МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Таврический национальный университет им. В. И.Вернадского

Т.Я. АЗИЗОВ, Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРОСТРАНСТВ КРЕЙНА

Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности "Математика"

Симферополь – 2010

ББК 22.162
А35
УДК 517.98

Рекомендовано к печати научно-методической комиссией факультета математики и информатики ТНУ (протокол № 2 от 15.11.2009 г.)

Рецензент :

Орлов И.А. – д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

А35 Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. ***Введение в теорию пространств Крейна*****:** Специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА", 2010 – 112 с. – На русском языке.

В курсе лекций излагаются основы теории пространств с индефинитной метрикой, обобщающих пространства Понтрягина на случай, когда ранг индефинитности равен бесконечности, а также спектральный подход к исследованию гидродинамического пучка С.Г. Крейна.

Изложение сопровождается примерами и упражнениями, что позволяет использовать пособие как для аудиторных занятий, так и самостоятельного изучения.

Для студентов-магистрантов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики.

Содержание

В этом учебном пособии излагаются основы теории пространств с индефинитной метрикой, обобщающих пространства Понтрягина (см. [5]) на случай, когда ранг индефинитности квадратичной формы, задающей индефинитную метрику, равен бесконечности. Выдающийся вклад в развитие теории таких пространств и операторов, действующих в них, внес М.Г. Крейн и потому такие пространства названы его именем.

В основу пособия положены спецкурсы, которые читались в Воронежском государственном университете (Россия) и Таврическом национальном университете (Симферополь, Украина), монографии М.Г. Крейна, Г. Лангера, И.С. Иохвидова [8] и других, а также исследования авторов, их коллег и учеников. Они отражены, в частности, в монографии Т.Я. Азизова и И.С. Иохвидова [1] и в их обзорах.

1 Введение

Здесь даются некоторые предварительные определения и понятия, связанные с пространством Крейна.

Пусть $\mathcal{E}$ — линеал, т.е. линейное множество объектов произвольной природы (элементов, векторов), для которых введены операции сложения элементов и умножения элементов на (комплексные) числа. Зададим на $\mathcal{E}$ квадратичную (полуторалинейную) форму

$$[\cdot,\cdot]:\ \mathcal{E}\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{C}.$$

Определение 1.1. Будем говорить, что на $\mathcal{E}$ задана индефинитная метрика, если форма $[\cdot,\cdot]$ обладает свойствами:

1° $[x,x]\in\mathbb{R},\quad \forall\, x\in\mathcal{E}$;

2° $[x,y]=\overline{[y,x]},\quad \forall x,y\in\mathcal{E}$;

3° $[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z],\quad \forall x,y,z\in\mathcal{E},\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$

□

Линеал $\mathcal{E}$ вместе с введенной на нем формой $[\cdot,\cdot]$ назовем индефинитным пространством и будем обозначать $\{\mathcal{E},[\cdot,\cdot]\}$.

Отметим, что требования 1°–3° те же, что были сформулированы ранее для индефинитной формы в пространстве Понтрягина (см. [5]).

Далее будем использовать те же понятия и обозначения, которые уже встречались при изложении теории пространств Понтрягина: понятие ортогональности (относительно формы $[\cdot,\cdot]$) элементов из $\mathcal{E}$, определения знака линеалов и другие.

Определение 1.2. Будем говорить, что задано пространство Крейна, если выполнены следующие условия.

1° Имеет место ортогональное (относительно формы $[\cdot,\cdot]$) разложение $\mathcal{E}$ на подпространства $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+[+]\mathcal{E}^-;$$

2° В этом разложении

$$\left\{\mathcal{E}^+, [x,y]\right\}, \quad \left\{\mathcal{E}^-, -[x,y]\right\}$$

— гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$[x_+, y_+], \quad x_+, y_+ \in \mathcal{E}^+; \qquad -[x_-, y_-], \quad x_-, y_- \in \mathcal{E}^-,$$

и соответствующими нормами:

$$\left([x_+, x_+]\right)^{1/2}, \quad x_+ \in \mathcal{E}^+, \qquad \left(-[x_-, x_-]\right)^{1/2}, \quad x_- \in \mathcal{E}^-.$$

□

Далее пространство Крейна будем обозначать символом $\mathcal{K}$, а ортогональное разложение 1° из определения 1.2 использовать в форме

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-, \tag{1.1}$$

которую назовем *канонической.* При этом будем предполагать, что $\mathcal{K}^\pm$ — *сепарабельные* пространства.

Если

$$\min\left\{\dim\mathcal{K}^+; \dim\mathcal{K}^-\right\} = \varkappa < \infty,$$

то пространство Крейна является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Введем в $\mathcal{K}$ *каноническое скалярное произведение*

$$\begin{gathered}(x,y) := [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \\ x = x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-, \quad x_\pm, y_\pm \in \mathcal{K}^\pm,\end{gathered} \tag{1.2}$$

отвечающее разложению (1.1), а также *канонические проекторы*

$$P^\pm : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^\pm, \quad P^+ + P^- = I,$$

отвечающие этому разложению, и каноническую симметрию

$$J := P^+ - P^-.$$

Тогда, как в пространстве $\Pi_\varkappa$,

$$(x,y) = [Jx,y], \quad [x,y] = (Jx,y), \quad \forall x,y \in \mathcal{K},$$

и имеет место неравенство типа Коши – Буняковского:

$$|[x,y]| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x,y \in \mathcal{K}.$$

Эти формулы показывают, что пространство Крейна $\mathcal{K}$ с введенным скалярным произведением (1.2) является полным гильбертовым пространством $\{\mathcal{K}, [\cdot,\cdot], (\cdot,\cdot)\}$, т.е. по индефинитной форме $[\cdot,\cdot]$ построено гильбертово пространство $\mathcal{K} =: \mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Часто встречается ситуация, когда задано гильбертово пространства $\mathcal{H}$ со скалярным произведением (x,y) и ортогональным разложением

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \quad P^\pm : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^\pm, \tag{1.3}$$

по которым вводят оператор $J = P^+ - P^-$ и индефинитное скалярное произведение $[x,y] = (Jx,y)$. Тогда возникает каноническое разложение (1.1) при $\mathcal{K}^\pm = \mathcal{H}^\pm$, соответствующее разложению (1.3):

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-.$$

Здесь подпространства $\mathcal{K}^\pm = \mathcal{H}^\pm$ ортогональны одновременно по дефинитному и индефинитному скалярным произведениям.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимоотношении норм, порожденных различными каноническими разложениями пространства Крейна.

Пусть имеется два канонических разложения пространства $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^- = \mathcal{K}_2^+[+]\mathcal{K}_2^-,$$

а также соответствующие канонические проекторы $P_1^\pm, P_2^\pm$, канонические симметрии J_1 и J_2 и скалярные произведения $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$.

Теорема 1.1 (об эквивалентности канонических норм). Канонические нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, порожденные каноническими скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$, эквивалентны, т.е. найдутся положительные константы $c_1 \leqslant c_2$ такие, что

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1 \quad \Longleftrightarrow \quad c_2^{-1}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_1^{-1}\|x\|_2.$$

Доказательство. Поскольку для случая пространства Понтрягина эта теорема доказана в [5], то будем рассматривать случай, когда пространства

$$\left\{\mathcal{K}_1^{\pm}, \pm[x,y]_1\right\}, \quad \left\{\mathcal{K}_2^{\pm}, \pm[x,y]_2\right\}$$

гильбертовы, причем

$$\dim \mathcal{K}_1^{\pm} = \dim \mathcal{K}_2^{\pm} = \infty.$$

Так как по предположению эти пространства сепарабельны, то в них существуют счетные ортонормированные базисы

$$\{e_{1k}^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{e_{2j}\}_{j=1}^{\infty}.$$

Введем на элементах базисов $\{e_{1,k}^{\pm}\}$ отображение U по закону

$$Ue_{1,k}^{\pm} = e_{2,k}^{\pm},$$

и продолжим это отображение по линейности на $\mathcal{K}_1^{+}$, $\mathcal{K}_1^{-}$, а затем на все $\mathcal{K}$. По построению оператор U, рассматриваемый как оператор из $\{\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)_1\}$ в $\{\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)_2\}$, является унитарным:

$$(Ux, Uy)_2 = (x,y)_1, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}, \quad U\mathcal{K} = \mathcal{K},$$

и унитарным как оператор из $\{\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\} \to \{\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\}$:

$$[Ux, Uy] = [x,y]. \tag{1.4}$$

Так как $[x,y] = (J_k x, y)_k$, $k = 1, 2$, то из (1.4) следует, что

$$U^{-1} = J_k U^{(*)_k} J_k,$$

где знак $^{(*)_k}$ означает сопряжение в $\{\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)_k\}$, $k = 1, 2$. Замкнутость оператора $U^{(*)_k}$ и непрерывная обратимость непрерывного оператора J_k влекут замкнутость всюду определенного оператора U^{-1}. По известной теореме Банаха оператор U^{-1}, а с ним и U ограничены, как операторы в $\{\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)_k\}$; обозначим через $\|U^{-1}\|_k$ и $\|U\|_k$ нормы этих операторов в $\{\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)_k\}$. Теперь утверждение об эквивалентности канонических норм вытекает из неравенств:

$$\|U^{-1}\|_2^{-1} \|x\|_2 \leqslant \|Ux\|_2 = \|x\|_1 \leqslant \|U\|_2 \cdot \|x\|_2.$$

$\square$

Рассмотрим теперь более общую, чем выше, ситуацию, когда в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ индефинитная форма $[x, y]$ задается самосопряженным непрерывным оператором W:

$$[x, y] := (Wx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{1.5}$$

Такую форму называют W-метрикой.

