Функциональный анализ и его приложения,
т. 15, вып. 2, 1981, 77—78.

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА $I-\lambda A-\lambda^{-1}B$

Н. Д. Копачевский

1. В бесконечномерном гильбертовом пространстве H рассматривается спектральная задача

$$L(\lambda)x = (I-\lambda A-\lambda^{-1}B)x = 0 \tag{1}$$

с самосопряженными операторами $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$ (определение классов $\mathfrak{S}_p$ см. в [1]), причем A — полный, а замыкание области значений B есть бесконечномерное подпространство $H_1 \subset H$.

Следуя В. А. Пригорскому [2], будем говорить, что система векторов $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ образует p-базис в H, если $\psi_n = (I+T)\varphi_n$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H, а $I+T$ обратим и $T \in \mathfrak{S}_p$. (Случай $p=2$ отвечает базису Бари (см. [1]).) Настоящая заметка посвящена выяснению достаточных условий p-базисности системы собственных и присоединенных векторов (СПВ) пучка $L(\lambda)$ и ассоциированного с ним линейного пучка операторов. Автор благодарит Т. Я. Азизова и А. С. Маркуса за внимание к работе и полезные советы.

2. Пусть P_1 — ортопроектор на H_1. Путем замен (см. [3]) $\lambda-\lambda^{-1}=\mu$, $P_1x/\lambda = y \in H_1$ уравнение (1) можно привести к линейному уравнению относительно нового спектрального параметра μ:

$$z = \mu Kz + Fz, \qquad z \in \mathscr{H} = H \oplus H_1, \tag{2}$$

$$F = \begin{pmatrix} AP_2A & B+AP_1 \\ P_1A+B & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} P_2 = I-P_1, \\ K = \operatorname{diag}(A; -B), \end{matrix} \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть для s-чисел операторов A и B справедливы оценки*

$$s_n(A) \leqslant c_1 n^{-1/\alpha}, \quad s_n(B) \leqslant c_2 n^{-1/\beta}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Тогда система СПВ задачи (2) *образует p-базис в $\mathscr{H}$ при $p > \max(\alpha; \beta)$.*

Доказательство. Заменой $\lambda \mapsto a\lambda$, если это необходимо, с $a>0$ всегда можно добиться того, чтобы оператор $I-F$ был обратим. Будем сначала считать, что $\lambda_{\max}(F) < 1$. Тогда (2) равносильно уравнению

$$\varphi = \mu J^{-1/2}KJ^{-1/2}\varphi, \qquad J = I-F \gg 0, \qquad \varphi = J^{1/2}z, \tag{4}$$

с полным самосопряженным оператором из $\mathfrak{S}_\infty$. Так как совокупность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ собственных векторов оператора $J^{-1/2}KJ^{-1/2}$ образует ортонормированный базис в $\mathscr{H}$, то осталось убедиться, что $J^{-1/2} = I+T$, $T \in \mathfrak{S}_p$ при $p > \max(\alpha; \beta)$. Очевидно,

$$T = J^{-1/2}-I = (J^{-1}-I)(J^{-1/2}+I)^{-1} = F(J^{-1/2}+I)^{-1}J^{-1}.$$

Так как $(J^{-1/2}+I)^{-1} \in \mathscr{R}$, то достаточно проверить, что $F \in \mathfrak{S}_p$ при $p > \max(\alpha; \beta)$. Последний факт устанавливается для F с использованием его матричной структуры (2), оценок (3) и неравенств для s-чисел вполне непрерывных операторов (см. [1]).

Доказательство при $\lambda_{\max}(F) > 1$ можно привести к уже рассмотренному случаю с использованием теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Теорема доказана.

3. Будем считать дополнительно, что для пучка (1) выполнено условие, достаточное для его сильной демпфированности (см. [1], [4]),

$$4\|A\|\cdot\|B\| < 1. \tag{5}$$

Тогда пучок $L(\lambda)$ допускает факторизацию относительно окружности $|\lambda| = r$, $r \in (r_-, r_+)$, $r_\pm = (1 \pm \sqrt{1-4\|A\|\cdot\|B\|})/(2\|A\|)$ (см., например, [5], [6]), причем задача (1) имеет лишь собственные векторы (СВ).

Теорема 2. *Если выполнены условия* (3), (5), *то система СВ, отвечающая собственным числам из круга $\|\lambda\| \leqslant r$, $r \in (r_-, r_+)$, после проектирования на H_1 образует p-базис в H_1 при $p > \alpha\beta/(\alpha+\beta)$, а система СВ, отвечающая собственным числам вне круга $\|\lambda\| \leqslant r$, образует p-базис в H при тех же p.*

Отметим, что в [1], [4] при замене условий (3), (5) условиями $A, B > 0$ и условиями сильной демпфированности получены утверждения о существовании в H двух базисов Рисса, составленных из СВ первого и второго рода пучка $L(\lambda)$.

