}(du/dt)$ *являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{H})$, *выполнено это уравнение при* $t\in[0,T]$ *и начальные условия.* □

Замечание 3.2.1. *Из определения сильного решения задачи* (3.2.2)–(3.2.4) *следует, что необходимыми условиями ее сильной разрешимости являются условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(B),\quad u^1\in\mathcal{D}(B^{1/2}),\quad f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{H}). \qquad \square$$

Пусть задача (3.2.2)–(3.2.4) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Как и в п. 3.1.2, введем новую искомую функцию $v(t)$ по закону

$$\frac{dv}{dt}=-iB^{1/2}u(t),\quad v(0)=0. \tag{3.2.5}$$

Так как согласно определению 3.2.1 функция $B^{1/2}u(t)$ непрерывно дифференцируема по $t\in[0,T]$, то $v(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и

$$\frac{d^2v}{dt^2}+iB^{1/2}\frac{du}{dt}=0,\quad \frac{dv}{dt}(0)=-iB^{1/2}u^0. \tag{3.2.6}$$

С учетом (3.2.5), (3.2.6) задача (3.2.2)–(3.2.4) приводится к задаче Коши в пространстве $\mathcal{H}^2$ для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dt}+\mathcal{A}_0y=f_0(t),\quad y(0)=y^0, \tag{3.2.7}$$

$$y(t):=\left(\frac{du}{dt};\frac{dv}{dt}\right)^\tau,\quad y^0:=(u^1;-iB^{1/2}u^0)^\tau,\quad f_0(t):=(f(t);0)^\tau,$$

$$\mathcal{A}_0:=\begin{pmatrix} F & iB^{1/2}\\ iB^{1/2} & 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\mathcal{D}(B^{1/2})\oplus\mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3.2.8}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ определен корректно, так как $\mathcal{D}(B^{1/2})\subset\ \mathcal{D}(F)$.

Лемма 3.2.1. *Оператор* $\mathcal{A}_0$, *заданный на области определения* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, *является максимальным аккретивным оператором.*

Доказательство. Свойство аккретивности для оператора $\mathcal{A}_0$ очевидно:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}^2} = (Fy_1, y_1)_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \quad \forall y = (y_1; y_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Для доказательства свойства максимальной аккретивности воспользуемся следующей факторизацией:

$$\mathcal{A}_0 := i \begin{pmatrix} I & iFB^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B^{1/2} \\ B^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в силу (3.2.4) оператор $FB^{-1/2}$ ограничен, а потому первый сомножитель ограниченно обратим. Далее, так как $B^{1/2} \gg 0$, то второй сомножитель также ограниченно обратим. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ замкнут и область его значений $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^{-1}) = \mathcal{H}^2$. Так как $\mathcal{A}_0$ аккретивен, то он является максимальным аккретивным оператором. □

Следствие 3.2.1. *Оператор* $(-\mathcal{A}_0)$ *является генератором* (C_0)–*полугруппы сжимающих операторов.* □

Установленные свойства операторной матрицы $\mathcal{A}_0$ позволяют доказать следующий факт.

Теорема 3.2.1. *Пусть в задаче Коши* (3.2.2)–(3.2.4) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \;\; u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \;\; f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \;\; p > 1. \tag{3.2.9}$$

Тогда она имеет единственное сильное (в смысле определения 3.2.1) решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (3.2.7)–(3.2.8). Если выполнены условия (3.2.9), то для этой задачи

$$y^0 = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{3.2.10}$$

$$f_0(t) := (f(t); 0)^\tau \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}^2), \quad p > 1. \tag{3.2.11}$$

Так как оператор $(-\mathcal{A}_0)$ является генератором (сжимающей) (C_0)–полугруппы, то при условиях (3.2.10), (3.2.11) задача (3.2.7)–(3.2.8) по теореме С.Я. Якубова (см. теорему 1.1.2) имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0,T]$. Возвращаясь к переменным $u(t)$ и $v(t)$, получаем, что справедливы уравнения и начальные условия

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + iB^{1/2}\frac{dv}{dt} = f(t), \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1, \quad u(0) = u^0, \tag{3.2.12}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + iB^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = -iB^{1/2}u^0, \quad v(0) = 0. \tag{3.2.13}$$

Здесь все функции переменной t непрерывны по t со значениями в $\mathcal{H}$, $t \in [0, T]$. В частности, из (3.2.13) видно, что

$$B^{1/2}\frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{H}),$$

т.е. выполнено одно из требований из определения 3.2.1 сильного решения.

Из (3.2.13) следует также, после интегрирования по t в пределах от 0 до t, что справедливы соотношения (3.2.5), причем, в силу (3.2.12),

$$-iB^{1/2}u(t) = \frac{dv}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{D}(B^{1/2})).$$

Поэтому, подставляя (dv/dt) в (3.2.12), приходим к выводу, что справедливо уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2.14}$$

причем здесь все слагаемые являются непрерывными функциями t.

Заметим еще, что в силу непрерывности $Bu(t)$ и $B^{1/2}\frac{du}{dt} =: i\frac{d^2v}{dt^2}$ начальные условия для уравнения (3.2.14) выполнены в следующем смысле:

$$\|B(u(t) - u^0)\| \to 0, \quad \left\|B^{1/2}\Big(\frac{du}{dt} - u^1\Big)\right\| \to 0 \quad (t \to +0). \tag{3.2.15}$$

В самом деле, так как в задаче (3.2.7)–(3.2.8) $y(t) \to y^0$ при $t \to +0$, то

$$\frac{du}{dt} \to u^1 \quad (\text{в } \mathcal{H}), \quad \frac{dv}{dt} = -iB^{1/2}u(t) \to -iB^{1/2}u^0 \quad (\text{в } \mathcal{H}).$$

Отсюда и из упомянутого выше свойства непрерывности функций $Bu(t)$ и $B^{1/2}(du/dt)$ следуют условия (3.2.15). □

3.2.2 Случай полуограниченных операторных коэффициентов

Рассмотрим взамен (3.2.3) условия

$$G = 0, \quad F = F^* \geqslant \gamma_F I, \quad B = B^* \geqslant \gamma_B I, \quad \gamma_F, \gamma_B \in \mathbb{R}, \tag{3.2.16}$$

а также условие сравнения коэффициентов F и B, которое будет сформулировано ниже (см. (3.2.21)). Здесь возникает задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.2.17}$$

исследование которой можно провести по тому же плану, что и в пп. 3.1.2 и 3.2.1. При этом операторная матрица, ассоциированная с задачей (3.2.17), будет обладать теми же общими свойствами, что и матрица $\mathcal{A}_0$ из (3.2.8).

Снова, как и в п. 3.1.2, представим оператор B в виде

$$B = B_b - bI, \quad B_b := B + bI \geqslant \alpha_B I, \quad b + \gamma_B =: \alpha_B > 0, \tag{3.2.18}$$

и перепишем (3.2.17) в форме

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + B_b u = f_u(t) := f(t) + bu(t),\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1.$$

Далее, введем новую искомую функцию $v(t)$ соотношениями

$$\frac{dv}{dt} = -iB_b^{1/2}u(t), \quad v(0) = 0. \tag{3.2.19}$$

Тогда для сильного решения задачи (3.2.16), (3.2.17) (его определение уточним ниже) будем иметь

$$\frac{d^2v}{dt^2} + iB_b^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad v'(0) = -iB_b^{1/2}u^0, \quad v(0) = 0.$$

Для функций $u(t)$ и $v(t)$ получаем задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + iB_b^{1/2}\frac{dv}{dt} = f_u(t), \quad u'(0) = u^1, \quad u(0) = u^0,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + iB_b^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad v'(0) = -iB_b^{1/2}u^0, \quad v(0) = 0,$$

которая может быть переписана в виде

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_{0,b}y = f_{0,u}(t), \quad y(0) = y^0, \tag{3.2.20}$$

$$y(t) := (u'(t); v'(t))^\tau, \quad y^0 := (u^1; -iB_b^{1/2}u^0)^\tau,$$

$$f_{0,u}(t) := (f_u(t);0)^\tau, \quad f_u(t) := f(t) + bu(t),$$

$$\mathcal{A}_{0,b} := \begin{pmatrix} F & iB_b^{1/2} \\ iB_b^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0,b}) = \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}).$$

Для корректного определения операторной матрицы $\mathcal{A}_{0,b}$ здесь предполагается, что

$$\mathcal{D}(F) \supset \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \tag{3.2.21}$$

Таким образом, далее рассматривается задача (3.2.16)–(3.2.18), (3.2.21). Определение ее сильного решения на отрезке $[0,T]$ — такое же, как и определение 3.2.1 с заменой свойства непрерывности $B^{1/2}(du/dt)$ на аналогичное свойство для функции $B_b^{1/2}(du/dt)$.