Так как

$$|[x, y]| \leqslant \|W\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

то форма $[x, y]$ непрерывна по переменным x и y. Обратно, непрерывная форма $[x, y]$ представима в виде (1.5) с непрерывным оператором $W = W^*$.

Поскольку $W = W^*$, то пространство $\mathcal{H}$ допускает ортогональное разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^-, \tag{1.6}$$

причем

$$W\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^\pm, \quad W\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^0,$$

т.е. подпространства (1.6) инвариантны относительно W. Кроме того, сужения оператора W на эти подпространства обладают свойствами

$$W_+ := W|\mathcal{H}^+ > 0, \quad W_- := W|\mathcal{H}^- < 0, \quad W_0 := W|\mathcal{H}^0 = 0,$$

а матричное представление W в ортогональном разложении (1.6) имеет вид

$$W = \operatorname{diag}(W_+; 0; W_-).$$

Упражнение 1.1. Доказать, что пространство с W-метрикой (1.5) является пространством Крейна тогда и только тогда, когда

$$\{0 \in \rho(W)\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{H}_0 = \{0\}, \quad W_+ \gg 0, \quad W_- \ll 0\}, \tag{1.7}$$

т.е. 0 является регулярной точкой оператора W, а операторы W_+ и W_- соответственно равномерно положительный (положительно определенный) и равномерно отрицательный (отрицательно определенный). □

Таким образом, условия (1.7) накладывают те требования на свойства оператора W, которые обеспечивают введение индефинитной метрики в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и превращение его в пространство Крейна $\mathcal{K}$.

Пусть теперь $\{\mathcal{K}_1, [\cdot, \cdot]_1\}$ и $\{\mathcal{K}_2, [\cdot, \cdot]_2\}$ — пространства Крейна, возможно, различные.

Определение 1.3. Оператор $T: \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$, действующий из $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$, называется *несжимающим*, если

$$[Tx, Ty]_2 \geqslant [x, y]_1, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}_1. \qquad \square$$

Определение 1.4. Оператор $T : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ называется *бинесжимающим*, если он несжимающий и сопряженный оператор $T^c: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ (относительно форм в $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$), т.е. такой, что

$$[Tx, y]_2 = [x, T^c y]_1, \quad \forall x \in \mathcal{K}_1, \quad \forall y \in \mathcal{K}_2,$$

также является несжимающим. $\square$

Прежде чем познакомиться со свойствами бинесжимающих операторов, рассмотрим некоторые факты из теории чисел, матриц и операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Если $0 < a < b$, то, очевидно, $a^{-1} > b^{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Если A_n и B_n — матрицы размером $n \times n$, то из условий

$$0 < (A_n x, x) \leqslant (B_n x, x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0,$$

следует свойство $A_n^{-1} \geqslant B_n^{-1}$, т.е.

$$(A_n^{-1} x, x) \geqslant (B_n^{-1} x, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для положительно определенных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$: если выполнены условия $0 \ll A \leq B$, то $A^{-1} \geq B^{-1} \gg 0$.

Если $a < b$, то условие $a^{-1} > b^{-1}$ выполнено не всегда. Для матриц A_n и B_n можно доказать следующий факт, который предлагается установить самостоятельно.

Упражнение 1.2. Из условия $A_n \leqslant B_n$ свойство $A_n^{-1} \geqslant B_n^{-1}$ следует тогда и только тогда, когда сигнатуры матриц A_n и B_n, т.е. разности между числом положительных и числом отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей) этих матриц, совпадают.

$\square$

Заметим, что если сигнатуры A_n и B_n совпадают и для матрицы C_n справедливо неравенство $A_n \leq C_n \leq B_n$, то $A_n^{-1} \geqslant C_n^{-1} \geqslant B_n^{-1}$.

Пусть теперь A и B — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Тогда (см. упражнение 1.1) имеют место ортогональные разложения

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A^+ \oplus \mathcal{H}_A^- = \mathcal{H}_B^+ \oplus \mathcal{H}_B^-,$$

в которых матричные представления операторов A и B таковы:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{diag}(A_+; A_-), \quad A_+ \gg 0, A_- \ll 0, \\ B &= \operatorname{diag}(B_+; B_-), \quad B_+ \gg 0, B_- \ll 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Оказывается, что если $\dim \mathcal{H}_A^- = \varkappa < \infty$, то условие $A^{-1} \geqslant B^{-1}$ следует из условия $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{H}_B^- = \varkappa$.

Если же все размерности подпространств $\mathcal{H}_A^{\pm}$, $\mathcal{H}_B^{\pm}$ бесконечны, то выяснение того, что из условия $A \leqslant B$ следует условие $A^{-1} \geqslant B^{-1}$, является непростой проблемой.

Пусть операторы A и B, действующие в $\mathcal{H}$, удовлетворяют условиям (1.8). Образуем по этим операторам билинейные формы

$$[x, y]_A := (Ax, y), \quad [x, y]_B := (Bx, y),$$

и введем в рассмотрение соответствующие пространства Крейна $\mathcal{K}_A$ и $\mathcal{K}_B$. Введем далее, оператор $T : \mathcal{K}_A \longrightarrow \mathcal{K}_B$, действующий по закону $Tx := x$ (оператор вложения $\mathcal{K}_A$ в $\mathcal{K}_B$).

Если выполнено условие $A \leqslant B$, то оператор T несжимающий. В самом деле,

$$[Tx, Tx]_B = [x, x]_B = (Bx, x) \geqslant (Ax, x) = [x, x]_A. \tag{1.9}$$

Теорема 1.2. (**Ю.Л. Шмульян**). Из условия $A \leqslant B$ условие $A^{-1} \geqslant B^{-1}$ следует тогда и только тогда, когда оператор $T : \mathcal{K}_A \longrightarrow \mathcal{K}_B$ бинесжимающий.

$\square$

Пусть T — произвольный бинесжимающий оператор, действующий в пространстве Крейна $\mathcal{K}$.

Определение 1.5. Оператор T называется *равномерно бинесжимающим*, если существует такое $k > 0$, что

$$[Tx, Tx] \geqslant [x, x] + k(x, x). \qquad \square$$

Пусть задан оператор V, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Выясним, когда все точки $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| = 1$ являются регулярными точками для V.

Теорема 1.3. (**Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн**). Указанное свойство регулярности точек оператора V на единичной окружности в $\mathbb{C}$ имеет место тогда и только тогда, когда в пространстве $\mathcal{H}$ можно ввести структуру пространства Крейна $\mathcal{K}$ с формой (1.5) так, что $0 \in \rho(W)$, а оператор V является равномерно бинесжимающим относительно этой W-метрики.

$\square$

Сведения, изложенные выше, понадобятся далее при изучении свойств пространства Крейна. Как и для пространств Понтрягина, здесь изложение всего материала разбивается на следующие четыре раздела.

a) Геометрия пространств Крейна. Приложения.

b) Основные классы операторов, их свойства и некоторые приложения.

c) Инвариантные подпространства.

d) Спектральные проблемы.

2 Геометрия пространства Крейна. Приложения

2.1 Определения

Напомним некоторые определения и понятия, известные из теории пространств Понтрягина и переносимые без изменений на случай пространств Крейна $\mathcal{K}$.

Это — положительные ($x > 0 := [x,x] \geq 0$), отрицательные ($x < 0 := [x,x] \leq 0$) и нейтральные ($[x,x] = 0$) элементы, а также соответствующие линеалы: $\mathcal{L} \geqslant 0$, $\mathcal{L} \leqslant 0$, нейтральный линеал. Линеал $\mathcal{L}$ называется *индефинитным*, если существуют такие элементы y и z из $\mathcal{L}$, что $[y,y] > 0$, $[z,z] < 0$.

Линеал $\mathcal{L}$ положителен, если $[x,x] > 0$ для всех ненулевых $x \in \mathcal{L}$; аналогично определяется отрицательный линеал. Далее, *ортогональное дополнение* $\mathcal{L}^{[\perp]}$ к линеалу $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, по определению, есть следующее множество

$$\mathcal{L}^{[\perp]} := \{y \in \mathcal{K} : \ [x,y] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}\}\,. \tag{2.1}$$

Напомним еще, что *изотропной частью* $\mathcal{L}^0$ линеала $\mathcal{L}$ называется линеал

$$\mathcal{L}^0 := \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} = \{x \in \mathcal{L} : \ [x,y] = 0, \quad \forall y \in \mathcal{L}\}\,.$$

Если $\mathcal{L}^0 = \{0\}$, то $\mathcal{L}$ называют *невырожденным линеалом*, в противном случае — *вырожденным*.

Определение 2.1. Неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ называют *максимальным неотрицательным* подпространством, если не существует такого $\widetilde{\mathcal{L}} \geqslant 0$, что $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L} \neq \widetilde{\mathcal{L}}$. □

Аналогично определяются максимальные неположительные и нейтральные подпространства.

Определение 2.2. Подпространство (линеал) $\mathcal{L}$ называется *равномерно положительным*, $\mathcal{L} \gg 0$, если найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$[x,x] \geqslant \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{L}. \tag{2.2}$$

Соответственно $\mathcal{L}$ равномерно отрицательно, $\mathcal{L} \ll 0$, если найдется $\beta > 0$ такое, что

$$-[y,y] \geqslant \beta \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{L}. \tag{2.3}$$

□

Отметим, что максимальное нейтральное подпространство является либо максимальным неотрицательным, либо максимальным неположительным, либо тем и другим одновременно. В последнем случае подпространство называется *гипермаксимальным*.

