Современная математика. Фундаментальные направления. Том 49 (2013). С. 5–88

УДК 517.98+517.9:532

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ СОЧЛЕНЕННЫХ ГИРОСТАТОВ

© 2013 г. **Э. И. БАТЫР, Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

К истории вопроса

Фундаментом динамики систем тел является классическая механика, основы которой были заложены в 17-18 веках Ньютоном, Эйлером, Даламбером, Лагранжем. Понятие «абсолютно твердое тело» было введено Эйлером. Моделируя связи в шарнирах силами реакций, он получил уравнения, известные в механике как уравнения Ньютона—Эйлера. Даламбер изучал движение системы связанных твердых тел. Математическую формулировку известного принципа Даламбера представил Лагранж, он, в частности, получил уравнения движения, известные как уравнения Лагранжа первого и второго рода.

Первые приложения динамики систем тел связаны с гироскопами. Уравнения движения одиночного гироскопа получены Эйлером.

Гиростатом называют абсолютно твердое тело, содержащее полость, целиком заполненную несжимаемой однородной жидкостью. При движении такого гидромеханического объекта его центр масс остается неподвижным в системе координат, жестко связанных с телом.

Н. Е. Жуковский [22] первым построил теорию движения твердого тела (гиростата) с полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Он доказал, что движение такого гиростата эквивалентно движению твердого тела с видоизмененным тензором инерции, учитывающим движение жидкости в полости.

Следующий шаг почти одновременно был сделан рядом математиков и механиков в пятидесятые-шестидесятые годы 20-го века в связи с развитием авиационной и космической техники. Отметим здесь работы Н. Н. Моисеева [50, 51], Г. С. Нариманова [55], Д. Е. Охоцимского [57], Б. И. Рабиновича [59], Л. Н. Сретенского [61], которые исследовали задачу о движении тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Дальнейшие работы в этой области отражены в монографиях Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева [54], Г. Н. Микишева и Б. И. Рабиновича [49] и ряде других монографий и статей. Цикл работ, посвященный исследованию нелинейных колебаний твердых тел с жидкостью, принадлежит И. А. Луковскому [43–46].

Большой цикл работ был посвящен изучению малых колебаний маятника с полостью, полностью либо частично заполненной идеальной либо вязкой жидкостью, а также системой из несмешивающихся жидкостей. Здесь можно отметить работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [38], Г. А. Моисеева [52], О. Б. Иевлевой [23], П. С. Краснощекова [35,36], М. Я. Барняка [5], Р. И. Цебрия [65,66] и других авторов. Исследованию общих линейных задач динамики тела с полостью, содержащей вязкую жидкость, посвящены работы и монография Ф. Л. Черноусько [67–70], статьи С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [39, 40].

В частности, операторный подход (с использованием методов функционального анализа) к изучению линейных проблем гидродинамики идеальной и вязкой жидкости изложен в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [34], а также в двухтомной монографии Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна [72, 73].

Инициатором развития теоретических и экспериментальных методов исследования системы связанных твердых тел был А. Ю. Ишлинский [24, 25], он изучал движение твердого тела на струне или струнном подвесе. Большие исследования динамики связанных твердых тел и гиростатов проводит школа механиков г. Донецка. Это П. В. Харламов [63, 64], Г. В. Горр [19, 20] и другие. В частности, Ю. Н. Кононов исследовал движения тела и системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость [26–29].

О содержании работы

В данной работе рассматриваются новые линейные задачи гидромеханики, связанные с малыми движениями и нормальными колебаниями системы последовательно сочлененных твердых тел с полостями, полностью заполненными несжимаемой однородной жидкостью (гиростатов). Эти тела соединены между собой с помощью шарниров. Изучаются случаи, когда все полости гиростатов заполнены либо идеальной, либо вязкой жидкостью, а также варианты, когда часть полостей заполнена идеальной, а часть вязкой жидкостью. При этом рассматриваются также варианты задачи, когда трение в шарнирах учитывается либо пренебрежимо мало.

При изучении этого круга проблем в данной работе применены методы функционального анализа, в частности, методы теории линейных самосопряженных и несамосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве [3, 14, 21], теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом и гильбертовом пространстве [37, 41, 42], теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой [1, 71], методы спектральной теории операторных пучков [47] и другие. Так, в работе применяется метод проектирования уравнений движения жидкости на ортогональные подпространства, естественно связанные с изучаемыми задачами. Этот метод восходит к Г. Вейлю [17] (см. также [16]), а применительно к задачам данной работы — к О. А. Ладыженской [42].

Перейдем к изложению материалов работы по главам.

В первой главе изучается начально-краевая и спектральная задачи о малых колебаниях сочлененных тел (гиростатов) с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью.

Система уравнений, описывающая движения такой гидромеханической системы, состоит из линеаризованных уравнений движения сочлененных тел, линеаризованных уравнений движения жидкостей в каждой из полостей, а также краевых и начальных условий. При этом каждое уравнение движения жидкости записывается в неинерциальной системе координат, жестко связанной с соответствующим телом.

После проектирования уравнений движения на соответственно подобранные подпространства векторных полей, отвечающих конечной кинетической энергии жидкости в каждой полости, оказывается, что эти поля выражаются через углы поворота каждого тела и угловые скорости, а вся начально-краевая задача приводится к изучению задачи Коши

$$C\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + A\frac{d\vec{\delta}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} = \vec{\omega}, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \vec{\delta}\,'(0) = \vec{\omega}^0 \tag{1}$$

в конечномерном пространстве $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^3)^n$, где n — количество гиростатов, а $\vec{\delta}(t) := (\delta_1(t); \ldots; \delta_n(t))^T$ — вектор-столбец углов поворотов гиростатов. Здесь C — матрица кинетической энергии, B — матрица потенциальной энергии, а A — матрица, связанная с диссипацией энергии (трением) в шарнирах. Установлено, что матрица C допускает представление в виде суммы двух положительно определенных матриц (матриц инерции), связанных с движением собственно твердых сочлененных тел и с движением жидкости в полостях этих тел соответственно. Вторая матрица названа присоединенной матрицей инерции. На этой основе доказано обобщение теоремы Н. Е. Жуковского применительно к системе сочлененных гиростатов. При этом введено новое понятие обобщенных потенциалов Жуковского, естественно связанных с исследуемой проблемой. Отметим еще, что матрица A также положительно определена, а матрица B — неотрицательна и имеет n-мерное ядро.

Эти свойства позволяют преобразовать задачу (1) к задаче вида

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathcal{A}\vec{v} + \vec{\varphi}(t), \quad \vec{v}(0) = \vec{v}^0 \tag{2}$$

в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = (\mathbb{C}^5)^n$, где $\vec{v} = \vec{v}(t)$ — столбец с компонентами, выражающимися через $\vec{\omega}(t)$ и проекцию $\vec{\delta}(t)$ на подпространство $(\mathbb{C}^2)^n$. Выясняется, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен, и это позволяет доказать теорему об однозначной разрешимости задач (1) и (2) на любом временном отрезке $[0, T]$.

Далее рассматриваются нормальные движения гидромеханической системы, т. е. решения однородной задачи (2), зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. При изучении соответствующей спектральной задачи

$$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \in (\mathbb{C}^5)^n, \tag{3}$$

используются методы теории линейных операторов, самосопряженных в пространстве с индефинитной метрикой. Выясняется, что матрица $\mathcal{A}$ является самосопряженной в $\mathcal{J}$-пространстве с оператором канонической симметрии $\mathcal{J} := \mathrm{diag}(I_{3n}; -I_{2n})$. Это позволяет выяснить детальную структуру спектра задачи (3) и физические свойства нормальных движений гидромеханической системы. В частности, получены достаточные условия того, что собственные элементы задачи (3) образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис в пространстве $(\mathbb{C}^5)^n$. Таким образом, при наличии идеальной несжимаемой жидкости в полостях гиростатов исследуемая проблема свелась к конечномерной, именно, к проблеме (2) в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = (\mathbb{C}^5)^n$.

Глава 2 посвящена изучению задачи о малых колебаниях системы сочлененных гиростатов с полостями, полностью заполненными вязкой жидкостью. Такая гидромеханическая система является полностью диссипативной и уже существенно бесконечномерной. Тем не менее общий подход, примененный в главе 1, оказывается приемлемым и в этом случае. Именно, начально-краевая задача снова приводится к задаче Коши вида (2), однако теперь в бесконечномерном пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} \vec{J}_0(\Omega_k)\Big) \oplus (\mathbb{C}^3)^n \oplus (\mathbb{C}^2)^n, \tag{4}$$

где Ω_k — области, занятые вязкой жидкостью, $k = \overline{1,n}$, а $\vec{J}_0(\Omega_k)$ — подпространство соленоидальных векторных полей из $\vec{L}_2(\Omega_k)$, у которых нормальные компоненты поля на $\partial\Omega_k$ обращаются в нуль. Еще одним отличием от уравнения (2) является то обстоятельство, что при производной по времени от искомого вектор-столбца $\vec{v}(t)$ в этом случае стоит не единичный оператор, а положительно определенный ограниченный оператор. При этом оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным, и это позволяет доказать теорему о существовании сильного решения начально-краевой задачи на произвольном промежутке времени $[0,T]$.

Далее в главе 2 изучается задача о нормальных колебаниях гидромеханической диссипативной системы. Здесь возникает спектральная проблема, аналогичная задаче (3), которую удается привести к задаче на собственные значения для компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора (с новым оператором канонической симметрии $\mathcal{J}$) в пространстве Понтрягина Π_{2n}. На этой основе установлено, что спектр задачи дискретный и имеет предельную точку $\lambda = \infty$. Все собственные значения, кроме, быть может, $2n$ пар невещественных собственных значений, расположены на положительной полуоси. Отвечающая им совокупность собственных элементов образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ из (4). Отметим еще, что задача имеет также n-кратное нулевое собственное значение, отвечающее произвольным поворотам гиростатов на любой угол вокруг вертикальной оси.

Таким образом, в этом диссипативном случае нетривиальные нормальные движения являются асимптотически затухающими. Если вязкости жидкостей и трение в шарнирах достаточно велики, то невещественные собственные значения (и осциллирующие во времени нормальные движения) отсутствуют.

В третьей главе рассмотрена задача о малых движениях и нормальных колебаниях частично диссипативной гидромеханической системы из сочлененных гиростатов. Изучается промежуточный вариант, когда в системе гиростатов не все полости заполнены вязкой жидкостью, но хотя бы одна содержит вязкую и хотя бы одна идеальную жидкости. Аналогичный вариант рассмотрен и по отношению к трению в шарнирах: хотя бы в одном из них трение учитывается и хотя бы в одном трение пренебрежимо мало. Так как количество всех возможных вариантов для такой частично диссипативной системы равно $2^{2n}-2$, то в работе рассмотрены лишь два из них и дан общий рецепт, как исследовать задачу в том или ином варианте. Кроме того, в последнем разделе этой главы приведены почти без доказательств результаты изучения плоских (двумерных) проблем для системы гиростатов, сочлененных посредством цилиндрических (а не сферических) шарниров.

Выяснено, что начально-краевая задача путем комбинирования приемов глав 1 и 2 снова может быть приведена к задаче Коши вида (2), однако не в пространстве вида (4), а в соответствующем гильбертовом пространстве, где фигурируют лишь те области Ω_k, которые заняты вязкой жидкостью. Так как основной оператор задачи (см. (2)) по-прежнему обладает свойством максимальной аккретивности в новом гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$, то удается доказать теорему о сильной разрешимости начально-краевой задачи в случае малых движений частично диссипативной системы из сочлененных гиростатов.

Далее с некоторыми усложнениями, связанными со сдвигом спектра, изучена и задача о нормальных колебаниях. Здесь снова возникает задача на собственные значения для компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора (с новым $\mathcal{J}$) в пространстве Понтрягина Π_{2n}. Рассмотрены свойства спектра и системы собственных элементов, изучены некоторые частные случаи нормальных движений системы.

Таким образом, в данной работе рассмотрены все возможные варианты малых движений и нормальных колебаний системы из сочлененных гиростатов: консервативный (жидкости идеальные и нет трения в шарнирах), диссипативный (жидкости вязкие и учитывается трение во всех шарнирах) и частично диссипативный (глава 3). В конце работы имеются также приложения, связанные с выводом линеаризованных уравнений движения гиростатов в неинерциальных системах координат и уравнений движения несжимаемой жидкости в этих гиростатах.

Глава 1

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ (ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА)

1.1. Постановка задачи

В этом разделе дается постановка линейной пространственной (трехмерной) задачи гидромеханики, описывающей проблему малых движений и нормальных колебаний системы последовательно соединенных между собой твердых тел. Первое тело закреплено в неподвижной точке с помощью сферического (трехмерного) шарнира, а остальные тела с помощью таких же шарниров последовательно соединены с предыдущим и последующим телом. Каждое тело имеет полость, полностью заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью.

Так как жидкость несжимаема, то центр масс каждого тела в рассматриваемой гидромеханической системе неподвижен относительно тела, а моменты инерции системы относительно любых связанных с телом осей постоянны и не зависят от движения жидкости в полости. Такое тело называют гиростатом, и, таким образом, в данной работе изучается проблема малых движений и нормальных колебаний сочлененных гиростатов. Отметим, что нелинейные задачи механики подобного рода изучались ранее, см., например, работы П. В. Харламова [63, 64].

1.1.1. Уравнения малых колебаний гидромеханической системы. Рассмотрим систему n тел G_k, $k=\overline{1,n}$, последовательно соединенных между собой сферическими шарнирами так, как это было сказано выше. Тело $G_1 \subset \mathbb{R}^3$ имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k, при $k=\overline{2,n}$ — соответственно точки O_k, соединяющие шарниром тело G_k и G_{k-1}. Каждое тело $G_k \subset \mathbb{R}^3$ имеет полость Ω_k, заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_k > 0$, $k=\overline{1,n}$.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений — силовое поле

$$\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t,x),$$

где $\vec{f}(t,x)$ — малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Для описания малых движений системы сочлененных гиростатов введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанные с телом G_k. Единичные векторы вдоль осей $O_kx_k^j$ обозначим через $\vec{e}_k^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,n}$. Кроме того, будем считать, что центр масс C_k гиростата G_k находится на оси $O_kx_k^3$, $k=\overline{1,n}$, а в состоянии покоя все точки O_k и C_k расположены на одной вертикальной оси, $k=\overline{1,n}$.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет, очевидно, равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела — величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$.

Обозначим через m_k массу k-го тела, а через $\vec{r}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k = \overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $k=\overline{1,n-1}$.

Приведем теперь для каждого из гиростатов G_k линеаризованное уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_k, $k=\overline{1,n}$, а также следствия из этой совокупности уравнений. Вид этих уравнений можно найти в [34, с. 129–132, 145, 336], а также в [8, 9] и в приложении А.

Из этих уравнений следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также последнее уравнение, приходим к следующим уравнениям движения сочлененных гиростатов:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) dm_k + \\
&\qquad + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g\left(m_1 l_1 + \sum_{k=2}^{n} m_k h_1\right) P_2 \vec{\delta}_1 = \\
&\qquad = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k dm_k \equiv \vec{M}_1; \qquad (1.1.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i\right) dm_i + \rho_i \int\limits_{\Omega_i} \vec{r}_i \times \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} d\Omega_i + \\
&\qquad + \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) dm_k + \\
&\qquad + \alpha_i (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_{i-1}) - \alpha_{i+1} (\vec{\omega}_{i+1} - \vec{\omega}_i) + g\left(m_i l_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k h_i\right) P_2 \vec{\delta}_i = \\
&\qquad = \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times \vec{f}_k dm_k \equiv \vec{M}_i, \quad i = \overline{2, n-1}; \qquad (1.1.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_n\right) dm_n + \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} d\Omega_n + \\
&\qquad + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_n + \alpha_n (\vec{\omega}_n - \vec{\omega}_{n-1}) + g m_n l_n P_2 \vec{\delta}_n = \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n \equiv \vec{M}_n. \qquad (1.1.3)
\end{aligned}$$

В формулах (1.1.1)–(1.1.3) введены обозначения $l_k := |\overrightarrow{O_k C_k}|$ — расстояние от O_k до центра масс C_k гиростата G_k,

$$P_2 \vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j}$$

— проекция углового перемещения $\vec{\delta}_k$ на плоскость $O_k x_k^1 x_k^2$, $k = \overline{1, n}$. Предполагается также, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих гиростатов G_k и G_{k-1}, причем коэффициент пропорциональности $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Далее, через $\vec{u}_k = \vec{u}_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, обозначено поле относительной скорости движения жидкости в области Ω_k, $k = \overline{1, n}$. Наконец, использовано также обозначение

$$\int\limits_{G_k} (\ldots) dm_k := \int\limits_{\Omega_{0k}} (\ldots) \rho_{0k} d\Omega_k + \int\limits_{\Omega_k} (\ldots) \rho_k d\Omega_k,$$

где $\Omega_{0k} \subset G_k$ — область, занятая твердым телом постоянной плотности ρ_{0k}, а Ω_k — область, занятая жидкостью постоянной плотности ρ_k, $k = \overline{1,n}$. При этом, конечно же, нужно формально считать что в уравнениях (1.1.1)–(1.1.3) $\vec{u}_k \equiv \vec{0}$ в области Ω_{0k}, $k = \overline{1,n}$.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения (уравнения Эйлера) идеальной жидкости в каждой из полостей Ω_k. Каждое уравнение записано в неинерциальной системе координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$, жестко связанной с телом G_k, $k = \overline{1,n}$. Вывод этих уравнений можно найти в приложении B. Имеем

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{1.1.4}$$

$$\rho_k \left(\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{h}_i + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k \right) = -\nabla p_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{2,n}. \tag{1.1.5}$$

Здесь $p_k = p_k(t,x)$ — отклонение полей давлений от их равновесных значений, а $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_k}$, $k = \overline{1,n}$.

В качестве граничных условий на границах $\partial\Omega_k =: S_k$, $k = \overline{1,n}$, выступают условия непротекания для идеальной жидкости:

$$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.1.6}$$

где $\vec{n}_k$ — внешняя нормаль к области Ω_k.

Для полной математической формулировки исследуемой начально-краевой задачи о малых движениях сочлененных гиростатов к уравнениям (1.1.1)–(1.1.6) следует добавить кинематические условия, которые удобно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.1.7}$$

а также начальные условия

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.1.8}$$

Таким образом, в данной задаче искомыми являются соленоидальные векторные поля $\vec{u}_k(t,x)$, поля давлений $p_k(t,x)$, угловые скорости $\vec{\omega}_k(t)$ и угловые перемещения гиростатов $\vec{\delta}_k(t)$, $k = \overline{1,n}$. Их требуется найти из уравнений движения гиростатов (1.1.1)–(1.1.3), уравнений (1.1.4)-(1.1.5) движения жидкостей в полостях Ω_k, условий непротекания (1.1.6), кинематических соотношений (1.1.7) и начальных условий (1.1.8).

Далее для определенности и простоты последующих преобразований рассмотрим задачу о малых колебаниях трех сочлененных гиростатов, т. е. будем считать в (1.1.1)–(1.1.8), что $n = 3$. Тогда имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}
\int_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) dm_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \right) dm_2 + \\
+ \int_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} \right) dm_3 + \\
+ \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g\,(m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1)\, P_2 \vec{\delta}_1 = \\
= \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int_{G_3} \vec{h}_1 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_1;
\end{gathered} \tag{1.1.9}$$

$$\int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 \right) dm_2 +$$

$$+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+$$
$$+\alpha_1\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)-\alpha_2\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+g\left(m_2l_2+m_3h_2\right)P_2\vec{\delta}_2=\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\vec{f}_2dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_2; \tag{1.1.10}$$

$$\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}d\Omega_3+$$
$$+\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)dm_3+\alpha_3\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_3; \tag{1.1.11}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)=-\nabla p_1+\rho_1\vec{f}_1,\quad \operatorname{div}\vec{u}_1=0\quad(\text{в }\Omega_1),\quad \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1=0\quad(\text{на }S_1); \tag{1.1.12}$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)=-\nabla p_2+\rho_2\vec{f}_2,$$
$$\operatorname{div}\vec{u}_2=0\quad(\text{в }\Omega_2),\quad \vec{u}_2\cdot\vec{n}_2=0\quad(\text{на }S_2); \tag{1.1.13}$$

$$\rho_3\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)=-\nabla p_3+\rho_3\vec{f}_3,$$
$$\operatorname{div}\vec{u}_3=0\quad(\text{в }\Omega_3),\quad \vec{u}_3\cdot\vec{n}_3=0\quad(\text{на }S_3); \tag{1.1.14}$$

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k=P_2\vec{\omega}_k,\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\quad k=\overline{1,3}; \tag{1.1.15}$$

$$\vec{u}_k\left(0,x\right)=\vec{u}_k^0\left(x\right),\quad x\in\Omega_k,\quad \vec{\omega}_k\left(0\right)=\vec{\omega}_k^0,\quad \vec{\delta}_k\left(0\right)=\vec{\delta}_k^0,\quad k=\overline{1,3}. \tag{1.1.16}$$

Далее считаем, что границы $\partial\Omega_k=S_k$ областей Ω_k достаточно гладкие, например, дважды непрерывно дифференцируемы, т. е.

$$S_k=\partial\Omega_k\in C^2,\quad k=\overline{1,n}. \tag{1.1.17}$$

1.1.2. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (1.1.9)–(1.1.16) имеет классическое решение, т. е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных, и выведем из (1.1.9)–(1.1.16) закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы.

С этой целью осуществим следующие шаги. Обе части уравнений (1.1.9)–(1.1.11) умножим скалярно в $\mathbb{R}^3$ на $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ соответственно, а обе части уравнений (1.1.12)–(1.1.14) умножим скалярно в $\mathbb{R}^3$ на $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$ соответственно и проинтегрируем по областям Ω_1, Ω_2, Ω_3. Получим, с учетом условий соленоидальности полей скоростей и условий непротекания на границах полостей, следующие соотношения:

$$\left(\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+\rho_1\left(\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}d\Omega_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+$$
$$+\left(\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\right)dm_2\right)\cdot\vec{\omega}_1+$$

$$+\left(\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3\right)\cdot\vec{\omega}_1+$$
$$+\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1\cdot\vec{\omega}_1=\vec{M}_1\cdot\vec{\omega}_1;$$

$$\left(\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)dm_2\right)\cdot\vec{\omega}_2+\rho_2\left(\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}d\Omega_2\right)\cdot\vec{\omega}_2+\left(\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)dm_2\right)\cdot\vec{\omega}_2+$$
$$+\left(\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3\right)\cdot\vec{\omega}_2+$$
$$+\alpha_1(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)\cdot\vec{\omega}_2-\alpha_2(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)\cdot\vec{\omega}_2+g(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2\cdot\vec{\omega}_2=\vec{M}_2\cdot\vec{\omega}_2;$$

$$\left(\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3\right)\cdot\vec{\omega}_3+\rho_3\left(\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}d\Omega_3\right)\cdot\vec{\omega}_3+$$
$$+\left(\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)dm_3\right)\cdot\vec{\omega}_3+\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)\cdot\vec{\omega}_3+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3\cdot\vec{\omega}_3=\vec{M}_3\cdot\vec{\omega}_3;$$

$$\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\cdot\vec{u}_1d\Omega_1=-\int\limits_{\Omega_1}\nabla p_1\cdot\vec{u}_1d\Omega_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{f}_1\cdot\vec{u}_1d\Omega_1=$$
$$=-\int\limits_{\Omega_1}div\left(p_1\vec{u}_1\right)d\Omega_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{f}_1\cdot\vec{u}_1d\Omega_1=-\int\limits_{S_1}p_1\vec{u}_1\cdot\vec{n}_1dS_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{f}_1\cdot\vec{u}_1d\Omega_1=\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{f}_1\cdot\vec{u}_1d\Omega_1;$$
$$\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\cdot\vec{u}_2d\Omega_2=\ldots=\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{f}_2\cdot\vec{u}_2d\Omega_2;$$
$$\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\cdot\vec{u}_3d\Omega_3=\ldots=\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{f}_3\cdot\vec{u}_3d\Omega_3.$$

Сложим левые и правые части этих соотношений и заметим, что некоторые группы слагаемых можно переписать в виде производных по t от квадратичных функционалов в виде интегралов по областям Ω_k и G_k (с учетом введенного выше правила для интегралов $\int\limits_{G_k}(\ldots)dm_k$). Так, слагаемые, содержащие множитель ρ_1, имеют вид

$$\rho_1\Biggl\{\left(\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}d\Omega_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+\left(\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)d\Omega_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+$$
$$+\int\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\cdot\vec{u}_1d\Omega_1\Biggr\}=\frac{1}{2}\rho_1\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2d\Omega_1,$$

а соответствующий интеграл по G_1 приобретает окончательно такой вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1.$$

Соответственно преобразуются группы слагаемых по областям Ω_k и G_k при $k=2,3$.

Используем еще кинематические соотношения (1.1.15) и, преобразуя слагаемые с коэффициентом α_k, приходим к итоговому соотношению вида

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1+\int_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2+\right.$$
$$\left.+\int_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\left\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\right\}=$$
$$=-\left\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2\right\}+\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_kd\Omega_k. \quad (1.1.18)$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии изучаемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме. В самом деле, первое слагаемое слева в фигурных скобках есть удвоенная кинетическая энергия системы, так как

$$\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1,\quad \vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2,\quad \vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3$$

суть абсолютные скорости тела либо жидкости в соответствующих областях G_1, G_2 и G_3; второе слагаемое слева в фигурных скобках — удвоенная потенциальная энергия системы отклоненных от положения равновесия сочлененных гиростатов, отсчитываемая от состояния покоя; наконец, справа в (1.1.18) стоит мощность сил трения плюс мощность внешних сил, обусловленная действием дополнительных к гравитационным сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ соответственно, а также моментов сил $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ и $\vec{M}_3$, которые выражены через эти силы (см. выражения для них в правых частях (1.1.9)–(1.1.11), а также (1.1.1)–(1.1.3)).

Приведем еще без доказательства тождество, выражающее закон баланса полной энергии для системы из n сочлененных гиростатов, т. е. для задачи (1.1.1)–(1.1.8). Оно имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{G_k}\left|\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j+\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k+\vec{u}_k\right|^2dm_k\right\}+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\Big[m_kl_k+(\sum_{j=k+1}^{n}m_j)h_k\Big]\left|P_2\vec{\delta}_k\right|^2\right\}=$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k|\vec{\omega}_k-\vec{\omega}_{k-1}|^2+\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{n}\rho_k\int_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_kd\Omega_k, \quad (1.1.19)$$

где нужно формально считать, что

$$\vec{\omega}_0=\vec{0},\qquad \sum_{j=n+1}^{n}m_j=0. \quad (1.1.20)$$

1.2. Начально-краевая задача о малых движениях системы сочлененных гиростатов

Задачу (1.1.9)–(1.1.16) будем исследовать методами функционального анализа, теории уравнений в частных производных, а также теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.2.1. Проектирование уравнений Эйлера на ортогональные подпространства. Будем считать в задаче (1.1.9)–(1.1.16) искомые функции $\vec{u}_k(t,x)$, $\nabla p_k(t,x)$, $k=\overline{1,3}$, функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$ с обычной нормой

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_k)}:=\int_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2d\Omega_k,\quad k=\overline{1,3},$$

и соответствующим скалярным произведением.

Как известно (см., например, [42, с. 38], а также [34]), пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega_k)$ имеет ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}(\Omega_k), \tag{1.2.1}$$

где $\vec{J}_0(\Omega_k)$ — подпространство соленоидальных векторных полей с условием непротекания на границе $S_k = \partial\Omega_k$, т. е.

$$\vec{J}_0(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) :\ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k),\ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \ (\text{на } S_k)\Big\}, \tag{1.2.2}$$

а $\vec{G}(\Omega_k)$ — подпространство потенциальных полей:

$$\vec{G}(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) :\ \vec{u}_k = \nabla\varphi_k\Big\}. \tag{1.2.3}$$

Здесь операции $\operatorname{div}\vec{u}_k$ и $\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k$ понимаются для элементов из $\vec{L}_2(\Omega_k)$ в смысле обобщенных функций (распределений), подробную информацию об этом можно найти, например, в [34, с. 98–102].

Как следует из (1.2.1)–(1.2.3), а также из соотношений (1.1.12)–(1.1.14), для искомых полей скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ и полей давлений $\nabla p_k(t,x)$ при любом t имеют место свойства

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad \nabla p_k \in \vec{G}(\Omega_k), \quad k = \overline{1,3}. \tag{1.2.4}$$

Опираясь на эти свойства, применим к уравнениям Эйлера (1.1.12)–(1.1.14) метод ортогонального проектирования на подпространства (1.2.1). Этот метод нашел широкое применение в задачах гидродинамики (см., например, [42], а также [34]).

Будем считать, что в уравнениях Эйлера (1.1.12)–(1.1.14) все функции являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Обозначим через $P_{0,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_0(\Omega_k)$ ортопроектор на подпространство $\vec{J}_0(\Omega_k)$, а через $P_{G,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{G}(\Omega_k)$ — ортопроектор на дополнительное подпространство $\vec{G}(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$.

Действуя ортопроекторами $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ и $P_{0,3}$ на обе части уравнений Эйлера (1.1.12), (1.1.13) и (1.1.14) соответственно и заменяя в силу сказанного выше $\partial/\partial t$ на d/dt, приходим с учетом (1.2.4) к соотношениям

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = P_{0,1}\vec{f}_1(t), \tag{1.2.5}$$

$$\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = P_{0,2}\vec{f}_2(t), \tag{1.2.6}$$

$$\frac{d\vec{u}_3}{dt} + P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = P_{0,3}\vec{f}_3(t). \tag{1.2.7}$$

Аналогичные проектирования на подпространства $\vec{G}(\Omega_k)$ дают связи

$$\rho_1 P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = -\nabla p_1 + \rho_1 P_{G,1}\vec{f}_1, \tag{1.2.8}$$

$$\rho_2 P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = -\nabla p_2 + \rho_2 P_{G,2}\vec{f}_2, \tag{1.2.9}$$

$$\rho_3 P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = -\nabla p_3 + \rho_3 P_{G,3}\vec{f}_3. \tag{1.2.10}$$

Из (1.2.8)–(1.2.10) следует, что поля давлений ∇p_k непосредственно вычисляются через угловые ускорения $d\vec{\omega}_k/dt$ и заданные функции $\vec{f}_k$; в то же время эти давления не входят в уравнения (1.1.9)–(1.1.11), описывающие движения гиростатов. Отсюда приходим к выводу, что в дальнейшем следует рассматривать систему соотношений (1.1.9)–(1.1.11), (1.2.5)–(1.2.7), (1.1.15)-(1.1.16).

1.2.2. Преобразования уравнений движения гиростатов. Соотношения (1.2.5)–(1.2.7) также позволяют вычислить непосредственно поля $d\vec{u}_k/dt$ через $d\vec{\omega}_k/dt$ и $\vec{f}_k$, $k=\overline{1,3}$. Подставляя эти выражения для $d\vec{u}_k/dt$ в уравнения (1.1.9)–(1.1.11), приходим к следующим уравнениям:

$$\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1-\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right)d\Omega_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)dm_2-$$
$$-\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)d\Omega_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3-$$
$$-\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_1\times\left(P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3+$$
$$+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1=$$
$$=\vec{M}_1\left(t\right)-\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\left(\vec{r}_1\times P_{0,1}\vec{f}_1\right)d\Omega_1-\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\left(\vec{h}_1\times P_{0,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2-$$
$$-\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left(\vec{h}_1\times P_{0,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3=:\vec{\widetilde{M}}_1\left(t\right);\quad(1.2.11)$$

$$\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)dm_2-\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)d\Omega_2+$$
$$+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3-$$
$$-\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_2\times\left(P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3+$$
$$+\alpha_1\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)-\alpha_2\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+g\left(m_2l_2+m_3h_2\right)P_2\vec{\delta}_2=$$
$$=\vec{M}_2\left(t\right)-\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\left(\vec{r}_2\times P_{0,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2-\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left(\vec{h}_2\times P_{0,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3=:\vec{\widetilde{M}}_2\left(t\right);\quad(1.2.12)$$

$$\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3-$$
$$-\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\left(P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3+$$
$$+\alpha_3\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=\vec{M}_3\left(t\right)-\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left(\vec{r}_3\times P_{0,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3=:\vec{\widetilde{M}}_3\left(t\right).\quad(1.2.13)$$

Вычисляя в (1.2.11)–(1.2.13) выражения $\int\limits_{G_k}(\ldots)\,dm_k$ согласно определению и группируя слагаемые в виде интегралов $\int\limits_{\Omega_{0k}}(\ldots)\,d\Omega_{0k}$ и $\int\limits_{\Omega_k}(\ldots)\,d\Omega_k$, получим следующие уравнения движения гиростатов:

$$\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)d\Omega_{01}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right)d\Omega_1+$$
$$+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)d\Omega_2+$$

$$+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+$$

$$+\rho_{3}\int\limits_{\Omega_{3}}\vec{h}_1\times\left(P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_{3}+$$

$$+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1=$$

$$=\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\vec{r}_1\times\vec{f}_{01}d\Omega_{01}+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{03}d\Omega_{03}+$$

$$+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(P_{G,1}\vec{f}_1\right)d\Omega_1+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_1\times\left(P_{G,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3\equiv\widetilde{M}_1\left(t\right);\quad(1.2.14)$$

$$\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)d\Omega_2+$$

$$+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+$$

$$+\rho_{3}\int\limits_{\Omega_{3}}\vec{h}_2\times\left(P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_{3}+$$

$$+\alpha_1\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)-\alpha_2\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+g\left(m_2l_2+m_3h_2\right)P_2\vec{\delta}_2=\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_2\times\vec{f}_{03}d\Omega_{03}+$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_2\times\left(P_{G,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3\equiv\widetilde{M}_2\left(t\right);\quad(1.2.15)$$

$$\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+$$

$$+\rho_{3}\int\limits_{\Omega_{3}}\vec{r}_3\times\left(P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_{3}+\alpha_3\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=$$

$$=\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{r}_3\times\vec{f}_{03}d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\left(P_{G,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3\equiv\widetilde{M}_3\left(t\right),\quad(1.2.16)$$

где использовано соотношение $I_k-P_{0,k}=P_{G,k}$, а I_k — единичный оператор в $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k=\overline{1,3}$.

Таким образом, влияние движения жидкости в области Ω_k состоит в том, что в (1.2.14)–(1.2.16) единичные операторы I_k заменены операторами ортогонального проектирования $P_{G,k}$ на подпространства $\vec{G}(\Omega_k)$, $k=\overline{1,3}$. Заметим еще, что если поля $\vec{f}_k$ потенциальны, то $P_{G,k}\vec{f}_k=\vec{f}_k$, и тогда моменты внешних сил $\widetilde{M}_k(t)\equiv\vec{M}_k(t)$, $k=\overline{1,3}$.

Подводя итоги этим преобразованиям, отметим, что теперь следует изучать задачу динамики гиростатов, исходя из уравнений (1.2.14)–(1.2.16), кинематических соотношений (1.1.15) и начальных условий (1.1.16) для $\vec{\omega}_k$ и $\vec{\delta}_k$, $k=\overline{1,3}$. При этом поля скоростей и давлений жидкости находятся по $\vec{\omega}_k$ и $\vec{\delta}_k$ посредством формул (1.2.5)–(1.2.7) и (1.2.8)–(1.2.10).