Осуществим в (3.2.20) замену искомой функции по формуле

$$y(t) = \mathrm{e}^{at} z(t), \quad a > 0. \tag{3.2.22}$$

Тогда для искомой функции $z(t)$ придем к задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_{a,b} z = f_{a,u}(t) := \mathrm{e}^{-at} f_{0,u}(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.2.23}$$

$$\mathcal{A}_{a,b} := \begin{pmatrix} F_a & iB_b^{1/2} \\ iB_b^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \ F_a := F + aI,$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}) = \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \tag{3.2.24}$$

Константу $a > 0$ подберем из условия

$$a + \gamma_F =: \alpha_F > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_a \geqslant \alpha_F I \gg 0. \tag{3.2.25}$$

Лемма 3.2.2. *Оператор $\mathcal{A}_{a,b}$, заданный формулой* (3.2.24) *на своей области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b})$ при условии* (3.2.25), *является максимальным равномерно аккретивным оператором:*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{a,b} z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant c\|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad c := (\min(\alpha_F; a)), \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}). \tag{3.2.26}$$

Доказательство. Свойство (3.2.26) очевидно из формулы (3.2.24), определяющей оператор $\mathcal{A}_{a,b}$, и из (3.2.25), так как

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{a,b} z, z)_{\mathcal{H}^2} = (F_a z_1, z_1)_{\mathcal{H}} + a\|z_2\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Из (3.2.26) следует, что $\mathcal{A}_{a,b}$ имеет ограниченный обратный, заданный на области значений $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{a,b})$ оператора $\mathcal{A}_{a,b}$. Покажем, что эта область значений совпадает со всем пространством $\mathcal{H}$, и получим формулу для представления обратного оператора $\mathcal{A}_{a,b}^{-1}$.

С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$F_a u_1 + iB_b^{1/2} u_2 = v_1, \quad iB_b^{1/2} u_1 + a u_2 = v_2, \tag{3.2.27}$$

эквивалентную уравнению $\mathcal{A}_{a,b} u = v$, считая, что $v = (v_1; v_2)^\tau \in \mathcal{H}$, а $u_1 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2})$, $u_2 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2})$, т.е. $u = (u_1; u_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b})$.

Так как $u_1 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2})$, то в силу (3.2.21) $u_1 \in \mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(F_a)$, и из первого уравнения (3.2.27) имеем $F_a u_1 = v_1 - iB_b^{1/2} u_2$, а из второго получаем $u_2 = a^{-1}(v_2 - iB_b^{1/2} u_1)$. Поскольку $B_b^{1/2} \gg 0$, то отсюда следуют соотношения

$$B_b^{-1/2} F_a u_1 = B_b^{-1/2} v_1 - i u_2 = B_b^{-1/2} v_1 - i a^{-1}(v_2 - iB_b^{1/2} u_1), \tag{3.2.28}$$

т.е.

$$(B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2} + a^{-1} I) u_1 = B_b^{-1/2} v_1 - i a^{-1} v_2. \tag{3.2.29}$$

Здесь оператор $F_a B_b^{-1/2}$ в силу (3.2.21) и связи $F_a = F + aI$ является ограниченным оператором, а $B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2}$ — самосопряженным неотрицательным оператором, заданным на всем пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому оператор $a^{-1} I + \ B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2}$ положительно определен, самосопряжен и ограниченно обратим, и для обратного оператора $T_{a,b} := \ (a^{-1} I + B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2})^{-1} \gg 0$ имеем оценку для нормы:

$$\|T_{a,b}\| = \|(a^{-1} I + B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2})^{-1}\| \leqslant a. \tag{3.2.30}$$

Отсюда и из (3.2.29) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} u_1 &= B_b^{-1/2} T_{a,b} B_b^{-1/2} v_1 - i a^{-1} B_b^{-1/2} T_{a,b} v_2, \\ u_2 &= -i a^{-1} T_{a,b} B_b^{-1/2} v_1 + (a^{-1} I - a^{-2} T_{a,b}) v_2, \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

которые приводят к формуле

$$\mathcal{A}_{a,b}^{-1} = \begin{pmatrix} B_b^{-1/2} T_{a,b} B_b^{-1/2} & -i a^{-1} B_b^{-1/2} T_{a,b} \\ -i a^{-1} T_{a,b} B_b^{-1/2} & a^{-1} T_{a,b}^{1/2} B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2} T_{a,b}^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{3.2.32}$$

Из предыдущего и из (3.2.32) следует, что $\mathcal{A}_{a,b}^{-1}$ — ограниченный аккретивный оператор, заданный на всем пространстве $\mathcal{H}^2$.

Пусть теперь v_1 и v_2 — произвольные элементы из $\mathcal{H}$. Тогда из первой формулы (3.2.31) следует, что $u_1 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2})$, а из первой и второй — второе соотношение (3.2.27). Далее, осуществляя в первой формуле (3.2.31) преобразования, обратные тем, которые привели к формулам (3.2.28), (3.2.29), и используя вторую формулу (3.2.27), приходим к первому равенству (3.2.27), откуда (в силу свойства $F_a u_1 \in \mathcal{H}$) получаем, что $u_2 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2})$ и выполнено первое уравнение (3.2.27). Отсюда следует, что

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_{a,b}^{-1}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}) = \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \tag{3.2.33}$$

□

Из леммы 3.2.2 следует, что оператор $(-\mathcal{A}_{a,b})$ является генератором сжимающей полугруппы $\mathcal{U}(t)$, и для нее справедлива оценка

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-c\,t}, \tag{3.2.34}$$

где $c > 0$ — константа из (3.2.26).

Теорема 3.2.2. *Пусть в задаче* (3.2.17)*,* (3.2.16)*,* (3.2.21) *выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_b),\ u^1 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2}),\ f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}),\ p > 1, \tag{3.2.35}$$

где B_b *— оператор, введенный в* (3.2.18)*. Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 3.1.3.

Именно, рассмотрим задачу Коши (3.2.23), (3.2.24) и будем считать, что выполнены условия (3.2.35). Нетрудно видеть, что здесь, как и при доказательстве теоремы 3.1.3, справедливы формулы (3.1.63), а взамен (3.1.64) имеем (3.2.35). Отсюда следует, что

$$y^0 = (u^1; -iB_b^{1/2}u^0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}),$$

и если $f_{a,u}(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}^2)$, $p > 1$, то по теореме 3.2.1 задача Коши (3.2.23), (3.2.24) имеет единственное сильное решение $z(t)$, представимое формулой (3.1.65):

$$z(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s) f_{a,u}(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{3.2.36}$$

где $\mathcal{U}(t)$ — сжимающая полугруппа, отвечающая генератору $(-\mathcal{A}_{a,b})$ (см. (3.2.24)) и имеющая оценку (3.2.34).

Для функции $f_{a,u}(t)$, как и ранее, имеем представление (3.1.66), т.е.

$$f_{a,u}(t) = f_{a,b}(t) + b\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{a\xi}P_1 z(\xi)d\xi, \tag{3.2.37}$$

где P_1 — ортопроектор из $\mathcal{H}^2$ на первый экземпляр $\mathcal{H}$. Из (3.2.36) и (3.2.37) приходим к интегральному уравнению (3.1.67), и доказательство данной теоремы теперь в точности повторяет этап 3) доказательства теоремы 3.1.3. В итоге получаем, что задача (3.2.23), (3.2.24) при условиях (3.2.35) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Осталось лишь повторить обратные преобразования, связанные с возвращением от задачи (3.2.23) к исходной задаче (3.2.17), (3.2.16), (3.2.21) (см. переходы (3.2.18)–(3.2.22)). $\square$

3.2.3 Уравнения с неограниченным гироскопическим оператором

Подход, примененный в п. 3.2.2 при $G = 0$, т.е. для задачи Коши (3.2.17), (3.2.16), (3.2.21), может быть также использован при рассмотрении задачи Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.2.38}$$

при условиях

$$G = G^* \neq 0, \quad F = F^* \geqslant \gamma_F I, \quad B = B^* \geqslant \gamma_B I, \quad \gamma_F, \gamma_B \in \mathbb{R}. \tag{3.2.39}$$

Вводя, как и выше, оператор $B_b := B + bI$, $b + \gamma_b =: \alpha_B > 0$, перейдем к задаче

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + B_b u = f(t) + bu(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.2.40}$$

и будем считать, что выполнены условия (см. (3.2.21))

$$\mathcal{D}(B_b^{1/2}) \subset \mathcal{D}(F), \quad \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \subset \mathcal{D}(G). \tag{3.2.41}$$

Эти предположения позволяют для задачи (3.2.40), (3.2.41) осуществить те же преобразования, которые были проделаны в п. 3.2.2, начиная с (3.2.19) и вплоть до (3.2.23)–(3.2.25). Здесь вместо (3.2.24) возникает операторная матрица

$$\mathcal{A}_{a,b,g} := \begin{pmatrix} F_a + iG & iB_b^{1/2} \\ iB_b^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \ \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b,g}) = \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}), \quad (3.2.42)$$

а задача (3.2.40), (3.2.41) трансформируется в задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_{a,b,g} z = f_{a,u}(t), \quad z(0) = y^0 = (u^1; -iB_b^{1/2} u^0)^\tau.$$

Лемма 3.2.3. *Оператор $\mathcal{A}_{a,b,g}$, заданный формулой* (3.2.42) *на своей области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b,g})$, является максимальным равномерно аккретивным оператором, для которого выполнено неравенство* (3.2.26).