Множество всех неотрицательных элементов обозначают символом $\mathfrak{P}^+$, неположительных — символом $\mathfrak{P}^-$, а нейтральных — символом $\mathfrak{P}^0$. Соответственно совокупность всех максимальных неотрицательных подпространств обозначают через $\mathfrak{M}^+$, а максимальных неположительных — через $\mathfrak{M}^-$. В этих обозначениях линеал $\mathcal{L} \geqslant 0$, если $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^+$; $\mathcal{L}$ гипермаксимален, если $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^0$ и $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-$.

Семидефинитными линеалами называют линеалы, содержащие элементы одного знака, а *дефинитными* — семидефинитные линеалы, не содержащие ненулевые нейтральные векторы.

Упражнение 2.1. Доказать, что линеал является дефинитным тогда и только тогда, когда он не содержит ненулевых нейтральных элементов. □

Проведем сопоставление некоторых геометрических свойств пространств Понтрягина и Крейна. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство. Если оно невырождено, то
$$\Pi_\varkappa = \mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]}, \tag{2.4}$$
причем невырожденность $\mathcal{L}$ является необходимым и достаточным условием свойства (2.4). В пространстве Крейна это не так, т.е. из свойств невырожденности $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ может не следовать факт ортогонального разложения
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]}. \tag{2.5}$$

Определение 2.3. Будем говорить, что подпространство $\mathcal{L}$ *проекционно полное*, если справедливо разложение (2.5). □

Замечание 2.1. Отметим, что если $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ и невырождено, то
$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]}}. \tag{2.6}$$
□

Пусть $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ — произвольное подпространство. Поскольку
$$|[x, y]| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{L},$$
т.е. сужение индефинитной формы $[\cdot, \cdot]$ на $\mathcal{L}$ является ограниченным полутора-линейным функционалом, то по известной теореме Рисса

существует оператор G (оператор Грама подпространства $\mathcal{L}$) такой, что

$$[x,y]=(Gx,y), \quad \forall x,y\in\mathcal{L}, \quad G:\,\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}. \tag{2.7}$$

Определение 2.4. Если в (2.7) оператор $G:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$ непрерывно обратим, то $\mathcal{L}$ называют *регулярным* (или *правильным*) подпространством. □

Упражнение 2.2. Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна и $\mathcal{L}$ — его подпространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1° $\mathcal{L}$ — проекционно полно;

2° $\mathcal{L}$ — регулярно;

3° $\mathcal{L}$ является пространством Крейна. □

Отметим, что эквивалентность первых двух утверждений была доказана независимо А.В. Кужелем и рядом других авторов.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{K}$ является J-пространством, т.е.

$$[x,y]=(Jx,y), \quad J=J^*=J^{-1}. \tag{2.8}$$

Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство в $\mathcal{K}$, а P — ортопроектор на $\mathcal{L}$. Выразим оператор Грама G подпространства $\mathcal{L}$ через операторы J и P.

По определению оператора Грама для любых $x,y\in\mathcal{L}$ имеем тождество (2.7). С другой стороны, из (2.8) получаем

$$[x,y]=(Jx,y)=(JPx,Py)=(PJP,y), \quad \forall x,y\in\mathcal{L}. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что

$$G=PJP|_{\mathcal{L}}:\,\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}. \tag{2.10}$$

□

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда подпространство $\mathcal{L}$ вырождено либо невырождено. Ответ в терминах свойств оператора Грама содержится в следующих утверждениях.

1° Подпространство $\mathcal{L}$ вырождено тогда и только тогда, когда оператор Грама G этого подпространства имеет нетривиальное ядро: $\operatorname{Ker} G\neq\{0\}$.

2° Подпространство $\mathcal{L}$ невырождено тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} G = \{0\}$.

Если $\mathcal{L} \geqslant 0$, то его изотропная часть $\mathcal{L}^0$ совпадает с совокупностью нейтральных векторов, содержащихся в $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^0 = \{x \in \mathcal{L} : \ [x, x] = 0\}, \quad \mathcal{L} \geqslant 0,$$

т.е.

$$\mathcal{L}^0 = \mathfrak{P}^0 \cap \mathcal{L}, \quad \text{если} \quad \mathcal{L} \geqslant 0.$$

Упражнение 2.3. Пусть $\mathcal{L}$ — индефинитное подпространство. Тогда $\mathcal{L}^0 \subset \mathfrak{P}^0 \cap \mathcal{L}$. Доказать, что $\mathcal{L}$ семидефинитно в том и только в том случае, когда

$$\mathcal{L}^0 = \mathfrak{P}^0 \cap \mathcal{L}. \qquad \square$$

Одной из важных и интересных проблем является вопрос о том, когда сумма подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ замкнута, т.е. является подпространством. Известно, что это имеет место, если выполнено одно из следующих условий (проверьте!):

1° подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ ортогональны относительно гильбертова скалярного произведения.

2° хотя бы одно из подпространств $\mathcal{L}$ или $\mathcal{M}$ конечномерно, в частности, если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — семидефинитные подпространства разного знака в пространстве Понтрягина.

3° $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — семидефинитные подпространства пространства Крейна, причем хотя бы одно из них регулярно.

Заметим, что замкнутость суммы подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в условиях, когда оба являются регулярными разного знака, доказана И.С. Иохвидовым и В.А. Сендеровым.

2.2 Метод угловых операторов

Рассмотрим, как и в пространстве $\Pi_\varkappa$, свойства семидефинитных подпространств и их угловых операторов.

Пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-, \quad J = P^+ - P^-, \quad [x, y] = (Jx, y).$$

Тогда $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^+$ в том и только том случае, когда найдется (угловой) оператор $K = K(\mathcal{L}) : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-, \|K\| \leqslant 1$, такой что

$$\mathcal{L} = \left\{ x_+ + Kx_+ : \ x_+ \in P^+\mathcal{L}, \quad K = P^-(P^+|\mathcal{L})^{-1} \right\}.$$

При этом (проверьте!)

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \Longleftrightarrow P^+\mathcal{L} = \overline{P^+\mathcal{L}}$$

и

$$\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \Longleftrightarrow P^+\mathcal{L} = \mathcal{K}^+.$$

Аналогичные факты имеют место и для неположительных подпространств. А именно, $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^-$ тогда и только тогда, когда найдется (угловой) оператор $Q : \ \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{K}^+$, $\|Q\| \leqslant 1$, такой, что

$$\mathcal{L} = \left\{ Qx_- + x_-, \quad x_- \in P^-\mathcal{L}, \quad Q = P^+(P^-|_{\mathcal{L}})^{-1} \right\}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{L} > 0 \Longleftrightarrow \|Kx_+\| < \|x_+\|, \quad x = x_+ + Kx_+ \neq 0, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{L} < 0 \Longleftrightarrow \|Qx_-\| < \|x_-\|, \quad x = Qx_- + x_- \neq 0. \tag{2.12}$$

Неравенство (2.11) следует из формулы

$$[x, x] = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\|^2 > 0, \quad \forall x \in \mathcal{L} > 0, \ x \neq 0,$$

а неравенство (2.12) — из аналогичной для $\mathcal{L} < 0$.

Лемма 2.1. *Неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ пространства Крейна $\mathcal{K}$ является равномерно положительным тогда и только тогда, когда для его углового оператора K выполнено условие $\|K\| \ < 1$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ равномерно положительно, т.е. существует $\alpha > 0$ такое, что $[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2$ для всех $x \in \mathcal{L}$. Поскольку здесь всегда $\alpha \leqslant 1$ (почему?), то будем без ограничения общности считать $\alpha < 1$.

Для любых $x \in \mathcal{L}$ имеем

$$[x, x] = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\|^2 \geqslant \alpha \left[\|x_+\|^2 + \|Kx_+\|^2 \right],$$

откуда следует, что

$$(1 - \alpha)\|x_+\|^2 \geqslant (1 + \alpha)\|Kx_+\|^2,$$

и потому

$$\|Kx_+\|^2 \leqslant \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\|x_+\|^2 \Longrightarrow \|K\| \leqslant \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/2} < 1. \qquad (2.13)$$

Обратно, если $\|K\| < 1$, то найдется такое α, $0 < \alpha < 1$, что выполнено неравенство (2.13), и обратный ход рассуждений показывает, что подпространство $\mathcal{L}$ с угловым оператором K равномерно положительно. □

2.3 Расширение линеалов и подпространств

Этот вопрос так же важен в пространстве Крейна, как и в пространстве Понтрягина.

Определение 2.5. Подпространство $\widetilde{\mathcal{L}}$ называется расширением подпространства $\mathcal{L}$, если $\widetilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}$. □

Аналогично определяется расширение углового оператора K, отвечающего подпространству $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^+$, а именно:

Определение 2.6. Пусть $K : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-$, $\widetilde{K} : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-$, $\|K\| \leqslant 1$, $\|\widetilde{K}\| \leqslant 1$. Оператор $\widetilde{K}$ называется расширением оператора K, $\widetilde{K} \supset K$, если $\operatorname{dom} K \subset \operatorname{dom} \widetilde{K}$ и $\widetilde{K}x = Kx$ для любого $x \in \operatorname{dom} K$.

□

Для неотрицательных подпространств и отвечающих им угловых операторов справедливо следующее утверждение (продумайте это!): если неотрицательным подпространствам $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ отвечают угловые операторы K и $\widetilde{K}$ соответственно, то

$$\left\{\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{L}}\right\} \Longleftrightarrow \left\{K \subset \widetilde{K}\right\}. \qquad (2.14)$$

Теорема 2.1 (о расширении семидефинитных подпространств до максимальных). Справедливы следующие утверждения:

1° Каждое семидефинитное подпространство допускает расширение до максимального семидефинитного подпространства того же знака.