1.2.3. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Будем считать, что в задаче (1.2.14)–(1.2.16), (1.1.15), (1.1.16) искомым объектом является вектор-столбец

$$\vec{\delta}(t):=\left(\vec{\delta}_1(t);\,\vec{\delta}_2(t);\,\vec{\delta}_3(t)\right)^T,$$

где индекс $(\ldots)^T$ означает транспонирование (в данном случае строки). Тогда в силу (1.1.15) имеем

$$\vec{\omega}(t) := (\vec{\omega}_1(t);\, \vec{\omega}_2(t);\, \vec{\omega}_3(t))^T = d\vec{\delta}(t)/dt, \quad d\vec{\omega}(t)/dt = d^2\vec{\delta}(t)/dt^2.$$

Эти соотношения позволяют трактовать совокупность уравнений (1.2.14)–(1.2.16) как одно дифференциальное уравнение вида

$$C\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + A\frac{d\vec{\delta}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{\,0}, \tag{1.2.17}$$

рассматриваемое в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3$$

с соответствующей нормой

$$||\vec{\delta}||^2_{\mathcal{H}} = |\vec{\delta}_1|^2 + |\vec{\delta}_2|^2 + |\vec{\delta}_3|^2, \tag{1.2.18}$$

а также тривиальную задачу (см. (1.1.15), (1.1.16))

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k = \vec{\omega}_k, \quad k = \overline{1,3}. \tag{1.2.19}$$

При этом

$$\vec{\delta}^0 := \left(\vec{\delta}^0_1;\, \vec{\delta}^0_2;\, \vec{\delta}^0_3\right)^T, \quad \vec{\omega}^{\,0} := \left(\vec{\omega}^{\,0}_1;\, \vec{\omega}^{\,0}_2;\, \vec{\omega}^{\,0}_3\right)^T, \quad \vec{M}(t) := \left(\vec{\widetilde{M}}_1(t);\, \vec{\widetilde{M}}_2(t);\, \vec{\widetilde{M}}_3(t)\right)^T, \tag{1.2.20}$$

а операторные матрицы

$$C = (C_{lm})^3_{l,m=1}, \quad A = (A_{lm})^3_{l,m=1}, \quad B = (B_{lm})^3_{l,m=1},$$

элементы которых определяются соответствующими выражениями из (1.2.14)–(1.2.16), стоящими при d^2/dt^2, d/dt и самой искомой функции, заданы посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} C_{11}\vec{\delta}_1 := \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) d\Omega_{01} + \rho_1\int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left(P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right)\right) d\Omega_1 +\\ + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{02} + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_2 +\\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3\int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

$$\begin{aligned} C_{12}\vec{\delta}_2 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right) d\Omega_2 +\\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3\int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

$$C_{13}\vec{\delta}_3 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3\int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \tag{1.2.23}$$

$$\begin{aligned} C_{21}\vec{\delta}_1 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{02} + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_2 +\\ + \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3\int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

$$C_{22}\vec{\delta}_2 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right) d\Omega_2 +$$

$$+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_2\times\left(\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2\right)d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_2\times\left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2\right)\right)d\Omega_3; \quad (1.2.25)$$

$$C_{23}\vec{\delta}_3:=\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_2\times\left(\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_2\times\left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3; \quad (1.2.26)$$

$$C_{31}\vec{\delta}_1:=\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{r}_3\times\left(\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1\right)d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1\right)\right)d\Omega_3; \quad (1.2.27)$$

$$C_{32}\vec{\delta}_2:=\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{r}_3\times\left(\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2\right)d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2\right)\right)d\Omega_3; \quad (1.2.28)$$

$$C_{33}\vec{\delta}_3:=\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{r}_3\times\left(\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3; \quad (1.2.29)$$

$$A:=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_2 & 0\\ -\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3\\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3\end{pmatrix}. \quad (1.2.30)$$

Операторная матрица B диагональна и

$$\begin{gathered}B_{11}\vec{\delta}_1:=g(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1=:gb_{11}P_2\vec{\delta}_1;\\ B_{22}\vec{\delta}_2:=g(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2=:gb_{22}P_2\vec{\delta}_2;\\ B_{33}\vec{\delta}_3:=g(m_3l_3)P_2\vec{\delta}_3=:gb_{33}P_2\vec{\delta}_3.\end{gathered} \quad (1.2.31)$$

1.2.4. Свойства операторных коэффициентов эволюционного уравнения. Рассмотрим, опираясь на формулы (1.2.21)–(1.2.31), общие свойства операторных матриц C, A и B дифференциального уравнения (1.2.17).

Лемма 1.2.1. *Матрица B неотрицательна и имеет трехмерное ядро, натянутое на векторы*

$$\left(\vec{0},\,\vec{0},\,\vec{e}_1^{\,3}\right)^T,\ \left(\vec{0},\,\vec{0},\,\vec{e}_2^{\,3}\right)^T,\ \left(\vec{0},\,\vec{0},\,\vec{e}_3^{\,3}\right)^T. \quad (1.2.32)$$

Доказательство. Оно очевидно в виду того, что в (1.2.31) все $b_{kk}>0$, $k=\overline{1,3}$, а квадратичная форма матрицы B такова:

$$\left(B\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}=g\sum_{k=1}^{3}b_{kk}|P_2\vec{\delta}_k|^2.$$

□

Лемма 1.2.2. *Матрица A является положительно определенным оператором, действующим в комплексном пространстве $\mathcal{H}$ с нормой* (1.2.18).

Доказательство. Самосопряженность A следует из определения (1.2.30). Далее, квадратичная форма матрицы A имеет вид (см. (1.1.18))

$$\left(A\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}=\alpha_1|\vec{\delta}_1|^2+\alpha_2|\vec{\delta}_2-\vec{\delta}_1|^2+\alpha_3|\vec{\delta}_3-\vec{\delta}_2)|^2, \quad (1.2.33)$$

откуда получаем, что $A\geqslant 0$, поскольку $\alpha_k>0$, $k=\overline{1,3}$. Однако форма (1.2.33), как легко проверяется, обращается в нуль лишь при $\vec{\delta}=\vec{0}$, и тогда $A>0$. Так как A действует в конечномерном пространстве $\mathcal{H}$, то A — положительно определенный оператор ($A\gg 0$) с нижней гранью $\lambda_{min}(A)>0$, где $\lambda_{min}(A)$ — наименьшее собственное значение матрицы A. □

Теорема 1.2.1. *Операторная матрица* C, *элементы которой определяются формулами* (1.2.21)–(1.2.29), *допускает представление*

$$C = C_{\text{тв}} + C_{\text{пр}} \tag{1.2.34}$$

в виде суммы операторной матрицы $C_{\text{тв}}$, *связанной с движением собственно твердых сочлененных тел, и матрицы* $C_{\text{пр}}$, *связанной с движением идеальной жидкости в полостях этих тел. Назовем матрицу* $C_{\text{пр}}$ *по аналогии с термином, введенным Жуковским, присоединенной матрицей инерции.*

Каждая из матриц в (1.2.34) *является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в* (*комплексном*) *пространстве* $\mathcal{H}$, *при этом их квадратичные формы соответственно равны*

$$\left(C_{\text{тв}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \left|\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right|^2 d\Omega_{01} + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \left|\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right|^2 d\Omega_{02} + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \left|\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right|^2 d\Omega_{03}, \tag{1.2.35}$$

$$\left(C_{\text{пр}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \left|P_{G,1}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)\right|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \left|P_{G,2}(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2)\right|^2 d\Omega_2 + \\ + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \left|P_{G,3}(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3)\right|^2 d\Omega_3. \tag{1.2.36}$$

Доказательство. Будем считать первые слагаемые справа в формулах (1.2.21)–(1.2.29) выражениями, задающими элементы $(C_{\text{тв}})_{l,m}$ матрицы $C_{\text{тв}}$, а вторые слагаемые — задающими элементы матрицы $(C_{\text{пр}})_{l,m}$, $l, m = \overline{1,3}$.

Проверим, что $C_{\text{тв}} = \left((C_{\text{тв}})_{l,m}\right)_{l,m=1}^{3}$ является положительно определенным самосопряженным оператором и ее квадратичная форма имеет вид (1.2.35). Имеем для любых $\vec{\delta} = \left(\vec{\delta}_1; \vec{\delta}_2; \vec{\delta}_3\right)^T$ и $\vec{\eta} = (\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2; \vec{\eta}_3)^T$ из $\mathcal{H}$:

$$\left(C_{\text{тв}}\vec{\delta}, \vec{\eta}\right)_{\mathcal{H}} = \left(C_{11}\vec{\delta}_1 + C_{12}\vec{\delta}_2 + C_{13}\vec{\delta}_3\right) \cdot \overline{\vec{\eta}_1} + \left(C_{21}\vec{\delta}_1 + C_{22}\vec{\delta}_2 + C_{23}\vec{\delta}_3\right) \cdot \overline{\vec{\eta}_2} + \left(C_{31}\vec{\delta}_1 + C_{32}\vec{\delta}_2 + C_{33}\vec{\delta}_3\right) \cdot \overline{\vec{\eta}_3} = \\ = \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \left[\vec{r}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_1} d\Omega_{01} + \rho_{02} \left\{ \int\limits_{\Omega_{02}} \left[\vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_1} d\Omega_{02} + \int\limits_{\Omega_{02}} \left[\vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_1} d\Omega_{02} + \right. \\ \left. + \int\limits_{\Omega_{02}} \left[\vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_2} d\Omega_{02} + \int\limits_{\Omega_{02}} \left[\vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_2} d\Omega_{02} \right\} + \\ + \rho_{03} \left\{ \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_1} d\Omega_{03} + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_1} d\Omega_{03} + \right. \\ + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_1} d\Omega_{03} + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_2} d\Omega_{03} + \\ + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_2} d\Omega_{03} + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_2} d\Omega_{03} + \\ + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_3} d\Omega_{03} + \int\limits_{\Omega_{03}} \left[\vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right] \cdot \overline{\vec{\eta}_3} d\Omega_{03} +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{03}}\left[\vec r_3\times\left(\vec\delta_3\times\vec r_3\right)\right]\cdot\overline{\vec\eta_3}d\Omega_{03}\Bigg\}=\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\left(\vec\delta_1\times\vec r_1\right)\cdot\overline{\vec\eta_1\times\vec r_1}d\Omega_{01}+$$

$$+\rho_{02}\Bigg\{\int\limits_{\Omega_{02}}\left[\vec h_1\times\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec r_2\right)\right]\cdot\overline{\vec\eta_1}d\Omega_{02}+\int\limits_{\Omega_{02}}\left[\vec r_2\times\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec r_2\right)\right]\cdot\overline{\vec\eta_2}d\Omega_{02}\Bigg\}+$$

$$+\rho_{03}\Bigg\{\int\limits_{\Omega_{03}}\left[\vec h_1\times\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec h_2+\vec\delta_3\times\vec r_3\right)\right]\cdot\overline{\vec\eta_1}d\Omega_{03}+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{03}}\left[\vec h_2\times\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec h_2+\vec\delta_3\times\vec r_3\right)\right]\cdot\overline{\vec\eta_2}d\Omega_{03}+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{03}}\left[\vec r_3\times\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec h_2+\vec\delta_3\times\vec r_3\right)\right]\cdot\overline{\vec\eta_3}d\Omega_{03}\Bigg\}=$$

$$=\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\left(\vec\delta_1\times\vec r_1\right)\cdot\overline{(\vec\eta_1\times\vec r_1)}d\Omega_{01}+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec r_2\right)\cdot\overline{\left(\vec\eta_1\times\vec h_1+\vec\eta_2\times\vec r_2\right)}d\Omega_{02}+$$

$$+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\left(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec h_2+\vec\delta_3\times\vec r_3\right)\cdot\overline{\left(\vec\eta_1\times\vec h_1+\vec\eta_2\times\vec h_2+\vec\eta_3\times\vec r_3\right)}d\Omega_{03}.\quad(1.2.37)$$

Отсюда следует свойство самосопряженности матрицы $C_{\text{тв}}$.

Полагая в (1.2.37) $\vec\eta=\vec\delta$, приходим к выражению (1.2.35) для квадратичной формы оператора $C_{\text{тв}}$, откуда следует, что $C_{\text{тв}}$ — неотрицательный оператор ($C_{\text{тв}}\geqslant 0$). Однако условие $\left(C_{\text{тв}}\vec\delta,\vec\delta\right)_{\mathcal H}=0$ приводит к соотношениям

$$\begin{gathered}\vec\delta_1\times\vec r_1=\vec 0\quad(\text{в }\Omega_1),\\ \vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec r_2=\vec 0\quad(\text{в }\Omega_2),\\ \vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec h_2+\vec\delta_3\times\vec r_3=\vec 0\quad(\text{в }\Omega_3).\end{gathered}\qquad(1.2.38)$$

Эти равенства в силу произвольности $\vec r_1$, $\vec r_2$ и $\vec r_3$ соответственно возможны лишь при $\vec\delta_1=\vec 0$, $\vec\delta_2=\vec 0$, $\vec\delta_3=\vec 0$, и потому оператор $C_{\text{тв}}$ положителен ($C_{\text{тв}}>0$). Так как он действует в конечномерном пространстве $\mathcal H$, то $C_{\text{тв}}$ положительно определен ($C_{\text{тв}}\gg 0$) и имеет место неравенство

$$\left(C_{\text{тв}}\vec\delta,\vec\delta\right)_{\mathcal H}\geqslant\lambda_{min}\left(C_{\text{тв}}\right)||\vec\delta||^2_{\mathcal H},\quad\lambda_{min}(C_{\text{тв}})>0,\qquad(1.2.39)$$

где $\lambda_{min}\left(C_{\text{тв}}\right)$ — минимальное собственное значение матрицы $C_{\text{тв}}$, которое является положительным.

Последнее утверждение теоремы и формула (1.2.36) доказываются буквально так же, как и соответствующие свойства для матрицы $C_{\text{тв}}$, со следующими изменениями: ρ_{0k} заменяются на ρ_k, интегралы по Ω_{0k} заменяются интегралами по Ω_k, а левые множители в скобках в финальном выражении (1.2.37) умножаются дополнительно на ортопроекторы $P_{G,k}:\vec L_2(\Omega_k)\to\vec G(\Omega_k)$, $k=\overline{1,3}$. Так как $P^2_{G,k}=P_{G,k}=P^*_{G,k}$, то вместо (1.2.37) приходим к формуле

$$\left(C_{\text{пр}}\vec\delta,\vec\eta\right)_{\mathcal H}=\rho_1\int\limits_{\Omega_1}P_{G,1}(\vec\delta_1\times\vec r_1)\cdot\overline{P_{G,1}(\vec\eta_1\times\vec r_1)}d\Omega_1+$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}P_{G,2}(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec r_2)\cdot\overline{P_{G,2}(\vec\eta_1\times\vec h_1+\vec\eta_2\times\vec r_2)}d\Omega_2+$$

$$+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}P_{G,3}(\vec\delta_1\times\vec h_1+\vec\delta_2\times\vec h_2+\vec\delta_3\times\vec r_3)\cdot\overline{P_{G,3}(\vec\eta_1\times\vec h_1+\vec\eta_2\times\vec h_2+\vec\eta_3\times\vec r_3)}d\Omega_3,$$

откуда следует выражение (1.2.36) для квадратичной формы оператора $C_{\text{пр}}$ и его неотрицательность.

Убедимся теперь, что $C_{\text{пр}}$ положительно определен. В самом деле, если $\left(C_{\text{пр}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = 0$, то приходим (вместо (1.2.38)) к соотношениям

$$\begin{aligned} P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) &= \vec{0} \quad (\text{в } \Omega_1), \\ P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) &= \vec{0} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) &= \vec{0} \quad (\text{в } \Omega_3). \end{aligned} \tag{1.2.40}$$

Из первого соотношения следует, что $\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1$ принадлежит подпространству $\vec{J}_0(\Omega_1) \subset \vec{L}_2(\Omega_1)$, в частности, $(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$ (на $S_1 = \partial\Omega_1$). Эта линейная функция координат на замкнутой поверхности S_1 может равняться нулю лишь при условии $\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{0}$, откуда в силу изменения $\vec{n}_1$ на S_1 следует, что $\vec{\delta}_1 = \vec{0}$. Тогда в (1.2.40)

$$P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega_2), \quad P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega_3),$$

и аналогичные рассуждения показывают, что $\vec{\delta}_2 = \vec{0}$, а затем $\vec{\delta}_3 = \vec{0}$.

Итак, оператор $C_{\text{пр}}$ положительно определен, а тогда для него имеет место формула, аналогичная (1.2.39), т. е.

$$\left(C_{\text{пр}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \geqslant \lambda_{min}\left(C_{\text{пр}}\right) ||\vec{\delta}||^2_{\mathcal{H}}, \quad \lambda_{min}\left(C_{\text{пр}}\right) > 0.$$

□

1.2.5. Замечания. Опираясь на выводы пункта 1.2.4, сформулируем без доказательств основные факты, относящиеся к задаче о малых колебаниях гидромеханической системы, состоящей из n сочлененных гиростатов.

1^0. Прежде всего, эта начально-краевая задача снова сводится к исследованию задачи Коши вида (1.2.17), (1.2.19), где теперь искомым является вектор-столбец

$$\vec{\delta}(t) := \left(\vec{\delta}_1(t); \ldots; \vec{\delta}_n(t)\right)^T,$$

рассматриваемый как функция переменной t со значениями в пространстве

$$\mathcal{H} := \underbrace{\mathbb{C}^3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^3}_{n} = \left(\mathbb{C}^3\right)^n$$

с нормой

$$||\vec{\delta}||^2_{\mathcal{H}} := \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{\delta}_k(t)\right|^2. \tag{1.2.41}$$

2^0. В новом эволюционном уравнении матричный оператор B неотрицателен, имеет n-мерное ядро, натянутое на векторы

$$\left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}^{\,3}_1\right)^T; \ldots; \quad \left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}^{\,3}_n\right)^T, \tag{1.2.42}$$

а его квадратичная форма задается выражением

$$\left(B\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = g\sum_{k=1}^{n} b_{kk}\left|P_2\vec{\delta}_k\right|^2, \tag{1.2.43}$$

$$b_{kk} := m_k l_k + \left(\sum_{j=k+1}^{n} m_j\right) h_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

3^0. Матричный оператор A имеет вид

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}+\alpha_n & -\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Он самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}$, а его квадратичная форма такова:

$$\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left|\vec{\delta}_k - \vec{\delta}_{k-1}\right|^2, \quad \vec{\delta}_0 := \vec{0}.$$

4^0. Матричный оператор C представляется в виде суммы $C = C_{\text{тв}} + C_{\text{пр}}$ самосопряженного положительно определенного оператора инерции $C_{\text{тв}}$ сочлененных твердых тел и присоединенного оператора инерции $C_{\text{пр}}$, учитывающего движение идеальных жидкостей в полостях Ω_k, $k = \overline{1,n}$. Оператор $C_{\text{пр}}$ также самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}$.

Квадратичные формы операторов $C_{\text{тв}}$ и $C_{\text{пр}}$ задаются формулами

$$\left(C_{\text{тв}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{0k} \int\limits_{\Omega_{0k}} \left|\sum_{j=1}^{k-1} (\vec{\delta}_j \times \vec{h}_j) + \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k\right|^2 d\Omega_{0k}, \tag{1.2.44}$$

$$\left(C_{\text{пр}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{k} \int\limits_{\Omega_{k}} \left|P_{G,k}\left[\sum_{j=1}^{k-1} (\vec{\delta}_j \times \vec{h}_j) + \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k\right]\right|^2 d\Omega_{k}, \tag{1.2.45}$$

где $P_{G,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{G}(\Omega_k)$ — ортопроектор, $k = \overline{1,n}$.

5^0. Если рассмотреть для сравнения с изучаемой задачей случай, когда в полостях Ω_k содержится не идеальные жидкости, а твердые тела той же плотности ρ_k, $k = \overline{1,n}$, то такая задача о малых движениях сочлененных твердых тел снова сводится в случае $n = 3$ к эволюционному уравнению вида (1.2.17), где операторы A и B — те же, что и в (1.2.17), а также в соответствующем уравнении о движении n тел, т. е. в точности такие же, как только что были описаны в свойствах 2^0 и 3^0, а оператор инерции $C_{\text{отв}}$ имеет вид

$$C_{\text{отв}} = C_{\text{тв}} + C_{\text{ж}}.$$

Здесь $C_{\text{тв}}$ — тот же, что был описан в 4^0, а $C_{\text{ж}}$ — самосопряженный положительно определенный оператор, связанный с движением отвердевших жидкостей; его квадратичная форма

$$\left(C_{\text{ж}}\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{k} \int\limits_{\Omega_{k}} \left|\sum_{j=1}^{k-1} (\vec{\delta}_j \times \vec{h}_j) + \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k\right|^2 d\Omega_{k},$$

имеет такой же вид, как выражение (1.2.44) для $C_{\text{тв}}$.

6^0. Общие формулы для видоизмененных моментов внешних сил (см. (1.2.17), (1.2.20), (1.2.11)–(1.2.13)) для задачи о малых движениях системы n гиростатов таковы:

$$\vec{M}_j(t) = \rho_{0j} \int\limits_{\Omega_{0j}} \vec{r}_j \times \vec{f}_{0j} d\Omega_{0j} + \sum_{l=j+1}^{n} \rho_{0l} \int\limits_{\Omega_{0l}} \vec{h}_l \times \vec{f}_{0l} d\Omega_{0l} + \\ + \rho_j \int\limits_{\Omega_j} \vec{r}_j \times \left(P_{G,j}\vec{f}_j\right) d\Omega_j + \sum_{l=j+1}^{n} \rho_l \int\limits_{\Omega_l} \vec{h}_l \times \left(P_{G,l}\vec{f}_l\right) d\Omega_l, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.2.46}$$

причем здесь формально считаем, что $\sum\limits_{l=n+1}^{n} (\dots) = 0$.

Отметим попутно, что если внешние силы потенциальны, то

$$P_{G,l}\vec{f}_l = \vec{f}_l, \quad \vec{f}_l = \vec{f}|_{\Omega_l}, \quad \vec{f}_{0l} = \vec{f}|_{\Omega_{0l}}, \quad l = \overline{1,n}, \tag{1.2.47}$$

и тогда формулы (1.2.46) дают выражения для моментов внешних сил в задаче о колебаниях системы сочлененных тел с отвердевшими жидкостями в областях Ω_k, $k=\overline{1,n}$.

1.2.6. Теорема Жуковского, потенциалы Жуковского. В задаче динамики твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, хорошо известен следующий факт, полученный Жуковским [22]: если поле массовых сил потенциально, то такая гидромеханическая система движется так же, как движется под действием этого поля сил другое твердое тело с измененным моментом инерции $\vec{J}_{\text{изм}} = \vec{J}_{\text{т}} + \vec{J}_{\text{пр}}$, где $\vec{J}_{\text{т}}$ — момент инерции твердого тела (без жидкости), а $\vec{J}_{\text{пр}}$ — присоединенный момент инерции, связанный с движением жидкости в полости.

Предыдущие рассмотрения задачи о малых колебаниях системы сочлененных гиростатов позволяют установить аналогичный факт.

Теорема 1.2.2 (Обобщенная теорема Жуковского)**.** *Если поле внешних дополнительных массовых сил потенциально, т. е.*

$$\vec{f}=\nabla f, \quad \vec{f}_k=\vec{f}|_{\Omega_k}, \quad \vec{f}_{0k}=\vec{f}|_{\Omega_{0k}}, \quad k=\overline{1,n},$$

то система сочлененных гиростатов с полостями, целиком заполненными идеальными жидкостями, движется под действием внешних сил так же, как движется под действием этого внешнего поля сил система сочлененных твердых тел с измененной матрицей инерции, т. е. с матричным оператором (1.2.34)–(1.2.36).

Доказательство. Оно очевидно ввиду предыдущих преобразований и свойств (1.2.47) (см. свойство 6^0 из пункта 1.2.5). □

Выражение (1.2.36) для квадратичной формы присоединенной матрицы инерции $C_{\text{пр}}$ позволяет вычислить ее, используя так называемые потенциалы Жуковского — функции переменной x, $x\in\Omega_k$, зависящие лишь от геометрических характеристик области Ω_k, $k=\overline{1,n}$. Перейдем к более подробному изложению таких построений применительно к исследуемой задаче о движении системы сочлененных гиростатов.

Введем потенциальное поле

$$P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1\right)=(I_1-P_{0,1})\left(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1\right)=:\nabla\psi_1\in\vec{G}(\Omega_1). \tag{1.2.48}$$

Так как выполнено равенство $\operatorname{div}(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)=0$ и по определению (1.2.2) подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1)$ также $\operatorname{div}(P_{0,1}(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1))=0$, то из (1.2.48) следует, что потенциал ψ_1 поля $\nabla\psi_1$ находится с помощью решения задачи

$$\Delta\psi_1=0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1}=\left(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1\right)\cdot\vec{n}_1 \quad (\text{на } S_1), \tag{1.2.49}$$

причем для его однозначного нахождения можно дополнительно потребовать, чтобы

$$\int\limits_{S_1}\psi_1 dS_1=0. \tag{1.2.50}$$

В самом деле, для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ нормальная компонента поля на границе $S_1=\partial\Omega_1$ равна нулю, откуда приходим к граничному условию Неймана в задаче (1.2.49)-(1.2.50) для гармонической функции $\psi_1=\psi_1(x)$, $x\in\Omega_k$.

Замечание 1.2.1. Известно (см. [16]), что для любой области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ имеет место следующее ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$\vec{L}_2(\Omega)=\vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}_h(\Omega)\oplus\vec{G}_0(\Omega),$$

где $\vec{J}_0(\Omega)$ определено в (1.2.2), $\vec{G}(\Omega)=\vec{G}_h(\Omega)\oplus\vec{G}_0(\Omega)$ и

$$\vec{G}_h(\Omega):=\left\{\nabla\psi\in L_2(\Omega):\Delta\psi=0\ (\text{в } \Omega_1),\ \int\limits_S\psi dS=0\right\},$$

$$\vec{G}_0(\Omega):=\left\{\nabla\varphi\in L_2(\Omega):\varphi=0\ (\text{на } S)\right\}.$$

В частности, подпространство $\vec{G}_h(\Omega)$ называют подпространством потенциально-гармонических полей.

Из (1.2.49)-(1.2.50) следует, что поле $\nabla\psi_1$ является потенциально-гармоническим. Этим же свойством будут обладать поля, построенные по потенциалам Жуковского.

Так как $\vec{\delta}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\vec{e}_1^{\,j}$, то решение задачи (1.2.49)-(1.2.50) можно представить в виде

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\psi_{1j}, \tag{1.2.51}$$

где $\{\psi_{1j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_1. Они являются решениями следующих задач:

$$\Delta\psi_{1j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_{1j}}{\partial n_1} = \left(\vec{e}_1^{\,j} \times \vec{r}_1\right) \cdot \vec{n}_1 \ (\text{на } S_1), \ \int\limits_{S_1} \psi_{1j} dS_1 = 0, \ j = \overline{1,3}, \tag{1.2.52}$$

и зависят, как уже упоминалось выше, лишь от геометрических характеристик области Ω_1.

Введем теперь потенциальное поле, отвечающее второму слагаемому в квадратичной форме (1.2.36):

$$\nabla\psi_2 := P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) = (I_2 - P_{0,2})\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right).$$

Здесь постоянное поле $\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1$ уже потенциально, так как

$$\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 = \nabla\left(\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) \cdot \vec{r}_2\right).$$

Поэтому аналогично предыдущим построениям имеем

$$\psi_2 = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) \cdot \vec{r}_2 + \sum_{j=1}^{3} \delta_2^j(t)\psi_{2j}, \tag{1.2.53}$$

где $\{\psi_{2j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_2:

$$\Delta\psi_{2j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \ \frac{\partial\psi_{2j}}{\partial n_2} = \left(\vec{e}_2^{\,j} \times \vec{r}_2\right) \cdot \vec{n}_2 \ (\text{на } S_2), \ \int\limits_{S_2} \psi_{2j} dS_2 = 0, \ j = \overline{1,3}. \tag{1.2.54}$$

Эти функции зависят лишь от конфигурации области Ω_2.

Наконец, для третьего слагаемого из (1.2.36) соответственно определяем:

$$\nabla\psi_3 := P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right).$$

Тогда

$$\psi_3 = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) \cdot \vec{r}_3 + \sum_{j=1}^{3} \delta_3^j(t)\psi_{3j}, \tag{1.2.55}$$

где $\{\psi_{3j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_3:

$$\Delta\psi_{3j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \ \frac{\partial\psi_{3j}}{\partial n_3} = \left(\vec{e}_3^{\,j} \times \vec{r}_3\right) \cdot \vec{n}_3 \ (\text{на } S_3), \ \int\limits_{S_3} \psi_{3j} dS_3 = 0, \ j = \overline{1,3}. \tag{1.2.56}$$

Определение 1.2.1. Будем называть функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^3$, определяемые формулами (1.2.51)–(1.2.56), *обобщенными потенциалами Жуковского*, отвечающими задаче о малых движениях трех сочлененных гиростатов.

Очевидно, обобщенные потенциалы Жуковского зависят не только от конфигураций областей Ω_k, но также и от способа соединения гиростатов G_k, $k = \overline{1,3}$.

Проведенные рассмотрения показывают, что для квадратичной формы, определяемой присоединенной матрицей инерции, справедлив следующий результат.

Теорема 1.2.3. *Квадратичную форму присоединенной матрицы инерции $C_{\text{пр}}$ в задаче о колебаниях трех сочлененных гиростатов можно вычислить по формуле*

$$\left(C_{\text{пр}}\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}=\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\psi_k|^2\,d\Omega_k,$$

где ψ_k — обобщенные потенциалы Жуковского, выраженные через компоненты векторов $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ и $\vec{\delta}_3$ следующим образом:

$$\psi_1=\sum_{j=1}^{3}\delta_1^j(t)\psi_{1j},\ \ \psi_2=\sum_{l=1}^{3}\delta_1^l\left(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_2+\sum_{j=1}^{3}\delta_2^j(t)\psi_{2j},$$

$$\psi_3=\sum_{l=1}^{3}\delta_1^l\left(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_3+\sum_{m=1}^{3}\delta_1^m\left(\vec{e}_2^{\,m}\times\vec{h}_2\right)\cdot\vec{r}_3+\sum_{j=1}^{3}\delta_3^j(t)\psi_{3j},$$

ψ_{kj} — потенциалы Жуковского, определяемые однозначно по решениям задач (1.2.52), (1.2.54), (1.2.56).

Замечание 1.2.2. Из формулы (1.2.45), отвечающей случаю присоединенной матрицы инерции для n сочлененных гиростатов, аналогично проведенным выше выкладкам можно установить, что

$$\left(C_{\text{пр}}\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}=\sum_{k=1}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\psi_k|^2\,d\Omega_k,$$

$$\psi_k=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{3}\delta_j^l\left(\vec{e}_j^{\,l}\times\vec{h}_j\right)\cdot\vec{r}_k+\sum_{j=1}^{3}\delta_k^j\psi_{kj},$$

где условимся считать, что $\sum\limits_{j=1}^{0}=0$.

Таким образом, при исследовании задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов необходимо предварительно вычислить потенциалы Жуковского для областей Ω_k, $k=\overline{1,n}$, целиком заполненных идеальной жидкостью.

Отметим, что для многих типичных форм полостей потенциалы Жуковского и соответствующие коэффициенты вида

$$<\psi_{kj},\psi_{kl}>:=\int\limits_{\Omega_k}\nabla\psi_{kj}\cdot\nabla\psi_{kl}d\Omega_k$$

вычислены с помощью ЭВМ (см., например [46, 49, 53]).

1.2.7. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов. Опираясь на дифференциальное уравнение (1.2.17) и связь (1.2.19), на соответствующие начальные условия (см. (1.2.17), (1.2.20)) и свойства операторных коэффициентов A, B и C, выраженные в леммах 1.2.1, 1.2.2 и теореме 1.2.1, рассмотрим вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (1.1.9)–(1.1.16) о колебаниях системы из трех сочлененных гиростатов. Учитывая замечания, изложенные в пункте 1.2.5, аналогичные рассуждения можно провести и для исходной задачи (1.1.1)–(1.1.8) о колебаниях любого количества сочлененных гиростатов.

Итак, рассмотрим задачу вида

$$C\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2}+A\frac{d\vec{\delta}}{dt}+B\vec{\delta}=\vec{M}(t),\ \ \frac{d\vec{\delta}}{dt}=\vec{\omega},\ \ \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^{\,0},\ \ \vec{\delta}^{\,\prime}(0)=\vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^{\,0},\tag{1.2.57}$$

причем сразу будем считать, что

$$\vec{\delta}\,(t):=\left(\vec{\delta}_1(t);\ldots;\,\vec{\delta}_n(t)\right)^T$$

— искомая функция переменной t со значениями в пространстве $\mathcal{H}=\left(\mathbb{C}^3\right)^n$ с нормой (1.2.41). Свойства операторных матриц отражены в утверждениях 2^0–5^0 пункта 1.2.5.

Так как оператор C положительно определен, то он имеет ограниченный обратный и потому дифференциальное уравнение второго порядка из (1.2.57) легко сводится к уравнению, разрешенному относительно старшей (второй) производной. Отсюда, как известно, легко перейти к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка и установить свойство однозначной разрешимости задачи (1.2.57).

Осуществим, однако, другие преобразования в задаче (1.2.57), которые позволяют, с одной стороны, получить общую формулу для ее решения, с другой — получить утверждения о разрешимости задач (1.1.1)–(1.1.8) и (1.1.9)–(1.1.16), а с третьей — использовать эти построения для последующего исследования проблемы нормальных колебаний системы сочлененных гиростатов (см. пункт 1.3). Отметим также, что аналогичный подход будет применен в главе 2 при исследовании задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов с полостями, заполненными вязкой жидкостью.

Введем в (1.2.57) новую искомую функцию согласно соотношениям

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} := -iB^{1/2}\vec{\delta}, \quad \vec{\eta}(0) = \vec{0}. \tag{1.2.58}$$

Это можно сделать, так как оператор B неотрицателен. В силу свойства 2^0 из пункта 1.2.5 и формулы (1.2.43) оператор B допускает представление в виде

$$B = \operatorname{diag}(B_1; 0) \tag{1.2.59}$$

в ортогональном разложении

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0,\ \mathcal{H}_0 = \ker B,\ \dim\,\mathcal{H}_0 = n,\ \dim\,\mathcal{H}_1 = 2n, \tag{1.2.60}$$

где $\mathcal{H}_0 = \ker B$ — подпространство, натянутое на элементы (1.2.42), а $\mathcal{H}_1$ состоит из элементов вида

$$P_2\vec{\delta} := \left(P_2\vec{\delta}_1; \ldots; P_2\vec{\delta}_n\right)^T, \tag{1.2.61}$$

т. е. из набора проекций векторов $\vec{\delta}_k$ на плоскости $O_k x_k^1 x_k^2$.

Учитывая эти свойства, замечаем, что

$$B\vec{\delta} = B_1\left(P_2\vec{\delta}\right), \quad B_1 \gg 0, \tag{1.2.62}$$

так что фактически замене (1.2.58) соответствует соотношение

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} := -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}\right), \quad \vec{\eta}(0) = \vec{0}, \tag{1.2.63}$$

и потому $d\vec{\eta}/dt$ и $\vec{\eta}(t)$ являются функциями переменной t со значениями в $\mathcal{H}_1$.

Дифференцируя (1.2.63) по t, имеем

$$\frac{d^2\vec{\eta}}{dt^2} := -iB_1^{1/2}\frac{d}{dt}\left(P_2\vec{\delta}\right), \quad \frac{d\vec{\eta}}{dt}(0) := -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}^0\right). \tag{1.2.64}$$

С учетом (1.2.63), (1.2.64) задача (1.2.57) преобразуется к системе уравнений, которую удобно записать в векторно-матричном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & iP_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}(t) \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \tag{1.2.65}$$

$$\frac{d\vec{\delta}}{dt} = \vec{\omega},\ \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0,\ \vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0,\ \vec{\eta}(0) = \vec{0},\ \vec{\eta}'(0) := -iB_1^{1/2}(P_2\vec{\delta}^0). \tag{1.2.66}$$

Здесь уравнение (1.2.65) уже не содержит самой искомой функции $(\vec{\delta}(t); \vec{\eta}(t))^T$, а лишь ее производные. Поэтому оно может быть легко приведено к дифференциальному уравнению первого порядка для функции $(d\vec{\delta}/dt; d\vec{\eta}/dt)^T$ со значениями в пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 = \left(\mathbb{C}^3\right)^n \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^n = \left(\mathbb{C}^5\right)^n.$$

Осуществим в задаче (1.2.65)-(1.2.66) замену

$$C^{1/2}\vec{\delta} =: \vec{\zeta}.$$

Тогда, применяя еще к обеим частям первого из уравнений (1.2.65) оператор $C^{-1/2}$, приходим к задаче

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\vec\zeta\\ \vec\eta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & iB_1^{1/2}\\ iB_1^{1/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec\zeta\\ \vec\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec M(t)\\ \vec 0\end{pmatrix}, \tag{1.2.67}$$

$$\frac{d\vec\delta}{dt}=\vec\omega,\ \vec\zeta(0)=C^{1/2}\vec\delta^{\,0},\ \vec\zeta\,'(0)=C^{1/2}\vec\omega^{\,0},\ \vec\eta(0)=\vec 0,\ \vec\eta\,'(0):=-iB_1^{1/2}\left(P_2\vec\delta^{\,0}\right). \tag{1.2.68}$$

Вводя новую искомую функцию

$$\vec v(t):=\left(d\vec\zeta/dt;\, d\vec\eta/dt\right)^T=\left(C^{1/2}\vec\omega;-iB_1^{1/2}\left(P_2\vec\delta\right)\right)^T \tag{1.2.69}$$

и оператор

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}C^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & iP_2B_1^{1/2}\\ iB_1^{1/2}P_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}, \tag{1.2.70}$$

а также заданную функцию

$$\vec\varphi(t):=\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec M(t)\\ \vec 0\end{pmatrix}, \tag{1.2.71}$$

приходим вместо (1.2.67)-(1.2.68) к задаче Коши вида

$$\frac{d\vec v}{dt}=-\mathcal{A}\vec v+\vec\varphi(t),\quad \vec v(0)=\left(C^{1/2}\vec\omega^0;-iB_1^{1/2}\left(P_2\vec\delta^{\,0}\right)\right)^T, \tag{1.2.72}$$

рассматриваемой в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Лемма 1.2.3. *Оператор $\mathcal{A}$ из* (1.2.70) *является* (*максимальным*) *аккретивным оператором, действующим в конечномерном гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$; он задан на всем $\widetilde{\mathcal{H}}$ и*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\vec v,\vec v)_{\widetilde{\mathcal{H}}}\geqslant 0\quad \forall\,\vec v\in\widetilde{\mathcal{H}}. \tag{1.2.73}$$

Доказательство. То, что $\mathcal{A}$ задан на всем $\widetilde{\mathcal{H}}$, очевидно, так как $\widetilde{\mathcal{H}}$ — конечномерное пространство и потому область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ есть все $\widetilde{\mathcal{H}}$. Далее, для любых $\vec v=(\vec v_1;\,\vec v_2)^T\in\widetilde{\mathcal{H}}$ имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\mathcal{A}\vec v,\vec v)_{\widetilde{\mathcal{H}}}&=\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix}C^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & iP_2B_1^{1/2}\\ iB_1^{1/2}P_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix}\right)_{\widetilde{\mathcal{H}}}=\\
&=\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix}A & iP_2B_1^{1/2}\\ iB_1^{1/2}P_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix}\right)_{\widetilde{\mathcal{H}}}=\\
&=\operatorname{Re}\left[\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix}\right)_{\widetilde{\mathcal{H}}}+i\left(\begin{pmatrix}0 & P_2B_1^{1/2}\\ B_1^{1/2}P_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix}\right)_{\widetilde{\mathcal{H}}}\right]\\
&=\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C^{-1/2}\vec v_1\\ \vec v_2\end{pmatrix}\right)_{\widetilde{\mathcal{H}}}=||A^{1/2}C^{-1/2}\vec v_1||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}}\geqslant 0,
\end{aligned}$$

откуда и следует свойство аккретивности (1.2.73). □

Из леммы 1.2.3 следует, что оператор $(-\mathcal{A})$ является (максимальным) диссипативным оператором и потому генератором сжимающей полугруппы операторов

$$\mathcal{U}(t)=\exp(-t\mathcal{A}),\quad t\geqslant 0. \tag{1.2.74}$$

(Так как $\mathcal{A}$ ограничен, то $\mathcal{U}(t)$ расширяется до группы операторов, т. е. можно считать также, что $t\in\mathbb{R}$ в (1.2.74), однако этот факт далее не понадобится.)