Доказательство. Оно повторяет доказательство леммы 3.2.2 с заменой оператора $T_{a,b} := (a^{-1}I + B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2})^{-1}$ на оператор

$$T_{a,b,g} := (a^{-1}I + B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2} + iB_b^{-1/2} G B_b^{-1/2})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (3.2.43)$$

Для этого оператора, как и в (3.2.30), имеется оценка нормы

$$\|T_{a,b,g}\| \leqslant a,$$

которая следует из соотношения

$$\mathrm{Re}((a^{-1}I + B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2} + iB_b^{-1/2} G B_b^{-1/2}) z_1, z_1)_{\mathcal{H}} \geqslant a^{-1} \|z_1\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Отметим, что в (3.2.43) оператор $B_b^{-1/2} G B_b^{-1/2}$ самосопряжен и ограничен в силу второго свойства (3.2.41). Заметим еще, что вместо (3.2.32) здесь возникает операторная матрица

$$\mathcal{A}_{a,b,g}^{-1} = \begin{pmatrix} B_b^{-1/2} T_{a,b,g} B_b^{-1/2} & -ia^{-1} B_b^{-1/2} T_{a,b,g} \\ -ia^{-1} T_{a,b,g} B_b^{-1/2} & (B_b^{-1/2} F_a B_b^{-1/2} + iB_b^{-1/2} G B_b^{-1/2}) T_{a,b,g} \end{pmatrix},$$

а вместо (3.2.33) имеем соотношения

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_{a,b,g}^{-1}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b,g}) = \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \quad (3.2.44)$$

□

Итогом рассмотрения задачи (3.2.38), (3.2.39) при условиях (3.2.41) является

Теорема 3.2.3. *Пусть выполнены условия* (3.2.35). *Тогда задача* (3.2.38), (3.2.39), (3.2.41) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Оно повторяет доказательство теоремы 3.2.2 с учетом того, что оператор $(-\mathcal{A}_{a,b,g})$ является генератором полугруппы $\mathcal{U}(t)$, для которой снова имеет место оценка (3.2.34) с той же константой $c>0$. $\square$

3.2.4 Задача Коши для интегродифференциального уравнения

На базе доказанных утверждений о разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения (3.2.2) перейдем теперь к изучению задачи Коши для интегродифференциального уравнения (3.2.1). Рассмотрим сначала простейший случай, когда выполнены условия (3.2.3), (3.2.4).

Осуществим для интегродифференциального уравнения (3.2.1) те же преобразования, которые были проделаны в п. 3.2.1 для дифференциального уравнения (3.2.2) (см. формулы (3.2.5)–(3.2.8)). Тогда возникает задача Коши вида

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \mathcal{V}_k(t,\xi)\mathcal{A}_k y(\xi)\,d\xi = \widehat{f}_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{3.2.45}$$

$$y(t) := \left(\frac{du}{dt}; \frac{dv}{dt}\right)^{\tau},\ y^0 := (u^1; -iB^{1/2}u^0)^{\tau},\ \widehat{f}_0(t) := (f(t) - \varphi_0(t); 0)^{\tau},$$

$$\mathcal{A}_0 := i\begin{pmatrix} I & -iFB^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B^{1/2} \\ B^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(B^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}),$$

$$\mathcal{A}_k = \operatorname{diag}(A_k; 0), \quad \mathcal{V}_k(t,\xi) = \operatorname{diag}(V_k(t,\xi); 0), \quad k = \overline{1,m}, \tag{3.2.46}$$

$$V_k(t,\xi)=\int\limits_{\xi}^{t} G_k(t,s)ds,\ \ k\ =\ \overline{1,m},\ \ \varphi_0(t)=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{0}^{t} G_k(t,s)A_k u^0 ds. \quad (3.2.47)$$

Теорема 3.2.4. *Пусть в задаче Коши* (3.2.1) *выполнены следующие условия:*

$$F = F^* \geqslant 0, \quad B = B^* \gg 0, \quad G = 0, \quad \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{H};$$

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1;$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\triangle_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})),\ \triangle_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}; \quad (3.2.48)$$

$$\mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad k = \overline{1,m}. \quad (3.2.49)$$

Тогда задача (3.2.45)–(3.2.47) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 3.1.7.

Именно, как и при доказательстве теоремы 3.1.7, достаточно убедиться, что для задачи (3.2.45)–(3.2.47) выполнены условия теоремы 1.3.3, а потому и ее утверждение.

В самом деле, оператор $\mathcal{A}_0$ из (3.2.46) по лемме 3.2.1 является максимальным аккретивным оператором и потому $(-\mathcal{A}_0)$ — генератор сжимающей полугруппы. Далее, так как $u^0 \in \mathcal{D}(B)$, $u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, то $y^0 = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, а в силу (3.2.48) и (3.2.47) $\varphi_0(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$. Поэтому $\widehat{f}_0(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}^2)$, $p > 1$. Наконец, в силу (3.2.49)

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_k) = \mathcal{D}(A_k) \oplus \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(B^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad k = \overline{1,m},$$

а также в силу (3.2.48) выполнены условия

$$\mathcal{V}_k(t,\xi),\ \ \partial \mathcal{V}_k(t,\xi)/\partial t \in C(\triangle_T;\mathcal{L}(\mathcal{H}^2)), \quad k = \overline{1,m}.$$

Из этих свойств по теореме 1.3.3 получаем, что задача (3.2.45)–(3.2.47) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. $\square$

В качестве следствия из этой теоремы получаем такой результат.

Теорема 3.2.5. *При условиях теоремы 3.2.4 задача Коши* (3.2.1) *для интегродифференциального уравнения второго порядка имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Так как при выполнении условий теоремы 3.2.4 задача Коши (3.2.45) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, то для этого решения имеют место следующие уравнения и начальные условия:

$$\frac{dy_1}{dt} + Fy_1 + iB^{1/2}y_2 + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t V_k(t,\xi)A_k y_1(\xi)d\xi = \\ = f(t) - \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)A_k u^0 ds, \quad (3.2.50)$$

$$\frac{dy_2}{dt} + iB^{1/2}y_1 = 0, \quad y_1(0) = u^1, \quad y_2(0) = -iB^{1/2}u^0, \quad (3.2.51)$$

причем здесь в уравнениях все слагаемые — непрерывные функции со значениями в $\mathcal{H}$.

Вводя функции

$$u(t) := \int_0^t y_1(\xi)d\xi + u^0, \quad v(t) := \int_0^t y_2(\xi)d\xi, \quad (3.2.52)$$

и исключая $v(t)$ из (3.2.50), (3.2.51), приходим к выводу, что функция $u(t)$ является сильным решением уравнения (3.2.1). □

3.3 Промежуточный класс уравнений (средне демпфированные динамические системы)

В данном параграфе изучаются интегродифференциальные уравнения, в которых их главная часть не является ни параболической, ни гиперболической в смысле определений параграфов 3.1 и 3.2. Снова рассматривается задача Коши вида (3.2.1), т.е.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds = f(t), \tag{3.3.1}$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

а также "укороченная" задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{3.3.2}$$

По-прежнему предполагаем, что операторные коэффициенты в (3.3.2) сравнимы, однако, в отличие от параграфов 3.1 и 3.2, иным образом.

3.3.1 Простейший случай дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим сначала ситуацию, аналогичную изученным в пп. 3.1.2 и 3.2.1:

$$G = 0, \quad F \gg 0, \quad B \gg 0, \quad \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3.3.3}$$

Тогда речь идет о задаче Коши (3.3.2) при условиях (3.3.3).