2° Каждое дефинитное (равномерно дефинитное) подпространство допускает расширение до максимального дефинитного (максимального равномерно дефинитного) подпространства того же знака.

3° Каждое нейтральное подпространство $\mathcal{L}$ допускает расширение до максимального нейтрального подпространства $\widetilde{\mathcal{L}}$, при этом $\widetilde{\mathcal{L}}$ либо максимальное неотрицательное, либо максимальное неположительное.

4° Нейтральное подпространство $\mathcal{L}$ допускает расширение до гипермаксимального нейтрального тогда и только тогда, когда

$$\dim\left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right) = \dim\left((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-\right). \tag{2.15}$$

Доказательство.

$1°-2°$. Эти утверждения мы докажем одновременно. Пусть $\mathcal{L} \geqslant 0$, тогда

$$\mathcal{L} = \left\{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}\right\}.$$

Так как $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$, то $P^+\mathcal{L}$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{K}^+$. Поэтому

$$\mathcal{K}^+ = \left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right) \oplus \left(P^+\mathcal{L}\right). \tag{2.16}$$

Значит,

$$\mathcal{K} = \left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right) \oplus \left(P^+\mathcal{L}\right) \oplus \mathcal{K}^-, \tag{2.17}$$

причем

$$\mathcal{L} \subset \left(P^+\mathcal{L}\right) \oplus \mathcal{K}^-. \tag{2.18}$$

Присоединим к $\mathcal{L}$ положительные элементы, входящие в подпространство $\left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+$, и образуем линеал

$$\widetilde{\mathcal{L}} := \left(\left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+\right)[\oplus]\mathcal{L} \geqslant 0. \tag{2.19}$$

Докажем, что $\widetilde{\mathcal{L}}$ — максимальное подпространство. В самом деле, это немедленно следует из того, что по построению $P^+\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{K}^+$:

$$P^+\widetilde{\mathcal{L}} = \left(\left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+\right) \oplus \left(P^+\mathcal{L}\right) = \mathcal{K}^+.$$

Заметим, что множество $\left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+$ называют *дефектным подпространством* для $\mathcal{L}$, именно его и добавили к $\mathcal{L}$ при расширении $\mathcal{L}$ до максимального подпространства $\widetilde{\mathcal{L}}$ (см. (2.19)).

Если $\mathcal{L} \leqslant 0$, то следует провести аналогичное расширение, добавив отрицательные элементы, составляющие множество $(P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-$.

Итак, доказано, что если $\mathcal{L} \geqslant 0$, то $\widetilde{\mathcal{L}}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Так как расширение происходило за счет добавления положительных элементов, то если исходное подпространство $\mathcal{L}$ было положительным, $\mathcal{L} > 0$, то его расширение $\widetilde{\mathcal{L}}$ также является положительным подпространством.

Предположим теперь, что подпространство $\mathcal{L}$ равномерно положительно. Докажем, что при проведенном расширении максимальное подпространство $\widetilde{\mathcal{L}}$ также равномерно положительно.

В самом деле, для любого $x \in \widetilde{\mathcal{L}}$ имеем

$$x = x_+ + y, \quad x_+ \in (P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+, \quad y \in \mathcal{L}.$$

Тогда, с учетом свойства $x_+[\perp]y$, см. (2.19), получим

$$[x,x] = [x_+,x_+] + [y,y] = \|x_+\|^2 + [y,y] \geqslant \|x_+\|^2 + \alpha\|y\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \alpha\left(\|x_+\|^2 + \|y\|^2\right) = \alpha\|x\|^2,$$

так как $\alpha \leqslant 1$ (для элементов равномерно положительного подпространства $\mathcal{L}$). Итак, утверждения 1° и 2° доказаны.

3°. Воспользуемся следующим разложением пространства Крейна:

$$\mathcal{K} = \left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right)[\oplus]\left(P^+\mathcal{L} \oplus P^-\mathcal{L}\right)[\oplus]\left((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-\right).$$

Здесь, очевидно,

$$\begin{aligned} \left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right)[\oplus]P^+\mathcal{L} &= \mathcal{K}^+, \\ P^-\mathcal{L}[\oplus]\left((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-\right) &= \mathcal{K}^-, \end{aligned} \tag{2.20}$$

причем для нейтрального $\mathcal{L}$ имеем

$$(P^+\mathcal{L}) \oplus (P^-\mathcal{L}) = \mathcal{L}.$$

Рассмотрим далее для определенности случай, когда

$$n_+ := \dim\left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right) \leqslant \dim\left((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-\right) =: n_-. \tag{2.21}$$

(В другом варианте можно провести симметричные рассуждения.)

Так как пространство Крейна сепарабельно, то в каждом из подпространств $(P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+$ и $(P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-$ существуют ортонормированные базисы $\{e_k^+\}_{k=1}^{n_+}$ и $\{e_j^-\}_{j=1}^{n_-}$ соответственно, причем $n_+ \leqslant n_- \leqslant \infty$. Введем на элементах $x = \sum_{k=1}^{n_+} \alpha_k e_k^+$ оператор K_1 по закону

$$K_1 \left(\sum_{j=1}^{n_+} \alpha_j e_j^+ \right) := \sum_{j=1}^{n_+} \alpha_j e_j^-. \tag{2.22}$$

Тогда

$$(K_1 x_+, K_1 x_+) = (x_+, x_+), \quad \forall x_+ \in \left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+, \tag{2.23}$$

так как

$$\| \sum_{j=1}^{n_+} \alpha_j e_j^\pm \|^2 = \sum_{j=1}^{n_+} |\alpha_j|^2 < \infty. \tag{2.24}$$

Подпространство

$$\mathcal{L}_1 := \left\{ x_+ + K_1 x_+ \mid x_+ \in (P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+ \right\} \tag{2.25}$$

является нейтральным, поскольку

$$[x_+ + x_-, x_+ + x_-] = [x_+ + K_1 x_+, x_+ + K_1 x_+] =$$
$$= \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \|x_+\|^2 - \|K_1 x_+\|^2 = 0.$$

Введем подпространство

$$\widetilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}, \tag{2.26}$$

являющееся ортогональной суммой двух нейтральных подпространств. Как и в п.п. $1^\circ - 2^\circ$, можно проверить, что оно является максимальным. В самом деле, в силу первой формулы (2.20) и (2.25):

$$P^+\widetilde{\mathcal{L}} = P^+\mathcal{L}_1 \oplus P^+\mathcal{L} = \left((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\right) \oplus P^+\mathcal{L} = \mathcal{K}^+, \tag{2.27}$$

и тем самым третье утверждение теоремы доказано.

4°. Пусть теперь выполнено условие (2.15). Тогда в прежних обозначениях вместо (2.21) выполнено условие $n_+ = n_- =: n$. Введем аналогично (2.22) оператор K_1, а по нему, как и выше, подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$. Тогда, с одной стороны, $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+$, как это установлено в части 3^0 теоремы, а с другой, аналогично рассуждая, $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^-$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-$, т.е. $\mathcal{L}$ является гипермаксимальным нейтральным подпространством.

Теорема доказана. $\square$

Упражнение 2.4. Установить, что условие (2.15) является и необходимым для справедливости утверждения 4°. □

Упражнение 2.5. Пусть пространство Крейна $\mathcal{K}$ имеет прямое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{L} \dotplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — подпространства, $\mathcal{L} \geqslant 0$, $\mathcal{M} \leqslant 0$. Доказать, что:

1° $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\}$;

2° $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — максимальные семидефинитные подпространства.

Решение упражнения 2.5.

1°. Пусть $x_0 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Тогда $[x_0, x_0] \geqslant 0$, $[x_0, x_0] \leqslant 0$, т.е. $[x_0, x_0] = 0$ и потому x_0 — нейтральный элемент. Так как $x_0 \in \mathcal{L} \geqslant 0$, то x_0 — изотропный элемент подпространства $\mathcal{L}$, поскольку

$$|[x_0, x]|^2 \leqslant [x_0, x_0] \cdot [x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}.$$

Аналогично устанавливаем, что x_0 — изотропный элемент подпространства $\mathcal{M}$, а потому и всего пространства $\mathcal{K}$. Следовательно, $x_0 = 0$, так как $[x_0, Jx_0] = (x_0, x_0) = 0$.

2°. Проведем доказательство от противного. Пусть $\mathcal{L}$ не является максимальным подпространством. Тогда по теореме 2.1 его можно расширить до максимального неотрицательного подпространства $\widetilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}$, и будем иметь

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} + \mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{L}} + \mathcal{M} \subset \mathcal{K}.$$

Поэтому $\widetilde{\mathcal{L}} + \mathcal{M} = \mathcal{K}$ и, согласно доказанному в п. 1°, $\widetilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{M} = \{0\}$. Значит, $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$.

□

Рассмотрим далее некоторые другие факты, связанные с расширениями семидефинитных подпространств. Напомним, что между множеством $\mathfrak{M}^+$ всех неотрицательных максимальных подпространств и единичным операторным шаром

$$\mathfrak{K}_1^+ := \left\{ K : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-, \quad \|K\| \leqslant 1 \right\},$$

имеется взаимно однозначное соответствие. Кроме того, по теореме Тихонова $\mathfrak{K}_1^+$ является компактом в слабой операторной топологии (см. теорему 3.13 в [5], с. 60).