Эти свойства оператора $\mathcal{A}$ позволяют утверждать (см., например [37], а также [18]), что задача (1.2.72) при непрерывной $\vec\varphi(t)$ и любом элементе $\vec v(0)$ имеет единственное решение

$$\vec v(t)=\left(C^{1/2}\vec\omega(t);-iB_1^{1/2}\left(P_2\vec\delta(t)\right)\right)^T=\exp(-t\mathcal{A})\,\vec v(0)+\int\limits_0^T\exp\left(-\left(t-s\right)\mathcal{A}\right)\vec\varphi(s)ds, \tag{1.2.75}$$

которое является непрерывно дифференцируемой по t функцией. Если $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{0}$, то в силу оценки

$$||\exp(-t\mathcal{A})|| \leqslant 1, \quad t \geqslant 0,$$

которая имеет место для сжимающей полугруппы $\exp(-t\mathcal{A})$, из (1.2.75) получаем, что

$$||\vec{v}(t)||_{\widetilde{\mathcal{H}}} \leqslant ||\vec{v}(0)||_{\widetilde{\mathcal{H}}},$$

т. е., в силу (1.2.69)

$$||C^{1/2}\vec{\omega}(t)||^2_{\mathcal{H}} + ||B_1^{1/2}(P_2\vec{\delta}(t))||^2_{\mathcal{H}_1} \leqslant ||C^{1/2}\vec{\omega}^0||^2_{\mathcal{H}} + ||B_1^{1/2}(P_2\vec{\delta}^0)||^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Это неравенство означает, что полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия в данной гидромеханической системе в любой момент времени t не превышает полной энергии в начальный момент $t = 0$. Данное свойство физически очевидно, так как энергия уменьшается за счет работы трения в шарнирах.

Эти общие факты относительно свойств решений задачи Коши (1.2.72) позволяют установить свойство однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи для трех либо любого количества сочлененных гиростатов.

Теорема 1.2.4. *Пусть в задаче* (1.1.1)–(1.1.8) *выполнены следующие условия*:

$$\vec{u}_k^0 \in \vec{J}_0(\Omega_k),\ \vec{\omega}_k^0,\ \vec{\delta}_k^0 \in \mathbb{R}^3,\ k = \overline{1,n}, \tag{1.2.76}$$

а малое внешнее поле $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ *удовлетворяет следующим свойствам*: *поля*

$$\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_k}, \quad \vec{f}_{0k}(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_{0k}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.2.77}$$

являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ *со значениями в пространствах* $\vec{L}_2(\Omega_k)$ *и* $\vec{L}_2(\Omega_{0k})$ *соответственно.*

Тогда задача (1.1.1)–(1.1.8) *имеет единственное решение на отрезке* $[0,T]$, *которое обладает следующими свойствами*:

1^0. *Функции* $\vec{\delta}_k(t)$ *являются дважды непрерывно дифференцируемыми по* $t \in [0,T]$ *вектор-функциями со значениями в* $\mathbb{C}^3$, *т. е.*

$$\vec{\delta}_k(t) \in C^2\left([0,T];\mathbb{C}^3\right),\ k = \overline{1,n}; \tag{1.2.78}$$

соответственно, функции $\vec{\omega}_k(t)$ *обладают свойствами*

$$\vec{\omega}_k(t) \in C^1\left([0,T];\mathbb{C}^3\right),\ k = \overline{1,n}. \tag{1.2.79}$$

2^0. *Поля скоростей* $\vec{u}_k(t,x)$, $x \in \Omega_k$, *являются непрерывно дифференцируемыми по* t *функциями при* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $\vec{J}_0(\Omega_k)$:

$$\vec{u}_k(t,x) \in C^1\left([0,T];\vec{J}_0\left(\Omega_k\right)\right),\ k = \overline{1,n}.$$

3^0. *Поля давлений* $\vec{p}_k(t,x)$, $x \in \Omega_k$, *обладают свойствами*

$$\nabla p_k(t,x) \in C\left([0,T];\vec{G}(\Omega_k)\right),\ k = \overline{1,n}.$$

Иными словами, решение задачи (1.1.1)–(1.1.8) *таково, что все слагаемые во всех уравнениях являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.*

Доказательство. 1^0. Если выполнены условия (1.2.77), то функции $\widetilde{\vec{M}}_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, согласно их определениям (1.1.9)–(1.1.11), (1.2.11)–(1.2.13), а также аналогичным определениям для n сочлененных гиростатов, являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\mathbb{C}^3$. Отсюда следует (см. (1.2.20)), что $\vec{M}(t)$ из (1.2.65), а потому и $\vec{\varphi}(t)$ из (1.2.71) являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathcal{H}$ и $\widetilde{\mathcal{H}}$ соответственно.

Далее, из условий (1.2.76) следует, что

$$\vec{v}(0) = \left(C^{1/2}\vec{\omega}^{\,0}; -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}^0\right)\right)^T \in \widetilde{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из предыдущих общих рассуждений следует, что задача (1.2.72) имеет единственное непрерывно дифференцируемое по $t \in [0,T]$ решение со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}$

2^0. Осуществляя от задачи (1.2.72) переходы, обратные тем, которые были выше осуществлены при переходе от (1.2.57) к (1.2.72), приходим к выводу, что существует единственное решение первого уравнения (1.2.57), для которого

$$\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \in C\left([0,T];\left(\mathbb{C}^3\right)^n\right); \quad P_2\vec{\delta} \in C\left([0,T];\left(\mathbb{C}^2\right)^n\right). \tag{1.2.80}$$

(Здесь по пути были использованы свойства ограниченности и ограниченной обратимости операторов C и A, а также свойство $B\vec{\delta} = B_1\left(P_2\vec{\delta}\right)$ и обратимость оператора B_1.)

Из второго уравнения (кинематического соотношения) (1.2.57) и из (1.2.80) следует также, что

$$\vec{\delta} = \left(\vec{\delta}_1;\ldots;\vec{\delta}_n\right)^T \in C^2\left([0,T];\left(\mathbb{C}^3\right)^n\right). \tag{1.2.81}$$

Из соотношений (1.2.80), (1.2.81) получаем, что для решения задачи (1.1.1)–(1.1.8) выполнены свойства (1.2.78), (1.2.79).

3^0. Определим теперь функции $d\vec{u}_k/dt$ при $k=\overline{1,3}$ формулами (1.2.5)–(1.2.7), а ∇p_k — формулами (1.2.8)–(1.2.10); аналогичные формулы имеют место и для n гиростатов, причем в скобках в этих формулах стоят переносные скорости, отвечающие соответствующему гиростату. Тогда из доказанных выше свойств следует, что

$$\frac{d\vec{u}_k}{dt} \in C\left([0,T];\vec{J}_0\left(\Omega_k\right)\right), \quad \nabla p_k \in C\left([0,T];\vec{G}\left(\Omega_k\right)\right), \quad k=\overline{1,n}.$$

т. е. выполнены соотношения (1.2.11)–(1.2.13).

4^0. Складывая, наконец, левые и правые части соотношений (1.2.5)–(1.2.7) и (1.2.8)–(1.2.10) соответственно, приходим к выводу, что справедливы уравнения Эйлера (1.1.12)–(1.1.14) (при $n=3$), а также аналогичные уравнения (1.1.4)-(1.1.5) (при произвольном n). При этом в уравнениях Эйлера каждое слагаемое является непрерывной функцией $t \in [0,T]$ со значениями в соответствующем пространстве $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k=\overline{1,n}$. □

В качестве следствия к теореме 1.2.4 отметим такой факт.

Теорема 1.2.5. *Если выполнены условия теоремы* 1.2.4, *то для решения задачи* (1.1.1)–(1.1.8) (*а также задачи* (1.1.9)–(1.1.16) *при* $n=3$) *справедлив закон баланса полной энергии в форме* (1.1.19) (*соответственно в форме* (1.1.18) *при* $n=3$), *где все слагаемые, в том числе первые производные по* t *от кинетической и потенциальной энергий, являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Оно проводится в точности так же, как вывод формул (1.1.18), (1.1.19), с учетом того, что в уравнениях Эйлера все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k=\overline{1,n}$. □

1.3. Нормальные колебания системы сочлененных гиростатов

В данном разделе изучается задача о так называемых нормальных движениях исследуемой гидромеханической системы. Обсуждаются возникающие здесь спектральные задачи, полученные на базе эволюционных проблем, описанных в пункте 1.2.

1.3.1. Постановка задачи о нормальных колебаниях. Будем считать, что на систему сочлененных гиростатов не действует дополнительное поле внешних сил, т. е. $\vec{f}(t,x) \equiv \vec{0}$. Тогда, как следует из (1.1.1)–(1.1.3), (1.1.19), (1.2.11)–(1.2.13), (1.2.20), (1.2.46), (1.2.71), заданные правые части в возникающих эволюционных уравнениях — тождественно нулевые вектор-функции переменной t, в частности, в первом уравнении (1.2.17) $\vec{M}(t) \equiv \vec{0}$ (см. (1.2.20)), то же — в (1.2.57), а также $\vec{\varphi} \equiv \vec{0}$ в (1.2.72).

Движения такого вида будем называть свободными.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что решение задачи о свободных движениях системы сочлененных гиростатов являются *нормальными колебаниями*, если искомые функции зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$, т. е.

$$\vec{\delta}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\delta}_k, \quad \vec{\omega}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\omega}_k, \quad \vec{u}_k(t,x) = e^{-\lambda t}\vec{u}_k(x), \quad p_k(t,x) = e^{-\lambda t}p_k(x), \quad k = \overline{1,n}.$$

В этих формулах $\lambda \in \mathbb{C}$ — неизвестный заранее спектральный параметр задачи, а множители при $\exp(-\lambda t)$ — так называемые амплитудные элементы. Отметим еще, что $\operatorname{Re}\lambda (> 0)$ дают декремент затухания нормальных колебаний, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ — их частоту.

Рассмотрим нормальные колебания исследуемой гидромеханической системы на основе нескольких возникших эволюционных уравнений. Для задачи (1.2.14)–(1.2.16), (1.1.15) приходим к уравнениям

$$-\lambda C\vec{\omega} + A\vec{\omega} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathcal{H}, \tag{1.3.1}$$

для задачи (1.2.17), (1.2.19), (1.2.57) (а также из (1.3.1)) получаем эквивалентную спектральную задачу

$$\lambda^2 C\vec{\delta} - \lambda A\vec{\delta} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}. \tag{1.3.2}$$

Наконец, для задачи (1.2.72) имеем

$$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \ \vec{v} = \left(C^{1/2}\vec{\omega}; -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)^T \in \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1. \tag{1.3.3}$$

Свойства операторных матриц A, B, C и $\mathcal{A}$ описаны в леммах 1.2.1, 1.2.2, теореме 1.2.1, замечаниях в пункте 1.2.5, лемме 1.2.3, а $\vec{\omega}$, $\vec{\delta}$ и $\vec{v}$ — искомые амплитудные элементы.

Прежде чем переходить к исследованию задачи о нормальных колебаниях системы гиростатов, дадим некоторые хорошо известные определения. Пусть $L(\lambda)$ — произвольная функция, аналитическая в некоторой области $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и принимающая значение на множестве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что число $\lambda_0 \in \Lambda \subset \mathbb{C}$ является *собственным значением* для оператор-функции (операторного пучка) $L(\lambda)$, если найдется ненулевой элемент $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ такой, что $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$. Элемент $\varphi_1 \in \mathcal{H}$ называют первым *присоединенным элементом* (по Келдышу) к *собственному элементу* φ_0, если $\varphi_1 \neq 0$ и

$$L(\lambda_0)\varphi_1 + L^{'}(\lambda_0)\varphi_0 = 0. \tag{1.3.4}$$

Аналогично определяется второй и последующие присоединенные элементы на основе формул

$$L(\lambda_0)\varphi_2 + \frac{1}{1!}L^{'}(\lambda_0)\varphi_1 + \frac{1}{2!}L^{''}(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad \ldots \quad . \tag{1.3.5}$$

Эти же определения *корневых элементов* (собственных и присоединенных) используются для исследования нелинейных относительно параметра λ спектральных задач в конечномерных пространствах. В частности, таковой является задача (1.3.2).

Другие необходимые определения для возникающих спектральных задач будут даны по ходу исследования изучаемой гидромеханической задачи.

1.3.2. Простейшие свойства спектра и системы корневых элементов. Получим простейшие свойства собственных значений и корневых элементов на основе задач (1.3.1), (1.3.2) сразу для системы из n маятников. Эти свойства сформулируем в виде отдельных утверждений.

Свойство 1^0. Число $\lambda = \lambda_0 = 0$ является n-кратным собственным значением спектральных задач (1.3.1), (1.3.2). Отвечающее ему собственное подпространство $\mathcal{H}_0$ состоит из элементов вида

$$\left(\vec{\omega}, \vec{\delta}\right)^T = \left(\vec{0}, \vec{\delta}^3\right)^T, \ \vec{\delta}^3 \in \ker B \neq \{\vec{0}\}, \tag{1.3.6}$$

где

$$\vec{\delta}^3 = \left(\vec{\delta}_1^3 = \delta_1^3\vec{e}_1^{\,3}; \vec{\delta}_2^3; \ldots; \vec{\delta}_n^3\right)^T, \tag{1.3.7}$$

— произвольные элементы, см. (1.2.60), (1.2.42).

В самом деле, при $\lambda = 0$ из (1.3.1) имеем $\vec{\omega} = \vec{0}$, $B\vec{\delta} = \vec{0}$, и в силу (1.2.61), (1.2.62) получаем, что $P_2\vec{\delta} = \vec{0}$, т. е. $\vec{\delta} = \vec{\delta}^3$.

Свойство 2^0. Если $\lambda \neq 0$, то задача (1.3.1) либо (1.3.2) равносильна спектральной проблеме

$$L(\lambda)\vec{\delta} := \left(A - \lambda C - \lambda^{-1} P_2 B P_2\right)\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \vec{\delta} \in \mathcal{H}, \tag{1.3.8}$$

Собственные значения λ расположены симметрично относительно вещественной оси и по собственным элементам $\vec{\delta}$ находятся по формулам

$$\lambda_\pm = \frac{\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \pm \sqrt{\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)^2_{\mathcal{H}} - 4\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \cdot \left(B_1 P_2\vec{\delta}, P_2\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}_1}}}{2\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}}; \tag{1.3.9}$$

кроме того, они обладают свойством

$$\operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{1.3.10}$$

Действительно, если $\lambda \neq 0$, то в (1.3.1) можно исключить либо $\vec{\omega}$, и тогда придем к уравнению (1.3.8), либо $\vec{\delta}$, и тогда получим такое же уравнение для $\vec{\omega} = -\lambda\vec{\delta}$. Умножая обе части (1.3.8) скалярно на $\vec{\delta}$ и решая соответствующее квадратное уравнение относительно λ, приходим к формуле (1.3.9).

Так как $C \gg 0$, то знаменатель в (1.3.9) не обращается в нуль, поскольку $\vec{\delta} \neq \vec{0}$; кроме того, из этой же формулы следует, что если $\lambda_0 \neq 0$ — собственное значение задачи и $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$, то и $\overline{\lambda_0}$, т. е. комплексно сопряженное число, тоже собственное значение. Иными словами, спектр задачи (в данном конечномерном случае это совокупность собственных значений) симметричен относительно вещественной оси.

Заметим еще, что свойство (1.3.10) непосредственно следует из (1.3.9) как в случае

$$\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)^2_{\mathcal{H}} - 4\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \cdot \left(B_1 P_2\vec{\delta}, P_2\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0, \quad \vec{\delta} \neq \vec{0}, \tag{1.3.11}$$

так и в случае

$$\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)^2_{\mathcal{H}} - 4\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \cdot \left(B_1 P_2\vec{\delta}, P_2\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}_1} < 0, \quad \vec{\forall}\delta \in \mathcal{H}. \tag{1.3.12}$$

В самом деле, при условии (1.3.12) это очевидно. Далее заметим, что для решения $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ уравнения (1.3.8) $P_2 B_1 P_2 \neq \vec{0}$, иначе при выполнении условия (1.3.11) из (1.3.9) следовало бы, что $\lambda_- = 0$, в противоречии с предположением $\lambda \neq 0$.

Отметим также, что при выводе (1.3.9) было использовано свойство

$$\left(B\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \left(B_1 P_2\vec{\delta},\ P_2\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}_1} = ||B_1^{1/2} P_2(\vec{\delta})||^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0,$$

так как $B_1 \gg 0$ (см. (1.2.62) и (1.2.59)).

Свойство 3^0. Невещественные собственные значения λ, а также те вещественные λ (они положительны), которым отвечают, кроме собственных, присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$F := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right), |\lambda| \leqslant \lambda^{1/2}_{max}\left(\widetilde{C}_{11}^{-1/2} B_1 \widetilde{C}_{11}^{-1/2}\right)\right\}, \tag{1.3.13}$$

где $\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right) > 0$ — минимальное собственное значение оператора $C^{-1/2}AC^{-1/2}$, а $\lambda_{max}\left(\widetilde{C}_{11}^{-1/2} B_1 \widetilde{C}_{11}^{-1/2}\right)$ — максимальное собственное значение задачи

$$B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \lambda C\vec{\delta}, \tag{1.3.14}$$

причем

$$\widetilde{C}_{11} := C_{11} - C_{10}C_{00}^{-1}C_{01} > 0,\ C_{ij} := P_i C P_j,\ i,j = 0,1, \tag{1.3.15}$$

где $P_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ и $P_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$ ортопроекторы на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно (см. ортогональное разложение (1.2.60) и представление (1.2.59) оператора B в этом ортогональном разложении).

Докажем эти утверждения. Если λ — невещественное собственное значение задачи (1.3.2), то из (1.3.9) имеем

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{\left(A\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}}{2\left(C\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}}. \tag{1.3.16}$$

Рассмотрим спектральную задачу

$$A\vec{\delta} = \lambda C\vec{\delta},\ \ \vec{\delta}\in\mathcal{H}. \tag{1.3.17}$$

Так как $C \gg 0$, то она равносильна задаче

$$C^{-1/2}AC^{-1/2}\vec{\eta} = \lambda\vec{\eta},\ \ C^{1/2}\vec{\delta} =: \vec{\eta}\in\mathcal{H}.$$

Поскольку также $A \gg 0$, то оператор $C^{-1/2}AC^{-1/2} \gg 0$, и тогда

$$\frac{\left(A\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}}{\left(C\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}} = \frac{(C^{-1/2}AC^{-1/2}\vec{\eta},\vec{\eta})_{\mathcal{H}}}{(\vec{\eta},\vec{\eta})_{\mathcal{H}}} \geqslant \lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right). \tag{1.3.18}$$

Отсюда следует первое неравенство в (1.3.13) при невещественных λ.

Будем теперь считать, что λ_0 — вещественное (и потому положительное) собственное значение задачи (1.3.2), причем ему отвечает не только собственный элемент $\vec{\delta}_0$, но и присоединенный к нему элемент $\vec{\delta}_1$. Тогда должны (в силу (1.3.4), (1.3.5)) выполняться условия

$$\lambda_0^2 C\vec{\delta}_0 - \lambda_0 A\vec{\delta}_0 + B\vec{\delta}_0 = \vec{0}, \tag{1.3.19}$$

$$\lambda_0^2 C\vec{\delta}_1 - \lambda_0 A\vec{\delta}_1 + B\vec{\delta}_1 + 2\lambda_0 C\vec{\delta}_0 - A\vec{\delta}_0 = \vec{0}. \tag{1.3.20}$$

Умножая обе части уравнения (1.3.20) на $\vec{\delta}_0$ (скалярно в $\mathcal{H}$) и используя самосопряженность операторов C, A, B, а также свойство вещественности λ_0 и уравнение (1.3.19), получаем, что

$$\lambda_0 = \frac{\left(A\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}}}{2\left(C\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}}},$$

т. е. то же выражение справа, что и в (1.3.16). Поэтому, повторяя рассуждения, отображенные формулами (1.3.17)-(1.3.18), приходим к выводу, что и при тех вещественных собственных значениях λ, которым отвечают присоединенные элементы, справедливо первое неравенство из (1.3.13).

Докажем теперь второе неравенство из (1.3.13). Если λ — невещественное собственное значение задачи (1.3.2), то выполнено неравенство (1.3.12), и тогда, согласно формуле (1.3.9),

$$|\lambda|^2 = \frac{\left(A\vec{\delta},\vec{\delta}\right)^2_{\mathcal{H}} + \left[4\left(C\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}\cdot\left(B_1\left(P_2\vec{\delta}\right),\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)_{\mathcal{H}_1} - \left(A\vec{\delta},\vec{\delta}\right)^2_{\mathcal{H}}\right]}{4\left(C\vec{\delta},\vec{\delta}\right)^2_{\mathcal{H}}} = \frac{\left(B_1\left(P_2\vec{\delta}\right),\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)_{\mathcal{H}_1}}{\left(C\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}}. \tag{1.3.21}$$

Рассмотрим, опираясь на этот факт, спектральную задачу (1.3.14) в пространстве $\mathcal{H}_1$. Она равносильна проблеме

$$B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \lambda\left(C_{11}\left(P_2\vec{\delta}\right) + C_{10}\left(\vec{\delta}^3\right)\right),\ \ P_2\vec{\delta}\in\mathcal{H}_1, \tag{1.3.22}$$

$$\vec{0} = \lambda\left(C_{01}\left(P_2\vec{\delta}\right) + C_{00}\left(\vec{\delta}^3\right)\right),\ \ \vec{\delta}^3 = \vec{\delta} - P_2\vec{\delta}\in\mathcal{H}_0, \tag{1.3.23}$$

где операторы C_{ij} определены формулами (1.3.15). Так как $C \gg 0$, то также $C_{00} \gg 0$ и потому существует операторная матрица C_{00}^{-1}, которая тоже положительно определена: $C_{00}^{-1} \gg 0$.

Если $\lambda = 0$, то, очевидно, $P_2\vec{\delta} = \vec{0}$, т. е. решение задачи (1.3.13) тривиально. При $\lambda \neq 0$ из (1.3.23) имеем

$$\vec{\delta}^3 = -C_{00}^{-1}C_{01}\left(P_2\vec{\delta}\right);$$

подставляя это соотношение в (1.3.22), приходим к проблеме

$$B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \lambda\left(\widetilde{C}_{11}\left(P_2\vec{\delta}\right)\right),\quad \widetilde{C}_{11} := C_{11} - C_{10}C_{00}^{-1}C_{01}. \tag{1.3.24}$$

Однако, поскольку $C \gg 0$, то и $\widetilde{C}_{11} \gg 0$. Этот факт хорошо известен: его доказательство можно найти, например, в [34, с. 57].

Задача (1.3.24) — такого же типа, как (1.3.17). Кроме того, можно проверить, что отношение (1.3.21) равно отношению

$$\frac{\left(B_1\left(P_2\vec{\delta}\right),\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)_{\mathcal{H}_1}}{\left(\widetilde{C}_{11}\left(P_2\vec{\delta}\right),\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)_{\mathcal{H}_1}} = \frac{\left(\widetilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\widetilde{C}_{11}^{-1/2}\vec{\eta},\vec{\eta}\right)_{\mathcal{H}_1}}{(\vec{\eta},\vec{\eta})_{\mathcal{H}_1}}, \quad \vec{\eta} = \widetilde{C}_{11}^{-1/2}\left(P_2\vec{\delta}\right),$$

откуда получаем, что правая часть (1.3.21) не превышает максимального собственного значения задачи (1.3.24) или, что равносильно, задачи

$$\widetilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\widetilde{C}_{11}^{-1/2}\vec{\eta} = \lambda\vec{\eta}. \tag{1.3.25}$$

Итак, при невещественных собственных значениях λ второе неравенство в (1.3.13) установлено.

Пусть теперь λ_0 — вещественное собственное значение задачи (1.3.2), и ему отвечают собственный элемент $\vec{\delta}_0$ и присоединенный элемент $\vec{\delta}_1 \neq \vec{0}$. Тогда выполнены уравнения (1.3.19), (1.3.20). Из них, как и выше, получаем, что

$$\lambda_0^2\left(C\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}} - \lambda_0\left(A\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}} + \left(B_{11}\left(P_2\vec{\delta}_0\right),\left(P_2\vec{\delta}_0\right)\right)_{\mathcal{H}_1} = 0,$$

$$2\lambda_0^2\left(C\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}} - \lambda_0\left(A\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$|\lambda_0|^2 = \frac{\left(B_1\left(P_2\vec{\delta}_0\right),\left(P_2\vec{\delta}_0\right)\right)_{\mathcal{H}_1}}{\left(C\vec{\delta}_0,\vec{\delta}_0\right)_{\mathcal{H}}},$$

т. е. такое же вариационное отношение, как в (1.3.21). Осталось лишь повторить проведенные только что выкладки и также установить второе неравенство из (1.3.13) при тех вещественных λ, которым отвечают присоединенные элементы задачи (1.3.2). Этим свойство 3^0 полностью доказано.

Свойство 4^0. Если выполнено условие

$$\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right) > 2\lambda_{max}^{1/2}\left(\widetilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\widetilde{C}_{11}^{-1/2}\right), \tag{1.3.26}$$

то задача (1.3.2) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов.

В самом деле, при выполнении условия (1.3.26) множество F из (1.3.13) — пустое. Заметим, что неравенство (1.3.26) заведомо выполнено, если силы трения в шарнирах достаточно велики.

Свойство 5^0. Задача (1.3.1) о нормальных колебаниях трех сочлененных гиростатов имеет $6 \cdot 3 = 18$ собственных значений (с учетом их кратностей); соответственно задача о нормальных колебаниях n гиростатов имеет $6n$ собственных значений (с учетом их кратностей). При этом, как уже упоминалось в свойстве 1^0, в задаче для трех гиростатов $\lambda = 0$ — трехкратное, а для n гиростатов — n-кратное собственное значение.

Для доказательства этих свойств перепишем задачу (1.3.1) в таком виде:

$$\begin{pmatrix} A & B_1 \\ -P_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \ -\vec{\omega}^3 = \lambda\vec{\delta}^3, \tag{1.3.27}$$

где I_{2n} — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$, $\dim\mathcal{H}_1 = 2n$. Если $\lambda = 0$, то первое уравнение (1.3.27) имеет лишь нулевое решение, и тогда $\lambda = 0$ — n-кратное собственное значение (см. свойство 1^0). Покажем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением первого уравнения (1.3.27). Действительно, здесь возникает система уравнений

$$A\vec{\omega} + B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega} = \vec{0}.$$

Тогда с использованием свойства $B_1P_2 = P_2B_1P_2$ имеем

$$(A\vec{\omega},\vec{\omega})_{\mathcal{H}} + \left(P_2B_1\left(P_2\vec{\delta}\right),\vec{\omega}\right)_{\mathcal{H}} = (A\vec{\omega},\vec{\omega})_{\mathcal{H}} + \left(B_1\left(P_2\vec{\delta}\right),P_2\vec{\omega}\right)_{\mathcal{H}} = (A\vec{\omega},\vec{\omega})_{\mathcal{H}} = 0,$$

откуда следует, что $\vec{\omega} = \vec{0}$, так как $A \gg 0$. Поэтому $B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \vec{0}$ и $\left(P_2\vec{\delta}\right) = \vec{0}$, поскольку $B_1 \gg 0$ (в $\mathcal{H}_1$). Таким образом, первое уравнение (1.3.27) имеет лишь ненулевые собственные значения, расположенные, как было доказано в свойстве 2^0, в правой комплексной полуплоскости.

Итак, спектр задачи (1.3.27) распадается на два множества: n-кратное нулевое собственное значение, и тогда первое уравнение (1.3.27) имеет лишь нулевое решение, и конечное число собственных значений в правой полуплоскости, отвечающих ненулевым решениям первого уравнения (1.3.27). Для таких решений по найденному $\vec{\omega} \in \mathcal{H}$ можно найти $\vec{\omega}^3 = \vec{\omega} - P_2\vec{\omega}$ и тогда, поскольку $\lambda \neq 0$, из второго соотношения (1.3.27) находим $\vec{\delta}^3 = \vec{\delta} - P_2\vec{\delta}$, а затем и $\vec{\delta}$.

Перейдем к рассмотрению первого уравнения (1.3.27). Так как здесь $C \gg 0$, то оператор $\operatorname{diag}(C; I_{2n})$ имеет (ограниченный) обратный оператор $\operatorname{diag}\left(C^{-1}; I_{2n}\right)$, действующий в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 = \left(\mathbb{C}^3\right)^n \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^n = \left(\mathbb{C}^5\right)^n$, $\dim \widetilde{\mathcal{H}} = 5n$.

Применяя к обеим частям первого уравнения (1.3.27) этот обратный оператор, приходим к стандартной задаче на собственные значения матрицы:

$$\left\{\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B_1 \\ -P_2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} I_{3n} & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \tag{1.3.28}$$

Отсюда следует, что собственные значения λ являются корнями характеристического многочлена $p_{5n}(\lambda)$, т. е. уравнения

$$p_{5n}(\lambda) := \det\left\{\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B_1 \\ -P_2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} I_{3n} & 0 \\ 0 & I_{2n} \end{pmatrix}\right\} = 0. \tag{1.3.29}$$

Оно, очевидно, имеет $5n$ комплексных корней для произвольного n и потому 15 корней для трех сочлененных гиростатов.

Свойство 6^0. Физический смысл нормальных движений, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$, для трех сочлененных гиростатов состоит в следующем: этому λ соответствуют не движения, а новые состояния покоя гидромеханической системы, которые получаются из исходного состояния поворотом гиростатов на произвольные углы $\vec{\delta}_1^3$, $\vec{\delta}_2^3$, $\vec{\delta}_3^3$ соответственно. Для системы из n гиростатов аналогично имеем набор произвольных поворотов на углы $\vec{\delta}_1^3, \ldots, \vec{\delta}_n^3$.

Свойство 7^0. Если трение в шарнирах отсутствует, то $A = 0$. В этом случае задача (1.3.1) принимает вид

$$B\vec{\delta} - \lambda C\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} + \lambda\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathcal{H}. \tag{1.3.30}$$

Данная задача имеет $2n$-кратное собственное значение $\lambda_0 = 0$, ему отвечает n первых присоединенных элементов соответственно вида

$$\vec{\omega}_0 = \vec{0},\ \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3 \in \ker B = \mathcal{H}_0,\ \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 \in \ker B,\ \vec{\delta}_1 = \vec{0}.$$

Кроме того, задача (1.3.30) имеет $2n$ пар чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i\lambda_k^{1/2}\left(\widetilde{C}_{11}^{-1/2}B_{11}\widetilde{C}_{11}^{-1/2}\right), \quad k = \overline{1, 2n}. \tag{1.3.31}$$

Проведем доказательство этих фактов. Если $\lambda = \lambda_0 = 0$, то из (1.3.30) имеем $B\vec{\delta} = B\vec{\delta}_0 = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 = 0$, т. е. $\vec{\delta} = \vec{\delta}_0^3 \in \ker B$. Убедимся теперь, что каждый собственный элемент $\left(\vec{\delta}_0, \vec{\omega}_0\right)^T = \left(\vec{\delta}_0^3, \vec{0}\right)^T \in \mathcal{H}^2$ задачи (1.3.30) имеет первый присоединенный элемент вида

$$\left(\vec{\delta}_1, \vec{\omega}_1\right)^T = \left(\vec{0}, -\vec{\delta}_0^3\right)^T$$

и не имеет второго присоединенного элемента.

В самом деле, согласно определениям (1.3.4), (1.3.5) собственных и присоединенных элементов имеем систему уравнений

$$B\vec{\delta}_1 - C\vec{\omega}_0 = \vec{0}, \quad \vec{\omega}_1 + \vec{\delta}_0 = \vec{0} \tag{1.3.32}$$

для первого присоединенного элемента $\left(\vec{\delta}_1; \vec{\omega}_1\right)^T \in \mathcal{H}^2$ и систему уравнений

$$B\vec{\delta}_2 - C\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad \vec{\omega}_2 + \vec{\delta}_1 = \vec{0} \tag{1.3.33}$$

для возможного второго присоединенного элемента $\left(\vec{\delta}_2;\, \vec{\omega}_2\right)^T$, отвечающего собственному элементу $\left(\vec{\delta}_0;\, \vec{\omega}_0\right)^T = \left(\vec{\delta}_0^3;\, \vec{0}\right)^T$.

Из второго уравнения (1.3.32) имеем

$$\vec{\omega}_1 = -\vec{\delta}_0 = -\vec{\delta}_0^3 \in \ker B,$$

а из первого, в силу того, что $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$, получаем, что $\vec{\delta}_1 = \vec{\delta}_1^3$. Так как присоединенные элементы можно выбирать с точностью до линейной комбинации предыдущих собственного и присоединенных элементов, то можно положить $\vec{\delta}_1^3 = \vec{0}$, тогда

$$\left(\vec{\delta}_1,\, \vec{\omega}_1\right)^T = -\left(\vec{0},\, \vec{\delta}_0^3\right)^T. \tag{1.3.34}$$

Покажем теперь, что в задаче (1.3.30) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ второй присоединенный элемент отсутствует. Предположим противное, и тогда должна выполняться система уравнений (1.3.33). Так как $\vec{\delta}_1 = \vec{0}$, то имеем $\vec{\omega}_2 = \vec{0}$. Далее, умножая обе части первого уравнения (1.3.33) на $\vec{\delta}_0^3$ и используя связь $\vec{\omega}_1 = -\vec{\delta}_0^3$ (см. (1.3.34)), будем иметь

$$\left(B\vec{\delta}_2, \vec{\delta}_0^3\right)_{\mathcal{H}} = \left(C\vec{\omega}_1, \vec{\delta}_0^3\right)_{\mathcal{H}} = -\left(C\vec{\delta}_0^3, \vec{\delta}_0^3\right)_{\mathcal{H}} = \left(\vec{\delta}_2, B\vec{\delta}_0^3\right)_{\mathcal{H}} = 0,$$

так как $\vec{\delta}_0^3 \in \ker B$. Поскольку $C \gg 0$, то $\vec{\delta}_0^3 = \vec{0}$, и тогда собственный элемент $\left(\vec{\delta}_0,\, \vec{\omega}_0\right)^T = \left(\vec{\delta}_0^3,\, \vec{0}\right)^T = \left(\vec{0},\, \vec{0}\right)^T$. Возникло противоречие, и утверждение об отсутствии второго собственного элемента, отвечающего нулевому собственному значению задачи (1.3.30), доказано.

Рассмотрим теперь в задаче (1.3.30) ситуацию, когда $\lambda \neq 0$. Тогда, сводя эту задачу к проблеме

$$B\vec{\delta} = B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \mu C\vec{\delta},\ \ \mu = -\lambda^2 \tag{1.3.35}$$

и пользуясь рассуждениями, проведенными при доказательстве свойства 3^0 (см. формулы (1.3.22)–(1.3.25)), приходим к выводу, что задача (1.3.35) имеет $2n$ положительных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{2n}$, $\mu_k = \lambda_k\left(\widetilde{C}_{11}^{-1/2}B_{11}\widetilde{C}_{11}^{-1/2}\right)$. Поэтому исходная задача (1.3.30) имеет $2n$ пар чисто мнимых собственных значений, выражаемых формулами (1.3.31).

Итак, вырожденная (при $A = 0$) задача (1.3.30) также имеет $6n$ собственных значений, причем в этой задаче собственное значение $\lambda = \lambda_0 = 0$ уже не n-кратно, а $2n$-кратно и каждый собственный элемент имеет ровно один присоединенный.

Свойство 8^0. В качестве следствия из свойства 7^0 получаем такое утверждение: при достаточно малом трении в шарнирах (коэффициенты $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, достаточно малы) задача (1.3.1) имеет n-кратное нулевое собственное значение и n собственных значений (вероятно, вещественных, а потому положительных) в окрестности нуля. Тогда всего в задаче (1.3.1) может быть не более $2n$ пар комплексно сопряженных собственных значений. Позже этот факт при произвольном трении в шарнирах будет доказан в пункте 1.3.3.