Пусть эта задача имеет сильное решение на отрезке $[0, T]$. Введем снова функцию $v(t)$ соотношениями

$$\frac{dv}{dt} = -iB^{1/2}u(t), \quad v(0) = 0. \tag{3.3.4}$$

Так как для сильного решения $u(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(F))$, что функция dv/dt непрерывно дифференцируема, и тогда

$$\frac{d^2v}{dt^2} + iB^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = -iB^{1/2}u^0.$$

С учетом этого задача (3.3.2), (3.3.3) приводит к системе уравнений в пространстве $\mathcal{H}$ или к задаче Коши в пространстве $\mathcal{H}^2$:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{3.3.5}$$

$$y(t) := \left(\frac{du}{dt}; \frac{dv}{dt}\right)^\tau, \quad y^0 := (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \quad f_0(t) := (f(t); 0)^\tau,$$

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} F & iB^{1/2} \\ iB^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3.3.6}$$

Заметим, что на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ оператор $\mathcal{A}_0$ определен корректно, так как $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B^{1/2})$. Очевидно также, что оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{3.3.7}$$

Чтобы перейти к задаче Коши с равномерно аккретивным оператором, введем в (3.3.5) новую искомую функцию по закону

$$y(t) = \mathrm{e}^{at} z(t), \quad a > 0.$$

Тогда для отыскания $z(t)$ получим задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_a z = \mathrm{e}^{-at} f_0(t) =: f_a(t), \quad z(0) = y(0) = y^0, \tag{3.3.8}$$

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{A}_0 + aJ = \begin{pmatrix} F_a & iB^{1/2} \\ iB^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \ F_a := F + aI, \ \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) := \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{3.3.9}$$

Лемма 3.3.1. *Операторная матрица $\mathcal{A}_a$ допускает факторизацию*

$$\mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_a & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & aI + V_a V_a^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ_a^+ \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.3.10}$$

$$Q_a := B^{1/2} F_a^{-1}, \ \mathcal{D}(Q_a) = \mathcal{H}, \ Q_a^+ := F_a^{-1} B^{1/2}, \ \mathcal{D}(Q_a^+) = \mathcal{D}(B^{1/2}), \tag{3.3.11}$$

$$V_a := B^{1/2} F_a^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(V_a) = \mathcal{R}(V_a^{-1}) = \mathcal{R}(F_a^{1/2} B^{-1/2}), \tag{3.3.12}$$

$$V_a^+ := F_a^{-1/2} B^{1/2}, \quad \mathcal{D}(V_a^+) = \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3.3.13}$$

Доказательство. Факторизация (3.3.10) проверяется непосредственно, с учетом обозначений (3.3.11)–(3.3.13). Заметим еще, что из второго включения в (3.3.3) следует, что оператор $Q_a = (B^{1/2}F^{-1})(I + aF^{-1})^{-1}$ ограничен и потому задан на всем $\mathcal{H}$. Далее, согласно первому включению в (3.3.3) оператор $V_a^{-1} = F_a^{1/2} B^{-1/2} = (I + aF^{-1})^{1/2}(F^{1/2}B^{-1/2})$ ограничен и также задан на всем $\mathcal{H}$. Поэтому обратный к нему оператор V_a задан на $\mathcal{R}(V_a^{-1})$ и является, вообще говоря, неограниченным оператором. $\square$

Лемма 3.3.2. *Имеют место соотношения*

$$Q_a^+ = Q_a^*|\mathcal{D}(B^{1/2}), \quad \overline{Q_a^+} = Q_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.3.14}$$

$$V_a^+ = V_a^*|\mathcal{D}(B^{1/2}),\ \overline{V_a^+} = V_a^* : \mathcal{D}(V_a^*) = \mathcal{R}((V_a^*)^{-1}) \subset \mathcal{H},\ \mathcal{R}(V_a^*) = \mathcal{H}. \tag{3.3.15}$$

Доказательство. Свойства (3.3.14) проверяются непосредственно. Свойства (3.3.15) устанавливаются аналогично, с тем отличием, что оператор $V_a = (V_a^{-1})^{-1}$, как отмечалось выше, является неограниченным оператором, а потому таковым является и $V_a^* = ((V_a^{-1})^*)^{-1}$. □

Следствием лемм 3.3.1 и 3.3.2 является такой факт.

Теорема 3.3.1. *Оператор $\mathcal{A}_a$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_a)$ из* (3.3.9)*,* (3.3.6) *допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора*

$$\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_a & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & aI + V_a V_a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ_a^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{3.3.16}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{u = (u_1; u_2)^\tau : u_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad u_1 + iQ_a^* u_2 \in \mathcal{D}(F_a)\}, \tag{3.3.17}$$

на которой он действует по закону

$$\mathcal{A}u = \begin{pmatrix} F_a(u_1 + iQ_a^* u_2) \\ iB^{1/2}u_1 + au_2 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{3.3.18}$$

Доказательство. Из лемм 3.3.1 и 3.3.2 следует, что оператор $\mathcal{A}$ получается из $\mathcal{A}_a$ путем замены в (3.3.10) Q_a^+ на Q_a^* и V_a^+ на V_a^*, т.е. имеет представление (3.3.16). Далее, так как оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен (см. (3.3.7)), то $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I}$ равномерно аккретивен:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_a y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant a\|y\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Поэтому после замыкания оператор $\mathcal{A}$ также является равномерно аккретивным:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant a\|y\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad a > 0, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Отсюда и из представления (3.3.16), в частности, следует, что $\mathcal{A}$ — максимальный равномерно аккретивный оператор, имеющий ограниченный обратный

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -iQ_a^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{-1} & 0 \\ 0 & (aI + V_a V_a^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -iQ_a & I \end{pmatrix}$$

с оценкой нормы

$$\|\mathcal{A}^{-1}\| \leqslant a^{-1}.$$

Установим теперь формулы (3.3.17) и (3.3.18). Пусть $u = (u_1; u_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда в силу (3.3.16)

$$\mathcal{A}u = \begin{pmatrix} F_a(u_1 + iQ_a^* u_2) \\ iQ_a F_a(u_1 + iQ_a^* u_2) + (aI + V_a V_a^*)u_2 \end{pmatrix}, \tag{3.3.19}$$

откуда получаем, что

$$u_1 + iQ_a^* u_2 \in \mathcal{D}(F_a), \quad u_2 \in \mathcal{D}(V_a V_a^*).$$

Пусть $u_2 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ (см. (3.3.6)), тогда по лемме 3.3.2 и в силу (3.3.3)

$$Q_a^* u_2 = Q_a^+ u_2 = F_a^{-1} B^{1/2} u_2 \in \mathcal{D}(F_a) = \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}).$$

Отсюда с учетом соотношения $Q_a F_a = B^{1/2}$ из второй строки в (3.3.19) следует, что $u_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, и эта строка равна

$$\begin{aligned} &iB^{1/2}u_1 - B^{1/2}F_a^{-1}B^{1/2}u_2 + au_2 + V_a V_a^+ u_2 = \\ &\qquad = iB^{1/2}u_1 + au_2, \ u_2 \in \mathcal{D}(B^{1/2}). \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Так как $\mathcal{D}(B^{1/2})$ плотно в $\mathcal{H}$, то после замыкания по элементам $u_2 \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ получаем формулу (3.3.20) при любом $u_2 \in \mathcal{H}$. Отсюда и следует соотношения (3.3.17) и (3.3.18). $\square$

3.3.2 Задача Коши для ассоциированного дифференциального уравнения

Рассмотрим теперь наряду с задачей (3.3.2) задачу Коши

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dt^2} + F\Big(\frac{du}{dt} + Q_a^* B^{1/2} u\Big) + aQ_a^* B^{1/2} u = f(t), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \end{gathered} \tag{3.3.21}$$

$$Q_a^* = (B^{1/2}F_a^{-1})^* = \overline{Q_a^+}, \quad F_a := F + aI, \quad a > 0,$$

и назовем (3.3.21) задачей, ассоциированной с задачей (3.3.2), (3.3.3).

Определение 3.3.1. *Сильным решением ассоциированной задачи* (3.3.21) *на отрезке* $[0,T]$ *назовем такую функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{H}$, *для которой выполнены следующие условия:*

1°. $u(t) \in \mathcal{D}(B^{1/2})$ *для* $t \in [0,T]$ *и* $B^{1/2}u(t) \in C([0,T];\mathcal{H})$;

2°. $du/dt + Q_a^* B^{1/2}u \in \mathcal{D}(F)$ *и* $F(du/dt + Q_a^* B^{1/2}u) \in C([0,T];\mathcal{H})$;

3°. $u(t) \in C^2([0,T];\mathcal{H})$;

4°. *для любого* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (3.3.21);

5°. *выполнены начальные условия* (3.3.21).

□

Лемма 3.3.3. *Если сильное решение* $u(t)$ *ассоциированной задачи* (3.3.21) *обладает дополнительными свойствами гладкости*

$$u(t) \in \mathcal{D}(B), \quad Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{H}), \tag{3.3.22}$$

то оно является сильным решением задачи (3.3.2),(3.3.3).