Пусть $\mathcal{L}_0 \geqslant 0$ — произвольное неотрицательное подпространство в $\mathcal{K}$. Введем обозначение

$$\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0) := \{\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+ \mid \mathcal{L}_0 \subset \widetilde{\mathcal{L}}\}. \tag{2.28}$$

Так как

$$\mathcal{L}_0 = \{x_+ + K_0 x_0 \mid x_0 \in P^+ \mathcal{L}_0\},$$

то аналогично (2.28) введем обозначение:

$$\mathfrak{K}_1^+(K_0) := \{K \in \mathfrak{K}_1^+ \mid K_0 \subset K\}. \tag{2.29}$$

Упражнение 2.6. Доказать, что между множествами $\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0)$ и $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$, где K_0 — угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_0$, имеется взаимно однозначное соответствие. □

Упражнение 2.7. Доказать, что множество $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$ выпукло и компактно в слабой операторной топологии.

Указания к доказательству упражнения 2.7. Для установления выпуклости нужно проверить, что если $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_1^+(K_0)$, то $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 \in \mathfrak{K}_1^+(K_0)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Далее, так как $\mathfrak{K}_1^+(K_0) \subset \mathfrak{K}_1^+$, а $\mathfrak{K}_1^+$ компактно (в слабой операторной топологии) по теореме Тихонова, то $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$ компактно (в слабой операторной топологии) тогда и только тогда, когда оно замкнуто (в слабой операторной топологии). Поэтому достаточно убедиться в замкнутости $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$.

□

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathcal{L} \geqslant 0$. *Тогда*

$$\{\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-\}. \tag{2.30}$$

При этом, если K — угловой оператор для $\mathcal{L}$, то K^* — угловой оператор для $\mathcal{L}^{[\perp]}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \geqslant 0$ и $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$. Рассмотрим $\mathcal{L}^{[\perp]}$ и докажем, что оно является неположительным подпространством.

В самом деле, если $\mathcal{L}^{[\perp]}$ этим свойством не обладает, то найдется $y_0 \in \mathcal{L}^{[\perp]}$ такой, что $[y_0, y_0] > 0$ и $y_0 [\perp] \mathcal{L}$. Отсюда следует, что подпространство

$$\widetilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} + \text{л.о.}\{y_0\}, \quad y_0 \neq 0,$$

неотрицательно и является расширением максимального неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ — противоречие. Отсюда следует, что $\mathcal{L}^{[\perp]} \leqslant 0$.

Рассмотрим подпространство

$$\mathcal{M} := \{K^* x_- + x_- : \, x_- \in \mathcal{K}^-\}.$$

По определению это подпространство является максимальным неположительным. Пусть теперь $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$ — произвольные элементы. Тогда они представимы в виде

$$x = x_+ + K x_+, \quad y = K^* y_- + y_-,$$

и потому взаимно ортогональны:

$$[x, y] = (x_+, K^* y_-) - (K x_+, y_-) = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}$. Так как $\mathcal{M}$ — максимальное неположительное подпространство, а $\mathcal{L}^{[\perp]} \leqslant 0$, то $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{[\perp]}$.

Поскольку (проверьте!) $\left(\mathcal{L}^{[\perp]}\right)^{[\perp]} = \mathcal{L}$, то тем самым свойство (2.30) доказано в обе стороны. $\square$

Упражнение 2.8. Доказать, что в условиях леммы 2.2

$$\{\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{L}^\perp \in \mathfrak{M}^-\},$$

где символом $\mathcal{L}^\perp$ обозначено ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ относительно канонического скалярного произведения. $\square$

В качестве следствия установленных фактов приведем еще в виде упражнения такое утверждение.

Упражнение 2.9. Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, то

$$\{\mathcal{L} > 0 \quad (\mathcal{L} \gg 0)\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{L}^{[\perp]} < 0 \quad (\mathcal{L}^{[\perp]} \ll 0)\},$$

где в скобках использованы обозначения равномерно положительного и равномерно отрицательного подпространств. $\square$

Напомним (докажите!) теперь некоторые простые факты из теории линейных операторов, действующих из одного гильбертова пространства в другое. Пусть $A : \ \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ и $B : \ \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ — непрерывные операторы. Тогда, очевидно, $AB : \ \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ и $BA : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ — также непрерывные операторы, но действующие уже в одном пространстве.

Ниже нам понадобится следующая известная теорема.

Теорема 2.2. Точка $\lambda \neq 0$ является регулярной для оператора AB, $\lambda \in \rho(AB)$, тогда и только тогда, когда $\lambda \in \rho(BA)$, т.е.

$$\{\rho(AB)\backslash\{0\}\} \iff \{\rho(BA)\backslash\{0\}\},$$
$$\{\sigma(AB)\backslash\{0\}\} \iff \{\sigma(BA)\backslash\{0\}\}. \qquad \square$$

Следствием теоремы 2.2 являются такие свойства.

1° $\{1 \in \rho(AB)\} \iff \{1 \in \rho(BA)\}$;

2° $\sigma_p(AB)\backslash\{0\} = \sigma_p(BA)\backslash\{0\}$.

3° $\sigma_c(AB)\backslash\{0\} = \sigma_c(BA)\backslash\{0\}$;

4° $\sigma_r(AB)\backslash\{0\} = \sigma_r(BA)\backslash\{0\}$.

Далее понадобится еще один важный факт.

Лемма 2.3. *Если* $\|A\| \leqslant 1$, $\|B\| \leqslant 1$, *то* $1 \notin \sigma_r(AB)$. $\square$

Это утверждение, в свою очередь, вытекает из следующего более общего результата.

Лемма 2.4. *Пусть* $K : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\|K\| \leqslant 1$. *Тогда* $1 \notin \sigma_r(K)$.

Доказательство. Предположим противное: $1 \in \sigma_r(K)$. Тогда, как известно, $1 \in \sigma_p(K^*)$, т.е. существует ненулевой элемент $x_0 \in \mathcal{H}$ такой, что $K^*x_0 = x_0$. Проверим, что $Kx_0 = x_0$ и тем самым получим противоречие с предположением.

Для доказательства равенства $Kx_0 = x_0$ рассмотрим билинейную форму

$$\langle x, y\rangle := (x, y) - (K^*x, K^*y). \tag{2.31}$$

Так как по условию $\|K^*\| = \|K\| \leqslant 1$, то форма (2.31) неотрицательна, т.е. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Поэтому для нее имеет место неравенство Коши–Буняковского:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle. \tag{2.32}$$

Пусть $x = x_0$, а y — любой элемент из $\mathcal{H}$. Так как $K^*x_0 = x_0$, то $\langle x_0, x_0\rangle = 0$ и потому согласно (2.32) имеем $\langle x_0, y\rangle = 0$, т.е.

$$(x_0, y) - (K^*x_0, K^*y) = 0.$$

Отсюда получаем

$$(x_0 - KK^*x_0, y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

т.е. $x_0 = K(K^*x_0) = Kx_0$. $\square$

Опираясь на приведенные выше сведения, докажем одно из важных утверждений из геометрии семидефинитных подпространств в пространстве Крейна.

Теорема 2.3 (о сумме максимальных семидефинитных подпространств). Пусть

$$\mathcal{L} \quad = \quad \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathcal{K}^+\} \in \mathfrak{M}^+, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{M} \quad = \quad \{Qx_- + x_- : \, x_- \in \mathcal{K}^-\} \in \mathfrak{M}^-. \tag{2.34}$$

Тогда:

1° $\left\{\overline{\mathcal{L}+\mathcal{M}} \neq \mathcal{K}\right\} \Longleftrightarrow \{1 \in \sigma_p(KQ)\} \Longleftrightarrow \{1 \in \sigma_p(QK)\}$;

2° $\left\{\overline{\mathcal{L}+\mathcal{M}} = \mathcal{K}\right\} \Longleftrightarrow \{1 \in \sigma_c(KQ) \cup \rho(KQ)\} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \{1 \in \sigma_c(QK) \cup \rho(QK)\}$;

3° $\{\mathcal{L}+\mathcal{M} = \mathcal{K}\} \Longleftrightarrow \{1 \in \rho(KQ)\} \Longleftrightarrow \{1 \in \rho(QK)\}$.

Доказательство. Проверим свойства 1° и 3°, из которых свойство 2° вытекает автоматически.

1°. Пусть $\overline{\mathcal{L}+\mathcal{M}} \neq \mathcal{K}$. Обозначим $\mathcal{N} =: \left(\overline{\mathcal{L}+\mathcal{M}}\right)^{[\perp]}$. Тогда $\mathcal{N}$ — нейтральное подпространство, совпадающее с $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Действительно, пусть $x_0 \in \mathcal{N}$ и x_0 не является нейтральным элементом, т.е. $[x_0, x_0] \neq 0$, например, $[x_0, x_0] > 0$. Тогда л.о.$\{x_0, \mathcal{L}\} \geqslant 0$ и содержит $\mathcal{L}$, что невозможно, поскольку $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$. Аналогично устанавливаем, что $\mathcal{N}$ не может содержать отрицательных векторов. Следовательно, подпространство $\mathcal{N}$ нейтрально. Более того, из тех же соображений, что и выше, $\mathcal{N}$ не может содержать и нейтральные векторы, не принадлежащие как $\mathcal{L}$, так и $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{N} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

Так как $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — семидефинитные подпространства разных знаков, то $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ — нейтральное подпространство, причем J - ортогональное как $\mathcal{L}$, так и $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

Далее, пусть $x_0 \in \mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Тогда $x_0 \in \mathcal{L}$ и $x_0 \in \mathcal{M}$, потому существуют x_+^0 и x_-^0 такие, что

$$x_0 = x_+^0 + Kx_+^0, \quad x_+^0 \in \mathcal{K}^+, \quad x_0 = Qx_-^0 + x_-^0, \quad x_-^0 \in \mathcal{K}^-.$$

Отсюда следует, что

$$x_+^0 = Qx_-^0, \quad x_-^0 = Kx_+^0 \Longrightarrow x_+^0 = QKx_+^0 \Longrightarrow 1 \in \sigma_p(KQ).$$

Докажем теперь утверждение 1^0 в обратную сторону, т.е. установим, что из свойства $1 \in \sigma_p(QK)$ следует, что $\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} \neq \mathcal{K}$.