Свойство 9^0. Предыдущие свойства решений задачи (1.3.1) показывают, что трение в шарнирах играет существенную роль в данной задаче: если оно отсутствует, то спектр расположен на мнимой оси; если оно достаточно велико (выполнено условие (1.3.26)), то этот спектр расположен на неотрицательной полуоси; если трение умеренное, то спектр расположен (кроме нулевого собственного значения) в правой комплексной полуплоскости, причем может быть, по-видимому, не более чем $2n$ пар невещественных комплексно сопряженных собственных значений. Каждой такой паре $\lambda_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0$ отвечает декремент затухания $\alpha_0 > 0$ нормального движения гидромеханической системы и частота колебания $\beta_0 > 0$.

Свойство 10^0. В качестве еще одного следствия из свойства 7^0 приведем такой факт: в задаче о свободных движениях гидромеханической системы, отвечающей задаче (1.3.30) при отсутствии трения в шарнирах, т. е. в задаче

$$C\frac{d\vec{\omega}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} = \vec{\omega}, \tag{1.3.36}$$

возможны тривиальные решения вида

$$\vec{\delta}(t) = \vec{\delta}_0 + t\vec{\omega}_0, \ \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3, \ \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_0^3. \tag{1.3.37}$$

Они соответствуют произвольному перемещению системы при $t = 0$ на $\vec{\delta}_0 = \left(\vec{\delta}_{0,1}^3; \ldots; \vec{\delta}_{0,n}^3\right)^T$, а затем медленному равномерному вращению каждого гиростата с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \left(\vec{\omega}_{0,1}^3; \ldots; \vec{\omega}_{0,n}^3\right)^T$.

Для доказательства сначала заметим, что движение такого вида в эволюционной задаче (1.3.36) соответствует нулевому собственному значению в спектральной задаче (1.3.1) и наличию присоединенных элементов в этом случае (свойство 7^0). Будем разыскивать решения задачи (1.3.36) в форме

$$\vec{\delta}(t) = \vec{\delta}_0 + t\vec{\delta}_1, \ \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + t\vec{\omega}_1.$$

Подставляя эти функции в (1.3.36) и приравнивая слагаемые при нулевой и первой степени t, будем иметь соотношения

$$C\vec{\omega}_1 + B\vec{\delta}_0 = \vec{0}, \ B\vec{\delta}_1 = \vec{0}, \ \vec{\delta}_1 - \vec{\omega}_0 = \vec{0}, \ \vec{\omega}_1 = \vec{0},$$

откуда следует, что

$$\vec{\delta}_1 = \vec{\omega}_0, \ \vec{\omega}_1 = \vec{0}, \ \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_0^3, \ \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3,$$

т. е. решение вида (1.3.37).

Свойство 11^0. Отметим, наконец, еще одно математическое обстоятельство, следующее из задачи (1.3.28): система корневых (собственных и присоединенных) элементов этой задачи образует базис в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 = \left(\mathbb{C}^3\right)^n \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^n = \left(\mathbb{C}^5\right)^n$.

Это свойство очевидно, так как (1.3.28) является задачей на собственные значения матрицы в конечномерном пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$, $\dim \widetilde{\mathcal{H}} = 5n$.

1.3.3. Индефинитный подход. К исследуемой проблеме нормальных колебаний системы из n сочлененных гиростатов можно применить еще один подход, основанный на теории самосопряженных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой (см. например, [1, 71]). Очень краткие сведения о таких операторах можно также найти в параграфе 1.4 монографии [34].

Рассмотрим спектральную задачу (1.3.3), т. е. задачу

$$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \ \vec{v} := \left(\vec{\psi}; \vec{\psi}_1\right)^T = \left(C^{1/2}\vec{\omega}; -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)^T, \tag{1.3.38}$$

$$\vec{\psi} \in \mathcal{H}, \ \vec{\psi}_1 \in \mathcal{H}_1, \ \vec{v} \in \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1, \ \dim \mathcal{H} = 3n, \ \dim \mathcal{H}_1 = 2n, \tag{1.3.39}$$

где оператор $\mathcal{A}$ определен формулой (1.2.70):

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & iP_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3.40}$$

Как было выяснено выше в пункте 1.2.7, этот оператор является (максимальным) аккретивным оператором, действующим в $\widetilde{\mathcal{H}}$. Однако он обладает еще одним замечательным свойством: он является самосопряженным оператором в пространстве с индефинитной метрикой.

Введем, опираясь на ортогональное разложение $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1$ оператор

$$\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I_{3n}; -I_{2n}), \tag{1.3.41}$$

где I_{3n} и I_{2n} — единичные операторы в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_1$ соответственно. Очевидно, этот оператор обладает свойствами

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1},$$

т. е. является канонической симметрией.

Для элементов из $\widetilde{\mathcal{H}}$ введем наряду с обычным скалярным произведением

$$(\vec{v}, \vec{w})_{\widetilde{\mathcal{H}}} := \left(\vec{\psi}; \vec{\varphi}\right)_{\mathcal{H}} + \left(\vec{\psi}_1; \vec{\varphi}_1\right)_{\mathcal{H}_1}, \ \vec{v} = \left(\vec{\psi}; \vec{\psi}_1\right)^T, \ \vec{w} = (\vec{\varphi}; \vec{\varphi}_1)^T,$$

так называемое индефинитное скалярное произведение

$$[\vec{v},\vec{w}] := \left(\vec{\psi};\vec{\varphi}\right)_{\mathcal{H}} - \left(\vec{\psi}_1;\vec{\varphi}_1\right)_{\mathcal{H}_1} = (\mathcal{J}\vec{v},\vec{w})_{\widetilde{\mathcal{H}}}\,.$$

Соответствующее пространство с индефинитной метрикой обозначим (по аналогии с пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$) символом $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, где, согласно (1.3.41), $\varkappa = 2n$, т. е. количество отрицательных квадратов в квадратичной форме

$$[\vec{v},\vec{v}] := ||\vec{\psi}||^2_{\mathcal{H}} - ||\vec{\varphi}_1||^2_{\mathcal{H}_1} = (\mathcal{J}\vec{v},\vec{v})_{\widetilde{\mathcal{H}}},\ \dim\mathcal{H}_1 = 2n. \tag{1.3.42}$$

По отношению к метрике (1.3.42) любой элемент из $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ может быть положительным, если $[\vec{v},\vec{v}] > 0$ (сокращенно: $\vec{v} > 0$), отрицательным, если $[\vec{v},\vec{v}] < 0$ ($\vec{v} < 0$), либо нейтральным, если $[\vec{v},\vec{v}] = 0$. Соответственно определяются и линеалы (подпространства) в $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, они разделяются на неотрицательные ($\mathcal{L} \geqslant 0$), положительные ($\mathcal{L} > 0$), неположительные ($\mathcal{L} \leqslant 0$), отрицательные ($\mathcal{L} < 0$) и нейтральные, когда $[\vec{v},\vec{v}] = 0$ для любого $\vec{v} \in \mathcal{L}$. В дальнейшем будем использовать терминологию, связанную с геометрией пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, приводя, если будет необходимо, соответствующие определения по ходу изложения.

Заметим теперь, что

$$\mathcal{J}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{3n} & 0 \\ 0 & -I_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ -iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = (\mathcal{J}\mathcal{A})^*,$$

т. е. действительно является оператором, самосопряженным в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ с индефинитной метрикой (1.3.42). Это важное обстоятельство, а также конечномерность пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, $\dim\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa = 5n$, позволяет сразу установить свойства решений спектральной задачи (1.3.38), а потому и связанных с ней задач (1.3.2) и (1.3.1).

Сформулируем эти свойства без доказательства, опираясь на соответствующие факты в [1,2,71].

Свойство 1^0. Спектр задачи (1.3.3) симметричен относительно вещественной оси.

Этот факт уже другим способом был установлен выше (см. (1.3.9)).

Свойство 2^0. Если λ и $\mu \neq \overline{\lambda}$ — собственные значения задачи (1.3.3), то соответствующие корневые подпространства $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{A})$ и $\mathcal{L}_\mu(\mathcal{A})$ являются $\mathcal{J}$-ортогональными, т. е.

$$[\vec{v},\vec{w}] = 0 \quad \forall\,\vec{v} \in \mathcal{L}_\lambda(\mathcal{A}),\quad \forall\,\vec{w} \in \mathcal{L}_\mu(\mathcal{A}). \tag{1.3.43}$$

В частности, если $\lambda \neq \overline{\lambda}$, то $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{A})$ — нейтральный линеал и

$$\dim\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{A}) \leqslant \varkappa.$$

Свойство 3^0. Размерность любого неположительного линеала $\mathcal{L}_- \subset \widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ не превышает $\varkappa$:

$$\dim\ \mathcal{L}_- \leqslant \varkappa = 2n.$$

Свойство 4^0. Пусть $\Lambda_\pm$ — совокупность собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных в открытой верхней (соответственно нижней) полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm \subset \mathbb{C}$, а $\mathcal{L}_\pm$ — соответствующие линейные оболочки из корневых элементов, отвечающих собственным значениям из $\Lambda_\pm$. Тогда

$$\dim\mathcal{L}_\pm \leqslant \varkappa. \tag{1.3.44}$$

Свойство 5^0. Все пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ допускает $\mathcal{J}$-ортогональное разложение

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa = \mathcal{L}[+]\mathcal{M} \tag{1.3.45}$$

в $\mathcal{J}$-ортогональную сумму двух подпространств, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A}$, таких что $\mathcal{L}$ не более чем $2\varkappa$-мерно, а подпространство $\mathcal{M}$ равномерно положительно, т. е.

$$[\vec{v},\vec{w}] \geqslant a||\vec{v}||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}},\ a > 0,\ \forall\,\vec{v} \in \mathcal{M}. \tag{1.3.46}$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$ имеет полную $\mathfrak{J}$-ортонормированную систему собственных элементов, которым отвечают вещественные собственные значения.

Заметим, что система элементов $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^{5n} \subset \widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ называется $\mathcal{J}$*-ортонормированной*, если

$$[\vec{v}_k, \vec{v}_j] = \pm\delta_{kj}.$$

Эта система есть объединение двух непересекающихся множеств $\{\vec{v}_k : [\vec{v}_k, \vec{v}_k] = 1\}$ и $\{\vec{v}_k : [\vec{v}_k, \vec{v}_k] = -1\}$.

Приведем еще критерии того, когда система собственных элементов $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, действующего в $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, образует $\mathcal{J}$-ортонормированный базис. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) невещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ — пустое множество;

б) для всех вещественных собственных значений $\mu_k \neq 0$ выполнены свойства

$$\mathcal{L}_{\mu_k}(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A} - \mu_k J);$$

в) подпространство $\ker\mathcal{A}$ невырождено, т. е.

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_0(\mathcal{A})^{[\perp]} = \{0\}, \tag{1.3.47}$$

где $\mathcal{L}_0(\mathcal{A})^{[\perp]}$ — $\mathcal{J}$-ортогональное дополнение в $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ к подпространству $\mathcal{L}_0(\mathcal{A})$.

Опираясь на этот критерий и другие свойства $\mathcal{J}$-самосопряженных операторов, действующих в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ с индефинитной метрикой, сформулируем соответствующие свойства решений задачи (1.3.38)-(1.3.39); эти свойства дополняют свойства 1^0–11^0, полученные в пункте 1.3.2.

Теорема 1.3.1. *Спектр задачи* (1.3.1) (*либо* (1.3.2)) *о нормальных колебаниях системы n сочлененных гиростатов может иметь при наличии трения в шарнирах и $A \gg 0$ не более $2\varkappa = 4n$ невещественных* (*комплексно сопряженных*) *собственных значений. Остальные $6n - 4n = 2n$ собственных значений вещественны* (*неотрицательны*) *и обладают следующими свойствами*: *$\lambda = \lambda_0 = 0$ является n-кратным собственным значением и ему не отвечают присоединенные элементы, остальные n собственных значений положительны и им также не отвечают присоединенные элементы.*

Если выполнено условие (1.3.26)*, то все собственные значения задачи* (1.3.1) *вещественны* (*и неотрицательны*)*, а собственные элементы спектральной задачи* (1.3.38)-(1.3.39) *образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, причем отвечающие элементам этого базиса собственные значения положительны.*

Доказательство. Напомним (см. свойство 5^0 из пункта 1.3.2) что задача (1.3.1) имеет ровно $6n$ собственных значений, причем невещественные расположены симметрично относительно вещественной оси. При этом $\lambda = \lambda_0 = 0$ — n-кратное собственное значение, которому отвечают решения вида (1.3.6), (1.3.7), из которых легко составить ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_0$. Остальные собственные значения находятся из характеристического уравнения (1.3.29) и их число равно $5n$, где n — количество сочлененных гиростатов.

В этом случае спектральная задача равносильна задаче (1.3.38)-(1.3.39) на собственные значения для $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, действующего в $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, $\varkappa = 2n$. Поэтому на основании свойств 2^0–5^0 из настоящего пункта (см. (1.3.43)-(1.3.44)) получаем, что количество невещественных собственных значений не превышает числа $2\varkappa = 4n$. Поэтому остальные $6n - n - 4n = n$ собственных значений задачи (1.3.1) положительны. Этим собственным значениям отвечают собственные элементы, принадлежащие подпространству $\mathcal{M}$ из ортогонального разложения (1.3.45). Так как здесь выполнено условие (1.3.46), то собственные элементы образуют полную $\mathcal{J}$-ортонормированную систему и потому им не отвечают присоединенные элементы.

Пусть теперь выполнено условие (1.3.26), которое, как уже отмечалось, всегда имеет место при достаточно большом трении в шарнирах. Тогда, согласно свойству 4^0 из пункта 1.3.2, задача (1.3.2), а потому и задача (1.3.38)-(1.3.39) не имеют невещественных собственных значений и присоединенных элементов. Это означает, что в ортогональном разложении (1.3.45) подпространство $\mathcal{L}$ тривиально, т. е. $\mathcal{L} = \{0\}$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa = \mathcal{M}$, и тогда по свойству 5^0 оператор $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ имеет полную $\mathcal{J}$-ортонормированную систему собственных элементов. □

Замечание 1.3.1. Последнее утверждение теоремы 1.3.1 следует также из приведенного выше критерия $\mathcal{J}$-ортогональности и базисности системы собственных элементов $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, действующего в $\widetilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}$: если выполнено условие (1.3.26), то справедливы утверждения а) и б) этого критерия, так как $F = \varnothing$ (см. (1.3.13)); далее, поскольку $\ker \mathcal{A} = \{0\}$ (см. доказательство свойства 5^0 из пункта 1.3.2, в частности, абзац после формулы (1.3.27)), то выполнено и условие в) критерия (см. (1.3.47)).

Замечание 1.3.2. Учитывая свойство базисности в подпространстве $\mathcal{H}_0$ собственных элементов задачи (1.3.1), отвечающих собственному значению $\lambda = \lambda_0 = 0$, а также последнее утверждение теоремы 1.3.1, можно констатировать, что если выполнено условие (1.3.26) (его можно назвать условием сильной демпфированности исследуемой гидромеханической системы), то система собственных элементов задачи (1.3.1) образует базис в пространстве

$$\mathcal{H}^2 = \widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_0 = (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1) \oplus \mathcal{H}_0, \quad \widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}, \tag{1.3.48}$$

причем в $\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\varkappa}$ этот базис $\mathcal{J}$-ортонормированный. Если ввести на основе разложения (1.3.48) оператор

$$\hat{\mathcal{J}} := \operatorname{diag}(I_{3n}; -I_{2n}; I_n) = \operatorname{diag}(\mathcal{J};\, I_n),$$

то имеем $\hat{\mathcal{J}}$-ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$.

Замечание 1.3.3. Условие (1.3.26), достаточное для отсутствия невещественных собственных значений и присоединенных элементов в задаче (1.3.2), можно получить также из следующих индефинитных соображений.

Осуществим в задаче (1.3.2) замену $C^{1/2}\vec{\delta} =: \eta$ и подействуем слева оператором $C^{-1/2}$. Тогда возникает спектральная проблема

$$(\lambda^2 I - \lambda C^{-1/2} A C^{-1/2} + C^{-1/2} B C^{-1/2})\vec{\eta} = \vec{0}, \quad \lambda \neq 0.$$

Введем еще новый искомый элемент согласно формуле

$$i B^{1/2} C^{-1/2} \vec{\eta} =: \lambda \vec{\zeta}.$$

Тогда возникает задача на собственные значения для $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора (см. также (1.3.38)–(1.3.40)):

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\zeta} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C^{-1/2} A C^{-1/2} & i C^{-1/2} B^{1/2} \\ i B^{1/2} C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\zeta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\zeta} \end{pmatrix}, \tag{1.3.49}$$

где

$$\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I_{3n}; -I_{2n}).$$

Операторы такого вида всегда имеют инвариантные неотрицательные и неположительные подпространства (в конечномерном пространстве). В частности, неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$ имеет структуру

$$\mathcal{L}_- := \{(\vec{\eta}; \vec{\zeta})^T : \ \vec{\eta} = K_- \vec{\zeta}, \ \forall \vec{\zeta} \in \mathcal{H}_-\}, \tag{1.3.50}$$

где $K_- : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$ — так называемый угловой оператор, $||K_-|| \leqslant 1$, а $\mathcal{H}_- = 2n$, $\mathcal{H}_+ = 3n$.

Так как $\mathcal{A}\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$, то из вида оператора $\mathcal{A}$ и определения (1.3.50) выводим, что оператор K_- является решением следующего операторного (матричного) уравнения:

$$K_- = i(C^{-1/2} A C^{-1/2}) \Big\{ K_- B^{1/2} C^{-1/2} K_- - C^{-1/2} B^{1/2} \Big\}.$$

Отсюда следует оценка

$$||K_-|| \leqslant ||C^{1/2} A^{-1} C^{1/2}|| \cdot \Big(||B^{1/2} C^{-1/2}|| + ||C^{-1/2} B^{1/2}|| \Big) = \\ = 2||C^{1/2} A^{-1} C^{1/2}|| \cdot ||B^{1/2} C^{-1/2}||. \tag{1.3.51}$$

Так как

$$||C^{1/2} A^{-1} C^{1/2}|| = \lambda_{max}(C^{1/2} A^{-1} C^{1/2}) = (\lambda_{min}(C^{-1/2} A C^{-1/2}))^{-1},$$
$$||C^{-1/2} B^{1/2}|| = ||C^{-1/2} B C^{-1/2}||^{1/2} = \lambda_{max}^{1/2}(C^{-1/2} B C^{-1/2}),$$

то из (1.3.51) получаем, что правая часть этого неравенства меньше 1, если

$$\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) > 2\lambda_{max}^{1/2}(C^{-1/2}BC^{-1/2}). \tag{1.3.52}$$

Однако, как и при доказательстве свойства 3^0 в пункте 1.3.2, можно установить, что

$$\lambda_{max}(C^{-1/2}BC^{-1/2}) = \lambda_{max}(\widetilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\widetilde{C}_{11}^{-1/2})$$

(см. (1.3.22)–(1.3.25)). Тогда из (1.3.52) приходим к условию (1.3.26), которое теперь гарантирует неравенство $||K_-|| < 1$, обеспечивающее, во-первых, отсутствие невещественных собственных значений задачи (1.3.49) и присоединенных элементов в этой задаче, а во-вторых, позволяет утверждать, что система собственных элементов задачи (1.3.49) образует $\mathcal{J}$-ортогональный базис во всем пространстве $\mathcal{H}_{5n} = \mathcal{H}_{3n} \oplus \mathcal{H}_{2n}$.

Отметим в заключение этого раздела, что свойства спектра задачи (1.3.1) о нормальных колебаниях системы из n сочлененных гиростатов, как здесь установлено, существенно зависят от величины трения в шарнирах:

а) если это трение отсутствует (см. свойство 7^0 из пункта 1.3.2), то все собственные значения расположены на мнимой оси, т. е. нормальные колебания не являются затухающими;

б) если это трение умеренное, то существует не более $2\varkappa = 4n$ невещественных собственных значений, и им отвечают затухающие колебательные режимы; остальные собственные значения вещественные, и им отвечают апериодически затухающие нормальные движения;

в) если трение в шарнирах достаточно велико (выполнено условие сильной демпфированности (1.3.26)), то собственные значения задачи расположены на неотрицательной полуоси, причем $5n$ собственных значений дают апериодически затухающие режимы нормальных колебаний исследуемой гидромеханической системы.

Глава 2

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОЧЛЕНЕННЫХ ГИРОСТАТОВ С ПОЛОСТЯМИ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННЫМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ (ДИССИПАТИВНАЯ СИСТЕМА)

В этой главе изучается задача о малых движениях сочлененных гиростатов, заполненных, однако, не идеальной, а вязкой жидкостью. Такая гидромеханическая система, в отличие от задачи предыдущей главы, является уже системой с бесконечным числом степеней свободы. Для исследования этой задачи здесь снова применяются методы функционального анализа, в частности, методы теории полугрупп операторов, теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, спектральная теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой и другие.

Итогом исследования являются теоремы о разрешимости изучаемой начально-краевой задачи, а также теоремы о свойствах решений задачи о нормальных колебаниях гидромеханической системы.

2.1. К постановке задачи

В этом разделе приводится постановка задачи о малых (линейных) движениях системы последовательно соединенных между собой твердых тел. Каждое тело имеет полость, полностью заполненную вязкой однородной несжимаемой жидкостью, т. е. снова является гиростатом.

2.1.1. Уравнения малых движений гидромеханической системы. Примем те же обозначения, что и в пункте 1.2.1, для описания движений гидромеханической системы. Будем считать, кроме того, что вязкость жидкости в полости $\Omega_k \subset G_k$, $k = \overline{1,n}$, такова, что динамический коэффициент вязкости

$$\mu_k = \rho_k \nu_k > 0, \quad k = \overline{1,n},$$

постоянен и равен произведению плотности $\rho_k > 0$ k-ой жидкости и коэффициента кинематической вязкости $\nu_k > 0$, $k = \overline{1,n}$.

Рассмотрим для определенности, как и в главе 1, задачу о малых колебаниях системы из трех сочлененых гиростатов, т. е. считаем, что $n = 3$. Тогда снова приходим к уравнениям движения гиростатов в форме (1.1.9)–(1.1.11), т. е. в виде

$$\begin{gathered}\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\right) dm_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) dm_3 + \\ + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1) P_2 \vec{\delta}_1 = \\ = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_1; \end{gathered} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right) dm_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) dm_3 + \\ + \alpha_1 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_2 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g (m_2 l_2 + m_3 h_2) P_2 \vec{\delta}_2 = \\ = \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_2 (t); \end{gathered} \tag{2.1.2}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} d\Omega_3 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2\right) dm_3 + \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \\ = \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_3 (t). \end{gathered} \tag{2.1.3}$$

Здесь, как и ранее, использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k} (\ldots) dm_3 := \int\limits_{\Omega_{0k}} (\ldots) \rho_{0k} d\Omega_k + \int\limits_{\Omega_k} (\ldots) \rho_k d\Omega_k, \ k = \overline{1,3},$$

где $\Omega_{0k} \subset G_k$ — область, занятая твердым телом плотности ρ_{0k}.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения (уравнения Навье—Стокса) в каждой из полостей Ω_k. Каждое уравнение записано в неинерциальной системе координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$, жестко связанной с телом G_k. Имеем

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = -\nabla p_1 + \mu_1 \Delta \vec{u}_1 + \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \ \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1); \tag{2.1.4}$$

$$\begin{gathered}\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = -\nabla p_2 + \mu_2 \Delta \vec{u}_2 + \rho_2 \vec{f}_2, \\ \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \ \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (\text{на } S_2); \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{gathered}\rho_3 \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = -\nabla p_3 + \mu_3 \Delta \vec{u}_3 + \rho_3 \vec{f}_3, \\ \operatorname{div} \vec{u}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \ \vec{u}_3 = \vec{0} \quad (\text{на } S_3). \end{gathered} \tag{2.1.6}$$

Для полной математической формулировки начально-краевой задачи о малых движениях системы из трех сочлененных гиростатов добавим к (2.1.1)–(2.1.6) кинематические условия в форме

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k = P_2\vec{\omega}_k,\ \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3,\ k=\overline{1,3}, \tag{2.1.7}$$

а также начальные условия

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x),\quad x\in\Omega_k,\ \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0,$$
$$\vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0,\ k=\overline{1,3}. \tag{2.1.8}$$

Отметим еще, что далее, как и в главе 1, считаем границы $\partial\Omega_k = S_k$ областей Ω_k обладающими свойством

$$S_k = \partial\Omega_k \in C^2,\quad k=\overline{1,3}, \tag{2.1.9}$$

т. е. дважды непрерывно дифференцируемыми.

2.1.2. Вывод закона баланса полной энергии. Этот вывод получается в точности по той же схеме, которая была проведена в пункте 1.1.2 для случая идеальных жидкостей. Здесь отличие состоит лишь в том, что в уравнениях движения (2.1.4)–(2.1.6) имеются дополнительные слагаемые вида $\mu_k\Delta\vec{u}_k$, обусловленные действием вязких сил, а также граничные условия на $S_k = \partial\Omega_k$ теперь являются условиями прилипания $\vec{u}_k = \vec{0}$ (на S_k), а не условиями непротекания $\vec{u}_k\cdot\vec{n}_k = 0$ (на S_k), которые выполнялись для идеальных жидкостей.

Чтобы учесть эти вязкие дополнительные слагаемые, воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{\Omega_k}(-\nabla p_k + \mu_k\Delta\vec{u}_k)\cdot\vec{u}_k d\Omega_k = \mu_k\int\limits_{\Omega_k}|\operatorname{rot}\vec{u}_k|^2 d\Omega_k, \tag{2.1.10}$$

$$\operatorname{div}\vec{u}_k = 0\ (\text{в } \Omega_k),\ \vec{u}_k = \vec{0}\ (\text{на } S_k),$$

справедливой для функций $\vec{u}_k\in C^2(\Omega_k)$, $p_k\in C^1(\Omega_k)$ и даже в более общей ситуации, когда

$$\vec{u}_k\in\vec{H}^2(\Omega_k),\ p_k\in H^1(\Omega_k),$$

где $\vec{H}^2(\Omega_k)$ и $H^1(\Omega_k)$ — соответствующие пространства Соболева векторных и скалярных полей.

Повторяя схему пункта 1.1.2 с учетом формулы Грина (2.1.10), приходим к выводу, что для классических решений задачи (2.1.1)–(2.1.9) справедлив закон баланса полной энергии в форме, обобщающей формулу (1.1.18):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Biggl\{\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1 + \int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2 +$$
$$+\int\limits_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\Biggr\} +$$
$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Bigl\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2 + (m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2 + m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Bigr\} =$$
$$= -\Bigl\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2 + \sum_{k=1}^{3}\mu_k\int\limits_{\Omega_k}|\operatorname{rot}\vec{u}_k|^2d\Omega_k\Bigr\} +$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k + \sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k d\Omega_k. \tag{2.1.11}$$

Для соответствующей задачи о колебаниях системы из n сочлененных гиростатов аналогичный закон баланса полной энергии, который здесь приводится без вывода, имеет вид, обобщающий тождество (1.1.19) (с учетом (1.1.20)):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Biggl\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{G_k}|\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j+\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k+\vec{u}_k|^2dm_k\Biggr\} + \frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Biggl\{\sum_{k=1}^{n}\Bigl[m_kl_k+(\sum_{j=k+1}^{n}m_j)h_k\Bigr]\Bigl|P_2\vec{\delta}_k\Bigr|^2\Biggr\} =$$

$$= -\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\vec{\omega}_k - \vec{\omega}_{k-1}|^2 + \sum_{k=1}^{3} \mu_k \int\limits_{\Omega_k} |\operatorname{rot} \vec{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k + \sum_{k=1}^{n} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k d\Omega_k. \quad (2.1.12)$$

В (2.1.11) и (2.1.12) появились дополнительные диссипативные слагаемые, связанные с действием вязких сил в областях Ω_k.

2.2. Начально-краевая задача о малых движениях гидромеханической системы

В этом разделе доказывается теорема существования и единственности так называемого сильного решения начально-краевой задачи (2.1.1)–(2.1.8). При этом используются теория полугрупп операторов, теория линейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве и другие разделы функционального анализа.

2.2.1. Основные функциональные пространства. Для исследования начально-краевой задачи (2.1.1)–(2.1.8) будем использовать, как и в пункте 1.2.1, гильбертовы пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$, и ортогональные разложения (1.2.1)–(1.2.3). Если $\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k)$ — поле скорости в полости Ω_k, то кинетическая энергия жидкости, отвечающая полости Ω_k, конечна:

$$(T_{\text{кин.}})_k := \frac{\rho_k}{2} \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k = \frac{\rho_k}{2} \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_k)} < \infty.$$

Введем теперь функциональные пространства, связанные с конечной скоростью диссипации энергии в области Ω_k: это подпространства пространства векторных полей $\vec{H}^1(\Omega_k)$, которые далее обозначаются символом $\vec{J}_0^1(\Omega_k)$ и определяются следующим образом:

$$\vec{J}_0^1(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_k) \right\},$$

$$\int\limits_{\Omega_k} |\operatorname{rot} \vec{u}_k|^2 d\Omega_k =: \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}_0^1(\Omega_k)} < \infty. \quad (2.2.1)$$

Как показано в [42] (см. также [34, с. 111]), норма (2.2.1) эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$, т. е. норме

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{H}^1(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega_k} (|\vec{u}_k|^2 + \sum_{j=1}^{3} |\nabla u_{k,j}|^2) d\Omega_k, \quad \vec{u}_k = \sum_{j=1}^{3} u_{k,j} \vec{e}_k^{\,j}.$$

Отметим еще, что скорость диссипации энергии, отвечающая полю скоростей $\vec{u}_k$ в области Ω_k, выражается через норму (2.2.1) по формуле

$$(\text{Э}_{\text{дисс.}})_k = \frac{1}{2} \mu_k \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}_0^1(\Omega_k)}$$

(см. [34, с. 107, 110]).

2.2.2. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений. Будем считать в задаче (2.1.1)–(2.1.8) искомые функции $\vec{u}_k(t,x)$, $\nabla p_k(t,x)$ функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega_k)$. Тогда в силу ортогонального разложения (1.2.1)–(1.2.3) приходим к выводу, что

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \ \nabla p_k(t,x) \in \vec{G}(\Omega_k), \ k = \overline{1,3}.$$

Обозначим, как и ранее, через $P_{0,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_0(\Omega_k)$ ортопроектор на подпространство $\vec{J}_0(\Omega_k)$,

$$\vec{J}_0(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in L_2(\Omega_k) : \ \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \vec{u}_k \cdot \vec{n} =: u_{k,n} = 0 \ (\text{на } S_k = \partial\Omega_k) \right\},$$

а через $P_{G,k} = I_k - P_{0,k}$ — ортопроектор на $\vec{G}(\Omega_k)$,

$$\vec{G}(\Omega_k) := \left\{ \vec{v}_k \in L_2(\Omega_k) : \vec{v}_k = \nabla \varphi_k \right\}.$$

Определение 2.2.1. Будем говорить, что задача (2.1.1)–(2.1.8) имеет *сильное решение* на отрезке $[0,T]$, если для этого решения в уравнениях движения (2.1.4)–(2.1.6) все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$ соответственно, $k = 1,2,3$, а слагаемые в уравнениях (2.1.1)–(2.1.3) — непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\mathbb{R}^3$.

Пусть задача (2.1.1)–(2.1.8) имеет сильное решение. Действуя ортопроекторами $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ и $P_{0,3}$ на обе части уравнений (2.1.4), (2.1.5) и (2.1.6) соответственно и заменяя, в силу сказанного выше, $\partial/\partial t$ на d/dt, приходим к соотношениям

$$\rho_1\left(\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right) = \mu_1 P_{0,1}\Delta\vec{u}_1 + \rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1\,(t)\,, \tag{2.2.2}$$

$$\rho_2\left(\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right) = \mu_2 P_{0,2}\Delta\vec{u}_2 + \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2\,(t)\,, \tag{2.2.3}$$

$$\rho_3\left(\frac{d\vec{u}_3}{dt} + P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right) = \mu_3 P_{0,3}\Delta\vec{u}_3 + \rho_3 P_{0,3}\vec{f}_3\,(t)\,. \tag{2.2.4}$$

Аналогичные проектирования на подпространства $\vec{G}\,(\Omega_k)$ дают связи

$$\rho_1 P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right) = -\nabla p_1 + \mu_1 P_{G,1}\Delta\vec{u}_1 + \rho_1 P_{G,1}\vec{f}_1, \tag{2.2.5}$$

$$\rho_2 P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right) = -\nabla p_2 + \mu_2 P_{G,2}\Delta\vec{u}_2 + \rho_2 P_{G,2}\vec{f}_2, \tag{2.2.6}$$

$$\rho_3 P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right) = -\nabla p_3 + \mu_3 P_{G,3}\Delta\vec{u}_3 + \rho_3 P_{G,3}\vec{f}_3. \tag{2.2.7}$$

Из (2.2.5)–(2.2.7) следует, что если известны решения уравнений (2.2.2)–(2.2.4), то поля ∇p_k, $k = \overline{1,3}$, можно найти непосредственно. С другой стороны, эти поля не входят в (2.2.2)–(2.2.4) и в уравнения (2.1.1)–(2.1.3) движения гиростатов. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать систему уравнений (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.5)–(2.2.7) и соотношений (2.1.7), (2.1.8).

Опираясь на осуществленные преобразования исходной задачи, введем линейные операторы и операторные матрицы, естественно связанные с исследуемой проблемой.

Прежде всего, введем операторы Стокса A_k, $k = \overline{1,3}$, действующие по закону

$$A_k\vec{u}_k := -P_{0,k}\Delta\vec{u}_k, \quad \mathcal{D}(A_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{H}^2(\Omega_k):\ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \tag{2.2.8}$$

$$\vec{u}_k = \vec{0}\ (\text{на } S_k = \partial\Omega_k)\Big\} \subset \vec{J}_0^1(\Omega_k) \subset \vec{J}_0(\Omega_k),\ k = \overline{1,3}. \tag{2.2.9}$$

Лемма 2.2.1. *Оператор $A_k : \mathcal{D}(A_k) \subset \vec{J}_0(\Omega_k) \to \vec{J}_0(\Omega_k)$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором с дискретным спектром. Его собственные значения $\lambda_j(A_k)$ конечнократны, $\lambda_j(A_k) \to +\infty$ $(j\to\infty)$ и*

$$\lambda_j(A_k) = \left(\frac{|\Omega_k|}{3\pi^2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)]\ (j\to\infty). \tag{2.2.10}$$

Энергетическое пространство $\vec{H}_{A_k}$ оператора A_k совпадает с $\vec{J}_0^1(\Omega_k)$ и

$$\|\vec{u}_k\|^2_{A_k} = \|A_k^{1/2}\vec{u}_k\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} |\operatorname{rot}\vec{u}_k|^2 d\Omega_k = \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}_0^1(\Omega_k)},$$

$$\vec{u}_k \in \mathcal{D}(A_k^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_k),\ k = \overline{1,3}.$$

Доказательство. Вывод этих свойств можно найти, например, в монографии [42]. Асимптотическая формула (2.2.10) установлена в работе [76]. Отметим еще, что при установлении свойства самосопряженности оператора A_k на $\mathcal{D}(A_k)$ из (2.2.9) существенно использовано свойство (2.1.9) гладкости границы $S_k = \partial\Omega_k$. $\square$

Будем считать, что в исследуемой задаче (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.5)–(2.2.7), (2.1.7), (2.1.8) искомыми функциями t являются следующие вектор-столбцы, составленные из вектор-функций:

$$\vec{\omega} := (\vec{\omega}_1;\, \vec{\omega}_2;\, \vec{\omega}_3)^T \in (\mathbb{C}^3)^3, \quad \vec{\delta} := (\vec{\delta}_1;\, \vec{\delta}_2;\, \vec{\delta}_3)^T \in (\mathbb{C}^3)^3, \tag{2.2.11}$$

$$\vec{u} := (\vec{u}_1;\, \vec{u}_2;\, \vec{u}_3)^T \in \overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{D}(A_k) \subset \overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_0^1(\Omega_k) = \overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{D}(A_k^{1/2}) \subset \overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_0(\Omega_k),$$

где символ $(\cdot;\cdot;\cdot)^T$ по-прежнему означает транспонирование (строки).