Доказательство. Если выполнены свойства (3.3.22), то в силу (3.3.14)

$$Q_a^* B^{1/2}u(t) = Q_a^+ B^{1/2}u(t) = F_a^{-1}Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(F)).$$

Поэтому в (3.3.21) можно раскрыть скобки во втором слагаемом слева:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + (F_a - aI)F_a^{-1}Bu(t) + aF_a^{-1}Bu(t) = f(t).$$

Отсюда и следует уравнение (3.3.2) при $G = 0$. □

Таким образом, уравнение (3.3.21) является обобщением уравнения (3.3.2) на тот случай, когда свойства (3.3.22) не имеют места.

Теорема 3.3.2. *Пусть выполнены условия* (3.3.3) *и условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1. \tag{3.3.23}$$

Тогда существует единственное сильное решение ассоциированной задачи Коши (3.3.21) *на отрезке* $[0,T]$. *Если для этого решения выполнены дополнительные свойства гладкости* (3.3.22), *то существует единственное сильное решение задачи* (3.3.2), (3.3.3) *при* $t \in [0,T]$.

Доказательство. В силу леммы 3.3.3 достаточно установить лишь справедливость первого утверждения теоремы.

Рассмотрим взамен (3.3.8) задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + f_a(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.3.24}$$

с оператором $\mathcal{A}$ из (3.3.16), (3.3.18). Если выполнены условия (3.3.23), то в (3.3.24)

$$y^0 = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{3.3.25}$$

$$f_a(t) = \mathrm{e}^{-at}(f(t); 0)^\tau \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H}^2), \quad p > 1. \tag{3.3.26}$$

По теореме 3.3.1 оператор $(-\mathcal{A})$ является максимальным равномерно диссипативным оператором и потому генератором (C_0)–полугруппы $\mathcal{U}(t)$ сжимающих операторов с оценкой для нормы

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-at}, \quad a > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому по теореме С.Я. Якубова (теорема 1.1.2) задача (3.3.24) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, что справедливы соотношения (см. (3.3.17), (3.3.18))

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a(z_1 + iQ_a^* z_2) = \mathrm{e}^{-at} f(t), \quad z_1(0) = u^1, \tag{3.3.27}$$

$$\frac{dz_2}{dt} + iB^{1/2}z_1 + az_2 = 0, \quad z_2(0) = -iB^{1/2}u^0, \tag{3.3.28}$$

где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$, причем

$$z_1(t) + iQ_a^* z_2(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(F_a)).$$

Из (3.3.28) получаем связь

$$z_2(t) = -i\mathrm{e}^{-at}B^{1/2}u^0 - i\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}B^{1/2}z_1(s)ds.$$

Подставляя это выражение для $z(t)$ в (3.3.27), приходим к задаче

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a\Big(z_1(t) + \mathrm{e}^{-at}Q_a^* B^{1/2}u^0 + Q_a^*\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}B^{1/2}z_1(s)ds\Big) = \\ = f(t)\mathrm{e}^{-at}, \quad z_1(0) = u^1. \tag{3.3.29}$$

Так как $u^0 \in \mathcal{D}(B)$, то $Q_a^* B^{1/2} u^0 = Q_a^+ B^{1/2} u^0 = F_a^{-1} B u^0 \in \mathcal{D}(F_a)$, и (3.3.29) принимает вид

$$\frac{dz_1}{dt} + (F + aI)\Big(z_1(t) + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} Q_a^* B^{1/2} z_1(s)ds\Big) =$$
$$= f(t)\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-at} B u^0, \quad z_1(0) = u^1.$$

Осуществим здесь обратную замену для $z_1(t)$, т.е.

$$z_1(t) = \mathrm{e}^{-at} y_1(t) = \mathrm{e}^{-at} \frac{du}{dt}.$$

Тогда для функции $u = u(t)$ выполнены соотношения

$$\mathrm{e}^{-at}\frac{d^2u}{dt^2} - a\mathrm{e}^{-at}\frac{du}{dt} + (F+aI)\Big(\mathrm{e}^{-at}\frac{du}{dt} + \mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^t Q_a^* B^{1/2} \mathrm{e}^{as}\mathrm{e}^{-as}\frac{du}{ds}ds\Big) =$$
$$= f(t)\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-at} B u^0, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (3.3.30)$$

Поскольку в (3.3.28) $B^{1/2} z_1(t) = \mathrm{e}^{-at} B^{1/2}(du/dt)$ непрерывна при $t \in [0,T]$, а оператор Q_a^* ограничен, то

$$\int\limits_0^t Q_a^* B^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds = Q_a^* B^{1/2}(u(t) - u^0),$$

и потому из (3.3.30) следует, что выполнены уравнение и начальные условия (3.3.21), причем в уравнении (3.3.21) все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$. □

Ослабим теперь требования на функцию $f(t)$ из (3.3.2), усилив требования на взаимосвязи (3.3.3) между областями определения операторных коэффициентов.

Определение 3.3.2. *Оператор B называется A-компактным, если оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1} и $BA^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$.* □

Теорема 3.3.3. *Пусть выполнены условия* (3.3.3) *и оператор $B^{1/2}$ является F-компактным. Тогда при условиях*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in C^\gamma([0,T];\mathcal{H}), \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \quad (3.3.31)$$

ассоциированная задача Коши (3.3.21) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Если оператор $B^{1/2}$ является F–компактным, то

$$Q_a = B^{1/2}F_a^{-1} = (B^{1/2}F^{-1})FF_a^{-1} = (B^{1/2}F^{-1})(I+aF^{-1})^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}).$$

Поэтому в (3.3.16) оператор $\mathcal{A}$ является слабым возмущением самосопряженного неограниченного положительно определенного оператора

$$\mathcal{A}_{00} := \operatorname{diag}(F_a; aI + V_aV_a^*), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{00}) := \mathcal{D}(F_a) \oplus \mathcal{D}(V_aV_a^*), \qquad (3.3.32)$$

и имеет представление

$$\mathcal{A} = (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2), \quad \mathcal{S}_j \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2), \quad j = 1, 2, \qquad (3.3.33)$$

причем крайние сомножители обратимы и обратные имеют ту же структуру.

Повторяя доказательство теоремы 3.3.2, рассмотрим снова задачу Коши (3.3.24). Здесь по-прежнему выполнены условия (3.3.25). Осуществим далее в (3.3.24) с оператором $\mathcal{A}$ из (3.3.33) дополнительную замену искомой функции:

$$(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)z(t) =: w(t). \qquad (3.3.34)$$

Тогда, применяя к обеим частям полученного уравнения (ограниченный и ограниченно обратимый) оператор $(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)$, приходим к равносильной задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_{00}w + f_a(t), \\ w(0) &= (u^1 + Q_a^*B^{1/2}u^0; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \end{aligned} \qquad (3.3.35)$$

где уже учтено, что

$$(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)f_a(t) \equiv f_a(t).$$

Заметим теперь, что для самосопряженного положительно определенного оператора $\mathcal{A}_{00}$ из (3.3.32) в силу леммы 3.3.2

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00}) \supset \mathcal{D}(\operatorname{diag}(F_a; aI + V_aV_a^+)) = \mathcal{D}(F_a) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Далее, в силу (3.3.33)

$$(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1) =: (\mathcal{I} + \mathcal{S}), \quad \mathcal{S} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2),$$

и потому (3.3.35) является абстрактным параболическим уравнением. Соответственно оператор $(-(\mathcal{I}+\mathcal{S})\mathcal{A}_{00})$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем полуось $t>0$.

Из последнего условия (3.3.31) следует, что функция $f_a(t)$ из (3.3.35), определяемая формулой (3.3.26), принадлежит $C^{\gamma}([0,T];\mathcal{H}^2)$. Что касается начального элемента $w(0)$ в (3.3.35), то легко проверяется, что $w(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00})$. В самом деле, если $u^0\in\mathcal{D}(B)$, $u^1\in\mathcal{D}(F)$, то $-iB^{1/2}u^0\in\mathcal{D}(B^{1/2})$, а

$$u^1+Q_a^*B^{1/2}u^0=u^1+Q_a^+B^{1/2}u^0=u^1+F_a^{-1}Bu^0\in\mathcal{D}(F).$$

Так как

$$\mathcal{D}(V_aV_a^*)\supset\mathcal{D}(V_aV_a^+)=\mathcal{D}(B^{1/2}F_a^{-1}B^{1/2})=\mathcal{D}(Q_aB^{1/2})=\mathcal{D}(B^{1/2}),$$

то из проведенных выкладок действительно следует, что $w(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00})$.

Итак, поскольку выполнены условия

$$w(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00}),\quad f_a(t)\in C^{\gamma}([0,T];\mathcal{H}^2),$$

то по теореме 1.4 из [2], с. 130, получаем, что задача (3.3.35) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Возвращаясь путем обратной замены (3.3.34) к задаче (3.3.24), приходим к выводу, что при выполнении условий данной теоремы задача (3.3.24) имеет сильное решение на $[0,T]$.

