К проблеме винтового движения идельной сжимаемой жидкости в трубе

Аширов А., Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З.

Туркменский государственный университет (Ашхабад), Таврический национальный университет (Украина), Крымский инженерно-педагогический университет (Украина)

В работе изучается линейная задача о движении идеальной сжимаемой жидкости, близком к винтовому движению в бесконечной трубе. В системе координат $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$, движение жидкости близко к равномерному перемещению с постоянной скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_3$ вдоль оси трубы. Для описания малых отклонений от такого винтового движения возникает следующая начально–краевая задача ([1], с. 402)

$$\partial\vec{u}/\partial t + v_0\,(\partial\vec{u}/\partial x_3) + \nabla p + 2\omega_0\,\vec{u}\times\vec{e}_3 = \vec{0}, \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad x \in \widetilde{\Omega} := \Gamma\times(-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$\partial p/\partial t + v_0\,(\partial p/\partial x_3) + \beta^2\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad p(0,x) = p^0(x), \quad x\in\widetilde{\Omega}, \tag{2}$$

$$u_n = 0, \quad x\in S, \tag{3}$$

где $\vec{u}(t,x)$ и $p(t,x)$, $x = (x_1,x_2,x_3)\in\widetilde{\Omega}$, — скорость частиц и давление в жидкости, $\beta^2 > 0$ и $v_0 > 0$ — коэффициент сжимаемости и скорость поступательного движения жидкости, Γ и S — поперечное сечение и боковая поверхность трубы.

Как и в [2, 3], решение задачи (1)–(3) можно разыскивать через функцию состояния $\Phi = \Phi(t,x)$,

$$\vec{u} = \nabla(D^2\Phi/Dt^2) + 2\omega_0[\nabla(D\Phi/Dt)\times\vec{e}_3] + 4\omega_0^2(\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_3,$$
$$p = -(D^3\Phi/Dt^3) - 4\omega_0(D\Phi/Dt), \quad D/Dt := (\partial/\partial t) + \alpha(\partial/\partial x_3).$$

При этом Φ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$(D^4\Phi/Dt^4) + 4\omega_0^2(D^2\Phi/Dt^2) - \beta^2\Delta(D^2\Phi/Dt^2) - 4\omega_0^2\beta^2(\partial^2\Phi/\partial x_3^2) = 0$$

и соответствующему условию непротекания на боковой поверхности. В случае кругового цилиндра, переходя к безразмерным координатам, и полагая $\Phi = \exp(i(\omega t + \gamma x_3))\Phi(r,\theta)$, приходим для $\Phi(r,\theta)$ к спектральной задаче

$$\Delta_2\Phi + (\lambda^4 - \lambda^2(4\omega_0^2 + \beta^2\gamma^2) + 4\omega_0^2\beta^2\gamma^2/\beta^2\lambda^2)\Phi = 0, \quad \lambda = \omega + \alpha\gamma, \quad (r,\theta)\in\Gamma,$$
$$-\lambda\Big(\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial r} + 2i\omega_0\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\Big)\Big|_{r=1} = 0, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

Эта задача допускает разделение переменных в форме $\Phi(r,\theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$ (в полярной системе координат). При этом возникает спектральная проблема для радиальных амплитудных функций $\varphi(r)$,

$$r^2\varphi'' + r\varphi' + [r^2(\lambda^2/\beta^2 - \gamma^2)(1 - 4\omega_0^2/\lambda^2) - m^2]\varphi = 0, \quad \lambda\varphi'(1) + 2m\omega_0\varphi(1) = 0, \tag{4}$$

а также характеристическое уравнение для собственных значений

$$(\lambda^2/\beta^2 - \gamma^2)(1 - 4\omega_0^2/\lambda^2) =: \xi_{mk}^2, \quad \lambda J_m'(\xi_{mk}) + 2m\omega_0 J_m(\xi_{mk}) = 0, \quad m = 0,1,2,\ldots \quad k = 1,2,\ldots.$$

где $J_m(r)$ — функция Бесселя m-го порядка.