Введем, далее, следующие операторные матрицы, отвечающие совокупности отдельных наборов слагаемых из (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.5)–(2.2.7), (2.1.7), (2.1.8):

$$C_{11}\vec{u} := (\rho_1\vec{u}_1; \rho_2\vec{u}_2; \rho_3\vec{u}_3)^T, \tag{2.2.12}$$

$$C_{12}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \\ \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \\ \rho_3 P_{0,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3) \end{pmatrix}, \tag{2.2.13}$$

$$C_{21}\vec{u} := \begin{pmatrix} \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1) d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{h}_1 \times \vec{u}_2) d\Omega_2 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} (\vec{h}_1 \times \vec{u}_3) d\Omega_3 \\ \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \vec{u}_2) d\Omega_2 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} (\vec{h}_2 \times \vec{u}_3) d\Omega_3 \\ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} (\vec{r}_3 \times \vec{u}_3) d\Omega_3 \end{pmatrix}, \tag{2.2.14}$$

$$C_{22}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) dm_1 + \\ + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) dm_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3) dm_3 \\ \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) dm_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3) dm_3 \\ \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3) dm_3 \end{pmatrix}, \tag{2.2.15}$$

$$A_{22} := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2.2.16}$$

$$A_{11} := \operatorname{diag}(\mu_k A_k)_{k=1}^3, \tag{2.2.17}$$

$$B_{22} := \operatorname{diag}(m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1; m_2 l_2 + m_3 h_2; m_3 l_3). \tag{2.2.18}$$

Тогда в этих обозначениях задачу (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.5)–(2.2.7), (2.1.7), (2.1.8) можно переписать в виде следующей системы дифференциально-операторных уравнений:

$$C_{11}\frac{d\vec{u}}{dt} + C_{12}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + A_{11}\vec{u} = \vec{f}, \tag{2.2.19}$$

$$C_{21}\frac{d\vec{u}}{dt} + C_{22}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + A_{22}\vec{\omega} + gB_{22}P_2\vec{\delta} = \vec{M}, \tag{2.2.20}$$

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta} = P_2\vec{\omega}, \ \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \ k = \overline{1,3}, \tag{2.2.21}$$

$$\vec{\delta}_k^3 = \delta_k^3 \vec{e}_k^{\,3}, \ \vec{\omega}_k^3 = \omega_k^3 \vec{e}_k^{\,3}, \ k = \overline{1,3}, \ P_2\vec{\delta} = (P_2\vec{\delta}_1;\, P_2\vec{\delta}_2;\, P_2\vec{\delta}_3)^T. \tag{2.2.22}$$

Приведем эту систему к более симметричной форме, опираясь на очевидное свойство положительной определенности и ограниченности оператора B_{22} из (2.2.18), действующего в пространстве $(\mathbb{C}^3)^3$. С этой целью введем новую искомую функцию

$$\vec{\eta}(t) := -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec{\delta} \in (\mathbb{C}^2)^3. \tag{2.2.23}$$

Тогда вместо (2.2.19)–(2.2.22) приходим к задаче Коши вида

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2} P_2 B_{22}^{1/2} \\ 0 & ig^{1/2} B_{22}^{1/2} P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{M} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.24}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^{\,0},\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{\,0},\ \vec{\eta}(0) = \vec{\eta}^{\,0} = -ig^{1/2} B_{22}^{1/2} P_2 \vec{\delta}^{\,0}, \tag{2.2.25}$$

а также к тривиальной проблеме

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^{\,3} = \vec{\omega}_k^{\,3},\ \vec{\delta}_k^{\,3}(0) = \vec{\delta}_k^{\,3,0},\ k = \overline{1,3}. \tag{2.2.26}$$

Отметим, что в (2.2.19), (2.2.20), а также в (2.2.24) $\vec{f} = \vec{f}(t)$ и $\vec{M} = \vec{M}(t)$ — известные функции, определяемые заданными функциями из правых частей уравнений (2.2.2)–(2.2.4), а также (2.1.1)–(2.1.3):

$$\vec{f} := (\rho_1 P_{0,1} \vec{f}_1;\ \rho_2 P_{0,2} \vec{f}_2;\ \rho_3 P_{0,3} \vec{f}_3)^T, \tag{2.2.27}$$

$$\vec{M} := \begin{pmatrix} \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \vec{f}_3 dm_3 \\ \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3 dm_3 \\ \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 dm_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2.28}$$

Заметим еще, что в силу определения (2.2.18) оператора B_{22} имеет место свойство

$$B_{22}^{1/2} \vec{\eta} = P_2 B_{22}^{1/2} \vec{\eta} = B_{22}^{1/2} P_2 \vec{\eta},$$

которое и использовано в (2.2.24).

2.2.3. Общие свойства матричных операторных коэффициентов эволюционного уравнения. Изучим свойства операторных матриц уравнения (2.2.24).

Лемма 2.2.2. *Операторная матрица*

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.2.29}$$

действующая в пространстве

$$\mathcal{H} := \left(\overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_0(\Omega_k) \right) \oplus \left(\mathbb{C}^3\right)^3, \tag{2.2.30}$$

с нормой

$$\|(\vec{u};\vec{\omega})^T\|_{\mathcal{H}}^2 := \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{3} |\vec{\omega}_k|^2,$$

является ограниченным и положительно определенным оператором.

Доказательство. Ограниченность оператора C в $\mathcal{H}$ следует непосредственно из определений (2.2.12)–(2.2.15) операторов C_{jk}. Свойство положительной определенности оператора C можно установить, опираясь на выражения для его квадратичной формы.

Не останавливаясь на подробном выводе этого выражения, приведем лишь итоговую формулу:

$$\left(C \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{G_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 dm_1 + \int\limits_{G_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 dm_2 +$$

$$+ \int\limits_{G_3} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_3|^2 dm_3 =$$

$$= \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \tag{2.2.31}$$

$$+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2d\Omega_2+$$

$$+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3|^2d\Omega_{03}+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2d\Omega_3.$$

Отсюда непосредственно получаем, что C — неотрицательный оператор. Однако нетрудно видеть, что квадратичная форма (2.2.31) обращается в нуль лишь при $\vec{\omega}_1=\vec{\omega}_2=\vec{\omega}_3=\vec{0}$, $\vec{u}_1=\vec{u}_2=\vec{u}_3=\vec{0}$, т. е. C — положительный оператор.

Заметим теперь, что C является суммой бесконечномерного неотрицательного оператора

$$\operatorname{diag}(C_{11},0),\quad C_{11}\gg 0$$

(см. (2.2.12)) и конечномерного оператора

$$\begin{pmatrix}0 & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}.$$

Отсюда и из свойства положительности C получаем, что этот оператор положительно определен в $\mathcal{H}$. □

Лемма 2.2.3. *Операторная матрица*

$$A:=\operatorname{diag}(A_{11};A_{22}),\ \mathcal{D}(A):=\left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3}\mathcal{D}(A_k)\right)\oplus\left(\mathbb{C}^3\right)^3 \qquad (2.2.32)$$

является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}$ и имеющим обратный положительный оператор, который является компактным.

Доказательство. Для оператора $A_{11}:=\operatorname{diag}(\mu_kA_k)_{k=1}^3$

$$\mathcal{D}(A_{11}):=\mathop{\oplus}_{k=1}^{3}\mathcal{D}(A_k)\subset\left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3}\vec{J}_0(\Omega_k)\right)\to\left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3}\vec{J}_0(\Omega_k)\right),$$

эти свойства уже установлены выше в лемме 2.2.1 (применительно к каждому оператору A_k, $k=\overline{1,3}$). Так как $\mathcal{D}(A_k^{1/2})=\vec{J}_0^1(\Omega_k)$ и $\vec{J}_0^1(\Omega_k)$ компактно вложено (согласно теореме вложения Соболева из $\vec{H}^1(\Omega_k)$ в $\vec{L}_2(\Omega_k)$) в $\vec{J}_0(\Omega_k)$, то каждый оператор A_k имеет компактный обратный $A_k^{-1}>0$.

Заметим теперь, что оператор A_{22} из (2.2.16) — тот же оператор, который в главе 1 был обозначен через A и определен формулой (1.2.30). Поэтому по лемме 1.2.2 получаем свойство $A_{22}\gg 0$ (в пространстве $\left(\mathbb{C}^3\right)^3$). □

Следствием леммы 2.2.3 является такое утверждение.

Лемма 2.2.4. *Операторная матрица*

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}P_2B_{22}^{1/2}\\ 0 & ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2 & 0\end{pmatrix}, \qquad (2.2.33)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}):=\mathcal{D}(A_{11})\oplus\left(\mathbb{C}^3\right)^3\oplus\left(\mathbb{C}^2\right)^3,$$

является максимальным аккретивным оператором, действующим в пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}}:=\mathcal{H}\oplus\left(\mathbb{C}^2\right)^3=\left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3}\vec{J}_0(\Omega_k)\right)\oplus\left(\mathbb{C}^3\right)^3\oplus\left(\mathbb{C}^2\right)^3. \qquad (2.2.34)$$

Доказательство. Свойство аккретивности оператора $\mathcal{A}$, т. е. неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\vec{v},\vec{v})_{\widetilde{\mathcal{H}}}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}\geqslant 0, \qquad (2.2.35)$$

$$\vec{v}=(\vec{u};\,\vec{\omega};\,\vec{\eta})^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

выводится непосредственно из определения (2.2.33). Свойство максимальности $\mathcal{A}$ следует из того факта, что A_{11} самосопряжен и положительно определен в пространстве $\overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_0(\Omega_k)$ (по леммам 2.2.1 и 2.2.3), а остальные матричные элементы из $\mathcal{A}$ (см. (2.2.33)) — конечномерные (т. е. ограниченные) операторы. □

2.2.4. Теорема о сильной разрешимости начально-краевой задачи. Установленные свойства операторных коэффициентов в уравнении (2.2.24) позволяют доказать теорему о существовании и единственности сильного решения задачи Коши (2.2.24)-(2.2.25), а также теорему о существовании сильного решения исходной начально-краевой задачи (2.1.1)–(2.1.8).

Определение 2.2.2. Будем говорить, что задача Коши (2.2.24)-(2.2.25) имеет *сильное решение* $(\vec{u}(t);\, \vec{\omega}(t);\, \vec{\eta}(t))^T$ на отрезке $[0,T]$, если в (2.2.24) все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ (см. (2.2.34)), т. е.

$$\vec{v}(t) := (\vec{u}(t);\, \vec{\omega}(t);\, \vec{\eta}(t))^T \in C\left([0,T];\, \widetilde{\mathcal{H}}\right),$$

$$\|\vec{v}(t)\|_{C\left([0,T];\, \widetilde{\mathcal{H}}\right)} := \max_{0\leqslant t\leqslant T} \quad \|\vec{y}(t)\|_{\widetilde{\mathcal{H}}},$$

а также выполнены начальные условия (2.2.25).

Определение 2.2.3. Будем говорить, что функция $f(t)$ со значениями в абстрактном банаховом пространстве E удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$, если

$$\|f(t) - f(s)\|_E \leqslant c|t-s|^\alpha,\ c > 0.\ \square \tag{2.2.36}$$

Далее класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера (2.2.36) с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$ на отрезке $[0,T]$, будем обозначать $C^\alpha([0,T];\, E)$. Для таких классов функций выполнены свойства

$$C^1([0,T];\, E) \subset C^\alpha([0,T];\, E) \subset C([0,T];\, E),$$

причем $C^1([0,T];\, E)$ плотно в $C^\alpha([0,T];\, E)$, а $C^\alpha([0,T];\, E)$ плотно в $C([0,T];\, E)$.

Теорема 2.2.1. *Пусть в задаче* (2.2.24)-(2.2.25) *выполнены условия*

$$\vec{u}^{\,0} \in \mathcal{D}(A_{11}),\ \vec{\omega}^{\,0} \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3,\ \vec{\eta}^{\,0} \in \left(\mathbb{C}^2\right)^3, \tag{2.2.37}$$

$$(\vec{f}(t);\, \vec{M}(t))^T \in C^\alpha([0,T];\, \mathcal{H}),\ 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{2.2.38}$$

Тогда задача (2.2.24)-(2.2.25) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. В силу леммы 2.2.2 задачу (2.2.24)-(2.2.25) можно переписать в следующей равносильной форме

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{diag}(C^{-1}; I)\mathcal{A}\vec{v} + \mathrm{diag}(C^{-1}; I)\vec{F},\ \vec{v}(0) = \vec{v}^{\,0}, \tag{2.2.39}$$

$$\vec{v} := (\vec{u};\, \vec{\omega};\, \vec{\eta})^T,\ \vec{F} := (\vec{f}(t);\, \vec{M}(t);\, \vec{0})^T,\ \vec{v}^{\,0} := (\vec{u}^{\,0};\, \vec{\omega}^{\,0};\, \vec{\eta}^{\,0})^T.$$

Введем в $\widetilde{\mathcal{H}}$ новое скалярное произведение, порождающее (с учетом леммы 2.2.2) норму, эквивалентную норме

$$\|\vec{v}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} := \sum_{k=1}^{3} \int_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{3} |\vec{\omega}_k|^2 + \sum_{k=1}^{3} |\vec{\eta}_k|^2,$$

по следующему правилу:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2] := (\mathrm{diag}(C; I)\vec{v}_1, \vec{v}_2)_{\widetilde{\mathcal{H}}}.$$

В этом скалярном произведении оператор

$$\hat{\mathcal{A}} := -\mathrm{diag}(C^{-1}; I)\mathcal{A},\ \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

как легко проверить, является максимальным диссипативным оператором, т. е., в силу (2.2.35),

$$\mathrm{Re}[\hat{\mathcal{A}}\vec{v}, \vec{v}] = \mathrm{Re}[-\mathrm{diag}(C^{-1}; I)\mathcal{A}\vec{v}, \vec{v}] = -A\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} \leqslant 0,\ \vec{v} \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}).$$

Так как здесь $-A := -\mathrm{diag}(A_{11};\, A_{22})$ — отрицательно определенный самосопряженный оператор (лемма 2.2.3), а остальные элементы из $\mathcal{A}$ (см. (2.2.33)) — ограниченные операторы, то оператор $\hat{\mathcal{A}}$

является генератором голоморфной полугруппы $\mathcal{U}(t)$ (см. [37, с. 169-170]). Так как при выполнении условий (2.2.37), (2.2.38) имеем

$$\vec{v}^0 \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}),\ \vec{F}(t) \in C^\alpha([0,T];\ \widetilde{\mathcal{H}}),$$

то по теореме 6.7 из [37, с. 170] получаем, что задача (2.2.39) имеет единственное сильное решение $\vec{v}(t)$ на отрезке $[0,T]$, которое выражается формулой

$$\vec{v}(t) = \mathcal{U}(t)\vec{v}^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\vec{F}(s)ds.$$

Тогда для этого решения все слагаемые в (2.2.39) являются непрерывными функциями t и выполнено начальное условие. Применяя теперь к обеим частям (2.2.39) оператор $\mathrm{diag}(C;I)$, приходим к выводу, что задача Коши (2.2.24)-(2.2.25) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. □

Доказанная теорема 2.2.1 теперь является базой для установления теоремы об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (2.1.1)–(2.1.8).

Теорема 2.2.2. *Пусть в задаче* (2.1.1)–(2.1.8) *выполнены условия*

$$\vec{u}_k^0 \in \mathcal{D}(A_k) \subset \vec{J}_0^1(\Omega_k),\ \vec{\omega}_k^0 \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}_k^0 \in \mathbb{C}^3, \tag{2.2.40}$$

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^\alpha\left([0,T];\vec{L}_2(G_k)\right),\ 0<\alpha\leqslant 1,\ k=\overline{1,3}, \tag{2.2.41}$$

где $\vec{L}_2(G_k)$ *— пространство с нормой*

$$\|\vec{f}_k\|^2_{\vec{L}_2(G_k)} := \rho_{0k}\int_{\Omega_{0k}} |\vec{f}_{0k}|^2 d\Omega_{0k} + \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{f}_k|^2 d\Omega_k = \int_{G_k} |\vec{f}_k|^2 dm_k. \tag{2.2.42}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ (*в смысле определения* 2.2.1).

Доказательство. Если выполнены условия (2.2.40), то в задаче (2.2.24)-(2.2.25) выполнены условия (2.2.37). Далее, если выполнены условия (2.2.41), то, согласно формулам (2.1.1)–(2.1.3), где определены $\vec{M}_k(t)$, $k=\overline{1,3}$, формулам (2.2.2)–(2.2.4), где определены правые части этих уравнений, а также формулам (2.2.27), (2.2.28) приходим к выводу, что выполнено условие (2.2.38). Поэтому по теореме 2.2.1 получаем, что при выполнении условий (2.2.40), (2.2.41) задача Коши (2.2.24)-(2.2.25) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ (в смысле определения 2.2.2).

Значит, справедливы уравнения (2.2.24), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в соответствующих пространствах, а также выполнены начальные условия (2.2.25). Отметим еще, что тривиальная задача (2.2.26) также имеет решение

$$\vec{\delta}_k^3(t) \in C^1([0,T],\ \mathbb{C}),\ k=\overline{1,3}.$$

Поэтому, вспоминая определения (2.2.12)–(2.2.18), определения операторов (2.2.29), (2.2.32), а также искомых и заданных функций (см. (2.2.11), (2.2.27), (2.2.28)), приходим к выводу, что справедливы уравнения (2.1.1)–(2.1.3), (2.2.2)–(2.2.4), где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в соответствующих пространствах.

Введем теперь функции $\nabla p_k(t,x)$ согласно формулам (2.2.5)–(2.2.7), заметив при этом, что $\vec{u}_k(t,x) \in \mathcal{D}(A_k) \subset \vec{H}^2(\Omega_k)$ и потому $\Delta\vec{u}_k \in C\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k)\right)$. Тогда $\nabla p_k(t,x) \in C\left([0,T];\vec{G}(\Omega_k)\right)$, $k=\overline{1,3}$. Складывая затем левые и правые части (2.2.2)–(2.2.4) и (2.2.5)–(2.2.7) и вспоминая, что $A_k\vec{u}_k = -P_{0,k}\Delta\vec{u}_k$, получаем, что справедливы уравнения (2.1.4)–(2.1.6) с непрерывными по t слагаемыми из $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k=\overline{1,3}$.

Из последнего уравнения (2.2.24) получаем также, что справедливы соотношения из последней строчки в (2.2.21). Отсюда и из предыдущих фактов приходим к окончательному выводу, что справедливы все уравнения и граничные условия в задаче (2.1.1)–(2.1.8) с непрерывными по t слагаемыми, т. е. эта задача имеет сильное решение в смысле определения 2.2.1. □

2.3. Нормальные колебания системы сочлененных гиростатов

В этом разделе изучаются нормальные движения системы сочлененных тел с полостями, заполненными вязкой жидкостью. Данная гидромеханическая система имеет бесконечное число степеней свободы, и для исследования спектральной проблемы здесь используется теория операторов, самосопряженных в бесконечномерном пространстве с индефинитной метрикой, а именно в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

В частности, установлена структура спектра нормальных колебаний, доказаны теоремы о базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов.

2.3.1. Приведение спектральной проблемы к задаче на собственные значения для оператора, самосопряженного в пространстве Понтрягина. Дадим сначала определение тех решений исследуемой задачи, которые называют нормальными колебаниями.

Определение 2.3.1. Назовем *нормальными колебаниями* исследуемой гидромеханической системы из сочлененных гиростатов такие решения однородной задачи (2.2.24), которые зависят от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, т. е.

$$(\vec{u}(t);\,\vec{\omega}(t);\,\vec{\eta}(t))^T = e^{-\lambda t}(\vec{u};\,\vec{\omega};\,\vec{\eta})^T, \tag{2.3.1}$$

где элементы $\vec{u}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\eta}$ не зависят от t. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ будем называть *комплексным декрементом затухания*, а искомый вектор-столбец $(\vec{u};\,\vec{\omega};\,\vec{\eta})^T$ — *амплитудным элементом*.

Для решения вида (2.3.1) однородной задачи (2.2.24) приходим к спектральной проблеме

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} \\ 0 & -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}. \tag{2.3.2}$$

Здесь в последнем уравнении по сравнению с таким же уравнением (2.2.24) изменены знаки левой и правой части.

Тривиальная проблема (2.2.26) соответственно дает соотношение

$$\vec{\omega}_k^3 = -\lambda\vec{\delta}_k^3,\ k = \overline{1,3}. \tag{2.3.3}$$

Таким образом, как и в главе 1, следует изучать совместно общую спектральную задачу (2.3.2) и тривиальную проблему (2.3.3).

Заметим сначала, что во второй строчке левой части уравнений (2.3.2) $\vec{\omega} \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3$, $A_{22}\vec{\omega} \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3$, а $B_{22}^{1/2}\vec{\eta} \in \left(\mathbb{C}^2\right)^3$. Поэтому с целью более детального изучения задачи (2.3.2) представим элемент $\vec{\omega} \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3$ в виде

$$\vec{\omega} = P_2\vec{\omega} + P^3\vec{\omega},\ P^3\vec{\omega} := (\vec{\omega}_1^3;\,\vec{\omega}_2^3;\,\vec{\omega}_3^3)^T, \tag{2.3.4}$$

где P^3 — дополнительный ортопроектор по отношению к проектору P_2,

$$P_2\vec{\omega} := \left(\sum_{k=1}^{2}\omega_1^k\vec{e}_1^{\,k};\sum_{k=1}^{2}\omega_2^k\vec{e}_2^{\,k};\sum_{k=1}^{2}\omega_3^k\vec{e}_3^{\,k}\right)^T.$$

Подставляя представления (2.3.4) в (2.3.2) и действуя ортопроекторами P_2 и P^3 на вторую строчку, придем к задаче

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2A_{22}P_2 & 0 & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} \\ 0 & 0 & P^3A_{22}P^3 & 0 \\ 0 & -ig^{1/2}B_{22}^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ P_2\vec{\omega} \\ \vec{\omega}^3 \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}P_2 & C_{12}P^3 & 0 \\ P_2C_{21} & P_2C_{22}P_2 & P_2C_{22}P^3 & 0 \\ P^3C_{21} & P^3C_{22}P_2 & P^3C_{22}P^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ P_2\vec{\omega} \\ \vec{\omega}^3 \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}. \tag{2.3.5}$$

Эту задачу, в свою очередь, удобно переписать в блочно-матричном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \quad \vec{w} := \begin{pmatrix} \vec{u} \\ P_2\vec{\omega} \\ \vec{\omega}^3 \end{pmatrix}, \tag{2.3.6}$$

$$\widetilde{A}_{11} := \operatorname{diag}(A_{11}; P_2A_{22}P_2; P^3A_{22}P^3), \ \widetilde{A}_{22} := (0), \tag{2.3.7}$$

$$\widetilde{A}_{12} := (0; -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}; 0), \widetilde{A}_{21} = \widetilde{A}_{12}^{*}, \tag{2.3.8}$$

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}P_2 & C_{12}P^3 \\ P_2C_{21} & P_2C_{22}P_2 & P_2C_{22}P^3 \\ P^3C_{21} & P^3C_{22}P_2 & P^3C_{22}P^3 \end{pmatrix}. \tag{2.3.9}$$

Лемма 2.3.1. *Операторная матрица*

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.3.10}$$

заданная на области определения

$$\mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\right) := \mathcal{D}\left(A_{11}\right) \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 \subset \widetilde{\mathcal{H}},$$

является ограниченным снизу самосопряженным оператором с дискретным спектром и тривиальным ядром.

Доказательство. В самом деле, оператор A_{11}, согласно лемме 2.2.1, определению (2.2.17) и лемме 2.2.3, является неограниченным положительно определенным оператором с компактным обратным оператором $A_{11}^{-1} > 0$. Далее, из свойства положительной определенности A_{22} в пространстве $\left(\mathbb{C}^3\right)^3$ (лемма 2.2.3) следует, что $P_2A_{22}P_2 : \left(\mathbb{C}^2\right)^3 \to \left(\mathbb{C}^2\right)^3$ и $P^3A_{22}P^3 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ — также положительно определенные. Поэтому оператор $\widetilde{A}_{11}$ из (2.3.7), заданный на области определения

$$\mathcal{D}\left(\widetilde{A}_{11}\right) := \mathcal{D}\left(A_{11}\right) \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 \oplus \mathbb{C}^3,$$

является неограниченным положительно определенным самосопряженным оператором с компактным обратным положительным оператором.

Поскольку остальные блоки в (2.3.10) конечномерные и $\widetilde{A}_{21} = \widetilde{A}_{12}^{*}$, $\widetilde{A}_{22} := 0$, то в целом оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ обладает свойствами, сформулированными в лемме. Заметим только, что ядро оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ нулевое и обратный оператор, записанный в представлении (2.3.5), имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ig^{-1/2}B_{22}^{-1/2} \\ 0 & 0 & (P^3A_{22}P^3)^{-1} & 0 \\ 0 & -ig^{-1/2}B_{22}^{-1/2} & 0 & -g^{-1}B_{22}^{-1/2}(P_2A_{22}P_2)B_{22}^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.3.11}$$

Здесь $A_{11}^{-1} > 0$ — компактный оператор, а остальные — конечномерные. Это полностью доказывает лемму. □

Лемма 2.3.2. *Оператор C, заданный формулой* (2.3.9)*, является ограниченным положительно определенным оператором.*

Доказательство. В самом деле, это тот же оператор C, который определен формулой (2.2.29) в ортогональном разложении (2.2.30), однако теперь представленный в ортогональном разложении

$$\mathcal{H} = \left(\overset{3}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_0(\Omega_k)\right) \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 \oplus \mathbb{C}^3. \tag{2.3.12}$$

Поэтому по лемме 2.2.2 получаем свойства ограниченности и положительной определенности оператора C в ортогональном разложении (2.3.12). □

Опираясь на свойства операторов $\widetilde{\mathcal{A}}$ и C, покажем, что задачу (2.3.6) можно привести к задаче на собственные значения компактного оператора, самосопряженного в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с индефинитной метрикой (см., в частности, теорию пространств Л. С. Понтрягина в [1], а также [71]).

С этой целью осуществим в (2.3.6) замену

$$C^{1/2}\vec{w} = \vec{z}, \tag{2.3.13}$$

где $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — оператор, свойства которого только что были описаны в лемме 2.3.2. Применяя еще слева в первом уравнении (2.3.6) оператор $C^{-1/2}$, приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}. \tag{2.3.14}$$

Введем здесь оператор канонической симметрии

$$\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I; -I) = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}, \tag{2.3.15}$$

а также новый искомый элемент

$$\vec{y} := \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}.$$

Тогда взамен (2.3.14) возникает спектральная задача

$$\mathcal{J}\mathcal{A}\vec{y} = \mu\vec{y}, \ \mu = \lambda^{-1}, \tag{2.3.16}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* := \begin{pmatrix} C^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \vec{y} \in \mathcal{H} \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 =: \widetilde{\mathcal{H}}.$$

Здесь, в силу определения (2.3.10) и формулы (2.3.11),

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{11} := \operatorname{diag}\left(A_{11}^{-1}; 0; (P^3 A_{22} P^3)^{-1}\right),$$

$$\hat{A}_{22} := -g^{-1} B_{22}^{-1/2} (P_2 A_{22} P_2) B_{22}^{-1/2},$$

$$\hat{A}_{21} := \left(0; -ig^{-1/2} B_{22}^{-1/2}; 0\right) = \left(\hat{A}_{12}\right)^*.$$

Поскольку, в силу леммы 2.3.1, оператор $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$ компактный и положительный, а оператор $\operatorname{diag}\left(C^{1/2}; I\right)$ самосопряженный положительно определенный и ограниченный, то оператор $\mathcal{A}$ из (2.3.16) — компактный самосопряженный оператор.

Так как квадратичная форма оператора $\mathcal{J}$ (см. (2.3.15)) содержит ровно 6 отрицательных квадратов, то задача (2.3.16) есть задача на собственные значения для компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}$ в пространстве Понтрягина Π_6 с каноническим скалярным произведением

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2] := (\mathcal{J}\vec{y}_1, \vec{y}_2)_{\widetilde{\mathcal{H}}} \quad \forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \widetilde{\mathcal{H}}. \tag{2.3.17}$$

2.3.2. Свойства решений спектральной задачи. Рассмотрим теперь спектральную задачу о нормальных колебаниях гидромеханической задачи из трех сочлененных гиростатов.

Установим сначала, как и в пункте 1.3.2, простейшие свойства решений задачи о нормальных колебаниях.

1^0. Число $\lambda = \lambda_0 = 0$ является трехкратным собственным значением спектральной задачи (2.3.5), (2.3.3). Отвечающее ему решение таково:

$$\vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{\eta} = \vec{0} \quad \forall \vec{\delta}^3 = (\vec{\delta}_1^3; \vec{\delta}_2^3; \vec{\delta}_3^3)^T \in \mathbb{C}^3. \tag{2.3.18}$$

Действительно, при $\lambda = 0$ задача (2.3.5), в силу обратимости операторной матрицы из левой части уравнения (см. лемму 2.3.1 и формулу (2.3.11)), приводит к первым соотношениям (2.3.18), а тривиальные связи (2.3.3) показывают, что $\vec{\delta}^3$ может быть произвольным.

2^0. Если собственное значение $\lambda \neq 0$, то выполнено свойство

$$\operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{2.3.19}$$

В самом деле, в этом случае эволюционной однородной задаче (2.2.19)–(2.2.21) отвечает спектральная задача

$$(A - \lambda C - \lambda^{-1}B)\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} := (\vec{u}; \vec{\omega})^T \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}, \tag{2.3.20}$$

где операторы A и C определены формулами (2.2.32) и (2.2.29) соответственно, а оператор B в ортогональном разложении (2.2.30) пространства $\mathcal{H}$ определен формулой

$$B := g\ \mathrm{diag}(0; P_2 B_{22} P_2) = B^* \geqslant 0.$$

Из (2.3.20), (как и при получении формулы (1.3.9)) приходим к выводу, что собственные значения задачи по ее решению $\vec{v}$ вычисляются по формулам

$$\lambda = \lambda_{\pm} = \frac{(A\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}} \pm \sqrt{(A\vec{v}, \vec{v})^2_{\mathcal{H}} - 4(C\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}} \cdot (B\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}}}}{2(C\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}}}.$$

Отсюда теми же рассуждениями, как и при доказательстве свойства 2^0 из пункта 1.3.2, устанавливаем, что $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

3^0. Невещественные собственные значения, а также те вещественные (в силу (2.3.19) они положительны), которым отвечают, кроме собственных, присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$F := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}), |\lambda| \leqslant \lambda^{1/2}_{max}(C^{-1/2}BC^{-1/2}) \right\},$$

где $\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) > 0$ — минимальное собственное значение (нижняя грань) оператора $C^{-1/2}AC^{-1/2}$, который является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, заданным на области определения

$$\mathcal{D}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) = \mathcal{R}(C^{1/2}A^{-1}C^{1/2})$$

и имеющим компактный обратный оператор $C^{1/2}A^{-1}C^{1/2}$. Поэтому оператор $C^{-1/2}AC^{-1/2}$ имеет дискретный положительный спектр и

$$(C^{-1/2}AC^{-1/2}\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}} \geqslant \lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2})||\vec{v}||^2_{\mathcal{H}}, \ \forall\, \vec{v} \in \mathcal{D}(C^{-1/2}AC^{-1/2}).$$

Далее, так как B и $C^{-1/2}$ — ограниченные операторы, то $C^{-1/2}BC^{-1/2}$ — также ограниченный и притом самосопряженный положительный оператор и потому

$$\lambda_{max}(C^{-1/2}BC^{-1/2}) = ||C^{-1/2}BC^{-1/2}|| = ||C^{-1/2}B^{1/2}||^2 = ||B^{1/2}C^{-1/2}||^2.$$

Доказательство свойства 3^0 в точности повторяет доказательство такого же свойства из пункта 1.3.2 и потому здесь не приводится. Отличием этих двух вариантов является лишь то обстоятельство, что здесь оператор A, а потому и оператор $C^{-1/2}AC^{-1/2}$, неограничены, но это не изменяет схему доказательства, приведенную в пункте 1.3.2.

4^0. Если выполнено условие

$$\lambda_{min}(C^{-1/2}AC^{-1/2}) > 2\lambda^{1/2}_{max}(C^{-1/2}BC^{-1/2}), \tag{2.3.21}$$

то задача (2.3.20) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов.

5^0. Спектр задачи (2.3.20), а потому и задачи (2.3.16), расположен симметрично относительно вещественной оси.

Действительно, задаче (2.3.20) отвечает операторный пучок (оператор-функция), который является самосопряженным, т. е.

$$L(\lambda) := A - \lambda C - \lambda^{-1}B = \left(L(\overline{\lambda})\right)^*,$$

отсюда и следует свойство симметрии спектра относительно $\mathbb{R}$. Это же свойство следует из уравнения (2.3.16) для собственных значений $\mu = \lambda^{-1}$, так как $\mathcal{JA}$ является $\mathcal{J}$-самосопряженным оператором.

6^0. Спектр задачи (2.3.16) может быть лишь дискретным с предельной точкой в нуле; соответственно спектр задачи (2.3.20) может быть лишь дискретным с предельной точкой на бесконечности.

Эти утверждения следуют из того факта, что оператор $\mathcal{A}$, как установлено выше (см. конец пункта 2.3.1), является компактным, поэтому и $\mathcal{J}\mathcal{A}$ — компактный оператор.

Дальнейшее важное свойство спектра задачи (2.3.20) основано на формуле асимптотического поведения собственных значений $\lambda_j(A^{-1/2}CA^{-1/2})$ оператора $A^{-1/2}CA^{-1/2}$ при $j \to \infty$.

Лемма 2.3.3. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_j(A^{-1/2}CA^{-1/2}) = \left(\frac{1}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{3}|\Omega_k|\nu_k^{-3/2}\right)^{2/3} j^{-2/3}[1+o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{2.3.22}$$

Доказательство. Задача на собственные значения

$$A^{-1/2}CA^{-1/2}\vec{w} = \widetilde{\lambda}\vec{w} \tag{2.3.23}$$

оператора $A^{-1/2}CA^{-1/2}$ равносильна задаче

$$A\vec{v} = \lambda C\vec{v}, \ \vec{v} = A^{-1/2}\vec{w} \in \mathcal{D}(A), \ \lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}. \tag{2.3.24}$$

Так как спектр задачи (2.3.23) состоит из положительных конечнократных собственных значений $\widetilde{\lambda}_j$ с предельной точкой в нуле, то спектр задачи (2.3.24) состоит из положительных конечнократных собственных значений $\lambda_j = 1/\widetilde{\lambda}_j$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ и собственные значения λ_j являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$(A\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}}/(C\vec{v}, \vec{v})_{\mathcal{H}}, \ \vec{v} \in \mathcal{D}(A). \tag{2.3.25}$$

Опираясь на определения (2.2.32) оператора A и (2.2.29) для оператора C, а также на формулы (2.2.16), (2.2.17), (2.2.8), (2.2.9) и (2.2.12)–(2.2.15), приходим к выводу, что вариационное отношение (2.3.25) можно переписать в виде

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{3}\mu_k(A_k\vec{u}_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} + \cdots}{\sum\limits_{k=1}^{3}\rho_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} + \cdots}, \tag{2.3.26}$$

где многоточием обозначены слагаемые, вполне подчиненные (в силу конечномерности других подпространств из $\mathcal{H}$ и компактности остальных операторов, по которым выписываются соответствующие квадратичные формы) основным выражениям в числителе и знаменателе отношения (2.3.26).

Отсюда следует (см., например, [15]), что главный член асимптотического поведения собственных значений λ_j, отвечающих вариационному отношению (2.3.26), совпадает с главным членом асимптотического поведения собственных значений вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{3}\mu_k(A_k\vec{u}_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)}/\sum_{k=1}^{3}\rho_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)}. \tag{2.3.27}$$

Однако отношение (2.3.27) отвечает спектральной задаче

$$\mu_k A_k\vec{u}_k = \lambda\rho_k\vec{u}_k, \ k = \overline{1,3} \iff \nu_k A_k\vec{u}_k = \lambda\vec{u}_k, \ k = \overline{1,3}, \tag{2.3.28}$$

где операторы A_k определены формулами (2.2.8), (2.2.9) и для них справедливы утверждения леммы 2.2.1. В частности, собственные значения операторов $\nu_k A_k$, согласно формуле (2.2.10), имеют асимптотическое поведение ($\mu_k = \rho_k\nu_k$)

$$\lambda_j(\nu_k A_k) = \nu_k\left(\frac{|\Omega_k|}{3\pi^2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)], \ j \to \infty, \ k = \overline{1,3}.$$

Обозначим через $N(\lambda)$ функцию распределения собственных значений задачи (2.3.28):

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_j < \lambda} 1.$$

Так как вся совокупность собственных значений задачи (2.3.28) состоит из трех множеств, т. е. из объединения собственных значений трех задач на собственные значения для операторов $\nu_k A_k$, $k=\overline{1,3}$, то, очевидно,

$$N(\lambda)=\sum_{k=1}^{3} N_k(\lambda),$$

где $N_k(\lambda)$ — функция распределения собственных значений k-ой задачи (2.3.28).

Однако из асимптотических формул (2.3.28) легко вывести, что

$$N_k(\lambda)\sim \nu_k^{-3/2}\frac{|\Omega_k|}{3\pi^2}\cdot\lambda^{3/2}\quad(\lambda\to+\infty).$$

Поэтому

$$N(\lambda)=\sum_{k=1}^{3} N_k(\lambda)\sim\frac{1}{3\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{3}|\Omega_k|\nu_k^{-3/2}\right)\lambda^{3/2}\quad(\lambda\to+\infty).$$

Отсюда получаем, что для собственных значений λ_j вариационного отношения (2.3.27) (либо задачи (2.3.28)) имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j=\left(\frac{1}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{3}|\Omega_k|\nu_k^{-3/2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)]\quad(j\to\infty).\tag{2.3.29}$$

Поскольку главные члены асимптотического поведения собственных значений вариационных отношений (2.3.26) и (2.3.27) совпадают, то из (2.3.29) приходим к формуле при $j\to\infty$:

$$\lambda_j\left(A^{1/2}C^{-1}A^{1/2}\right)=\lambda_j\left(\left(A^{-1/2}CA^{-1/2}\right)^{-1}\right)=\left(\frac{1}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{3}|\Omega_k|\nu_k^{-3/2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)].$$

Отсюда и следует формула (2.3.22). □

Дальнейшее изучение свойств решений задачи (2.3.20) основано на следующем утверждении, полученном в работе [48] А. С. Маркуса и В. И. Мацаева.