Для завершения доказательства осталось лишь повторить выкладки, изложенные при доказательстве теоремы 3.3.2, начиная с уравнений (3.3.27), (3.3.28) и до конца доказательства. □

Замечание 3.3.1. *В задаче* (3.3.2) *при условиях* (3.3.3) *для простоты дальнейших выкладок считалось, что гироскопический оператор* $G=0$. *Однако если* $0\neq G=G^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, *все утверждения теорем 3.3.1–3.3.3 по-прежнему имеют место. При этом в* (3.3.16) *справа следует добавить слагаемое* $i\,\mathrm{diag}(G;0)$, *в формуле* (3.3.18) *считать, что*

$$\mathcal{A}u=\begin{pmatrix} F_a(u_1+iQ_a^*u_2)+iGu_1\\ iB^{1/2}u_1+au_2\end{pmatrix},$$

а в качестве ассоциированной задачи (3.3.21) *рассматривать задачу Коши*

$$\frac{d^2u}{dt^2}+F\Big(\frac{du}{dt}+Q_a^*B^{1/2}u\Big)+iG\frac{du}{dt}+$$

$$+ aQ_a^* B^{1/2} u = f(t),\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1.$$

$\square$

3.3.3 Операторы диссипации и потенциальной энергии ограничены снизу, а гироскопический оператор неограничен

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в задаче (3.3.2) операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$F \geqslant \gamma_F I, \quad F_a := F + aI \geqslant \alpha_F I, \quad \alpha_F := \gamma_F + a > 0, \tag{3.3.36}$$

$$B \geqslant \gamma_B I, \quad B_b := B + bI \geqslant \alpha_B I, \quad \alpha_B := \gamma_B + b > 0,$$

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_b) \subset \mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(F_a) \subset \mathcal{D}(B_b^{1/2}) \subset \mathcal{D}(F_a^{1/2}), \tag{3.3.37}$$

$$G = G^*, \quad \mathcal{D}(G) \supset \mathcal{D}(F_a^{1/2}). \tag{3.3.38}$$

Заметим, что правое условие в (3.3.37) есть следствие левого и неравенства Гайнца.

При неограниченном G в задаче (3.3.2) можно применить подход, отличный от изложенного в пп. 3.3.1 и 3.3.2. Именно, вместо (3.3.10), (3.1.16) можно использовать другую факторизацию операторной матрицы (3.3.9).

Проводя для задачи (3.3.2) те же преобразования, что и в п. 3.1.3, начиная от соотношений (3.1.48) и до (3.1.54), снова приходим к задаче (3.1.56)–(3.1.58), т.е.

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_{a,b} z = f_{a,u}(t) := \mathrm{e}^{-at} f_{0,u}(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.3.39}$$

$$f_{0,u}(t) = (f(t) + bu(t); 0)^\tau, \quad y^0 = (u^1; -iB_b^{1/2} u^0)^\tau,$$

$$\mathcal{A}_{a,b} := \begin{pmatrix} F_a + iG & iB_b^{1/2} \\ iB_b^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}) = \mathcal{D}(F_a) \oplus \mathcal{D}(B_b^{1/2}). \tag{3.3.40}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_{a,b}$ равномерно аккретивен (см. (3.1.59)):

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{a,b} z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant c\|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad c := \min(\alpha_F; a) > 0, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b}). \tag{3.3.41}$$

Введем по аналогии с (3.3.12), (3.3.13) вспомогательные операторы

$$V_{a,b} := B_b^{1/2} F_a^{-1/2},\ \mathcal{D}(V_{a,b}) = \mathcal{R}(V_{a,b}^{-1}) = \mathcal{R}(F_a^{1/2} B_b^{-1/2}),$$
$$\mathcal{R}(V_{a,b}) = \mathcal{D}(F_a^{1/2} B_b^{-1/2}) = \mathcal{H}, \tag{3.3.42}$$

$$V_{a,b}^{+} := F_a^{-1/2} B_b^{1/2},\ \mathcal{D}(V_{a,b}^{+}) = \mathcal{R}(B_b^{-1/2} F_a^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}),\ \overline{V_{a,b}^{+}} = V_{a,b}^{*}. \tag{3.3.43}$$

Так же, как и в леммах 3.3.1 и 3.3.2, устанавливаем следующие факты.

Лемма 3.3.4. *Операторная матрица $\mathcal{A}_{a,b}$ допускает факторизацию*

$$\mathcal{A}_{a,b} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iG_a & iV_{a,b}^{+} \\ iV_{a,b} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$G_a := F_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

где $V_{a,b}$ и $V_{a,b}^{+}$ — операторы из (3.3.42), (3.3.43), *для которых*

$$V_{a,b}^{+} = V_{a,b}^{*}|\mathcal{D}(B_b^{1/2}),\ \overline{V_{a,b}^{+}} = V_{a,b}^{*} : \mathcal{D}(V_{a,b}^{*}) =$$
$$= \mathcal{R}((V_{a,b}^{*})^{-1}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ \mathcal{R}(V_{a,b}^{*}) = \mathcal{H}. \tag{3.3.44}$$

$\square$

Обобщением теоремы 3.3.1 является следующий результат.

Теорема 3.3.4. *Операторная матрица $\mathcal{A}_{a,b}$ (см.* (3.3.40)*) допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора*

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{a,b}} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + iG_a & iV_{a,b}^{*} \\ iV_{a,b} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{3.3.45}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{z = (z_1; z_2)^\tau : z_1 \in \mathcal{D}(B_b^{1/2}),$$
$$(I + iG_a)F_a^{1/2} z_1 + iV_{a,b}^* z_2 \in \mathcal{D}(F_a^{1/2})\}, \quad (3.3.46)$$

на которой этот оператор действует по закону

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} F_a^{1/2}((I + iG_a)F_a^{1/2} z_1 + iV_{a,b}^* z_2) \\ iB_b^{1/2} z_1 + a z_2 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^2. \quad (3.3.47)$$

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 3.3.1. Именно, из леммы 3.3.4 следует, что оператор $\mathcal{A}$ получается замыканием оператора $\mathcal{A}_{a,b}$ путем замены $V_{a,b}^+$ на $V_{a,b}^*$ и потому имеет представление (3.3.45). При этом $G_a = G_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ в силу условий (3.3.38). Так как $\mathcal{A}_{a,b}$ — равномерно аккретивный оператор (см. (3.3.41)), то после замыкания оператор $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{a,b}}$ — также равномерно аккретивный с той же константой $c > 0$.

Отметим еще, что соотношения (3.3.46), (3.3.47) следуют непосредственно из (3.3.45) и определения $V_{a,b}$ (см. (3.3.42)). □

Рассмотрим наряду с задачей (3.3.39) задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z = f_{a,u}(t), \quad z(0) = y^0, \quad (3.3.48)$$

(с максимальным равномерно аккретивным оператором $\mathcal{A}$) при тех же условиях (3.3.36)–(3.3.38). Учитывая, что

$$u(t) = u^0 + \int_0^t u'(\xi)d\xi = u^0 + \int_0^t y_1(\xi)d\xi = u^0 + \int_0^t \mathrm{e}^{a\xi} z_1(\xi)d\xi,$$

в терминах искомой функции $z(t) = \mathrm{e}^{-at} y(t) = \mathrm{e}^{-at}(u'(t); v'(t))^\tau$ задачу (3.3.48) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z - b\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)} z_1(\xi)d\xi; 0\Big)^\tau =$$
$$= \mathrm{e}^{-at}(f(t) + bu^0; 0)^\tau, \quad z(0) = y^0. \quad (3.3.49)$$

Определение 3.3.3. *Назовем задачу Коши*

$$\frac{d^2u}{dt^2}+iG\frac{du}{dt}+F_a^{1/2}\Big(F_a^{1/2}\frac{du}{dt}+V_{a,b}^*B_b^{1/2}u\Big)-$$
$$-a\frac{du}{dt}-bu=f(t),\quad u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1, \tag{3.3.50}$$

задачей, ассоциированной с задачей Коши (3.3.2), (3.3.36)–(3.3.38). □

Лемма 3.3.5. *Если сильное решение* $u(t)$ *задачи* (3.3.50) *обладает дополнительным свойством гладкости*

$$u(t)\in\mathcal{D}(B),\quad Bu(t)\in C([0,T];\mathcal{H}), \tag{3.3.51}$$

то оно является сильным решением задачи (3.3.2), (3.3.36)–(3.3.38).