Пусть $1 \in \sigma_p(QK)$. Тогда существует ненулевой элемент x_+^0 такой, что $x_+^0 = QKx_+^0 \in \mathcal{K}^+$. Введем элемент $x_-^0 := Kx_+^0 \in \mathcal{K}^-$, и из предыдущего равенства будем иметь соотношения

$$x_0 := x_+^0 + Kx_+^0 = Q(Kx_+^0) + x_-^0 = Qx_-^0 + x_-^0.$$

Из этих двух представлений элемента x_0 следует, в силу (2.33) и (2.34), что $x_0 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$, а потому x_0 — нейтральный элемент. Тогда $x_0[\perp]\mathcal{L}$ и $x_0[\perp]\mathcal{M}$, т.е. $x_0[\perp](\mathcal{L} + \mathcal{M})$. Значит, $\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} \neq \mathcal{K}$, так как $x_0 \neq 0$.

3^0. Докажем теперь третье утверждение теоремы. Пусть $\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}$. Тогда для любого $z \in \mathcal{K}$ найдутся элементы $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$ такие, что $z = x + y$.

Возьмем $z \in \mathcal{K}^+$. Тогда, используя представления, $x = x_+ + Kx_+$, $y = Qy_- + y_-$, имеем

$$z = (x_+ + Qy_-) + (Kx_+ + y_-).$$

Так как здесь $z \in \mathcal{K}^+$, $x_+ + Qy_- \in \mathcal{K}^+$, $Kx_+ + y_- \in \mathcal{K}^-$, то

$$x_+ + Qy_- = z, \quad Kx_+ + y_- = 0.$$

Поэтому $y_- = -Kx_+$ и $z = (I - QK)x_+, \quad \forall z \in \mathcal{K}^+$.

Последнее уравнение разрешимо для любого $z \in \mathcal{K}^+$. Действительно, если $\operatorname{Ker}(I - QK) \neq \{0\}$, то найдется элемент $z_0 \in \mathcal{K}^+$, $z_0 \neq 0$, такой, что $QKz_0 = z_0$. Тогда

$$(z_0, (I - QK)^* u) = ((I - QK)z_0, u) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{K}^+.$$

Это означает, что $1 \in \sigma_r((QK)^*)$. Однако $(QK)^*$ — сжатие (почему?), и эта ситуация невозможна (см. лемму 2.4). Значит, $\operatorname{Ker}(I - QK) = \{0\}$.

В обратную сторону утверждение доказывается аналогично. Наконец, случай $z \in \mathcal{K}^-$ также рассматривается аналогично. Отсюда следует, что разложение $z = x + y$, $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$, справедливо для любого $z \in \mathcal{K}$ и потому утверждение 3°, а вместе с ним и вся теорема, в частности, и свойство 2°, доказаны. $\square$

Приведем некоторые следствия из теоремы 2.3.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{M} := \mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$. *Тогда*

$$\left\{ \mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{K} \right\} \Longleftrightarrow \mathcal{L} \gg 0 \Longleftrightarrow \mathcal{M} \ll 0. \qquad \square$$

Доказательство. В самом деле, если $\mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{K}$, то, согласно утверждению 3° теоремы 2.3, $1 \in \rho(QK) = \rho(K^*K)$. Так как K^*K — самосопряженный неотрицательный оператор, то отсюда следует, что $\|K^*K\| = \|K\|^2 < 1$, т.е. $\|K\| < 1$. Поэтому, согласно лемме 2.1, получаем, что $\mathcal{L}$ — равномерно положительное подпространство. $\square$

Следствие 2.2.

$$\left\{ \overline{\mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]}} \neq \mathcal{K} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} \neq \{0\} \right\} \Longleftrightarrow \{1 \in \sigma_p(K^*K)\}. \qquad \square$$

Следствие 2.3.

$$\left\{ \mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]} \neq \overline{\mathcal{L}[+]\mathcal{L}^{[\perp]}} = \mathcal{K} \right\} \Longleftrightarrow \{1 \in \sigma_c(K^*K)\}. \qquad \square$$

Следствие 2.4. *Пусть* $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$. *Если хотя бы одно из подпространств* $\mathcal{L}$ *либо* $\mathcal{M}$ *— равномерно дефинитное подпространство, то* $\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}$.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{L} \gg 0$, то по лемме 2.1 угловой оператор K этого подпространства имеет норму $\|K\| < 1$. Поэтому $\|KQ\| \leqslant \|K\| \cdot \|Q\| < 1$ и, значит, $1 \in \rho(KQ)$. Отсюда и из утверждения 3° теоремы 2.3 получаем данное следствие, так как случай $\mathcal{M} \ll 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Определение 2.7. Будем говорить, что неотрицательное/неположительное подпространство $\mathcal{L}$ принадлежит классу h^+/h^-, $\mathcal{L} \in h^+/h^-$, если оно допускает представление:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}_1, \quad \dim \mathcal{L}^0 < \infty, \quad \mathcal{L}_1 \gg 0/\ll 0,$$

где $\mathcal{L}^0$ — изотропная часть $\mathcal{L}$, а $\mathcal{L}_1$ — равномерно положительное/отрицательное подпространство. $\square$

Следствие 2.5. *Если* $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \cap h^+$ *и* $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$, *то*

$$\{\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}\} \Longleftrightarrow \{\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\}\}. \tag{2.35}$$

Соотношение (2.35) *остается верным и в симметричном случае: если* $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ *и* $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^- \cap h^-$.

Доказательство. Приведем рассуждения для первого случая, для второго, симметричного, доказательство аналогично.

Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \cap h^+$ и K — его угловой оператор, то согласно определению это подпространство и его составляющие можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left\{ x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\}, \\
\mathcal{L}_1 &= \left\{ x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}_1 \right\}, \\
\mathcal{L}^0 &= \left\{ x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}_0 = (P^+\mathcal{L}_1)^\perp \cap \mathcal{K}^+ \right\}.
\end{aligned}$$

Проверим, что K можно представить в виде суммы равномерного сжатия и конечномерного оператора. В самом деле, так как $\mathcal{L}_1 \gg 0$, то $K_1 := K|_{P^+\mathcal{L}_1}$ по лемме 2.1 является равномерным сжатием, $\|K_1\| < 1$. Согласно утверждению 2° теоремы 2.1 существует равномерное сжатие $\widetilde{K}$, заданное на всем $\mathcal{K}^+$ и являющееся расширением оператора K_1. Так как по условию $\dim \mathcal{L}^0 < \infty$, то коразмерность подпространства $P^+\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{K}^+$ равна $\dim P^+\mathcal{L}^0 < \infty$. Следовательно, оператор $S := K - \widetilde{K}$ является конечномерным, а потому $K = \widetilde{K} + S$ — сумма равномерного сжатия ($\widetilde{K}$) и конечномерного оператора (S).

Пусть теперь Q — угловой оператор подпространства $\mathcal{M}$. Отсюда $KQ = \widetilde{K}Q + SQ$ — сумма равномерного сжатия ($\widetilde{K}Q$) и конечномерного оператора (SQ). Так как $1 \in \rho(\widetilde{K}Q)$, то согласно альтернативы Фредгольма либо $1 \in \sigma_p(\widetilde{K}Q)$, либо $1 \in \rho(\widetilde{K}Q)$. Для завершения доказательства следствия остается сравнить полученное с утверждениями 1° и 3° теоремы 2.3. □

Рассмотрим теперь вопрос о связи различных канонических разложений пространства Крейна.

Пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-, \quad J := P^+ - P^-, \tag{2.36}$$

где $P^\pm$ — ортопроекторы на $\mathcal{K}^\pm$, соответственно. Относительно разложения (2.36) эти проекторы и оператор J имеют следующие матричные представления:

$$P^+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другое каноническое разложение:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-, \quad J_1 := P_1^+ - P_1^-,$$

где $P_1^{\pm}$ — проекторы на $\mathcal{K}_1^{\pm}$, соответственно. В силу следствия 2.1 имеем $\mathcal{K}_1^{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}$, $\quad \mathcal{K}_1^{+} \gg 0$, $\mathcal{K}_1^{-} \ll 0$. Поэтому существует такое равномерное сжатие $K : \mathcal{K}^{+} \to \mathcal{K}^{-}$, что

$$\mathcal{K}_1^{+} = \left\{ x = x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathcal{K}^{+} \right\},$$
$$\mathcal{K}_1^{-} = \left\{ x = K^* x_- + x_- \mid x_- \in \mathcal{K}^{-} \right\}.$$

Следующее упражнение дает ответ на вопрос о матричном представлении канонических проекторов $P_1^{\pm}$ через угловой оператор K подпространства $\mathcal{K}_1^{+}$.

Упражнение 2.10. Доказать, что в разложении (2.36)

$$P_1^{+} = \begin{pmatrix} (I - K^*K)^{-1} & -(I - K^*K)^{-1}K^* \\ K(I - K^*K)^{-1} & -K(I - K^*K)^{-1}K^* \end{pmatrix},$$

$$P_1^{-} = \begin{pmatrix} -K^*(I - KK^*)^{-1}K & K^*(I - KK^*)^{-1} \\ -(I - KK^*)^{-1}K & (I - KK^*)^{-1} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Рассмотрим ситуацию более общую, нежели пространство Крейна, и в качестве упражнения решим вопрос об описании неположительных линеалов. Результатом этого упражнения мы воспользуемся в дальнейших рассмотрениях.