Теорема 2.3.1. *Рассмотрим оператор-функцию вида*

$$M(\mu):=I+T-\mu G+Q(\mu),\tag{2.3.30}$$

$$G=G^*\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),\quad KerG=\{0\},\quad T\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}),$$

где $Q(\mu)$ — аналитическая функция в бесконечно удаленной точке, причем

$$\lim_{\mu\to\infty}Q(\mu)=0.$$

Если характеристические числа оператора G имеют асимптотическое поведение

$$\mu_j^{\pm}(G)=\pm a_{\pm}^{(-1/\alpha_\pm)}j^{(1/\alpha_\pm)}[1+o(1)]\quad(j\to\infty),\quad a_\pm>0,\quad \alpha_\pm>0,$$

то собственные значения μ_j операторного пучка $M(\mu)$ из (2.3.30) *имеют то же самое асимптотическое поведение*:

$$\mu_j^{\pm}=\mu_j^{\pm}(G)[1+o(1)]\quad(j\to\infty).$$

Лемма 2.3.4. *Собственные значения λ_j задачи* (2.3.20) *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_j=\lambda_j\left(A^{-1/2}CA^{-1/2}\right)[1+o(1)]=\left(\frac{1}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{3}|\Omega_k|\nu_k^{-3/2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)]\quad(j\to\infty).\tag{2.3.31}$$

Доказательство. Осуществим в задаче (2.3.20) замену $A^{1/2}\vec v=\vec w$ и подействуем оператором $A^{-1/2}$. Тогда возникает спектральная задача

$$M(\lambda)\vec w:=\left(I-\lambda A^{-1/2}CA^{-1/2}-\lambda^{-1}A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)\vec w=0,\ \vec w\in\mathcal{H}.$$

Так как здесь $A^{-1/2}CA^{-1/2}$ — компактный положительный оператор, собственные значения которого имеют асимптотическое поведение (2.3.22), а оператор-функция $\lambda^{-1}A^{-1/2}BA^{-1/2}$ аналитическая в бесконечно удаленной точке и равна нулю на бесконечности, то к пучку $M(\lambda)$ применима теорема 2.3.1, из которой получаем, в силу формулы (2.3.22), что справедлива асимптотическая формула (2.3.31). □

2.3.3. Индефинитный подход. Опираясь на уравнение (2.3.16), рассмотрим общие свойства его решений на основе теории операторов, самосопряженных в пространстве с индефинитной метрикой.

Теорема 2.3.2. *Для решений задачи* (2.3.16) *справедливы следующие утверждения*:

1^0. *Пространство*

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus (\mathbb{C}^2)^3 = \left(\left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3} \vec{J}_0(\Omega_k)\right) \oplus (\mathbb{C}^2)^3 \oplus \mathbb{C}^3\right) \oplus (\mathbb{C}^2)^3 = \Pi_6$$

с индефинитной метрикой (2.3.17) *разбивается в $\mathcal{J}$-ортогональную сумму двух подпространств*:

$$\Pi_6 = \Pi_+[+]\Pi_-, \ \dim\Pi_- \leqslant 12, \tag{2.3.32}$$

инвариантных для оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{J}\mathcal{A}\Pi_\pm \subset \Pi_\pm. \tag{2.3.33}$$

2^0. *В подпространстве Π_+ существует $\mathcal{J}$-ортонормированный базис $\{\vec{y}_j^+\}_{j=1}^\infty \subset \Pi_+$, составленный из собственных элементов задачи* (2.3.16)*, отвечающих положительным собственным значениям $\{\mu_j^+\}_{j=1}^\infty$, т. е.*

$$[\vec{y}_j^+, \vec{y}_l^+] = (\mathcal{J}\vec{y}_j^+, \vec{y}_l^+)_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \delta_{jl}, \ \sigma(\mathcal{J}\mathcal{A}|_{\Pi_+}) \subset \mathbb{R}_+, \tag{2.3.34}$$

$$\mu_1^+ \geqslant \mu_2^+ \geqslant \dots \geqslant \mu_j^+ \geqslant \cdots, \ \mu_j^+ \to 0 \ (j \to \infty).$$

3^0. *Собственным и присоединенным элементам из подпространства Π_- отвечают не более* 6 *пар невещественных собственных значений $\mu_{l,0}^\pm$, $l = \overline{1,6}$, причем*

$$\operatorname{Re}\mu_{l,0}^\pm > 0, \ \overline{\mu_{l,0}^+} = \mu_{l,0}^-.$$

4^0. *Вся совокупность собственных и присоединенных* (*корневых*) *элементов задачи* (2.3.16) *образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в пространстве Понтрягина $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}}$ со скалярным произведением* (2.3.17).

5^0. *Если выполнено условие* (2.3.21)*, то задача* (2.3.16) *имеет лишь* (*дискретный*) *положительный спектр и не имеет присоединенных элементов*; *собственные элементы $\{\vec{y}_j^+\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_j^+\}_{j=1}^\infty$ этого спектра, образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис во всем пространстве $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_+$, а подпространство Π_- в этом случае тривиально*: $\Pi_- = \{0\}$.

Доказательство. 1^0. Первое утверждение данной теоремы следует из общей теоремы о спектре компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора, действующего в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ (см. [1, 71]). При этом необходимо убедиться, что корневой линеал $\mathcal{L}_0(\mathcal{J}\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 = 0$, является невырожденным подпространством. Однако оператор $\mathcal{J}\mathcal{A}$ обратим, $\mathcal{L}_0(\mathcal{J}\mathcal{A}) = \{0\}$, и это условие выполнено. Поэтому система корневых элементов оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}$ полна в $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}}$. В этом случае имеет место разложение (2.3.32) и свойства инвариантности (2.3.33).

2^0. Далее, подпространство Π_+ равномерно положительно, т. е.

$$[\vec{y}, \vec{y}] \geqslant a\|\vec{y}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}}, \ a > 0, \ \vec{y} \in \Pi_+,$$

и потому метрика $[\cdot,\cdot]$ в Π_+ эквивалентна стандартной метрике $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{\mathcal{H}}}$, а $(\mathcal{J}\mathcal{A})|_{\Pi_+}$ — самосопряженный компактный положительный оператор, действующий в Π_+. Отсюда и следуют свойства (2.3.34) (по теореме Гильберта—Шмидта).

3^0. Это утверждение следует из общей теоремы Понтрягина (см. [58]).

4^0. Данное утверждение есть следствие свойств 2^0 и 3^0 и определения почти $\mathcal{J}$-ортонормированного базиса в пространстве $\Pi_\varkappa$.

5^0. Это свойство имеет место на основании критерия о $\mathcal{J}$-ортонормированном базисе в $\Pi_\varkappa$, сформулированного в пункте 1.3.3, а также из того, что при выполнении условия (2.3.21) задача (2.3.16), как и задача (2.3.20), не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов. □

2.3.4. Физические выводы. Опираясь на результаты, полученные в пунктах 2.3.2 и 2.3.3, сформулируем физические выводы, относящиеся к свойствам решений задачи о нормальных колебаниях системы сочлененных гиростатов, содержащих полости, заполненные вязкой жидкостью.

1^0. Собственному значению $\lambda = \lambda_0 = 0$ отвечает новое состояние равновесия гидромеханической системы, полученное из исходного состояния путем поворота гиростата с номером k на произвольный угол $\vec{\delta}_k^3 = \delta_k^3 \vec{e}_k^{\,3}$, $k = \overline{1,3}$.

2^0. Все остальные нормальные движения гидромеханической системы (их счетное множество) являются затухающими, так как любое собственное значение λ имеет $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и потому амплитуды собственных элементов изменяются со временем по закону $\exp(-t\operatorname{Re}\lambda)$. Таким образом, эти нормальные движения системы являются асимптотически устойчивыми.

3^0. Осциллирующих со временем нормальных движений, т. е. зависящих от времени по закону $\exp(-t\operatorname{Re}\lambda)(\cos(t\operatorname{Im}\lambda) \pm i\sin(t\operatorname{Im}\lambda))$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, в исследуемой задаче не более конечного числа, точнее, комплексно сопряженных пар собственных значений и соответственно осциллирующих нормальных режимов колебаний не более 6 для трех сочлененных гиростатов.

4^0. Если вязкости жидкостей в гиростатах и трение в шарнирах настолько велико, что выполнено условие (2.3.21) (за счет достаточно большого по величине минимального собственного значения оператора A, а потому и оператора $C^{-1/2}AC^{-1/2}$), то задача о нормальных колебаниях имеет лишь апериодически затухающие (не осциллирующие) нормальные движения гидромеханической системы. Соответствующие декременты затухания $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$, $\lambda_j^+ = 1/\mu_j^+ \to \infty$ при $(j \to \infty)$, имеют асимптотическое поведение (2.3.31), т. е. близкое к декрементам затухания системы из трех неподвижных гиростатов с полостями, полностью заполненными вязкой жидкостью.

Отметим еще, что в этом случае, т. е. при выполнении условия (2.3.21), система собственных элементов задачи (2.3.16) образует $\mathcal{J}$-ортогональный базис в пространстве Π_6. Это позволяет представить решение начально-краевой задачи, порождающей спектральную задачу (2.3.16), в виде функционального ряда по полной $\mathcal{J}$-ортогональной системе собственных элементов $\{\vec{y}_j^{\,+}\}_{j=1}^\infty$, $\lambda_j^+ = 1/\mu_j^+$.

5^0. Отметим без дополнительных пояснений, что аналогичные математические и физические выводы справедливы и для системы из n сочлененных гиростатов. При этом возникает задача на собственные значения для $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in \mathfrak{S}_\infty(\widetilde{\mathcal{H}})$, причем в этом случае $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_{2n}$ с соответствующим индефинитным скалярным произведением.

Глава 3

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Напомним, что в первой главе изучалась начально-краевая и спектральная задачи о малых колебаниях сочлененных гиростатов, заполненных идеальной жидкостью, при наличии либо отсутствии трения в шарнирах. При отсутствии трения в шарнирах такая система является консервативной, а при наличии трения — частично диссипативной, причем диссипация энергии происходит в конечномерном подпространстве (т. е. в шарнирах) исходного бесконечномерного пространства. Далее, в главе 2 при учете вязких сил в полостях гиростатов возникла гидромеханическая система, которую естественно считать при наличии трения в каждом шарнире полностью диссипативной.

В данной главе будет рассмотрен на основе предыдущих построений промежуточный вариант, когда в системе сочлененных гиростатов не все полости заполнены вязкой жидкостью, но хотя бы одна содержит вязкую и хотя бы одна идеальную жидкости; аналогичный вариант будет рассмотрен и по отношению к трению в шарнирах, причем хотя бы в одном из них трение есть и хотя бы в одном трение не учитывается.

Для этой задачи будут применены приемы, комбинирующие подходы из глав 1 и 2, причем для простоты будет рассмотрен случай трех гиростатов. Кроме того, в последнем разделе этой главы приведены почти без доказательств результаты исследования плоской (двумерной) проблемы для системы гиростатов, сочлененных посредством цилиндрических шарниров.

Отметим еще, что так как количество всех возможных вариантов для частично диссипативной системы из n сочлененных гиростатов равно $2^{2n}-2$, то здесь будут рассмотрены лишь два из них для $n=3$ и будет дан общий рецепт, как исследовать задачу в том или ином варианте.

3.1. Первая проблема

В этом разделе рассмотрен вариант, когда первое и третье тело заполнены полностью вязкой жидкостью, второе — идеальной жидкостью, а трение присутствует не во всех шарнирах, т. е. $\alpha_k \geqslant 0$, причем для некоторых k будет $\alpha_k > 0$.

3.1.1. Постановка задачи. Рассмотрим, как и выше, постановку начально-краевой задачи о малых движениях трех сочлененных гиростатов, причем считаем, что тело G_2 содержит полость Ω_2, полностью заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, а тела G_1 и G_3 имеют соответственно полости Ω_1 и Ω_3, полностью заполненные вязкими жидкостями с коэффициентами динамической вязкости $\mu_1 > 0$ и $\mu_3 > 0$.

Примем те же обозначения, которые использовались в главах 1 и 2. Тогда линеаризованные уравнения движения тройного маятника, как и в пунктах 1.2.1 (см. (1.1.9)–(1.1.11)) и 2.1.1 (см. (2.1.1)–(2.1.3)), имеют вид

$$\begin{gathered}
\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\right) dm_2 + \\
+ \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) dm_3 + \\
+ \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g\left(m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1\right) P_2 \vec{\delta}_1 = \\
= \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_1; \qquad (3.1.1)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right) dm_2 + \\
+ \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) dm_3 + \\
+ \alpha_1 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_2 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g\left(m_2 l_2 + m_3 h_2\right) P_2 \vec{\delta}_2 = \\
= \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_2(t); \qquad (3.1.2)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} d\Omega_3 + \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2\right) dm_3 + \\
+ \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_3(t). \qquad (3.1.3)
\end{gathered}$$

Поскольку тела G_1 и G_3 имеют полости Ω_1 и Ω_3 с вязкой жидкостью, а G_2 — с идеальной, то линеаризованные уравнения движения этих жидкостей и граничные условия таковы (см. (2.1.4), (2.1.6), а также (1.1.13)):

$$\rho_1\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)=-\nabla p_1+\mu_1\Delta\vec{u}_1+\rho_1\vec{f}_1,\quad \operatorname{div}\vec{u}_1=0\ (\text{в }\Omega_1),\ \vec{u}_1=\vec{0}\ (\text{на }S_1);\tag{3.1.4}$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)=-\nabla p_2+\rho_2\vec{f}_2,\quad \operatorname{div}\vec{u}_2=0\ (\text{в }\Omega_2),\ \vec{u}_2\cdot\vec{n}_2=0\ (\text{на }S_2);\tag{3.1.5}$$

$$\rho_3\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)=-\nabla p_3+\mu_3\Delta\vec{u}_3+\rho_3\vec{f}_3,$$
$$\operatorname{div}\vec{u}_3=0\ (\text{в }\Omega_3),\ \vec{u}_3=\vec{0}\ (\text{на }S_3).\tag{3.1.6}$$

К уравнениям (3.1.1)–(3.1.6), как и ранее, следует добавить кинематические связи и начальные условия

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k=P_2\vec{\omega}_k,\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\quad k=\overline{1,3},\tag{3.1.7}$$

$$\vec{u}_k(0,x)=\vec{u}_k^0(x),\quad x\in\Omega_k,\quad \vec{\omega}_k(0)=\vec{\omega}_k^0,\quad \vec{\delta}_k(0)=\vec{\delta}_k^0,\quad k=\overline{1,3}.\tag{3.1.8}$$

Границы $\partial\Omega_k=S_k$ областей Ω_k по-прежнему считаем принадлежащими классу C^2.

Для классического решения задачи (3.1.1)–(3.1.8) справедлив закон баланса полной энергии, который формально получается из аналогичного закона (2.1.11) при $\mu_2=0$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\left\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\right\}=$$
$$=-\left\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2+\mu_1\int\limits_{\Omega_1}|\operatorname{rot}\vec{u}_1|^2d\Omega_1+\mu_3\int\limits_{\Omega_3}|\operatorname{rot}\vec{u}_3|^2d\Omega_3\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_kd\Omega_k.\tag{3.1.9}$$

3.1.2. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. При исследовании начально-краевой задачи (3.1.1)–(3.1.8) будем комбинировать подходы, уже использованные в главах 1 и 2.

Будем считать искомые функции $\vec{u}_k(t,x)$, $\nabla p_k(t,x)$, $k=\overline{1,3}$, функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$ и снова воспользуемся ортогональными разложениями (см. (1.2.1)–(1.2.3))

$$\vec{L}_2(\Omega_k)=\vec{J}_0(\Omega_k)\oplus\vec{G}(\Omega_k),\quad k=\overline{1,3}.$$

Тогда $\vec{u}_k\in\vec{J}_0(\Omega_k)$, $\nabla p_k\in G(\Omega_k)$, $k=\overline{1,3}$. Введем, как и ранее, операторы $P_{0,k}$ и $P_{G,k}$ ортогонального проектирования на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_k)$ и $\vec{G}(\Omega_k)$ соответственно.

Считая, что задача (3.1.1)–(3.1.8) имеет сильное решение (см. определение 2.2.1), и действуя ортопроекторами $P_{0,k}$, $k=\overline{1,3}$, на обе части уравнений (3.1.4), (3.1.5) и (3.1.6) соответственно, будем иметь (после замены $\partial/\partial t$ на d/dt)

$$\rho_1\left(\frac{d\vec{u}_1}{dt}+P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right)=-\mu_1A_1\vec{u}_1+\rho_1P_{0,1}\vec{f}_1(t),\tag{3.1.10}$$

$$\rho_2\left(\frac{d\vec{u}_2}{dt}+P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)=\rho_2P_{0,2}\vec{f}_2(t),\tag{3.1.11}$$

$$\rho_3\left(\frac{d\vec{u}_3}{dt}+P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)=-\mu_3A_3\vec{u}_3+\rho_3P_{0,3}\vec{f}_3\,(t)\,, \tag{3.1.12}$$

где A_1 и A_3 — операторы Стокса (для областей Ω_1 и Ω_3), свойства которых описаны в лемме 2.2.1.

Аналогичные проектирования на подпространства $\vec{G}\,(\Omega_k)$ приводят к соотношениям

$$\rho_1P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)=-\nabla p_1+\mu_1P_{G,1}\Delta\vec{u}_1+\rho_1P_{G,1}\vec{f}_1, \tag{3.1.13}$$

$$\rho_2P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)=-\nabla p_2+\rho_2P_{G,2}\vec{f}_2, \tag{3.1.14}$$

$$\rho_3P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)=-\nabla p_3+\mu_3P_{G,3}\Delta\vec{u}_3+\rho_3P_{G,3}\vec{f}_3. \tag{3.1.15}$$

Из (3.1.13)–(3.1.15), как и ранее, получаем такой вывод: если поля $\vec{u}_k(t,x)$ и функции $\vec{\omega}_k(t)$ уже найдены, то поля $\nabla p_k(t,x)$ находятся непосредственно, и они не входят в другие уравнения исследуемой проблемы. Поэтому в дальнейшем будем исследовать систему уравнений (3.1.1)–(3.1.3), (3.1.10)–(3.1.12), (3.1.7) с начальными условиями (3.1.8).

Соотношение (3.1.11) позволяет вычислить непосредственно поле $d\vec{u}_2/dt$ через $d\vec{\omega}_1/dt$, $d\vec{\omega}_2/dt$ и $\vec{f}_2$. Подставляя это выражение для $d\vec{u}_2/dt$ в уравнения (3.1.1) и (3.1.2), после преобразований, аналогичных проделанным в пункте 1.2.2 (см. (1.2.11)–(1.2.16)), будем иметь следующую преобразованную систему уравнений:

$$\rho_1\left(\frac{d\vec{u}_1}{dt}+P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right)+\mu_1A_1\vec{u}_1=\rho_1P_{0,1}\vec{f}_1\,(t)\,; \tag{3.1.16}$$

$$\rho_3\left(\frac{d\vec{u}_3}{dt}+P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)+\mu_3A_3\vec{u}_3=\rho_3P_{0,3}\vec{f}_3\,(t)\,; \tag{3.1.17}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}d\Omega_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+\\ +\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left[P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right]d\Omega_2+\\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+\\ +\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1=\\ =\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1dm_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\vec{f}_3dm_3=:\widetilde{\vec{M}}_1\,(t)\,;\end{gathered} \tag{3.1.18}$$

$$\begin{gathered}\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left[P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right]d\Omega_2+\\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+\\ +\alpha_1\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)-\alpha_2\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+g\left(m_2l_2+m_3h_2\right)P_2\vec{\delta}_2=\\ =\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3dm_3=:\widetilde{\vec{M}}_2\,(t)\,;\end{gathered} \tag{3.1.19}$$

$$\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} d\Omega_3 +$$
$$+ \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2\right) dm_3 + \alpha_3 \left(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2\right) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 =$$
$$= \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 dm_3 =: \widetilde{\vec{M}}_3 (t) \equiv \vec{M}_3 (t), \quad (3.1.20)$$

а также соотношения (3.1.7)-(3.1.8).

Отметим, что здесь в (3.1.10)–(3.1.20), в отличие от соответствующих формул (1.2.14)–(1.2.16), появляется лишь один оператор ортогонального проектирования $P_{G,2}$; поэтому уравнения (3.1.18)–(3.1.20) формально получаются из (1.2.14)–(1.2.16), если там заменить $P_{G,1}$ и $P_{G,3}$ на единичные операторы.

Будем считать, что в задаче (3.1.16)–(3.1.20), (3.1.7)-(3.1.8) искомыми функциями t являются следующие вектор-столбцы, составленные из вектор-функций:

$$\vec{\omega} := (\vec{\omega}_1; \vec{\omega}_2; \vec{\omega}_3)^T \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3, \ \vec{\delta} := (\vec{\delta}_1; \vec{\delta}_2; \vec{\delta}_3)^T \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3,$$
$$\vec{u} := (\vec{u}_1; \vec{u}_3)^T \in \left(\mathcal{D}\left(A_1\right) \oplus \mathcal{D}\left(A_3\right)\right) \subset \left(\vec{J}_0^1\left(\Omega_1\right) \oplus \vec{J}_0^1\left(\Omega_3\right)\right) =$$
$$= \left(\mathcal{D}\left(A_1^{1/2}\right) \oplus \mathcal{D}\left(A_3^{1/2}\right)\right) \subset \left(\vec{J}_0\left(\Omega_1\right) \oplus \vec{J}_0\left(\Omega_3\right)\right),$$

где символ $(\cdot;\cdot)^T$ по-прежнему означает транспонирование (строки).

Введем, далее, следующие операторные матрицы и их коэффициенты, отвечающие совокупности отдельных наборов слагаемых в (3.1.16)–(3.1.20):

$$C = (C_{jk})_{j,k=1}^2; \ C_{11}\vec{u} := (\rho_1 \vec{u}_1; \ \rho_3 \vec{u}_3)^T; \quad (3.1.21)$$

$$C_{12}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,1}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1\right) \\ \rho_3 P_{0,3}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) \end{pmatrix}; \quad (3.1.22)$$

$$C_{21}\vec{u} := \begin{pmatrix} \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \left(\vec{r}_1 \times \vec{u}_1\right) d\Omega_1 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \left(\vec{h}_1 \times \vec{u}_3\right) d\Omega_3 \\ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \left(\vec{h}_2 \times \vec{u}_3\right) d\Omega_3 \\ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \left(\vec{r}_3 \times \vec{u}_3\right) d\Omega_3 \end{pmatrix}; \quad (3.1.23)$$

$$C_{22}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \\ + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left[P_{G,2}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2\right)\right] d\Omega_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) dm_3 \\ \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \\ + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left[P_{G,2}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2\right)\right] d\Omega_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) dm_3 \\ \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) dm_3 \end{pmatrix}; \quad (3.1.24)$$

$$A_{11} := \mathrm{diag}(\mu_1 A_1; \mu_3 A_3), \quad A_{22} := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}; \quad (3.1.25)$$

$$B_{22} := \mathrm{diag}(m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1; m_2 l_2 + m_3 h_2; m_3 l_3). \quad (3.1.26)$$

Тогда в этих обозначениях задачу (3.1.16)–(3.1.20), (3.1.7)-(3.1.8) можно переписать в виде следующей системы дифференциально-операторных уравнений и начальных условий:

$$C_{11}\frac{d\vec{u}}{dt}+C_{12}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+A_{11}\vec{u}=\vec{f}, \tag{3.1.27}$$

$$C_{21}\frac{d\vec{u}}{dt}+C_{22}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+A_{22}\vec{\omega}+gB_{22}P_2\vec{\delta}=\vec{M}, \tag{3.1.28}$$

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\ \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\ k=\overline{1,3}, \tag{3.1.29}$$

$$\vec{u}(0)=\vec{u}^0,\quad \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,\quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0, \tag{3.1.30}$$

где

$$\vec{f}:=\left(\rho_1P_{0,1}\vec{f}_1;\ \rho_3P_{0,3}\vec{f}_3\right)^T,$$

$$\vec{M}:=\begin{pmatrix} \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1dm_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+ \\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\vec{f}_3dm_3 \\ \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3dm_3 \\ \int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3dm_3 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем, как и в главах 1 и 2, систему (3.1.27)–(3.1.30) к более симметричной форме, введя еще одну искомую функцию

$$\vec{\eta}(t):=-ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec{\delta}\in\left(\mathbb{C}^2\right)^3. \tag{3.1.31}$$

Тогда вместо (3.1.27)–(3.1.30) приходим к задаче Коши вида

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\\ \vec{\eta}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}P_2B_{22}^{1/2} \\ 0 & ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\\ \vec{\eta}\end{pmatrix}=\left(\vec{f};\vec{M};\vec{0}\right)^T,$$
$$\vec{u}(0)=\vec{u}^0,\quad \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,\quad \vec{\eta}(0)=\vec{\eta}^0:=-ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec{\delta}^0, \tag{3.1.32}$$

а также к тривиальной проблеме

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\ \vec{\delta}_k^3(0)=\vec{\delta}_k^{3,0},\ k=\overline{1,3}. \tag{3.1.33}$$

3.1.3. Теорема о корректной разрешимости. Задача (3.1.27)–(3.1.30) имеет в точности тот же вид (2.2.19)–(2.2.22), к которому в главе 2 была приведена исследуемая проблема в случае, когда во всех полостях Ω_k были вязкие жидкости. Поэтому после замены (3.1.31) (см. также (2.2.23)) возникает проблема (3.1.32)-(3.1.33), совпадающая с задачей (2.2.24)–(2.2.28).

Здесь, однако, отличие от (2.2.19)–(2.2.22) состоит в том, что основное гильбертово пространство, в котором исследуется задача (3.1.32)-(3.1.33), есть пространство

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}\oplus\left(\mathbb{C}^2\right)^3,\ \mathcal{H}:=\left(\vec{J}_0\left(\Omega_1\right)\oplus\vec{J}_0\left(\Omega_3\right)\right)\oplus\left(\mathbb{C}^3\right)^3$$

с соответствующей нормой.

Убедимся, что общие свойства операторных коэффициентов в уравнении (3.1.32) те же, что и в уравнении (2.2.24).

Лемма 3.1.1. *Операторная матрица $C=(C_{jk})_{j,k=1}^2$, действующая в пространстве $\mathcal{H}$ с нормой*

$$\|(\vec{u};\,\vec{\omega})^T\|_{\mathcal{H}}^2:=\int\limits_{\Omega_1}|\vec{u}_1|^2d\Omega_1+\int\limits_{\Omega_3}|\vec{u}_3|^2d\Omega_3+\sum_{k=1}^3|\vec{\omega}_k|^2,$$

является ограниченным положительно определенным оператором.

Доказательство. Оно проводится по плану доказательства леммы 2.2.2 и основано на соотношении

$$\left(C\begin{pmatrix}\vec u\\ \vec\omega\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec u\\ \vec\omega\end{pmatrix}\right)_{\mathcal H}=\int\limits_{G_1}|\vec\omega_1\times\vec r_1+\vec u_1|^2dm_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec\omega_1\times\vec h_1+\vec\omega_2\times\vec r_2|^2d\Omega_{02}+$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|P_{G,2}(\vec\omega_1\times\vec h_1+\vec\omega_2\times\vec r_2)|^2d\Omega_2+\int\limits_{G_3}|\vec\omega_1\times\vec h_1+\vec\omega_2\times\vec h_2+\vec\omega_3\times\vec r_3+\vec u_3|^2dm_3.$$

□

Лемма 3.1.2. *Операторная матрица*

$$\mathcal A:=\begin{pmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&ig^{1/2}P_2B_{22}^{1/2}\\0&ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2&0\end{pmatrix},\qquad \mathcal D(\mathcal A):=\mathcal D(A_{11})\oplus\left(\mathbb C^3\right)^3\oplus\left(\mathbb C^2\right)^3,$$

является максимальным аккретивным оператором, действующим в пространстве $\widetilde{\mathcal H}$.

Доказательство. Оно повторяет схему доказательства леммы 2.2.4. □

Из лемм 3.1.1 и 3.1.2 (а также с использованием алгоритмов доказательств теорем 2.2.1 и 2.2.2) для задачи (3.1.1)–(3.1.8) устанавливается следующий факт.

Теорема 3.1.1. *Пусть в задаче* (3.1.1)–(3.1.8) *выполнены условия*

$$\vec u_1^0\in\mathcal D(A_1)\subset\vec J_0^1(\Omega_1),\quad \vec u_2^0\in\vec J_0(\Omega_2),\quad \vec u_3^0\in\mathcal D(A_3)\subset\vec J_0^1(\Omega_3),\quad \vec f_k(t,x)\in C^\alpha\left([0,T];\quad \vec L_2(G_k)\right),$$

$$0<\alpha\leqslant 1,\quad k=\overline{1,3},\quad \vec\omega_k^0\in\mathbb C^3,\quad \vec\delta_k^0\in\mathbb C^3,\quad k=\overline{1,3},$$

где $\vec L_2(G_k)$ — *гильбертово пространство с нормой* (2.2.42). *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$, *т. е. существуют функции* $\vec u_k(t,x)\in\vec L_2(\Omega_k)$, *определяемые естественным образом по данным задачи, такие что*

$$\vec u_1\in C\left([0,T];\ \mathcal D(A_1)\right)\cap C^1\left([0,T];\ \vec J_0(\Omega_1)\right),$$

$$\vec u_3\in C\left([0,T];\ \mathcal D(A_3)\right)\cap C^1\left([0,T];\ \vec J_0(\Omega_3)\right),$$

$$\vec u_2\in C^1\left([0,T];\ \vec J_0(\Omega_2)\right),$$

а также функции

$$\nabla p_k(t,x)\in C\left([0,T];\ G(\Omega_k)\right),\ k=\overline{1,3},$$

и функции

$$\vec\omega_k(t)\in C^1\left([0,T];\ \mathbb C^3\right),\ \vec\delta_k(t)\in C^2\left([0,T];\ \mathbb C^3\right),\ k=\overline{1,3},$$

такие что в уравнениях (3.1.1)–(3.1.7) *все слагаемые являются непрерывными функциями* t *со значениями в соответствующих пространствах и выполнены начальные условия* (3.1.8).

Кроме того, для этого сильного решения справедлив закон баланса полной энергии в форме (3.1.9) *и в соответствующей интегральной форме.*

3.1.4. Нормальные колебания гидромеханической системы. Рассмотрим нормальные колебания исследуемой гидромеханической системы, т. е. такие решения однородной задачи (3.1.27)–(3.1.29), которые зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$. Тогда, как и в пункте 2.3.1, приходим для амплитудных элементов к проблемам вида (2.3.6), (2.3.3), т. е. к задаче

$$\begin{pmatrix}\tilde A_{11}&\tilde A_{12}\\\tilde A_{21}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec w\\\vec\eta\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}C&0\\0&-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec w\\\vec\eta\end{pmatrix},\ \vec w:=(\vec u;\ P_2\vec\omega;\ \vec\omega^3)^T,\tag{3.1.34}$$

$$\vec\eta=-ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec\delta,\ -\lambda\vec\delta=\vec\omega,\ \vec u=(\vec u_1;\ \vec u_3)^T.\tag{3.1.35}$$

Здесь теперь $\vec u$ имеет новый смысл, коэффициенты $\widetilde A_{jk}$ и матричный оператор C выражаются по-прежнему формулами (2.3.7)–(2.3.9), однако коэффициенты C_{jk} оператора C задаются формулами (3.1.21)–(3.1.24).

Рассмотрим сначала некоторые простейшие свойства решений задачи (3.1.34)-(3.1.35), связанные с исследованием состояния равновесия динамической системы. Отметим предварительно, что операторная матрица

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.36}$$

здесь обладает свойствами, описанными в лемме 2.3.1: она на области определения

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(A_{11}) \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^2, \ \mathcal{D}(A_{11}) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_3),$$

является неограниченным самосопряженным и ограниченным снизу оператором. Однако в силу того, что не во всех шарнирах учитывается сила трения, ядро оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ нетривиально, так как нетривиальным в этом случае будет ядро оператора A_{22} (см. (2.2.16), (1.2.30) и (1.2.33)).

Лемма 3.1.3. *Если выполнено условие*

$$\ker A_{22} \neq \{\vec{0}\}, \tag{3.1.37}$$

то оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеет ядро

$$\ker \widetilde{\mathcal{A}} = \left\{ \left(\vec{0};\, \vec{0};\, \vec{\omega}^{\,3,0};\, \vec{0}\right)^T : \ \forall \vec{\omega}^{\,3,0} \in \ker A_{22} \subset \mathbb{C}^3, \ \vec{\omega}^{\,3,0} = \left(\vec{\omega}_1^{\,3,0};\, \vec{\omega}_2^{\,3,0};\, \vec{\omega}_3^{\,3,0}\right)^T \right\},$$

отвечающее собственному подпространству этого оператора для нулевого собственного значения.

Доказательство. Уравнение $\widetilde{\mathcal{A}}(\vec{w};\, \vec{\eta})^T = \vec{0}$ в силу определений (2.3.5)–(2.3.8) элементов оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ приводит к соотношениям

$$A_{11}\vec{u} = \vec{0}, \quad (P_2 A_{22} P_2)\, P_2\vec{\omega} + g^{1/2} B_{22}^{1/2} \vec{\eta} = \vec{0}, \quad P^3 A_{22} P^3 \vec{\omega}^{\,3} = \vec{0}, \quad -g B_{22}^{1/2} P_2 \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Так как $A_{11} \gg 0$ (см. (3.1.25)), то $\vec{u} = \vec{0}$. Далее, так как $B_{22}^{1/2} \gg 0$ (см. (3.1.26)), то $P_2\vec{\omega} = \vec{0}$ и потому из второго уравнения $B_{22}^{1/2}\vec{\eta} = \vec{0}$ и $\vec{\eta} = \vec{0}$. Наконец, из третьего уравнения имеем $P^3 A_{22} P^3 \vec{\omega}^{\,3} = A_{22}\vec{\omega}^{\,3} = \vec{0}$, т. е. $\vec{\omega}^{\,3} =: \vec{\omega}^{\,3,0} \in \ker A_{22} \neq \{0\}$, и лемма доказана. □

Рассмотрим параллельно со спектральной задачей (3.1.34)-(3.1.35) порождающую ее спектральную задачу, следующую непосредственно из однородной системы уравнений (3.1.27)–(3.1.29):

$$L(\lambda)\vec{v} := \left\{ A_{11}\vec{u} - \lambda(C_{11}\vec{u} + C_{12}\vec{\omega});\ A_{22}\vec{\omega} - \lambda(C_{21}\vec{u} + C_{22}\vec{\omega}) + g B_{22} P_2 \vec{\delta};\ \vec{\omega} - \lambda\vec{\delta} \right\} = \vec{0}, \quad \vec{v} := (\vec{u};\ \vec{\omega};\ \vec{\delta})^T. \tag{3.1.38}$$

Лемма 3.1.4. *Число $\lambda = \lambda_0 = 0$ является собственным значением задачи* (3.1.38). *Его собственная кратность равна трем, а при условии* (3.1.37) *его алгебраическая кратность не более шести; при этом каждый собственный элемент имеет ровно один присоединенный.*

Доказательство. Соотношение $L(0)\vec{v}_0 = \vec{0}$ приводит к уравнениям

$$A_{11}\vec{u}_0 = \vec{0}, \ A_{22}\vec{\omega}_0 + g B_{22} P_2 \vec{\delta}_0 = \vec{0}, \ \vec{\omega}_0 = \vec{0}, \tag{3.1.39}$$

откуда следует (с учетом того, что $A_{11} \gg 0$, $B_{22} \gg 0$), что $\vec{u}_0 = \vec{0}$, $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$, $P_2\vec{\delta}_0 = \vec{0}$, и $\vec{\delta}_0 = P^3\vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3$ — произвольный элемент. Поэтому собственный элемент $\vec{v}_0$ имеет вид

$$\vec{v}_0 := \left(\vec{u}_0;\, \vec{\omega}_0;\, \vec{\delta}_0\right)^T = \left(\vec{0};\, \vec{0};\, \vec{\delta}_0^3\right)^T \quad \forall\, \vec{\delta}_0^3 \in \mathbb{C}^3. \tag{3.1.40}$$

Уравнение $L(0)\vec{v}_1 + L'(0)\vec{v}_0 = \vec{0}$ для первого присоединенного элемента дает соотношения (с учетом (3.1.39))

$$A_{11}\vec{u}_1 = \vec{0}, \quad A_{22}\vec{\omega}_1 + g B_{22} P_2 \vec{\delta}_1 = \vec{0}, \quad \vec{\omega}_1 + \vec{\delta}_0 = \vec{0}, \tag{3.1.41}$$

откуда получаем, что

$$\vec{u}_1 = \vec{0}, \quad \vec{\omega}_1 = -\vec{\delta}_0 = -\vec{\delta}_0^3 \in \ker A_{22} \neq \vec{0}, \quad P_2\vec{\delta}_1 = \vec{0} \quad \forall \vec{\delta}_1^3 \in \mathbb{C}^3.$$

При выводе здесь также было учтено, исходя из определений ортопроекторов P_2 и P^3, что $A_{22}\vec{\delta}_0^3 \perp B_{22} P_2 \vec{\delta}_1$ и потому каждое из слагаемых во втором уравнении (3.1.41) равно нулю.