Доказательство. Если выполнены условия (3.3.51), то в силу (3.3.44) имеем

$$B_bu(t)\in C([0,T];\mathcal{H}),\quad B_b^{1/2}u(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(B_b^{1/2})),$$

$$V_{a,b}^*B_b^{1/2}u(t)=V_{a,b}^+B_b^{1/2}u(t)=F_a^{-1/2}B_bu(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(F_a^{1/2})),$$

и тогда в (3.3.50) можно раскрыть скобки. Отсюда получаем, что уравнение (3.3.50) переходит в уравнение (3.3.2), где все слагаемые — непрерывные функции $t\in[0,T]$. □

Теорема 3.3.5. *Пусть в задаче* (3.3.2), (3.3.36)–(3.3.38) *выполнены условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(B),\quad u^1\in\mathcal{D}(F),\quad f(t)\in W_p^1([0,T];\mathcal{H}),\quad p>1. \tag{3.3.52}$$

Тогда задача Коши (3.3.48), *а также ассоциированная задача* (3.3.50) *имеют единственные сильные решения на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. При условиях (3.3.52) для задачи (3.3.49) выполнены условия

$$y^0=(u^1;-iB_b^{1/2}u^0)^\tau\in\mathcal{D}(F_a)\oplus\mathcal{D}(B_b^{1/2})=\mathcal{D}(\mathcal{A}_{a,b})\subset\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$\mathrm{e}^{-at}(f(t)+bu^0;0)^\tau\in W_p^1([0,T];\mathcal{H}),\quad p>1.$$

Отсюда, как и на этапах 1)–3) доказательства теоремы 3.1.3, приходим к выводу, что задача (3.3.49) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Для этой задачи выполнены следующие уравнения и начальные условия

$$\frac{dz_1}{dt}+F_a^{1/2}[(I+iG_a)F_a^{1/2}z_1+iV_{a,b}^*z_2]-$$
$$-b\int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)}z_1(\xi)d\xi=\mathrm{e}^{-at}(f(t)+bu^0),\quad z_1(0)=u^1,\quad (3.3.53)$$

$$\frac{dz_2}{dt}+az_2+iB_b^{1/2}z_1=0,\quad z_2(0)=-iB_b^{1/2}u^0,$$

где все слагаемые в уравнениях являются непрерывными функциями $t\in[0,T]$.

Отсюда выводим, что для $z_1(t)=: du/dt$ будет $\mathrm{e}^{at}z_2(t)=-iB_b^{1/2}u(t)$, и подстановка этого выражения в (3.3.53) приводит к (3.3.50). При этом заметим, что для решений задачи (3.3.49) из свойства $z(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ следует свойство $z_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(B_b^{1/2}))\subset C([0,T];\mathcal{D}(F_a^{1/2}))\subset C([0,T];\mathcal{D}(G))$ и потому $iG_aF_a^{1/2}z_1(t)=iF_a^{-1/2}Gz_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(F_a^{1/2}))$. $\square$

Таким образом, при выполнении условий (3.3.52), (3.3.36)–(3.3.38) ассоциированная задача Коши с неограниченным гироскопическим оператором G имеет сильное решение, а если это решение обладает дополнительным свойством гладкости (3.3.51), то и исходная задача (3.3.2) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$.

3.3.4 Задача Коши для интегродифференциального уравнения. Простейший случай

Рассмотрим, наконец, задачу (3.3.1) для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(F+iG)\frac{du}{dt}+Bu+$$
$$+\sum_{k=1}^m\int\limits_0^t G_k(t,s)A_ku(s)ds=f(t),\quad u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1.\quad (3.3.54)$$

Изучим сначала простейший случай, когда

$$F \gg 0,\ B \gg 0,\ G = 0,\ \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(F^{1/2}). \quad (3.3.55)$$

Осуществим в уравнении (3.3.54) те же преобразования, которые в п. 3.3.1 были проделаны для "укороченной" задачи (3.3.2), см. формулы (3.3.4)–(3.3.9), леммы 3.3.1, 3.3.2, теорему 3.3.1. Тогда сначала возникает обобщающая задачу (3.3.8) задача Коши

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_a z + \Big(\sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)} V_k(t,\xi) A_k z_1(\xi) d\xi; 0\Big)^\tau =$$
$$= \mathrm{e}^{-at}(f(t);0)^\tau, \quad z(0) = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \quad (3.3.56)$$

а затем соответствующая задача с замкнутым оператором $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$ (см. (3.3.9), (3.3.16), (3.3.17)):

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{A} z + \Big(\sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)} V_k(t,\xi) A_k z_1(\xi) d\xi; 0\Big)^\tau =$$
$$= \mathrm{e}^{-at}(f(t);0)^\tau, \quad z(0) = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \quad (3.3.57)$$

$$V_k(t,\xi) = \int\limits_\xi^t G_k(t,s)ds, \quad z(t) = \mathrm{e}^{-at}y(t) = \mathrm{e}^{-at}(du/dt; -iB^{1/2}u(t))^\tau.$$

Здесь операторная матрица $\mathcal{A}_a$ задана формулами (3.3.9), (3.3.10) на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2})$, а операторная матрица $\mathcal{A}$ — формулой (3.3.16) на области определения (3.3.17).

Определение 3.3.4. *Назовем задачу*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + F\Big(\frac{du}{dt} + Q_a^* B^{1/2} u\Big) + aQ_a^* B^{1/2} u +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t G_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (3.3.58)$$

задачей Коши для уравнения, ассоциированного с (3.3.54). □

Если сильное решение $u(t)$ ассоциированной задачи Коши (3.3.58) обладает дополнительными свойствами гладкости (3.3.22), т.е.

$$u(t) \in \mathcal{D}(B), \quad Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{H}), \tag{3.3.59}$$

то оно является также сильным решением задачи Коши (3.3.54). Это утверждение уже доказано в лемме 3.3.3, так как его доказательство не затрагивает интегральные слагаемые в (3.3.58).

Теорема 3.3.6. *Пусть выполнены условия* (3.3.55), *а также условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(F), \quad f(t) \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}), \quad p > 1, \tag{3.3.60}$$

$$\begin{gathered} G_k(t,s), \ \ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\triangle_T;\mathcal{L}(\mathcal{H})), \\ \triangle_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}, \quad k = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{3.3.61}$$

$$\mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.3.62}$$

Тогда ассоциированная задача Коши (3.3.58) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Если выполнены условия (3.3.60), то в задаче (3.3.57)

$$z(0) = (u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau \in \mathcal{D}(F) \oplus \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{3.3.63}$$

$$\mathrm{e}^{-at}(f(t);0)^\tau \in W_p^1([0,T];\mathcal{H}^2).$$

Поэтому при условиях (3.3.61), (3.3.62) задача (3.3.57) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$. Доказательство этого факта проводится в точности так же, как доказательство аналогичного утверждения в теореме 3.1.7 (см. формулы (3.1.110)–(3.1.112)), причем на последнем этапе — со ссылкой на теорему 1.3.3. Заметим только, что при этом по-прежнему $\varphi_0(t) := \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)A_k u(s)ds \in C^1([0,T];\mathcal{H})$, и, кроме того, для операторов $\mathcal{A}_k := \operatorname{diag}(A_k;0)$ выполнено свойство (см. (3.3.55), (3.3.62))

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_k) = D(A_k) \oplus \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(B^{1/2}) \oplus \mathcal{H} \supset \\ \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(z_1;z_2)^\tau : z_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \ \ z_1 + iQ_a^* z_2 \in \mathcal{D}(F_a)\}. \end{aligned}$$

Из существования сильного решения задачи (3.3.57) на отрезке $[0, T]$ следует, что имеют место соотношения (см. формулу (3.3.18))

$$\frac{dz_1}{dt} + F_a(z_1 + iQ_a^* z_2) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)} V_k(t,\xi) A_k z_1(\xi) d\xi = \mathrm{e}^{-at} f(t), \quad z_1(0) = u^1, \quad (3.3.64)$$

$$\frac{dz_2}{dt} + iB^{1/2} z_1 + a z_2 = 0, \quad z_2(0) = -iB^{1/2} u^0, \quad (3.3.65)$$

причем в уравнениях все слагаемые непрерывны по $t \in [0, T]$. Заменяя здесь $z_1(t) = \mathrm{e}^{-at} du/dt$, $z_2(t) = \mathrm{e}^{-at}(-iB^{1/2}u)$, т.е. совершая преобразования, обратные проведенным ранее при переходе от (3.3.54) к (3.3.56), получаем, что функция $u(t)$ является сильным решением ассоциированной задачи (3.3.58). $\square$

Аналогичным образом, со ссылкой на теорему 1.3.4, доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.3.7. *Пусть в задаче* (3.3.58) *выполнены условия* (3.3.55), (3.3.60)–(3.3.62)*, причем условие на* $f(t)$ *из* (3.3.60) *заменено на условие*

$$f(t) \in C^\gamma([0, T]; \mathcal{H}), \quad 0 < \gamma \leqslant 1,$$

и оператор $B^{1/2}$ *является* F*–компактным, т.е.* $B^{1/2} F^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. *Тогда ассоциированная задача Коши* (3.3.58) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Оно проводится снова по схеме доказательства теоремы 3.1.7, однако теперь с использованием факторизации оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура–Фробениуса (см. теорему 3.3.1 и формулы (3.3.16)–(3.3.18)).