Упражнение 2.11. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \quad W := \operatorname{diag}(W_+; -W_-), \quad W_{\pm} \geqslant 0, \quad W_+ \gg 0. \tag{2.37}$$

Введем билинейную форму

$$[x, y] := (Wx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{2.38}$$

Доказать, что линеал $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ неположителен по форме (2.38) тогда и только тогда, когда найдется оператор $Q : \ \mathcal{H}_- \longrightarrow \mathcal{H}_+$, $\|Q\| \leqslant 1$, такой, что

$$\mathcal{L} = \left\{ W_+^{-1/2} Q W_-^{1/2} x_- + x_- : \ x_- \in P_- \mathcal{L} \right\}. \tag{2.39}$$

Если Q задан на всем $\mathcal{H}_-$, то $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^{-}$. $\square$

Указание к решению упражнения 2.11. Проверить, что неотрицательность вектора $x = x_+ + x_-$ равносильна условию:

$$(W_+ x_+, x_+) \leqslant (W_- x_-, x_-), \quad x = x_+ + x_- \in \mathcal{L},$$

или, что эквивалентно, условию

$$(W_+^{1/2}x_+, W_+^{1/2}x_+) \leqslant (W_-^{1/2}x_-, W_-^{1/2}x_-).$$

Теперь остается определить оператор Q. $\square$

Приведем пример ситуации, встретившейся в упражнении 2.11. Пусть $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство в пространстве Крейна $\mathcal{K}$. Найдем $\mathcal{L}^{[\perp]}$. Очевидно, $\mathcal{K}$ допускает представление

$$\mathcal{K} = \left[\left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \mathcal{K}^+\right] [\oplus] \left[P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-\right]. \tag{2.40}$$

Так как $\mathcal{L} \geqslant 0$, то

$$\mathcal{L} = \left\{x_+ + Kx_+ :\ x_+ \in P^+\mathcal{L}, \quad \|K\| \leqslant 1\right\}, \tag{2.41}$$

где $K = K_\mathcal{L}$ — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{L} \subset P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-. \tag{2.42}$$

Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, т.е. $\mathcal{L}$ — максимальное неотрицательное подпространство, то по лемме 2.2 $\mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$. Поэтому $P^-\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{K}^-$ и имеет место представление

$$\mathcal{L}^{[\perp]} = \left[\left(P^+\mathcal{L}\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+\right] [\oplus] \left[\mathcal{L}^{[\perp]} \cap \left(P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-\right)\right]. \tag{2.43}$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках, очевидно, есть подмножество $\mathcal{K}^+$, а второе слагаемое — подмножество из $\mathcal{L}^{[\perp]}$, т.е. неотрицательное подпространство.

Введем оператор W, имеющий в ортогональном разложении $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$ матричное представление

$$W := \operatorname{diag}(I; G) =: \operatorname{diag}(W_+; -W_-), \tag{2.44}$$

где G — оператор Грама подпространства $\mathcal{L}^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-)$. Тогда в силу (2.43) W — оператор Грама подпространства $\mathcal{L}^{[\perp]}$.

Нетрудно видеть, что формула (2.44) для W есть частный случай формулы (2.37), когда

$$W_+ = I, \quad W_- = -G, \quad W_\pm \geqslant 0, \quad W_+ \gg 0. \tag{2.45}$$

Таким образом, ситуация, описанная в упражнении 2.11, является естественной в пространстве Крейна.

2.4 Дуальные пары

Введем важное для дальнейшего понятие дуальных пар подпространств пространства Крейна. В пространстве Понтрягина это понятие уже встречалось ранее.

Определение 2.8. Пара подпространств $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ называется дуальной, если

$$\mathcal{L}_+ \subset \mathfrak{P}^+, \quad \mathcal{L}_- \subset \mathfrak{P}^-, \quad \mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-,$$

т.е.

$$[x, y] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}_+, \quad \forall y \in \mathcal{L}_-. \qquad \square$$

Определение 2.9. Дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ называется максимальной, если $\mathcal{L}_\pm$ — максимальные подпространства, т.е. $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$. $\square$

Приведем важный результат Р.С. Филлипса, связанный с возможностью расширения дуальных пар.

Теорема 2.4. (**о расширении дуальных пар**). Каждую дуальную пару $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ можно расширить до максимальной дуальной пары $\left\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\right\}$:

$$\mathcal{L}_\pm \subset \widetilde{\mathcal{L}}_\pm, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_+[\perp]\widetilde{\mathcal{L}}_-, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm. \tag{2.46}$$

Доказательство. Приведем сначала схему доказательства этой теоремы. Рассмотрим подпространство $\mathcal{M} := (\mathcal{L}_+)^{[\perp]}$, которое, очевидно, содержит $\mathcal{L}_-$. Расширим $\mathcal{L}_-$ до максимально возможного подпространства $\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \mathcal{M}$. Тогда окажется, что $\widetilde{\mathcal{L}}_-$ — максимальное неотрицательное подпространство в пространстве $\mathcal{K}$. Далее введем $\widetilde{\mathcal{L}}_+ := \left(\widetilde{\mathcal{L}}_-\right)^{[\perp]}$.

Реализуя эту схему, введем $\mathcal{M} := (\mathcal{L}_+)^{[\perp]}$. Как было установлено выше (см. упражнение 2.11 и пример после него), множество $\mathcal{M}$ является W–пространством с W–метрикой, задаваемой формулой (2.38) с $W = \operatorname{diag}(I; -W_-)$ в ортогональном разложении

$$\mathcal{M} = \left[\left(P^+\mathcal{L}_+\right)^\perp \cap \mathcal{K}^+\right] [\oplus] \left[\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap \left(P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-\right)\right], \tag{2.47}$$

где $-W_-$ — определитель Грама подпространства $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-)$.

Очевидно, по определению $\mathcal{M}$, имеем $\mathcal{L}_- \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{L}_- \leqslant 0$. Поэтому, согласно утверждению упражнения 2.11 и формулам (2.45),

$$\mathcal{L}_- = \left\{ QW_-^{-1/2}x_- + x_- : \, x_- \in P\mathcal{L}_- \right\}, \tag{2.48}$$

где P — проектор на подпространство $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-)$, а $\|Q\| \leqslant 1$.

Возьмем расширение $\widetilde{\mathcal{L}}_-$ подпространства $\mathcal{L}_-$ по формуле

$$\widetilde{\mathcal{L}}_- := \left\{ \widetilde{Q}W_-^{-1/2}x_- + x_- : \, x_- \in \mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap \left(P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^- \right) \right\}, \tag{2.49}$$

где $\widetilde{Q}$ — расширение оператора Q на все подпространство $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-) \supset P\mathcal{L}_-$, причем $\|\widetilde{Q}\| \leqslant 1$. Это можно сделать согласно свойству (2.14). Тогда

$$P\widetilde{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap \left(P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^- \right). \tag{2.50}$$

Возникает вопрос, справедливо ли свойство $P^-\widetilde{\mathcal{L}}_- = \mathcal{K}^-$, т.е. является ли расширение $\widetilde{\mathcal{L}}_-$ максимальным.

Действительно, имеем

$$P^-\widetilde{\mathcal{L}}_- = P^-(P\widetilde{\mathcal{L}}_-) = P^- \left[\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap \left(P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^- \right) \right], \tag{2.51}$$

причем здесь, как и в формуле (2.43), имеет место свойство максимальности правой части в $\mathcal{K}^-$, т.е. $P^-\widetilde{\mathcal{L}}_- = \mathcal{K}^-$.

Наконец, $\widetilde{\mathcal{L}}_+ := \left(\widetilde{\mathcal{L}}_- \right)^{[\perp]}$ также является максимальным неотрицательным подпространством (лемма 2.2) и $\widetilde{\mathcal{L}}_+ \supset \mathcal{L}_+$. Поэтому $\left\{ \widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_- \right\}$ — максимальная дуальная пара. $\square$

Замечание 2.2. Если дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ обладает свойствами $\mathcal{L}_+ \gg 0$, $\mathcal{L}_- \ll 0$, то можно найти такое расширение $\left\{ \widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_- \right\}$ этой пары, $\left\{ \widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_- \right\} \supset \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, что $\widetilde{\mathcal{L}}_+ \gg 0$, $\widetilde{\mathcal{L}}_- \ll 0$ (использовать утверждение 2^0 теоремы 2.1). $\square$

Замечание 2.3. Пусть дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ дефинитна, т.е. $\mathcal{L}_+ > 0$, $\mathcal{L}_- < 0$. Всегда ли расширение $\left\{ \widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_- \right\}$ этой пары тоже дефинитно? Оказывается, не всегда. Так будет в том и только том случае, когда подпространство $\overline{\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}}$ невырождено. $\square$

2.5 Диссипативные операторы

Опираясь на предыдущие факты, перейдем к изучению свойств диссипативных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 2.10. Пусть $A:\ \operatorname{dom}A \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\overline{\operatorname{dom}A} = \mathcal{H}$. Оператор A называют диссипативным, если

$$\operatorname{Im}(Ax, x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \operatorname{dom}A,$$

и максимальным диссипативным, если его нельзя расширить с сохранением свойства диссипативности. $\square$

В проблеме расширения диссипативных операторов важную роль играет следующее утверждение Р.С. Филлипса.