Так как первый присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\vec{\delta}_1^3 = \vec{0}$. Тогда

$$\vec{v}_1 := \left(\vec{u}_1;\, \vec{\omega}_1;\, \vec{\delta}_1\right)^T = \left(\vec{0}; -\vec{\delta}_0^3;\, \vec{0}\right)^T. \tag{3.1.42}$$

Убедимся теперь, что задача (3.1.38) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ не имеет второго присоединенного элемента.
В самом деле, уравнение $L(0)\vec{v}_2 + L'(0)\vec{v}_1 + L''(0)\vec{v}_0/2! = \vec{0}$ приводит с учетом (3.1.40), (3.1.42) к соотношениям

$$A_{11}\vec{u}_2 - C_{12}\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad A_{22}\vec{\omega}_2 + gB_{22}P_2\vec{\delta}_2 - C_{22}\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad \vec{\omega}_2 + \vec{\delta}_1 = \vec{0}. \tag{3.1.43}$$

Поэтому $\vec{\omega}_2 = -\vec{\delta}_1 = -\vec{\delta}_1^0 = \vec{0}$. Тогда второе уравнение (3.1.43) принимает вид

$$gB_{22}P_2\vec{\delta}_2 - C_{22}\vec{\omega}_1 = \vec{0}.$$

Отсюда и из соотношения $P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}$ (см. (3.1.42)) получаем, что $(C_{22}\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_1) = 0$. Поскольку по лемме 3.1.1 операторная матрица $C \gg 0$, то и ее элемент $C_{22} \gg 0$, и из последнего соотношения приходим к выводу, что $\vec{\omega}_1 = -\vec{\delta}_0^3 = \vec{0}$. Возникло противоречие с тем, что элемент $\vec{v}_0$ из (3.1.40) — собственный для задачи (3.1.38). □

Следствием леммы 3.1.4 является такое утверждение.

Лемма 3.1.5. *Если выполнено условие* (3.1.37)*, то однородная задача* (3.1.27)–(3.1.29) *имеет частные решения вида*

$$\vec{u}(t) \equiv \vec{0}, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_1^3, \quad \vec{\delta}(t) = \vec{\delta}_0^3 + t\vec{\omega}_1^3 \quad \forall\, \vec{\omega}_1^3 \in \ker A_{22},\ \forall\, \vec{\delta}_0^3. \tag{3.1.44}$$

Доказательство. Оно основано на подстановке функции (3.1.44) в систему уравнений

$$C_{11}\frac{d\vec{u}}{dt} + C_{12}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + A_{11}\vec{u} = \vec{0}, \quad C_{21}\frac{d\vec{u}}{dt} + C_{22}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + A_{22}\vec{\omega} + gB_{22}P_2\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \frac{d}{dt}\vec{\delta} = \vec{\omega},$$

и проверке того, что $\vec{v}_0 = \left(\vec{0};\, \vec{0};\, \vec{\delta}_0^3\right)^T$ — произвольный собственный элемент задачи (3.1.38), отвечающий собственному значению $\lambda_0 = 0$, а $\vec{v}_1 := \left(\vec{0};\, \vec{\omega}_1^3;\, \vec{0}\right)^T$ — первый присоединенный элемент, отвечающий собственному элементу $\left(\vec{0};\, \vec{0}; -\vec{\omega}_1^3\right)^T$. □

Из леммы 3.1.5 можно сделать следующий физический вывод: решениям вида (3.1.44) отвечают такие малые движения динамической системы, составленной из сочлененных гиростатов, которым соответствует поворот в начальный момент времени на произвольный угол $\vec{\delta}_0^3 = \left(\vec{\delta}_{01}^3;\, \vec{\delta}_{02}^3;\, \vec{\delta}_{03}^3\right)^T$ вдоль вертикальной оси и медленное вращение системы с угловой скоростью $\vec{\omega}_1^3 \in \ker A_{22} \neq \{0\}$.

Рассмотрим, опираясь на этот вывод, варианты, которые возможны в системе трех сочлененных гиростатов, если трение хотя бы в одном из шарниров отсутствует. При этом воспользуемся формулой (1.2.33) для квадратичной формы оператора A_{22}:

$$(A_{22}\vec{\omega}, \vec{\omega})_{(\mathbb{C}^3)^3} = \alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3|\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2|^2.$$

1^0. Пусть выполнены условия

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0, \tag{3.1.45}$$

т. е. в первом шарнире трение пренебрежимо мало. Тогда

$$\vec{\omega}^{\,3} = \left(\vec{\omega}_1^3;\, \vec{\omega}_2^3;\, \vec{\omega}_3^3\right)^T \in \ker A_{22} \iff \vec{\omega}_1^3 = \vec{\omega}_2^3 = \vec{\omega}_3^3,$$

и вся система гиростатов вращается вдоль вертикальной оси как одно целое с произвольной угловой скоростью $\vec{\omega}_1^3$.

2^0. Если выполнены условия

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 > 0,$$

то

$$\vec{\omega}^{\,3} \in \ker A_{22} \iff \vec{\omega}_1^3 = \vec{0},\ \vec{\omega}_2^3 = \vec{\omega}_3^3,$$

т. е. первый гиростат неподвижен, а второй и третий вращаются вокруг вертикальной оси как одно целое с угловой скоростью $\vec{\omega}_2^3$.

3^0. Если

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 = 0,$$

то

$$\vec{\omega}^{\,3} \in \ker A_{22} \iff \vec{\omega}_1^3 = \vec{0},\ \vec{\omega}_2^3 = \vec{0},\ \forall\,\vec{\omega}_3^3 \in \mathbb{C},$$

тогда первый и второй гиростаты неподвижны, а третий вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_3^3$.

4^0. Пусть теперь

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 > 0,$$

тогда

$$\vec{\omega}^{\,3} \in \ker A_{22} \iff \forall\,\vec{\omega}_1^3,\ \forall\,\vec{\omega}_2^3 = \vec{\omega}_3^3.$$

В этом случае первый гиростат вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_1^3$, а второй и третий как единое целое — с угловой скоростью $\vec{\omega}_2^3$.

5^0. Если

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

тогда

$$\vec{\omega}^{\,3} \in \ker A_{22} \iff \vec{\omega}_1^3 = \vec{0},\ \forall\,\vec{\omega}_2^3,\ \forall\,\vec{\omega}_3^3,$$

т. е. первый гиростат неподвижен, а второй и третий вращаются со своими произвольными скоростями $\vec{\omega}_2^3$ и $\vec{\omega}_3^3$.

6^0. Если

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 = 0,$$

то

$$\vec{\omega}^{\,3} \in \ker A_{22} \iff \forall\,\vec{\omega}_1^3 = \vec{\omega}_2^3,\ \forall\,\vec{\omega}_3^3,$$

т. е. два первых гиростата вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}_1^3$, а третий — со скоростью $\vec{\omega}_3^3$.

7^0. Наконец, если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

т. е. трение в подшипниках не учитывается, то

$$\vec{\omega}^{\,3} \in \ker A_{22} \iff \forall\,\vec{\omega}_1^3,\ \forall\,\vec{\omega}_2^3,\ \forall\,\vec{\omega}_3^3, \tag{3.1.46}$$

при этом каждый гиростат вращается со своей произвольной скоростью $\vec{\omega}_k^3$, $k = \overline{1,3}$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, имеет ли задача (3.1.34)-(3.1.35) ненулевые собственные значения. Отметим, что согласно лемме 3.1.3 в этом случае оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ из (3.1.36) не имеет обратного и потому для задачи (3.1.34)-(3.1.35) нельзя непосредственно повторить те преобразования, которые в пункте 2.3.1 были осуществлены для получения задачи на собственные значения компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора (см. (2.3.14)–(2.3.16)). Тем не менее, общий подход, связанный с теорией операторов в пространстве с индефинитной метрикой, здесь тоже может быть применен.

Осуществим в (3.1.34)-(3.1.35) замену искомого элемента согласно (2.3.13), т. е.

$$C^{1/2}\vec{w} = \vec{z}.$$

Тогда вместо (3.1.34) приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} & C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21}C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{3.1.47}$$

где операторная матрица слева в силу условия (3.1.37) необратима.

Введем теперь в (3.1.47) новый спектральный параметр μ по формуле

$$\lambda = \mu - a,\ a > 0.$$

Такая замена приводит к сдвигу спектра на величину $a > 0$ и не изменяет собственных и присоединенных (корневых) элементов задачи (3.1.47).

Возникает спектральная проблема

$$\begin{pmatrix} C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 & C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21}C^{-1/2} & -aI_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{3.1.48}$$

в которой теперь операторная матрица слева является обратимым оператором.

Лемма 3.1.6. *Оператор*

$$\mathcal{A}_a := \begin{pmatrix} C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 & C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21}C^{-1/2} & -aI_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_a^*$$

имеет компактный обратный самосопряженный оператор вида

$$\mathcal{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} Q_a^{-1} & a^{-1}Q_a^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ a^{-1}\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}Q_a^{-1} & -R_a^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.1.49}$$

$$Q_a := C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 + a^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12}\widetilde{A}_{21}C^{-1/2} \gg 0,$$

$$R_a := aI_2 + \widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \gg 0.$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)\vec{z} + C^{-1/2}\widetilde{A}_{12}\vec{\eta} = \vec{z}_1, \tag{3.1.50}$$

$$\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\vec{z} - a\vec{\eta} = \vec{\eta}_1. \tag{3.1.51}$$

Тогда

$$\vec{z} = \left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)^{-1}\left(\vec{z}_1 - C^{-1/2}\widetilde{A}_{12}\vec{\eta}\right),$$

$$\vec{\eta} = a^{-1}\left(\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\vec{z} - \vec{\eta}_1\right).$$

Подставляя выражение для $\vec{\eta}$ в (3.1.50), а выражение для $\vec{z}$ в (3.1.51), приходим к формулам

$$\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 + a^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12}\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\right)\vec{z} =: Q_a\vec{z} = \vec{z}_1 + a^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12}\vec{\eta}_1,$$

$$-\left(aI_2 + \widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12}\right)\vec{\eta} =: -R_a\vec{\eta} =$$

$$= \vec{\eta}_1 - \widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)^{-1}\vec{z}_1,$$

откуда следует, что

$$\mathcal{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} Q_a^{-1} & a^{-1}Q_a^{-1}C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ R_a^{-1}\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)^{-1} & -R_a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Однако можно проверить непосредственно, что

$$R_a^{-1}\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}\left(C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1\right)^{-1} = a^{-1}\widetilde{A}_{21}C^{-1/2}Q_a^{-1},$$

откуда и следует формула (3.1.49).

Заметим теперь, что оператор $Q_a = Q_a^* \gg 0$ имеет компактный обратный оператор. В самом деле, $C^{-1/2}$ — ограниченный положительно определенный оператор (лемма 3.1.1), а $\widetilde{A}_{11}$ является (см. (2.3.7)) неограниченным самосопряженным оператором, причем $\widetilde{A}_{11} + aC \gg 0$ и потому $C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 \gg 0$ и имеет компактный обратный. Отсюда следует, в силу конечномерности и ограниченности остальных операторов в (3.1.49), что $\mathcal{A}_a^{-1} = \left(\mathcal{A}_a^{-1}\right)^*$ — компактный оператор.

□

Введем теперь в (3.1.48) оператор канонической симметрии $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I_1; -I_2)$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$; тогда коротко задачу можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_a\vec{v} = \mu\mathcal{J}\vec{v}, \quad \vec{v} := (\vec{z}; \vec{\eta})^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a),$$

а от нее перейти к задаче

$$\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}\vec{y} = \nu\vec{y},\ \vec{y} := \mathcal{A}_a\vec{v},\ \nu = \mu^{-1} = (\lambda + a)^{-1}. \tag{3.1.52}$$

Это — задача на собственные значения для компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора, действующего в пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \left(\vec{J}_0(\Omega_1)\right) \oplus \left(\vec{J}_0(\Omega_3)\right) \oplus \left(\mathbb{C}^3\right)^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3. \tag{3.1.53}$$

Так как $\vec{\eta} \in \left(\mathbb{C}^2\right)^3$, то, снабженное индефинитной метрикой (см. (2.3.17))

$$[\vec{y}_1, \vec{y}_2] := (\mathcal{J}\vec{y}_1, \vec{y}_2)_{\widetilde{\mathcal{H}}}, \ \forall\, \vec{y}_1,\, \vec{y}_2 \in \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{3.1.54}$$

это пространство превращается, как и в главе 2 (см. пункты 2.3.1, 2.3.3), в пространство Понтрягина Π_6. Поэтому к задаче (3.1.52) можно применить тот же подход, который уже приведен в пункте 2.3.3 для задачи (2.3.16), с которой задача (3.1.52) формально совпадает.

Не останавливаясь на доказательстве формулируемых ниже утверждений (так как они идентичны тем, которые были в пунктах 2.3.2, 2.3.3), приведем лишь свойства решений задач (3.1.47), (3.1.48), (3.1.52).

1^0. Спектр задачи (3.1.47) является дискретным и расположен в замкнутой правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ симметрично относительно вещественной оси.

2^0. Задача (3.1.47) имеет не более 6 пар комплексно сопряженных собственных значений, а также тех вещественных (положительных) собственных значений, которым, кроме собственных, отвечают также присоединенные элементы.

3^0. Асимптотическое поведение ветви положительных собственных значений $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ таково:

$$\lambda_j^+ = \left[\frac{1}{3\pi^2}\left(|\Omega_1|\nu_1^{-3/2} + |\Omega_3|\nu_3^{-3/2}\right)\right]^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \tag{3.1.55}$$

4^0. Пространство $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_6$ со скалярным произведением (3.1.54) разбивается в $\mathcal{J}$-ортогональную сумму двух подпространств, $\Pi_6 = \Pi_+[+]\Pi_-$, $\mathrm{dim}\Pi_- \leqslant 12$, инвариантных для оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}$ (см. (3.1.52)); в подпространстве Π_+ существует $\mathcal{J}$-ортонормированный базис $\{\vec{y}_j^+\}_{j=1}^\infty \subset \Pi_+$, составленный из собственных элементов задачи (3.1.52), отвечающих положительным собственным значениям $\{\nu_j^+\}_{j=1}^\infty$, $\nu_j^+ = 1/(\lambda_j^+ + a)$, $\nu_1^+ \geqslant \nu_2^+ \geqslant \cdots$, $\nu_j^+ \to +0$ $(j\to\infty)$; вся совокупность собственных и присоединенных (корневых) элементов задачи (3.1.52) образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в пространстве Понтрягина $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}}$; если задача (3.1.52) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов, то собственные элементы этой задачи образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис во всем пространстве $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}}$.

Что касается физических выводов, которые можно сделать после качественного исследования изучаемой в данном разделе задачи, то они похожи на общие выводы пункта 2.3.4, относящиеся к случаю, когда все жидкости вязкие и трение во всех шарнирах учитывается. Отличием здесь является лишь то, что состоянию равновесия системы отвечают не только повороты гиростатов на произвольный угол, но и совместные движения гиростатов, описанных выше (см. свойства 1^0–7^0 и отвечающие им формулы (3.1.45)-(3.1.46)).

3.2. Вторая проблема

В этом разделе рассмотрен случай, в определенном смысле противоположный тому, который изучен в пункте 3.1: здесь первый и третий гиростат заполнены идеальной жидкостью, а второй — вязкой.

Поскольку исследование этой проблемы проводится по той же схеме, что и в пункте 3.1, то все утверждения будут даны без выводов.

3.2.1. Постановка задачи. Уравнения движения системы из трех сочлененных гиростатов — это выписанные выше уравнения (3.1.1)–(3.1.3). Далее, уравнения движения жидкостей в областях Ω_k здесь имеют вид

$$\rho_1\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right) = -\nabla p_1 + \rho_1\vec{f}_1, \quad \mathrm{div}\,\vec{u}_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1)\,,\ \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = 0 \ \ (\text{на } S_1 = \partial\Omega_1)\,; \tag{3.2.1}$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right) = -\nabla p_2 + \mu_2\Delta\vec{u}_2 + \rho_2\vec{f}_2,$$

$$\mathrm{div}\,\vec{u}_2 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_2)\,,\ \vec{u}_2 = \vec{0} \ \ (\text{на } S_2)\,; \tag{3.2.2}$$

$$\rho_3\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right) = -\nabla p_3 + \rho_3\vec{f}_3,$$

$$\operatorname{div}\vec{u}_3 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_3)\,, \ \ \vec{u}_3\cdot\vec{n}_3 = 0 \ \ (\text{на } S_3)\,. \tag{3.2.3}$$

Кинематические связи и начальные условия имеют по-прежнему вид (3.1.7)-(3.1.8). Таким образом, далее исследуется начально-краевая задача (3.1.1)–(3.1.3), (3.2.1)–(3.2.3), (3.1.7)-(3.1.8).

Для классического решения этой задачи выполнен закон баланса полной энергии в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2+\\
&\qquad+\int\limits_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\Bigg\}+\\
&\quad+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Big\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Big\}=\\
&\quad=-\Big\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2+\mu_2\int\limits_{\Omega_2}|\operatorname{rot}\vec{u}_2|^2d\Omega_2\Big\}+\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_kd\Omega_k.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

3.2.2. Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Этот переход осуществляется точно так же, как в пункте 3.1: уравнения (3.2.1)–(3.2.3) проектируются на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_k)$ и $\vec{G}(\Omega_k)$, вводится оператор Стокса A_2 (для области Ω_2 с вязкой жидкостью), соответственно видоизменяются уравнения движения гиростатов, наконец, остается лишь одно уравнение движения жидкости — в области Ω_2, где жидкость вязкая. В итоге снова возникает система уравнений (3.1.27)–(3.1.30):

$$C_{11}\frac{d\vec{u}}{dt}+C_{12}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+A_{11}\vec{u}=\vec{f},$$

$$C_{21}\frac{d\vec{u}}{dt}+C_{22}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+A_{22}\vec{\omega}+gB_{22}P_2\vec{\delta}=\vec{M},$$

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\ \ \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^{\,3}=\vec{\omega}_k^{\,3},\ \ k=\overline{1,3},$$

$$\vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^{\,0},\ \ \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^{\,0},\ \ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ \ x\in\Omega_2.$$

Здесь

$$\vec{u}:=\vec{u}_2,\ \ \vec{\omega}:=(\vec{\omega}_1;\,\vec{\omega}_2;\,\vec{\omega}_3)^T,\ \ \vec{\delta}:=\left(\vec{\delta}_1;\,\vec{\delta}_2;\,\vec{\delta}_3\right)^T,$$

$$A_{11}\vec{u}:=\mu_2A_2\vec{u}_2;\ \ B_{22}:=\operatorname{diag}(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1;m_2l_2+m_3h_2;m_3l_3),$$

оператор A_{22} по-прежнему выражается формулой (3.1.25), а операторы C_{jk} вводятся по следующим формулам:

$$C_{11}\vec{u}:=\rho_2\vec{u}_2,\ \ C_{12}\vec{\omega}:=\rho_2P_{0,2}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2\right),$$

$$C_{21}\vec{u}:=\begin{pmatrix}\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\left(\vec{h}_1\times\vec{u}_2\right)d\Omega_2\\ \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\left(\vec{r}_2\times\vec{u}_2\right)d\Omega_2\end{pmatrix},$$

$$C_{22}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)\, d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times P_{G,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)\, d\Omega_1 + \\ + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \\ + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left[P_{G,3}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right)\right] d\Omega_3 \\ \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \\ + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left[P_{G,3}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right)\right] d\Omega_3 \\ \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \\ + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left[P_{G,3}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3\right)\right] d\Omega_3 \end{pmatrix}.$$

Введем, как и выше, новую искомую функцию

$$\vec{\eta}(t) := -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec{\delta} \in \left(\mathbb{C}^2\right)^3;$$

тогда возникает задача Коши (см. (3.1.32), (2.2.24))

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}P_2B_{22}^{1/2} \\ 0 & ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{M} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.5}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^{\,0},\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{\,0},\ \vec{\eta}(0) = \vec{\eta}^{\,0} := -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec{\delta}^0,$$

а также тривиальная проблема

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta} = P_2\vec{\omega},\ \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3,\ k = \overline{1,3}. \tag{3.2.6}$$

Отметим еще, что

$$\vec{f} := \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2,$$

$$\vec{M} := \begin{pmatrix} \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times \vec{f}_{01} d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times (P_{G,1}\vec{f}_1) d\Omega_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times (P_{G,3}\vec{f}_3) d\Omega_3 \\ \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times (P_{G,3}\vec{f}_3) d\Omega_3 \\ \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times (P_{G,3}\vec{f}_3) d\Omega_3 \end{pmatrix}. \tag{3.2.7}$$

3.2.3. Теорема о сильной разрешимости начально-краевой задачи. Перечислим без доказательства свойства операторных коэффициентов и операторных матриц в задаче (3.2.5)–(3.2.7).

1^0. Операторная матрица $C := (C_{jk})_{j,k=1}^2$, действующая в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \left(\mathbb{C}^3\right)^3$, является ограниченным положительно определенным оператором; ее квадратичная форма такова:

$$\left(C\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |P_{G,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2 d\Omega_1 +$$
$$+ \int\limits_{G_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 dm_2 + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3|^2 d\Omega_{03} +$$
$$+ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} |P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3)|^2 d\Omega_3.$$

2^0. Оператор $A := \mathrm{diag}(A_{11};\ A_{22})$ неотрицателен, $A_{11} \gg 0$, $A_{11}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty\left(\vec{J}_0(\Omega_2)\right)$, $A_{22} \geqslant 0$; если $\ker A_{22} \neq \{\vec{0}\}$, то A необратим.

3^0. Операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2} P_2 B_{22}^{1/2} \\ 0 & ig^{1/2} B_{22}^{1/2} P_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(A_{11}) \oplus \left(\mathbb{C}^3\right)^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3,$$

является максимальным аккретивным оператором, действующим в пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 = \left(\vec{J}_0(\Omega_2)\right) \oplus \left(\mathbb{C}^3\right)^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3. \tag{3.2.8}$$

Эти свойства говорят о том, что к задаче (3.2.5)–(3.2.7) применимы те же рассуждения, которые в пункте 3.1.3 были применены к задаче (3.1.32)-(3.1.33). Поэтому и для задачи (3.2.5)–(3.2.7) имеет место свойство корректной разрешимости. Итогом рассмотрения вопроса о разрешимости исследуемой в данном разделе задачи является следующее утверждение, идентичное теореме 3.1.1.

Теорема 3.2.1. *Пусть в задаче* (3.1.1)–(3.1.3)*,* (3.2.1)–(3.2.3)*,* (3.1.7)-(3.1.8) *выполнены условия*

$$\vec{u}_2^{\,0} \in \mathcal{D}(A_2) \subset \vec{J}_0^{\,1}(\Omega_2),\ \vec{u}_1^{\,0} \in \vec{J}_0(\Omega_1),\ \vec{u}_3^{\,0} \in \vec{J}_0(\Omega_3),$$

$$\vec{\omega}_k^{\,0} \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}_k^{\,0} \in \mathbb{C}^3,\ k = \overline{1,3},$$

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^\alpha\left([0,T];\ \vec{L}_2(G_k)\right),\ 0 < \alpha \leqslant 1,\ k = \overline{1,3}.$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ (*см. по аналогии соответствующие свойства искомых функций в формулировке теоремы* 3.1.1).

Для этого сильного решения выполнен закон баланса полной энергии в форме (3.2.4) *и соответствующей интегральной форме.*

3.2.4. Нормальные колебания. С операторной точки зрения спектральная задача о нормальных колебаниях, порожденная эволюционной задачей (3.2.5)-(3.2.6), ничем не отличается от задачи (3.1.34)-(3.1.35). Различие состоит лишь в том, что в (3.1.34)-(3.1.35) основным пространством было пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ из (3.1.53), а в возникшей сейчас спектральной проблеме — пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ из (3.2.8). Поэтому для задачи о нормальных колебаниях системы из трех гиростатов, из которых первый и третий содержат идеальную жидкость, а второй — вязкую, справедливы общие свойства решений, описанные в пункте 3.1.4. В частности, справедливы утверждения лемм 3.1.3, 3.1.5, свойства 1^0–7^0 (см. (3.1.45)-(3.1.46)), лемма 3.1.6, а также свойства 1^0–4^0, отражающие характер спектра задачи и свойства $\mathcal{J}$-ортогональной базисности системы собственных элементов. Отметим только, что вместо (3.1.55) здесь имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j^+ = \left(\frac{1}{3\pi^2}|\Omega_2|\right)^{-2/3} \nu_2\, j^{2/3}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty),$$

где $\nu_2 = \mu_2/\rho_2 > 0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости из второго гиростата.

Отметим в заключение этого раздела, что аналогичным образом исследуются другие варианты расположения идеальных и вязких жидкостей в гиростатах, а также все задачи о колебаниях системы из n гиростатов, сочлененных посредством сферических шарниров.

3.3. Плоские (двумерные) проблемы

В этом разделе очень кратко будут обсуждены плоские (двумерные) задачи о колебаниях системы из сочлененных гиростатов.

3.3.1. К постановке задачи. Будем считать, что гиростаты имеют малую протяженность в направлении оси O_1x^1 и соединены между собой не сферическими, а цилиндрическими шарнирами, расположенными также в направлении оси O_1x^1. Тогда всю задачу в целом можно считать плоской, а колебания гиростатов происходят в плоскости $O_1x^2x^3$. В частности, $\vec{g} = -g\vec{e}^3$, угловые перемещения гиростатов $\vec{\delta}_k(t)$ теперь равны

$$\vec{\delta}_k(t) = \delta_k^1(t)\vec{e}_k^1, \ \vec{\omega}_k(t) = d\vec{\delta}_k/dt, \ k = \overline{1,n}.$$

Далее, поля скоростей и давлений в областях Ω_k теперь определяются функциями

$$\vec{u}_k = \vec{u}_k(t,x), \quad p_k = p_k(t,x), \quad x = (x_k^2, x_k^3) \in \Omega_k \quad k = \overline{1,n}.$$

Остальные обозначения — те же, что и выше. В частности, считаем, что в состоянии покоя всей системы точки подвеса O_k и центры масс C_k гиростатов расположены на одной вертикальной оси O_1x^3.

Рассматривая малые движения системы сочлененных гиростатов, снова приходим к уравнениям (1.1.1)–(1.1.3), где теперь следует выражения $P_2\vec{\delta}_k$ заменить на $\vec{\delta}_k$, так как векторы $\vec{\delta}_k$ уже расположены в плоскости $O_kx_k^1x_k^2$. В связи с этим во всех задачах, которые здесь возникают, дополнительных кинематических соотношений (см., например, вторые условия (1.1.7)) нет. В остальном общие рассмотрения проблем, исследованных в пространственном случае в главах 1–3, сохраняются и для плоских задач.

3.3.2. Система сочлененных гиростатов, заполненных идеальными жидкостями. Общий подход, изложенный в пунктах 1.2.1, 1.2.2, приводит снова к задаче Коши вида (1.2.17):

$$C\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + A\frac{d\vec{\delta}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \ \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \ \vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0. \tag{3.3.1}$$

Здесь искомая функция

$$\vec{\delta}(t) := \left(\vec{\delta}_1(t); \vec{\delta}_2(t); \vec{\delta}_3(t)\right)^T$$

принимает значения в пространстве $\mathcal{H} := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, матрицы C, A и B обладают свойствами $C > 0$, $A \geqslant 0$ и $B > 0$ (см. конец пункта 1.2.3). Если трение учитывается во всех шарнирах, то $A > 0$.

Для задачи (3.3.1) сохраняется теорема Жуковского (см. теорему 1.2.2), а для потенциалов Жуковского следует теперь находить лишь одну функцию в каждой области Ω_j, именно, потенциал ψ_j для области Ω_j есть решение задачи (см. (1.2.49), (1.2.52))

$$\Delta\psi_j = 0 \quad (\text{в } \Omega_j), \quad \frac{\partial\psi_j}{\partial n} = \left(\vec{e}_j^{\,1} \times \vec{r}_1\right) \cdot \vec{n}_1 \ (\text{на } S_j), \ \int\limits_{S_j} \psi_j dS_j = 0, \ j = \overline{1,3}.$$

Задача (3.3.1) (вместе с условием $d\vec{\delta}/dt = \vec{\omega}$) после введения новой искомой функции $\vec{\eta}(t)$ согласно соотношениям

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} := -iB^{1/2}\vec{\delta}, \quad \vec{\eta}(0) = \vec{0}$$

приводит к задаче Коши вида (1.2.65), где теперь P_2 следует заменить на единичный оператор, считать, что $B_1 = B$, а уравнения рассматривать в пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3.$$

Для возникшей задачи Коши в пространстве $\mathcal{H}$ справедливо утверждение типа теоремы 1.2.4, говорящее о том, что задача имеет единственное решение на произвольном промежутке времени $[0, T]$.

В задаче о нормальных колебаниях возникают следующие эквивалентные проблемы:

$$-\lambda C\vec{\omega} + A\vec{\omega} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathbb{C}^3; \tag{3.3.2}$$

$$\lambda^2 C\vec{\delta} - \lambda A\vec{\delta} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}; \tag{3.3.3}$$

$$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} = \left(C^{1/2}\vec{\omega}; -iB_1^{1/2}\vec{\delta}\right)^T \in \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{3.3.4}$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & iB_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.3.5}$$

Для этих задач сохраняются многие общие свойства спектра, изложенные в пункте 1.3.2, однако здесь число $\lambda = \lambda_0 = 0$ не является собственным значением, если $A > 0$. Каждая из задач (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4)-(3.3.5) имеет 6 собственных значений (для трех гиростатов), расположенных симметрично относительно вещественной оси.

Так как матрица $\mathcal{A}$ из (3.3.5) является $\mathcal{J}$-самосопряженным оператором, $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I_3; -I_3)$, то можно считать, что $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_3 = \mathbb{C}^6$, т. е. возникает конечномерное пространство с индефинитной метрикой. Если коэффициенты трения в шарнирах достаточно велики, то задача (3.3.4) имеет 6 вещественных (положительных) собственных значений. При этом система собственных элементов образует $\mathcal{J}$-ортогональный базис в Π_3. Если трение в шарнирах не учитывается, то задача (3.3.4) имеет 3 пары комплексно сопряженных (чисто мнимых) собственных значений. Наконец, при промежуточных значениях коэффициентов трения в шарнирах могут быть одна либо две пары невещественных собственных значений, а остальные — положительные.

Отметим еще, то если исследуется плоская задача о колебаниях системы из n сочлененных гиростатов, то возникает (конечномерное) пространство Π_n, а общие свойства решений — аналогичные.

3.3.3. Система сочлененных гиростатов, заполненных вязкими жидкостями. Если каждый гиростат заполнен вязкой жидкостью, то при исследовании такой задачи применим тот же подход, который в главе 2 был применен для пространственной задачи. Проводя построения, аналогичные изложенным в пунктах 2.2.1, 2.2.2, приходим к задаче Коши вида (2.2.24)-(2.2.25), т. е.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} \\ 0 & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{M} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.6}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^{\,0},\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^{\,0},\ \vec{\eta}(0) = \vec{\eta}^{\,0} = -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}\vec{\delta}^{\,0},$$

а также к связи

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta} = \vec{\omega},\ \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^{\,0}. \tag{3.3.7}$$

Здесь

$$\vec{u} := (\vec{u}_1;\, \vec{u}_2;\, \vec{u}_3)^T \in \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_2) \oplus \mathcal{D}(A_3) \subset \vec{J}_0^{\,1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0^{\,1}(\Omega_2) \oplus \vec{J}_0^{\,1}(\Omega_3),$$
$$\vec{\omega} := (\vec{\omega}_1;\, \vec{\omega}_2;\, \vec{\omega}_3)^T \in \mathbb{C}^3, \vec{\delta} := \left(\vec{\delta}_1;\, \vec{\delta}_2;\, \vec{\delta}_3\right)^T \in \mathbb{C}^3,$$

$A_{11} := \operatorname{diag}(\mu_k A_k)_{k=1}^3$, A_{22} по-прежнему выражается формулой (2.2.16), а B_{22} — формулой (2.2.18). Кроме того, оператор $C = (C_{jk})_{j,k=1}^3$ положительно определен и ограничен в пространстве

$$\mathcal{H} := \left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3} \vec{J}_0(\Omega_k)\right) \oplus \mathbb{C}^3.$$

Поэтому на основании тех же рассуждений, которые проведены в пункте 2.2.4, устанавливаем, что при условиях

$$\vec{u}^0 = \left(\vec{u}_1^{\,0};\, \vec{u}_2^{\,0};\, \vec{u}_3^{\,0}\right)^T \in \mathcal{D}(A_{11}),\ \vec{\omega}^{\,0} \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}^{\,0} \in \mathbb{C}^3,$$
$$\vec{f}_k(t,x) \in C^{\alpha}\left([0,T]; L_2(G_k)\right),\ 0 < \alpha \leqslant 1,\ k = \overline{1,3},$$

задача (3.3.6)-(3.3.7) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Задача о нормальных колебаниях здесь снова сводится к спектральной проблеме вида (2.3.14), а затем к проблеме (2.3.16), где

$$\vec{z} = C^{1/2}\vec{w},\ \vec{w} = (\vec{u};\, \vec{\omega})^T,\ \widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}^3 = \left(\mathop{\oplus}_{k=1}^{3} \vec{J}_0(\Omega_k)\right) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3,$$

оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным и компактным, а $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I_{\mathcal{H}}; -I_3) = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$.

Для возникшей спектральной задачи число $\lambda = 0$ не является собственным значением, ее спектр дискретный, расположен в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси, причем невещественных собственных значений, а также тех вещественных, которым отвечают и присоединенные элементы, может быть не более 3 пар. Этот последний факт следует из того, что в данном случае возникает пространство с индефинитной метрикой $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_3$.

Асимптотическое поведение ветви собственных значений таково:

$$\lambda_j^+ = \left(\sum_{k=1}^{3} C_{A_k}\nu_k^{-1}\right)^{-1} j\ [1+o(1)] \quad (j\to\infty), \quad C_{A_k}>0, \quad k=\overline{1,3}. \tag{3.3.8}$$

Совокупность собственных элементов $\{y_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающих собственным значениям $\mu_j^+ = 1/\lambda_j^+$ возникшей спектральной задачи, образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_3$, а при достаточно больших коэффициентах трения в шарнирах — и $\mathcal{J}$-ортонормированный базис во всем $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_3$. Все эти выводы получены по аналогии с рассмотрениями, проведенными в пунктах 2.3.2, 2.3.3.

3.3.4. Плоская задача о малых колебаниях частично диссипативной системы из сочлененных гиростатов. Для определенности рассмотрим лишь случай, когда полости Ω_1 и Ω_3 заполнены вязкой жидкостью, а Ω_2 — идеальной. Тогда следует исследовать задачу о нахождении решений уравнений (3.1.1)–(3.1.3), уравнений движения жидкостей (3.1.4)–(3.1.6), кинематического соотношения $d\vec{\delta}/dt = \vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \left(\vec{\omega}_1^1;\, \vec{\omega}_2^1;\, \vec{\omega}_3^1\right)^T$, $\vec{\delta} = \left(\vec{\delta}_1^1;\, \vec{\delta}_2^1;\, \vec{\delta}_3^1\right)^T$, с начальными условиями (3.1.8).

После тех же преобразований, которые для пространственной задачи описаны в пунктах 3.1.1–3.1.3, приходим к эволюционной задаче (3.1.27), (3.1.28), соотношению $d\vec{\delta}/dt = \vec{\omega}$ и начальным условиям (3.1.30). Из нее снова получаем задачу вида (3.1.32) и кинематическое соотношение $d\vec{\delta}/dt = \vec{\omega}$. Здесь задача исследуется в пространстве

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \left(\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_3)\right) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3, \tag{3.3.9}$$

а общие свойства операторных коэффициентов — те же, которые в пространственном случае описаны в леммах 3.1.1, 3.1.2. Отсюда получаем, что и для плоской эволюционной задачи справедлив аналог теоремы 3.1.1 о существовании и единственности ее решений на произвольном промежутке времени $[0,T]$.

Для соответствующей задачи о нормальных колебаниях получаем из (3.1.32), (3.1.33) (с соответствующими упрощениями в плоском случае) спектральную проблему

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} \\ 0 & -ig^{1/2}B_{22}^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{3.3.10}$$

$$\vec{\eta} = -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}\vec{\delta}, \quad \lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}. \tag{3.3.11}$$

Так как здесь $B_{22} \gg 0$, то операторная матрица слева обратима и

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} \\ 0 & -ig^{1/2}B_{22}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ig^{-1/2}B_{22}^{-1/2} \\ 0 & -ig^{-1/2}B_{22}^{-1/2} & -g^{-1}B_{22}^{-1/2}A_{22}B_{22}^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что число $\lambda = \lambda_0 = 0$ не является собственным значением задачи (3.3.10)-(3.3.11). Тогда, проводя те же рассуждения, что и в пункте 3.3.3 для спектральной задачи, порожденной задачей Коши (3.3.6)-(3.3.7), однако теперь применительно к пространству (3.3.9), приходим к общим выводам, полученным в пункте 3.3.3: спектр задачи (3.3.10)-(3.3.11) дискретен, расположен в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, симметричен относительно вещественной оси; невещественных собственных значений, а также тех вещественных, которым отвечают и присоединенные элементы, может быть не более трех пар; асимптотическое поведение ветви положительных собственных значений $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ имеет вид

$$\lambda_j^+ = \left(C_{A_1}\nu_1^{-1} + C_{A_3}\nu_3^{-1}\right)^{-1} j\ [1+o(1)] \quad (j\to\infty),\ C_{A_1}>0,\ C_{A_3}>0;$$

совокупность собственных элементов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_3$ (см. (3.3.9)), а если невещественные собственные значения и присоединенные элементы в задаче (3.3.10)-(3.3.11) отсутствуют, то указанный базис является $\mathcal{J}$-ортонормированным во всем пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_3$.