Повторим некоторые этапы этой схемы. Так как $Q_a = B^{1/2} F_a^{-1} = B^{1/2} F^{-1}(I + aF^{-1})^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ и потому $Q_a^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, то оператор $\mathcal{A}$ представим в виде

$$\mathcal{A} = (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1) \mathcal{A}_{00} (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2), \quad \mathcal{A}_{00} := \operatorname{diag}(F_a; aI + V_a V_a^*),$$

где

$$\mathcal{I} + \mathcal{S}_1 := \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_a & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} + \mathcal{S}_2 := \begin{pmatrix} I & iQ_a^* \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2),$$

— ограниченные и ограниченно обратимые операторы той же структуры:

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_1)^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0\\ -iQ_a & I\end{pmatrix},\quad (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}=\begin{pmatrix} I & -iQ_a^*\\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

Далее, области определения операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{00}$ связаны соотношением

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{D}(\mathcal{A})=\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00})=\mathcal{D}(F_a)\oplus\mathcal{D}(V_aV_a^*). \tag{3.3.66}$$

Учитывая эти факты, осуществим в уравнении (3.3.57) замену искомой функции по формуле

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)z(t)=:w(t)$$

и подействуем слева оператором $(\mathcal{I}+S_2)$. Возникает задача Коши

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt}&=-(\mathcal{I}+\mathcal{S})\mathcal{A}_{00}w+\\ &+(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\Big(\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-\xi)}V_k(t,\xi)A_k(w_1-iQ_a^*w_2)(\xi)d\xi;0\Big)^{\tau}=\\ &=(\mathrm{e}^{-at}f(t);0)^{\tau},\quad w(0)=(u^1+Q_a^*B^{1/2}u^0;-iB^{1/2}u^0)^{\tau},\end{aligned} \tag{3.3.67}$$

$$\mathcal{I}+\mathcal{S}:=(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathcal{I}+S_1),\quad \mathcal{S}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}^2).$$

(Здесь учтено, что $(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)(\mathrm{e}^{-at}f(t);0)^{\tau}=(\mathrm{e}^{-at}f(t);0)^{\tau}$.)

Так как здесь, как и в (3.3.63), $z(0)=(u^1;-iB^{1/2}u^0)^{\tau}\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, то в силу связи (3.3.66)

$$w(0)=(u^1+Q_a^*B^{1/2}u^0;-iB^{1/2}u^0)^{\tau}=(u^1+F_a^{-1}Bu^0;-iB^{1/2}u^0)^{\tau}\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_{00}).$$

Кроме того,

$$(\mathrm{e}^{-at}f(t);0)^{\tau}\in C^{\gamma}([0,T];\mathcal{H}^2),\quad 0<\gamma\leqslant 1.$$

Отметим еще два обстоятельства:

1°. Оператор $-(\mathcal{I}+\mathcal{S})\mathcal{A}_{00}$ является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось $t\geqslant 0$.

2°. Оператор $\mathcal{A}_k:=\operatorname{diag}(A_k;0)$ в силу (3.3.63) обладает свойством

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_k)\supset\mathcal{D}(\mathcal{A}),\quad k=\overline{1,m},$$

и потому

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{D}(\mathcal{A}_k) \supset (\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{00}).$$

Отсюда по теореме 1.3.4 получаем, что задача (3.3.67) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Возвращаясь от (3.3.67) по обратным преобразованиям к задаче (3.3.57), т.е. к уравнениям (3.3.64), (3.3.65), а затем к искомой функции $u(t)$, приходим к выводу, что эта функция является сильным решением ассоциированной задачи Коши (3.3.58).

Отметим еще, что в процессе доказательства были учтены свойства (3.3.61) для

$$(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)\mathcal{V}_k(t,\xi)(\mathcal{I}+\mathcal{S}_2)^{-1}, \quad \mathcal{V}_k(t,\xi) = \mathrm{diag}(V_k(t,\xi);0), \quad k=\overline{1,m}.$$

□

Замечание 3.3.2. *Если в условиях теорем 3.3.6, 3.3.7 решения задачи* (3.3.58) *обладают дополнительными свойствами гладкости* (3.3.59)*, то при этих условиях существует единственное сильное решение задачи Коши* (3.3.54)*,* (3.3.55) *для интегродифференциального уравнения.*

□

Замечание 3.3.3. *В условиях* (3.3.55) *для простоты выкладок взято* $G=0$*. Все полученные в этом пункте результаты тривиально обобщаются и на случай* $G=G^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$*, в частности, теоремы 3.3.6 и 3.3.7 снова имеют место.* □

Замечание 3.3.4. *Случай более общих ограничений на операторные коэффициенты в уравнении* (3.3.54) *(см. например,* (3.3.36)–(3.3.38)*) также может быть изучен по схеме п. 3.3.3.* □

Литература

[1] Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально–операторные уравнения и корректные задачи. – М.: Физматлит, 1995. – 176 с.

[2] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. – К.: Выща школа, 1989. – 347 с.

[3] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.:. Наука, 1967. – 464 с.

[4] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

[5] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости //Труды Санкт-Петербургского матем. общества. – 1998. – Т.6 . – с. 5 – 33. Translated: AMS Translations (2). – Vol. 199. – 2000. – pp. 1–24.

[6] Azizov T.Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R. On the Problem of Small Motions and Normal Oscillations of a Viscous Fluid in a Partially Filled Container // Math. Nachr. 248–249. – 2003. – pp. 3–39.

[7] Kopachevsky N.D., Mennicken R., Pashkova Yu.S., Tretter C. Complete Second Order Linear Differential Operator Equations in Hilbert Space and Applications in Hydrodynamics //Transactions of the AMS. – 2004. – Vol. 356, № 12. – pp. 4737–4766.

[8] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[9] Денисова Т.В. Линейные интегродифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве /Сб. трудов Таврической научн. конф. студентов и молодых специалистов по информатике и математике. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2004. – с. 6–8.

[10] Ильченко Е.А. (M–N)-функции и интегродифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве /Сб. трудов Таврической научн. конф. студентов и молодых специалистов по информатике и математике. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2004. – с. 31–33.

[11] Шумейко Ю.Е. Линейные интегродифференциальные уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве /Сб. трудов Таврической научн. конф. студентов и молодых специалистов по информатике и математике. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2004. – с. 76–79.

[12] Илькив А.А. Задача Коши, порожденная проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда /Сб. трудов Таврической научн. конф. студентов и молодых специалистов по информатике и математике. – Симферополь: КНЦ НАНУ, 2004. – с. 28–30.

[13] Копачевский Н.Д. Задача Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве //Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. – Сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2003. – Т. 16(55), № 1. – с. 139–152.

[14] Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids //Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). – 2003. – Vol. 146. – 444 p.

[15] Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.

[16] Закора Д.А., Копачевский Н.Д. О спектральной задаче, связанной с интегродифференциальным уравнением второго порядка //Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. – Сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2004. – Т. 17(56), № 1. – с. 11–29.

[17] Kopachevsky N.D. Volterra Integrodifferential Equations on Hilbert Space and Applications /The Fifth Intern. Conf. on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts. Russia, Moscow, August 17–24, 2008. – pp. 36–37.

[18] Справочная математическая библиотека: Функциональный анализ /Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1964. – 425 с.

[19] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.

[20] Sowa M. Cosine operator functions //Rozpr. Math. – 1966. – V.49. – pp. 1–47.

[21] Fattorini H.O. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces, Notas de Matema'tica, vol. 99, Elsevier, North Holland, 1985. — 314 p.

[22] Travis C.C., Webb J.F. An Abstract Second Order Semilinear Volterra Integrodifferential Equations // SIAM Journ. Math Anal. – March, 2004. – Vol. 10, № 2. – pp. 412–424.

[23] Miloslavsky A.I. Spectral Analysis of Small Oscillations of a Visco–Elastic Fluid in an Open Container // Report № 1221, Uk 89, Ukraine, 1989. – p. 78 (in Russian).

[24] Miloslavsky A.I. On the Stability of a Visco–Elastic Isotropic Meduim in an Open Container // Dokl. AN SSSR. – 299(6). – 1998. – pp. 1341 – 1343 (in Russian).

Предметный указатель

Николай Дмитриевич Копачевский

Интегродифференциальные уравнения Вольтерра
в гильбертовом пространстве

Специальный курс лекций
для студентов специальности "Математика"

Корректура и верстка: *Э.Л. Газиев*

Подписано к печати 15.03.2012г. Формат 80x84 1/16.
Бумага тип. ОП. Объем 9,5 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. ул. Москалева 15/1.
ФЛП "Бондаренко О.А.".