Схема доказательства теоремы 2. а) При выполнении условия (5) пучок $L(\lambda)$ допускает две факторизации:

$$L(\lambda) = X^{-1}(I - \lambda^{-1}XB)(I - \lambda XA), \quad X = I + BXAX, \tag{6}$$
$$L(\lambda) = Y^{-1}(I - \lambda YA)(I - \lambda^{-1}YB), \quad Y = I + AYBY.$$

Операторы X и Y обратимы и оцениваются по норме величиной $r_- \| B \|^{-1}$. В представлениях (6) операторы $I - \lambda^{-1}XB$ и $I - \lambda YA$ обратимы соответственно при $\| \lambda \| > r_-$ и $| \lambda | < r_+$.

б) Оператор $Z = YB$ в (6) симметризуется справа оператором

$$F = (2\pi i)^{-1} \oint\limits_{|\lambda|=r} [\lambda L(\lambda)]^{-1} d\lambda, \qquad r \in (r_-, r_+),$$

причем $F = F^* = I + T$, $T \in \mathfrak{S}_\infty$, $F \geqslant 0$.

в) Собственные векторы задачи

$$Z\xi = \lambda\xi, \qquad Z = YB, \quad |\lambda| \leqslant r \in (r_-, r_+), \tag{7}$$

после проектирования на H_1 образуют p-базис в H_1 при $p > \alpha\beta/(\alpha + \beta)$. Доказательство этого утверждения основано на том, что (7) можно привести к уравнению с полным в H_1 самосопряженным оператором

$$(F_1^{1/2} B F_1^{1/2} + F_1^{-1/2} K F_1^{-1/2})\eta = \lambda\eta, \qquad F_1^{1/2}\eta = P_1\xi,$$

где $F_1 = P_1 F P_1 \geqslant 0$, $K = K^* = (P_1 Y P_1 - F_1) B F_1 \in \mathfrak{S}_\infty$.

г) Оператор $F_1^{1/2}$ представим в виде $F_1^{1/2} = P_1 + T_2$, $T_2 \in \mathfrak{S}_p$ при $p > \alpha\beta/(\alpha + \beta)$. Этот факт следует из соотношения $T_2 = P_1 T P_1 (F_1^{1/2} + P_1)^{-1}$, представления

$$T = AYBY + \left\{ YB \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (YB)^k (YA)^k \right] YA \right\} Y \tag{8}$$

и оценки $s_n(T) \leqslant cn^{-(1/\alpha + 1/\beta)}$, которую можно получить из (3), (8) и неравенств для s-чисел суммы и произведения операторов из $\mathfrak{S}_\infty$.

д) Вторая часть утверждений теоремы доказывается по такому же плану, однако без проектирования на H_1.

4. Рассмотренная общая схема реализуется в задаче о нормальных колебаниях тяжелых вязких жидкостей [7], [8], расположенных в сосуде одна над другой и имеющих плотности $\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_{m+1} > 0$ и вязкости $\mu_q > 0$. Операторы A и B обладают свойствами $A > 0$, $B \geqslant 0$, а для функций распределения $n^+(\lambda; A)$ и $n^+(\lambda; B)$ их собственных значений имеют место формулы (см. [9])

$$\lim_{\lambda \to 0} n^+(\lambda; A)\, \lambda^{3/2} = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{q=1}^{m+1} (\rho_q/\mu_q)^{3/2} \operatorname{mes} \Omega_q,$$
$$\lim_{\lambda \to 0} n^+(\lambda; B)\, \lambda^2 = \frac{1}{16\pi^2} g^2 \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\rho_k - \rho_{k+1}}{\mu_k + \mu_{k+1}} \right)^2 \operatorname{mes} \Gamma_k, \tag{9}$$

где Ω_q — области, занимаемые жидкостями при равновесии, Γ_k — границы раздела между ними, g — ускорение силы тяжести.

Так как из (9) следуют неравенства (3), то для задачи о нормальных колебаниях тяжелых жидкостей справедливы утверждения теорем 1 и 2 при $\alpha = 3/2$ и $\beta = 2$.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступило в редакцию
18 апреля 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965. 2. Пригорский В. А., УМН XX, вып. 5 (1965), 231—236. 3. Greenlee W. H., J. Funct. Analysis 15 (1974), 306—339. 4. Крейн М. Г., Лангер Г., Труды Междунар. симпоз. по применению функций комплексного переменного в механике сплошной среды, т. 2, М., 1965, 283—322. 5. Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И., Acta scient. math. 34 (1973), 245—271. 6. Радзиевский Г. В., Матем. сб. 91, (1973), 310—335. 7. Копачевский Н. Д., ДАН УССР, серия А, № 7 (1978), 586—590. 8. Копачевский Н. Д., Препринт 33—77 (1978), Харьков, ФТИНТ АН УССР. 9. Metivier G., Math. pures et appl. 57, № 2 (1978), 133—156.