Разработаны алгоритмы численного решения задачи (4), для которого справедливы оценки:

$$\begin{cases} \lambda^2 < 4\omega_0^2, \quad \lambda^2 > \beta^2\gamma^2, & \text{при} \quad \beta^2\gamma^2 > 4\omega_0^2; \\ \lambda^2 < \beta^2\gamma^2, \quad \lambda^2 > 4\omega_0^2, & \text{при} \quad \beta^2\gamma^2 < 4\omega_0^2. \end{cases}$$

Рассматривается также задача (1)–(3) для участка трубы, отвечающего одному шагу l винтового движения жидкости, $l = 2\pi/v_0$. Для области $\Omega = \Gamma\times(0,l)$ справедлив закон сохранения полной энергии в форме

$$\frac{1}{2}\Big\{\int_\Omega|\vec{u}|^2d\Omega + \beta^{-2}\int_\Omega|p|^2d\Omega\Big\} = \text{const}.$$

Далее вводится пространство $\mathcal{H} := \vec{L}_2(\Omega)\oplus L_2(\Omega)$ вектор-функций $y(x) := (\vec{u},p)^\tau$, допускающих периодическое продолжение вдоль трубы с периодом l. Выясняется, что проблему (1)–(3) можно трактовать как задачу Коши в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\partial y/\partial t + \widetilde{\mathcal{A}}y + 2\omega_0\,\widetilde{\mathcal{B}}y = 0, \quad y(0) = y^0 = (\vec{u}^0(x), p^0(x))^\tau, \tag{5}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha\,(\partial/\partial x_3) & \nabla \\ \operatorname{div} & \alpha\beta^{-2}(\partial/\partial x_3) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{11}\vec{u} = \vec{u} \times \vec{e}_3, \tag{6}$$

где $\widetilde{\mathcal{A}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — неограниченный кососопряженный оператор, $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — ограниченный оператор.

С помощью замен $\widetilde{\mathcal{A}} \mapsto i\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{B}} \mapsto i\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{A} + 2\omega_0\,\mathcal{B}$ вместо (5)–(6) получаем абстрактную задачу Коши

$$dy/dt + i\mathcal{C}y = 0, \quad y(0) = y^0 = (\vec{u}^0(x), p^0(x))^\tau, \tag{7}$$

причем оператор $\mathcal{C} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный.

Определение. Функция $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ называется сильным решением задачи (7), если:

1°. $\vec{u}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega))$, $p(t,x) \in C^1([0,T]; L_2(\Omega))$;

2°. $\partial\vec{u}(t,x)/\partial x_3 \in C([0,T]; \vec{L}_2(\Omega))$, $\nabla p \in C([0,T]; \vec{L}_2(\Omega))$;

3°. $\operatorname{div}\vec{u} \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, $\partial p(t,x)/\partial x_3 \in C([0,T]; L_2(\Omega))$;

4°. выполняются уравнение и начальные условия.

Теорема. Если $y^0 \in \mathcal{D}(C)$, то для $\forall v_0 > 0$, $\forall\beta > 0$, $\forall t \in [0,T]$, задача (7) имеет единственное сильное решение $y(x) \in \mathcal{H}$, которое представляется в виде $y(t) = \exp(-it\mathcal{C})y^0$. □

Установлены также свойства решений спектральной задачи

$$\mathcal{C}y = \omega y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H},$$

отвечающей задаче Коши (7), в частности, дискретности спектра, полнота и базисность системы собственных элементов.

Отметим, что исследуемая задача может быть сформулирована в иной постановке, если воспользоваться неинерциальной системой координат, совершающей винтовые движения с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$ и перемещающимся полюсом (началом координат) со скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_3$. Можно показать, что тогда вместо (1)–(3) возникает начально–краевая задача такого же вида, в которой формально $v_0 = 0$. Для этой задачи справедливы те же утверждения (с соответствующими упрощениями), которые были сформулированы выше.

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: МИР, 1977. — 622 с.

2. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Матем. — 1954. — Т. 18, N 1. — С. 3–50.

3. Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З. Применение функции состояния в задаче о малых колебаниях вращающейся гидросистемы "жидкость-газ"// Тезисы докл. XXII междунар. научн. конференции KROMSH-2011. — Симферополь: изд-во КНЦ НАНУ, 2011. — С. 29–30.