Отметим в заключение, что аналогичные выводы можно получить и для плоской проблемы, порожденной пространственной задачей из пункта 3.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВЫВОД ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СОЧЛЕНЕННЫХ ГИРОСТАТОВ

А.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему n тел G_k, $k=\overline{1,n}$, последовательно соединенных между собой сферическими шарнирами. Тело G_1 имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k, при $k=\overline{2,n}$ — соответственно точки O_k, соединяющие G_k с G_{k-1}. Каждое тело $G_k \subset \mathbb{R}^3$ имеет полость Ω_k, заполненную несжимаемой жидкостью плотности $\rho_k > 0$, $k=\overline{1,n}$.

Введем обозначение

$$\int\limits_{G_k} (\ldots) dm_k := \int\limits_{G_{0k}} (\ldots)\rho_{0k} d\Omega_k + \int\limits_{\Omega_k} (\ldots)\rho_k d\Omega_k,$$

где $G_{0k} \subset G_k$ — область, занятая твердым телом плотности ρ_{0k}, а Ω_k — область, занятая жидкостью, $k=\overline{1,n}$.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений — силовое поле $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t,x)$, где $\vec{f}(t,x)$ — малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Для описания малых движений системы тел введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанные с телами G_k; единичные векторы вдоль осей $O_kx_k^j$ обозначим через $\vec{e}_k^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,n}$. Кроме того, будем считать, что центр тяжести гиростата G_k находится на оси $O_kx_k^3$, $k=\overline{1,n}$, а в состоянии покоя все точки O_k и C_k расположены на одной вертикальной оси, $k=\overline{1,n}$.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ будем задавать малым вектором углового перемещения $\vec{\delta}_k(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,3}$. Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет, очевидно, равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела — величина $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$.

Предполагается также, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих гиростатов G_k и G_{k-1}, причем коэффициент пропорциональности $\alpha_k > 0$, $k=\overline{1,n}$.

Обозначим: через m_k — массу k-го тела, $\vec{R}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_1 в любую точку тела G_k, $\vec{R}_{0k}$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_1 к полюсу O_k, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k = \overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $k=\overline{1,n-1}$.

В силу рассматриваемой модели системы тел радиус-векторы $\vec{R}_k$, $\vec{R}_{0k}$ и $\vec{r}_k$ связаны зависимостью:

$$\vec{R}_k = \vec{R}_{0k} + \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{k-1}\vec{h}_i + \vec{r}_k.$$

Очевидно, что вектор абсолютной скорости произвольной точки тела G_k равен

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{R}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\vec{h}_i + \vec{r}_k\right) = \sum_{i=1}^{k-1}\vec{\omega}_i \times \vec{h}_i + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k. \qquad (\text{A}.1.1)$$

Абсолютное ускорение $\vec{w}_k = d\vec{v}_k/dt$ из (A.1.1) получаем дифференцированием:

$$\vec{w}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\vec{\omega}_i \times \vec{h}_i + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{h}_i + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{h}_i)\right) + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) + \frac{d\vec{u}_k}{dt} + \vec{\omega}_k \times \vec{u}_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{h}_i + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{h}_i)\right) + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) + 2\vec{\omega}_k \times \vec{u}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt}. \quad \text{(A.1.2)}$$

А.2. Уравнения изменения кинетического момента системы тел

В основе вывода уравнений движения сочлененных гиростатов используется теорема об изменении кинетического момента механической системы. Зафиксируем точку O_k и запишем уравнение изменения кинетического момента относительно этой точки системы гиростатов $G_k, G_{k+1}, \ldots, G_n$ $(k = \overline{1,n})$. Из этих уравнений следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей последующего и предыдущего уравнений, получаем упрощенную форму записи уравнений движения системы сочлененных гиростатов.

А.2.1. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_1 системы тел $G_1, \ldots, G_n$. Введем вспомогательную систему координат $O_1y_1^1y_1^2y_1^3$, которая движется поступательно относительно $O_1x^1x^2x^3$, ее орты совпадают с ортами $\vec{e}_1^{\,i}$ $(i = 1, 2, 3)$, а начало находится в полюсе O_1. Движение $O_1y_1^1y_1^2y_1^3$ относительно $O_1x^1x^2x^3$ является переносным движением, движение $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ относительно $O_1y_1^1y_1^2y_1^3$ является относительным движением.

Уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_1 во вспомогательной системе координат $O_1y_1^1y_1^2y_1^3$ системы тел $G_1, \ldots, G_n$ имеет вид:

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} = \vec{M}_{1,tr} + \vec{M}_1 + \vec{M}_1^e + \vec{M}_1^{cor}, \quad \text{(A.2.1)}$$

где:

$\vec{K}_1$ — кинетический момент системы тел $G_1, \ldots, G_n$ относительно полюса O_1 в ее движении относительно вспомогательной системы координат; $\vec{M}_{1,tr}$ — момент сил трения относительно O_1;

$\vec{M}_1$ — главный момент относительно O_1 всех внешних сил, действующих на систему тел $G_1, \ldots, G_n$ (также во вспомогательной системе координат);

$\vec{M}_1^e$ — момент относительно O_1 переносных сил инерции, обусловленный движением вспомогательной системы координат;

$\vec{M}_1^{cor}$ — момент относительно O_1 кориолисовых сил инерции;

$$\vec{K}_1 = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \vec{v}_k dm_k = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1) dm_1 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k\right) dm_k,$$

$$\vec{M}_{1,tr} = -\alpha_1\vec{\omega}_1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \text{(A.2.2)}$$

$$\vec{M}_1 = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \vec{F}_k dm_k = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{g} + \vec{f}_1) dm_1 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times (\vec{g} + \vec{f}_k) dm_k = -gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 + \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 -$$

$$-g\sum_{k=2}^{n} m_k\left(\sum_{l=1}^{k-1} h_l P_2\vec{\delta}_l + l_k P_2\vec{\delta}_k\right) + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\vec{f}_k dm_k, \quad (A.2.3)$$

где $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{G_k}$, $P_2\vec{\delta}_k := \sum\limits_{j=1}^{2}\delta_k^j\vec{e}_k^{\,j}$, $l_k := |\overrightarrow{O_kC_k}|$ — расстояние от O_k до центра масс C_k гиростата G_k. Следует отметить, что при выводе (A.2.3) учтено, что (см. [34, с. 132, 145]):

$$\int\limits_{G_k}\vec{r}_k\times\vec{g}dm_k = m_k\vec{r}_{k,c}\times\vec{g} = m_k[-l_k\vec{e}_k^{\,3}]\times[-g(\vec{e}_k^{\,3} - \delta_k^2\vec{e}_k^{\,1} + \delta_k^1\vec{e}_k^{\,2})] =$$

$$= gm_kl_k\vec{e}_k^{\,3}\times(\vec{e}_k^{\,3} - \delta_k^2\vec{e}_k^{\,1} + \delta_k^1\vec{e}_k^{\,2}) = -gm_kl_k(\delta_k^1\vec{e}_k^{\,1} + \delta_k^2\vec{e}_k^{\,2}) = -gm_kl_kP_2\vec{\delta}_k,$$

$$\vec{M}_1^{e} = 0,$$

$$\vec{M}_1^{cor} = -\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times(2\vec{\omega}_1\times\vec{u}_1)dm_1 - \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times(2\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k)dm_k.$$

Вычислим производную по времени от кинетического момента $\vec{K}_1$:

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} = \int\limits_{G_1}\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1 + \vec{u}_1)dm_1 + \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1 + \vec{\omega}_1\times\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{u}_1}{dt}\right)dm_1 +$$

$$+\vec{\omega}_1\times\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1 + \vec{u}_1)dm_1 + \sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\frac{d}{dt}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k + \vec{u}_k\right)dm_k +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left[\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_j\times\frac{d\vec{h}_j}{dt}\right] + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k + \vec{\omega}_k\times\frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{d\vec{u}_k}{dt}\right)dm_k +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\vec{\omega}_k\times\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k + \vec{u}_k\right)dm_k =$$

$$= \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{u}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)d\Omega_1 + \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1 +$$

$$+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(\vec{\omega}_1\times\vec{u}_1 + \frac{d\vec{u}_1}{dt}\right)d\Omega_1 + \vec{\omega}_1\times\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)dm_1 + \vec{\omega}_1\times\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\vec{u}_1 d\Omega_1 +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k + \vec{u}_k\right)d\Omega_k +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_j}{dt}\times\vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k\right)dm_k +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\left(\vec{\omega}_k\times\vec{u}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt}\right)d\Omega_k +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\vec{\omega}_k\times\int\limits_{G_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}\vec{\omega}_j\times\vec{h}_j + \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k\right)dm_k + \sum_{k=2}^{n}\vec{\omega}_k\times\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\vec{h}_l + \vec{r}_k\right)\times\vec{u}_k d\Omega_k.$$

(A.2.4)

Полная производная поля относительной скорости $\vec{u}_k(t,\vec{r})$ представима в виде:

$$\frac{d\vec{u}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + (\vec{u}_k \cdot \nabla)\vec{u}_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

Подставим равенства (A.2.2)–(A.2.4) в уравнение (A.2.1). После линеаризации уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_1 системы тел $G_1,\ldots,G_n$ в подвижной системе координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ принимает вид:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \\
+ \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) dm_k = \\
= -\alpha_1\vec{\omega}_1 - gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 - g\sum_{k=2}^{n} m_k \left(\sum_{l=1}^{k-1} h_l P_2 \vec{\delta}_l + l_k P_2 \vec{\delta}_k\right) + \\
+ \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=1}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \vec{f}_k dm_k. \qquad (A.2.5)
\end{gathered}$$

A.2.2. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_i системы тел $G_i,\ldots,G_n$, $i = \overline{2,n-1}$. Введем вспомогательную систему координат $O_iy_i^1y_i^2y_i^3$, которая движется поступательно относительно $O_1x^1x^2x^3$, ее орты совпадают с ортами системы $O_1x^1x^2x^3$, а начало находится в полюсе O_i. Движение $O_iy_i^1y_i^2y_i^3$ относительно $O_1x^1x^2x^3$ является переносным движением, движение $O_ix_i^1x_i^2x_i^3$ относительно $O_iy_i^1y_i^2y_i^3$ является относительным движением.

Уравнение изменения кинетического момента относительно полюса O_i во вспомогательной системе координат $O_iy_i^1y_i^2y_i^3$ системы тел $G_i,\ldots,G_n$ имеет вид:

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \vec{M}_{i,tr} + \vec{M}_i + \vec{M}_i^e + \vec{M}_i^{cor}, \quad i = \overline{2,n-1}, \qquad (A.2.6)$$

где:

$\vec{K}_i$ — кинетический момент системы тел $G_i,\ldots,G_n$ относительно полюса O_i в ее движении относительно вспомогательной системы координат $O_iy_i^1y_i^2y_i^3$;

$\vec{M}_{i,tr}$ — момент сил трения относительно O_i;

$\vec{M}_i$ — главный момент относительно O_i всех внешних сил, действующих на систему тел $G_i,\ldots,G_n$ (также во вспомогательной системе координат $O_iy_i^1y_i^2y_i^3$);

$\vec{M}_i^e$ — момент относительно O_i переносных сил инерции, обусловленный движением вспомогательной системы координат;

$\vec{M}_i^{cor}$ — момент относительно O_i кориолисовых сил инерции;

$$\vec{K}_i = \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i + \vec{u}_i) dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k\right) dm_k,$$

$$\vec{M}_{i,tr} = -\alpha_i(\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_{i-1}), \quad \alpha_i > 0, \qquad (A.2.7)$$

$$\begin{gathered}
\vec{M}_i = \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{F}_i dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \vec{F}_k dm_k = \\
= \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times (\vec{g} + \vec{f}_i) dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times (\vec{g} + \vec{f}_k) dm_k =
\end{gathered}$$

$$= -gm_i l_i P_2 \vec{\delta}_i + \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i - g \sum_{k=i+1}^{n} m_k \left(\sum_{l=i}^{k-1} h_l P_2 \vec{\delta}_i + l_k P_2 \vec{\delta}_k \right) + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \vec{f}_k dm_k,$$

$$\vec{M}_i^e = -\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{a}_i^e dm_i - \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \vec{a}_i^e dm_k,$$

$$\vec{a}_i^e = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{h}_j) \right),$$

$$\vec{M}_i^{cor} = -\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times (2\vec{\omega}_i \times \vec{u}_i) dm_i - \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times (2\vec{\omega}_k \times \vec{u}_k) dm_k.$$

Вычислим производную по времени для величины $\vec{K}_i$:

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \int\limits_{G_i} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i + \vec{u}_i) dm_i + \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{d\vec{u}_i}{dt} \right) dm_i +$$

$$+ \vec{\omega}_i \times \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i + \vec{u}_i) dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k \right) dm_k +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \left[\frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_j \times \frac{d\vec{h}_j}{dt} \right] + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times \frac{d\vec{r}_k}{dt} + \frac{d\vec{u}_k}{dt} \right) dm_k +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \vec{\omega}_k \times \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k \right) dm_k =$$

$$= \rho_i \int\limits_{\Omega_i} \vec{u}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) d\Omega_i + \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{u}_i + \frac{d\vec{u}_i}{dt} \right) dm_i + \vec{\omega}_i \times \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i + \vec{u}_i) dm_i +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k \right) d\Omega_k +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{u}_k + \frac{d\vec{u}_k}{dt} \right) dm_k +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \vec{\omega}_k \times \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \vec{\omega}_j \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k \right) dm_k. \quad (A.2.8)$$

Подставим соотношения (A.2.7)-(A.2.8) в уравнение (A.2.6). После линеаризации уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_i системы тел $G_i, \ldots, G_n$ в подвижной системе $O_i x_i^1 x_i^2 x_i^3$ координат принимает вид:

$$\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i \right) dm_i + \rho_i \int\limits_{\Omega_i} \vec{r}_i \times \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} d\Omega_i +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k \right) \times \left(\sum_{j=i}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \right) dm_k =$$

$$
\begin{gathered}
= -\alpha_i\left(\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_{i-1}\right) - g m_i l_i P_2 \vec{\delta}_i - g \sum_{k=i+1}^{n} m_k \left(\sum_{l=i}^{k-1} h_l P_2 \vec{\delta}_i + l_k P_2 \vec{\delta}_k\right) + \\
+ \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \vec{f}_k dm_k - \\
- \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_i - \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_k, \quad i = \overline{2, n-1}.
\end{gathered} \tag{A.2.9}
$$

Для удобства восприятия уравнение (A.2.9) запишем в виде:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i\right) dm_i + \rho_i \int\limits_{\Omega_i} \vec{r}_i \times \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} d\Omega_i + \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_i + \\
+ \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) dm_k + \\
+ \alpha_i\left(\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_{i-1}\right) + g m_i l_i P_2 \vec{\delta}_i + g \sum_{k=i+1}^{n} m_k \left(\sum_{l=i}^{k-1} h_l P_2 \vec{\delta}_i + l_k P_2 \vec{\delta}_k\right) = \\
= \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \vec{h}_l + \vec{r}_k\right) \times \vec{f}_k dm_k, \quad i = \overline{2, n-1}.
\end{gathered} \tag{A.2.10}
$$

A.2.3. Уравнения изменения кинетического момента относительно полюса O_n тела G_n. Введем вспомогательную систему координат $O_n y_n^1 y_n^2 y_n^3$, которая движется поступательно относительно $O_1 x^1 x^2 x^3$, ее орты совпадают с ортами $\vec{e}_1^{\,i}$ $(i = 1, 2, 3)$, а начало находится в полюсе O_n. Движение $O_n y_n^1 y_n^2 y_n^3$ относительно $O_1 x^1 x^2 x^3$ является переносным движением, движение $O_n x_n^1 x_n^2 x_n^3$ относительно $O_n y_n^1 y_n^2 y_n^3$ является относительным движением.

Уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_n во вспомогательной системе координат $O_n y_n^1 y_n^2 y_n^3$ тела G_n имеет вид:

$$
\frac{d\vec{K}_n}{dt} = \vec{M}_{n,tr} + \vec{M}_n + \vec{M}_n^e + \vec{M}_n^{cor}, \tag{A.2.11}
$$

где:

$\vec{K}_n$ — кинетический момент тела G_n относительно полюса O_n в ее движении относительно вспомогательной системы координат $O_n y_n^1 y_n^2 y_n^3$;

$\vec{M}_{n,tr}$ — момент сил трения относительно O_n;

$\vec{M}_n$ — главный момент относительно O_n всех внешних сил, действующих на тело G_n (также во вспомогательной системе координат $O_n y_n^1 y_n^2 y_n^3$);

$\vec{M}_n^e$ — момент относительно O_n переносных сил инерции, обусловленный движением вспомогательной системы координат;

$\vec{M}_n^{cor}$ — момент относительно O_n кориолисовых сил инерции;

$$
\vec{K}_n = \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\vec{\omega}_n \times \vec{r}_n + \vec{u}_n\right) dm_n,
$$

$$
\vec{M}_{n,tr} = -\alpha_n\left(\vec{\omega}_n - \vec{\omega}_{n-1}\right), \quad \alpha_n > 0, \tag{A.2.12}
$$

$$
\vec{M}_n = \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{F}_n dm_n = \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\vec{g} + \vec{f}_n\right) dm_n = -g m_n l_n P_2 \vec{\delta}_n + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n,
$$

$$\vec{M}_n^e = -\int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{a}_n^e dm_n,$$

$$\vec{a}_n^e = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \vec{\omega}_j \times \left(\vec{\omega}_j \times \vec{h}_j \right) \right),$$

$$\vec{M}_n^{cor} = -\int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(2\vec{\omega}_n \times \vec{u}_n \right) dm_n.$$

Вычислим производную по времени для величины $\vec{K}_n$:

$$\frac{d\vec{K}_n}{dt} = \int\limits_{G_n} \frac{d\vec{r}_n}{dt} \times \left(\vec{\omega}_n \times \vec{r}_n + \vec{u}_n \right) dm_n + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_n + \vec{\omega}_n \times \frac{d\vec{r}_n}{dt} + \frac{d\vec{u}_n}{dt} \right) dm_n +$$
$$+ \vec{\omega}_n \times \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\vec{\omega}_n \times \vec{r}_n + \vec{u}_n \right) dm_n = \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{u}_n \times \left(\vec{\omega}_n \times \vec{r}_n \right) d\Omega_n +$$
$$+ \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_n + \vec{\omega}_n \times \vec{u}_n + \frac{d\vec{u}_n}{dt} \right) dm_n + \vec{\omega}_n \times \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\vec{\omega}_n \times \vec{r}_n + \vec{u}_n \right) dm_n. \quad (\text{A.2.13})$$

Подставим равенства (A.2.12)-(A.2.13) в уравнение (A.2.11). После линеаризации уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_n тела G_n в подвижной системе $O_n x_n^1 x_n^2 x_n^3$ координат принимает вид:

$$\int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_n \right) dm_n + \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} d\Omega_n =$$
$$= -\alpha_n \left(\vec{\omega}_n - \vec{\omega}_{n-1} \right) - g m_n l_n P_2 \vec{\delta}_n + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n - \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j \right) dm_n. \quad (\text{A.2.14})$$

Для удобства восприятия уравнение (A.2.14) запишем в виде:

$$\int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_n \right) dm_n + \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} d\Omega_n + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j \right) dm_n +$$
$$+ \alpha_n \left(\vec{\omega}_n - \vec{\omega}_{n-1} \right) + g m_n l_n P_2 \vec{\delta}_n = \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n. \quad (\text{A.2.15})$$

A.3. Преобразование уравнений изменения кинетического момента системы тел

Из уравнений (A.2.5), (A.2.10) и (A.2.15) следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Беря соответствующие разности левых и правых частей последующего и предыдущего уравнений (разность левых и правых частей уравнений изменения кинетического момента относительно точек O_i и O_{i+1} $(i = \overline{1, n-1})$), получаем упрощенную форму записи уравнений движения системы тел. Уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_n переписываем без изменений.

Выполнив указанные действия, получим следующую систему уравнений:

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \right) dm_k +$$
$$+ \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \right) + g \left(m_1 l_1 + \sum_{k=2}^{n} m_k h_1 \right) P_2 \vec{\delta}_1 = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k dm_k,$$

$$\int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_i\right) dm_i + \rho_i \int\limits_{\Omega_i} \vec{r}_i \times \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} d\Omega_i + \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_i +$$
$$+ \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) dm_k +$$
$$+ \alpha_i \left(\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_{i-1}\right) - \alpha_{i+1} \left(\vec{\omega}_{i+1} - \vec{\omega}_i\right) + g \left(m_i l_i + \sum_{k=i+1}^{n} m_k h_i\right) P_2 \vec{\delta}_i =$$
$$= \int\limits_{G_i} \vec{r}_i \times \vec{f}_i dm_i + \sum_{k=i+1}^{n} \int\limits_{G_k} \vec{h}_i \times \vec{f}_k dm_k, \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$\int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\frac{d\vec{\omega}_n}{dt} \times \vec{r}_n\right) dm_n + \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \vec{r}_n \times \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} d\Omega_n + \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d\vec{\omega}_j}{dt} \times \vec{h}_j\right) dm_n +$$
$$+ \alpha_n \left(\vec{\omega}_n - \vec{\omega}_{n-1}\right) + g m_n l_n P_2 \vec{\delta}_n = \int\limits_{G_n} \vec{r}_n \times \vec{f}_n dm_n.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ B. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ СИСТЕМЫ СОЧЛЕНЕННЫХ ГИРОСТАТОВ

B.1. Об уравнениях движения идеальной несжимаемой жидкости

Рассмотрим систему n гиростатов G_k, $k = \overline{1, n}$, последовательно соединенных между собой сферическими шарнирами. Примем те же обозначения, что и в разделе A.1, для описания движений такой гидромеханической системы.

Будем считать, что каждое тело $G_k \subset \mathbb{R}^3$ имеет полость Ω_k, полностью заполненную идеальной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_k > 0$, $k = \overline{1, n}$.

Движение жидкости в полости Ω_k описывается заданием в точке $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ вектора скорости $\vec{v}_k = \vec{v}_k\left(t, x\right)$ и поля давлений $P_k = P_k\left(t, x\right)$. Второй закон Ньютона, примененный к единичному объему идеальной жидкости, приводит к известным уравнениям Эйлера (см. [34, с. 124]):

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = -\rho^{-1} \nabla P_k + \vec{F}_k, \quad \operatorname{div} \vec{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, n}, \tag{B.1.1}$$

здесь уравнение записано в неподвижной системе координат $O_1 x^1 x^2 x^3$.

При исследовании задачи динамики системы «тело—жидкость» вместо уравнений (B.1.1) часто пользуются уравнениями движения жидкости в подвижной системе координат. Для получения этих уравнений представим согласно (A.1.1) поле абсолютной скорости в виде

$$\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \vec{\omega}_i \times \vec{h}_i + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k + \vec{u}_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{B.1.2}$$

где $\vec{u}_k$ — поле относительной скорости жидкости в полости Ω_k, и воспользуемся формулой (A.1.2) для поля абсолютного ускорения

$$\vec{w}_k = \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{h}_i + \vec{\omega}_i \times \left(\vec{\omega}_i \times \vec{h}_i\right)\right) + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k + \vec{\omega}_k \times \left(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k\right) +$$
$$+ 2\vec{\omega}_k \times \vec{u}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \left(\vec{u}_k \cdot \nabla\right) \vec{u}_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{B.1.3}$$

Здесь воспользовались формулой $d\vec{u}_k/dt = \partial \vec{u}_k/\partial t + \left(\vec{u}_k \cdot \nabla\right) \vec{u}_k$.

Выделим для удобства дальнейших рассмотрений из поля $\vec{F}_k$ внешнее гравитационное поле $\vec{g}$ и будем считать, что оно постоянно и направлено против оси O_1x^3, т. е. $\vec{g} = -g\vec{e}^3$.

Если жидкость покоится, т. е. $\vec{F}_k = \vec{F}_{0,k} = \vec{g}$ и $\vec{v}_k(t,x) \equiv \vec{0}$, то выполнено соотношение

$$-\rho^{-1}\nabla P_{0,k} - g\vec{e}^3 = 0,$$

что дает формулу для статического давления

$$P_{0,k}\left(x^3\right) = -\rho_k g x^3 + p_a, \quad k = \overline{1,n},$$

где p_a — давление, отвечающее высоте $x^3 = 0$.

Представим полное давление $P_k = P_k(t,x)$ в виде суммы

$$P_k(t,x) = P_{0,k}\left(x^3\right) + p_k(t,x), \quad k = \overline{1,n}, \tag{B.1.4}$$

и назовем добавку $p_k(t,x)$ к статическому давлению $P_{0,k}\left(x^3\right)$ динамическим давлением.

Далее, представим аналогично поле внешних сил $\vec{F}_k = \vec{F}_k(t,x)$ в виде

$$\vec{F}_k(t,x) = -\nabla\left(gx^3\right) + \vec{f}_k(t,x), \quad k = \overline{1,n}, \tag{B.1.5}$$

выделив явно гравитационную составляющую.

Далее в исследовании будут рассматриваться лишь малые (линейные) движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Тогда поле скоростей $\vec{u}_k = \vec{u}_k(t,x)$ и динамическое давление $p_k = p_k(t,x)$ следует считать бесконечно малыми функциями одного (первого) порядка малости. Считаем $\vec{f}_k(t,x)$ также малым заданным полем массовых сил.

Воспользовавшись инвариантностью операций div, ∇ при линейных заменах переменных, с учетом (B.1.2), (B.1.3), (B.1.4) и (B.1.5) и после операции линеаризации получаем линеаризованные уравнения Эйлера в подвижной системе координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$:

$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_i}{dt}\times\vec{h}_k + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k = -\rho_k^{-1}\nabla p_k + \vec{f}_k, \quad \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1,n},$$

где нужно формально считать, что

$$\sum_{i=1}^{0}\frac{d\vec{\omega}_i}{dt}\times\vec{h}_1 = 0.$$

B.2. Об уравнениях движения вязкой несжимаемой жидкости

Будем считать, что вязкость жидкости в полости $\Omega_k \subset G_k$, $k = \overline{1,n}$, такова, что динамический коэффициент вязкости

$$\mu_k = \rho_k \nu_k > 0, \quad k = \overline{1,n},$$

постоянен и равен произведению плотности $\rho_k > 0$ k-ой жидкости и коэффициента кинематической вязкости $\nu_k > 0$, $k = \overline{1,n}$.

Для вязкой жидкости, имеющей постоянные плотности $\rho_k > 0$ и кинематическую вязкость $\nu_k > 0$, уравнения движения суть хорошо известные уравнения Навье—Стокса (см. [34, с. 124]):

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = -\rho^{-1}\nabla P_k + \nu_k\Delta\vec{v}_k + \vec{F}_k, \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0, \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1,n}, \tag{B.2.1}$$

здесь уравнение записано в неподвижной системе координат $O_1x^1x^2x^3$.

Для записи уравнений (B.2.1) в подвижной системе координат представим поля абсолютной скорости $\vec{v}_k$ и абсолютного ускорения $\vec{w}_k$ в виде (B.1.2) и (B.1.3) соответственно.

Воспользовавшись инвариантностью операций div, ∇, Δ при линейных заменах переменных, с учетом (B.1.2), (B.1.3) и после операции линеаризации, получаем линеаризованные уравнения Навье—Стокса в подвижной системе координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$:

$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{d\vec{\omega}_i}{dt}\times\vec{h}_k + \frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k = -\rho_k^{-1}\nabla p_k + \nu_k\Delta\vec{u}_k + \vec{f}_k, \quad \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1,n}.$$

B.3. О граничных условиях

На твердой границе S_k области Ω_k, заполненной идеальной жидкостью, ее частицы в отсутствие трения могут свободно скользить вдоль границы; отсюда приходим к условию непротекания

$$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k = \partial\Omega_k) \quad k = \overline{1,n},$$

где $\vec{n}_k$ — единичный вектор внешней нормали к S_k.

На твердой границе S_k области Ω_k, заполненной вязкой жидкостью, следует принимать во внимание краевое условие прилипания, которое кинематически очевидно: частицы вязкой жидкости на границе движутся с той же скоростью, что и точки твердого тела. Поэтому поле относительной скорости $\vec{u}_k$ здесь обращается в нуль:

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k = \partial\Omega_k\,), \quad k = \overline{1,n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2008.
3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
4. *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидродинамики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
5. *Барняк М. Я.* Исследование малых колебаний сферического маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью// Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 27–33.
6. *Батыр Э. И.* Малые движения и нормальные колебания двойного маятника с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость// Динамические системы. — 2000. — *16*. — С. 149–155.
7. *Батыр Э. И.* Малые движения двойного маятника с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. — 2001. — *14*(*53*), № 1. — С. 18–23.
8. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость// Динамические системы. — 2001. — *17*. — С. 120–125.
9. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. — 2002. — *15*(*54*), № 2. — С. 5–10.
10. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость// Друга Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського (Україна, Донецьк, 11–14 листопада, 2008): Тези доповідей. — 2008. — С. 41.
11. *Батыр Э. И.* Малые движения и нормальные колебания системы трех сочлененных тел с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2010. — *23*(*62*), № 2. — С. 19–38.
12. *Батыр Э. И., Дудик О. А., Копачевский Н. Д.* Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. рег. Естеств. науки. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. — 2009. — С. 15–29.
13. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания частично диссипативной гидромеханической системы из трех сочлененных гиростатов// Динамические системы. — 2010. — *28*. — С. 21–32.
14. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
15. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
16. *Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа// Тр. МИАН СССР. — 1960. — *59*. — С. 5–35.
17. *Вейль Г.* Метод ортогональной проекции в теории потенциала// Избранные труды. Математика и теоретическая физика. — М.: Наука, 1984. — С. 275—-307.
18. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща шк., 1989.

19. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел// Прикл. мат. мех.. — 2003. — *67*, № 4. — С. 573–587.
20. *Горр Г. В., Мазнев А. В., Щетинина Е. К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. — Донецк: ДонНУ, 2009.
21. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
22. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// Избр. соч. — *1*. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–152.
23. *Иевлева О. Б.* О колебаниях тела, наполненного вязкой жидкостью// Журн. прикл. мех. техн. физ. — 1966. — *6*. — С. 27–34.
24. *Ишлинский А. Ю.* Динамика систем связанных твердых тел// XIII Междунар. конгр. теор. прикл. мех.: Сб. аннот. — М.: Наука, 1972. — С. 16.
25. *Ишлинский А. Ю.* О динамике системы твердых тел// Механика: идеи, задачи, приложения. — М.: Наука, 1985. — С. 434–449.
26. *Кононов Ю. Н.* О движении системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость// Мех. тверд. тела. — 1997. — *29*. — С. 76–85.
27. *Кононов Ю. Н.* О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость// Мех. тверд. тела. — 2000. — *30*. — С. 207–216.
28. *Кононов Ю. Н.* Об устойчивости движения системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость// Мех. тверд. тела. — 2006. — *36*. — С. 75–82.
29. *Кононов Ю. Н.* Об устойчивости и стабилизации движения твердого тела и системы связанных твердых тел с полостями, содержащими многослойную жидкость и упругие включения. — Дисс. д.ф.-м.н. — Донецк, 2006.
30. *Копачевский Н. Д.* О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1967. — *7*, № 1. — С. 128–146.
31. *Копачевский Н. Д.* Нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 7. — С. 586–590.
32. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких жидкостей. — Препринт ФТИНТ АН УССР. — Харьков, 1978.
33. *Копачевский Н. Д., Батыр Э. И., Дудик О. А.* Операторный подход к проблеме малых движений и нормальных колебаний тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью// Материалы междунар. конф. «Соврем. пробл. мат., мех. и их прилож.», посвящ. 70-летию В. А. Садовничего. — М.: МГУ, 2009. — С. 120.
34. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
35. *Краснощеков П. С.* О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1963. — *59*, № 2. — С. 193–202.
36. *Краснощеков П. С.* Малые колебания твердого тела, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью// Численные методы решения задач математической физики. — М.: Наука, 1966. — С. 258–266.
37. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
38. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // Прикл. мат. мех. — 1957. — *21*, № 2. — С. 169–174.
39. *Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Задачи о малых движениях твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // Прикл. мат. мех. — 1969. — *33*, № 1. — С. 117–123.
40. *Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Движение твердого тела с полостью, заполненной несколькими несмешивающимся вязкими несжимаемыми жидкостями// Всесоюзн. конф. по мех. сплош. сред. — Ташкент: Изд-во Фан УзССР, 1979. — С. 20.
41. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М.: Гостехиздат, 1953.
42. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М., 1970.
43. *Луковский И. А.* Нелинейные математические модели в динамике твердого тела с полостями, содержащими идеальную жидкость// Исследования по теории функции комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред. — Киев, 1986. — С. 102–119.
44. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — Киев: Наукова думка, 1990.
45. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наукова думка, 2010.
46. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наукова думка, 1984.

47. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
48. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1982. — *45.* — С. 133–181.
49. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968.
50. *Моисеев Н. Н.* Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1952. — *85*, № 4. — С. 719–722.
51. *Моисеев Н. Н.* О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1952. — *85*, № 5. — С. 963–965.
52. *Моисеев Г. А.* Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями// Мат. физ. — 1973. — № 13. — С. 66–73.
53. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. — М., 1966.
54. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
55. *Нариманов Г. С.* О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1956. — *20*, № 1. — С. 21–38.
56. *Нго Зуй Кан.* О движении твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью, в условии полной невесомости// Прикл. мат. мех. — 1979. — *43*, № 2. — С. 267–273.
57. *Охоцимский Д. Е.* К теории движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1956. — *20*, № 1. — С. 3–20.
58. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
59. *Рабинович Б. И.* Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1956. — *20*, № 1. — С. 39–50.
60. *Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. — Киев: Наукова думка, 1991.
61. *Сретенский Л. Н.* Колебание жидкости в подвижном сосуде// Изв. АН СССР. Отд. тех. наук. — 1931. — *10.* — С. 1483–1494.
62. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наукова думка, 1969.
63. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел// Мех. тверд. тела. — 1972. — № 4. — С. 52–73.
64. *Харламов П. В.* Составной пространственный маятник// Мех. тверд. тела. — 1972. — № 4. — С. 73–82.
65. *Цебрий Р. И.* Исследование свободных колебаний физического маятника с цилиндрической полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью// Численно—аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. — Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1984. — С. 48–60.
66. *Цебрий Р.И.* Исследование малых свободных колебаний маятника с цилиндрической полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью// Исследование по теоретическим и прикладным вопросам математики. — Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1986. — С. 83.
67. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса// Журн. выч. мат. и мат. физ. — М., 1965. — *5*, № 6. — С. 1049–1070.
68. *Черноусько Ф. Л.* О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью// Прикл. мат. мех. — 1966. — *30*, № 6. — С. 977–992.
69. *Черноусько Ф. Л.* Колебание сосуда с вязкой жидкостью// Изв. АН СССР. Мех жидк. газ. — 1967. — *1.* — С. 58–66.
70. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1986.
71. *Iohvidov I. S., Krein M. G., Langer H.* Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. — Berlin: Akademic. Verlag, 1982.
72. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
73. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
74. *Kopachevsky N. D., Pashkova Ju. S., Batyr E., Soldatov M. A., Tsvetkov D. A., Vronsky B. M., Yakovlev A. U.* Application of an operator approach to some problems on small movements of continuous

media// Укр. матем. конгресс-2001. — Обчислювальна математика і математичні проблеми механики. Тез. Міжнародн. конф. з функционального анализу, 22–26 серпня 2001 р., Україна, Кіїв. — С. 24.
75. *Kopachevsky N. D., Zakora D. A.* Problems on small movements of partially dissipative hydrosystems// Mark Krein Int. Conf. Operator Theory and Appl. Book of Abstracts. August 18–22, 1997, Odessa, Ukraine. — С. 55.
76. *Metivier G.* Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationalles a des sousespaces// J. Math. Pures et Appl. — 1978. — *57*, № 2. — С. 133–156.
77. *Volodkovich E. D., Kopachevsky N. D.* Small movement and normal oscillations of a plane pendulum with a cavity partially filled with a viscous fluid// Спектральные и эволюционные задачи. — 1994. — *3*.— С. 50–54.

Э. И. Батыр
Таврический национальный университет, 95007, Украина, г. Симферополь, пр. Вернадского 4
E-mail: bei@ukr.net

Н. Д. Копачевский
Таврический национальный университет, 95007, Украина, г. Симферополь, пр. Вернадского 4
E-mail: kopachevsky@list.ru