Теорема 2.5. (**о расширении диссипативных операторов**).

1^0. Каждый замкнутый диссипативный оператор A с $\overline{\operatorname{dom}A} = \mathcal{H}$ допускает расширение до максимального диссипативного оператора $\widetilde{A}$, которое замкнуто автоматически.

2^0. Диссипативный оператор A является максимальным диссипативным тогда и только тогда, когда все точки λ с $\operatorname{Im}\lambda < 0$ являются регулярными для A.

3^0. Если операторы A и B диссипативны, замкнуты и плотно заданы, т.е. $\overline{\operatorname{dom}A} = \overline{\operatorname{dom}B} = \mathcal{H}$, и

$$(Ax, y) = (x, -By), \quad \forall x \in \operatorname{dom}A, \quad \forall y \in \operatorname{dom}B,$$

то существует такое максимальное расширение $\widetilde{A}$ оператора A, что $\widetilde{A}$ — максимальный диссипативный оператор и $-\widetilde{A}^* \supset B$.

Доказательство.

1^0. Введем пространство Крейна $\mathcal{K} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, у которого

$$[x, y] := (Jx, y), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \quad Jx = J\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\widetilde{y} \\ i\widetilde{x} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Тогда

$$\left(J\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}\right) = -i(\widetilde{y}, \widetilde{x}) + i(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = -2\operatorname{Im}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 2\operatorname{Im}(\widetilde{y}, \widetilde{x}).$$

Введем линеал

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} :\ x \in \operatorname{dom} A \right\} = \Gamma_A = \overline{\Gamma}_A, \tag{2.53}$$

являющийся графиком оператора A и потому замкнутым подпространством. Так как

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} \right] = 2\operatorname{Im}(Ax, x) \geqslant 0,$$

то $\mathcal{L}$ — неотрицательный линеал в $\mathcal{K}$. По теореме 2.1 его можно расширить до максимального неотрицательного подпространства $\widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+$. Если $\widetilde{\mathcal{L}}$ является графиком некоторого максимального диссипативного оператора $\widetilde{A}$, то свойство 1^0 будет доказано. С этой целью проверим, что в $\widetilde{\mathcal{L}}$ нет элементов вида $u := (0; \widetilde{u})^t$ с $\widetilde{u} \neq 0$. Пусть, напротив, элемент $u = (0; \widetilde{u})^t \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Так как для такого элемента выполнено свойство $(Ju, u) = 0$, то u — нейтральный элемент, а так как $\widetilde{\mathcal{L}} \geqslant 0$, то он изотропен (почему?). Возьмем элемент $(x; Ax)^t \in \mathcal{L} = \Gamma_A$. Тогда

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} \right] = -i(\widetilde{u}, x) = 0, \quad \forall x \in \operatorname{dom} A, \quad \overline{\operatorname{dom} A} = \mathcal{H}.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{u} = 0$ и потому $\widetilde{\mathcal{L}} = \Gamma_{\widetilde{A}}$, т.е. является графиком некоторого оператора $\widetilde{A} \supset A$, который по построению максимальный диссипативный.

2^0. Пусть A — максимальный диссипативный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Введем, как и выше, пространство Крейна $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, оператор J из (2.52) и соответствующее скалярное произведение $[x, y]$. Так как $J = P^+ - P^-$, $I = P^+ + P^-$, то

$$P^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -iI \\ iI & I \end{pmatrix}, \quad P^- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{pmatrix},$$

$$K^+ = P^+\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} :\ x \in \mathcal{H} \right\}, \quad \mathcal{K}^- = P^-\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} :\ x \in \mathcal{H} \right\}.$$

Введем, далее, неотрицательное подпространство $\mathcal{L} = \Gamma_A$, см. (2.53). Докажем, что A является максимальным диссипативным оператором тогда и только тогда, когда $\Gamma_A \in \mathfrak{M}^+$ либо, что равносильно, $P^+\Gamma_A = \mathcal{K}^+$.

Имеем

$$\left\{2P^{+}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}:\ x \in \operatorname{dom} A\right\} = \left\{\begin{pmatrix} I & -iI \\ iI & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}:\ x \in \operatorname{dom} A\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x - iAx \\ ix + Ax \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{K}^{+} \Longleftrightarrow \{ix + Ax:\ x \in \operatorname{dom} A\} = \mathcal{H}.$$

Последнее свойство равносильно тому, что для любого $y \in \mathcal{H}$ найдется $x \in \operatorname{dom} A$ такой, что $(A + iI)x = y$. Проверим сначала, что $\operatorname{Ker}(A + iI) = \{0\}$. Предположив противное, считаем, что найдется $x_0 \in \operatorname{dom} A$, $x_0 \neq 0$, такой, что $x_0 \in \operatorname{Ker}(A + iI)$. Тогда $(Ax_0, x_0) + i(x_0, x_0) = 0$, откуда следует, что $\operatorname{Im}(Ax_0, x_0) = -(x_0, x_0) < 0$. Возникло противоречие со свойством диссипативности оператора A.

Итак, $\operatorname{Ker}(A+iI) = \{0\}$ и потому существует обратный оператор $(A+iI)^{-1}$, который должен быть задан при любом $y \in \mathcal{H}$, т.е. на всем пространстве. Тогда этот оператор ограничен (почему?) и, следовательно, $-i \in \rho(A)$. Эти рассуждения обратимы, и потому оператор A является максимальным диссипативным тогда и только тогда, когда $-i \in \rho(A)$.

Теперь для доказательства утверждения 2^0 теоремы достаточно заметить, что все операторы вида $aA + bI$ с $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ являются максимальными диссипативными вместе с A. Отсюда следует, что любое λ с $\operatorname{Im}\lambda < 0$ принадлежит $\rho(A)$.

3^0. Для доказательства утверждения 3^0 данной теоремы приведем следующие общие соображения. Рассмотрим подпространства Γ_A и Γ_{-B}; первое, очевидно, неотрицательно, а второе — неположительно. Так как $(Ax, y) = (x, -By)$, $x \in \operatorname{dom} A$, $y \in \operatorname{dom} B$, то легко проверить, что $\Gamma_A[\perp]\Gamma_{-B}$. Отсюда следует, что $\{\Gamma_A, \Gamma_{-B}\}$ — дуальная пара подпространств пространства $\mathcal{K}$. Тогда по теореме 2.4 эту пару можно расширить до максимальной дуальной пары $\{\Gamma_{\widetilde{A}}, \Gamma_{-\widetilde{B}}\}$, $A \subset \widetilde{A}$, $B \subset \widetilde{B}$. Осталось лишь проверить, что $-\widetilde{B} = \widetilde{A}^{*}$. Предоставляем читателю выяснить этот факт самостоятельно.

□

Обобщая предыдущие рассмотрения, познакомимся со следующей проблемой Филлипса. Пусть U — группа коммутирующих унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а операторы A и B обладают прежними свойствами. Кроме того, выполнены свойства $UA = AU$, $UB = BU$, $\forall\, U$. Возникает вопрос, можно ли расширить пару операторов $\{A, B\}$ до максимальной диссипативной пары $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\}$ таким образом, чтобы снова выполнялись свойства $U\widetilde{A} = \widetilde{A}U$, $U\widetilde{B} = \widetilde{B}U$, $\forall\ U$. Это непростая задача, и ответ является положительным. Соответствующее утверждение — весьма серьезный результат Р.С. Филлипса.

Определение 2.11. Оператор $A:\ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\overline{\operatorname{dom} A} = \mathcal{H}$, называется симметрическим, если

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in \operatorname{dom} A.$$

Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, т.е.

$$Ax = A^*x, \quad \forall x \in \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A^*. \qquad \square$$

Поставим вопрос: когда симметрический оператор A можно расширить до самосопряженного? Как известно из учебников по функциональному анализу, это можно сделать тогда и только тогда, когда

$$\dim \operatorname{Ker}(A^* + iI) = \dim \operatorname{Ker}(A^* - iI).$$

Возвращаясь к введенному выше пространству Крейна $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, рассмотрим снова

$$\Gamma_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} :\ x \in \operatorname{dom} A \right\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $A = A^*$, то Γ_A — нейтральное подпространство.

Упражнение 2.12. Доказать, что симметричный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, допускает самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда Γ_A допускает гипермаксимальное нейтральное расширение. $\square$

3 Основные классы операторов

В этой части пособия будут рассмотрены основные классы линейных операторов, действующих в пространстве Крейна: диссипативные, самосопряженные и другие.

3.1 Основные определения

Будем считать, если не оговорено противное, что T — непрерывный оператор, определенный на всем пространстве Крейна $\mathcal{K}$, $\operatorname{dom} T = \mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ — пространства Крейна с индефинитными формами $[\cdot,\cdot]_1 = (W_1\cdot,\cdot)_1$, $[\cdot,\cdot]_2 = (W_2\cdot,\cdot)_2$ соответственно. (Возможен вариант, что $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ как множества, но заданные на них формы $[\cdot,\cdot]_1$ и $[\cdot,\cdot]_2$ могут быть разными.) Пусть $T:\ \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$.

Рассмотрим при любых $x \in \mathcal{K}_1$ и $y \in \mathcal{K}_2$ билинейную форму

$$\begin{aligned}&[Tx, y]_2 = (W_2Tx, y)_2 = (x, T^*W_2y)_1 = \\ &= (W_1x, W_1^{-1}T^*W_2y)_1 = [x, T^cy]_1.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Оператор

$$T^c := W_1^{-1}T^*W_2 \tag{3.2}$$

называется сопряженным к оператору T относительно форм $[\cdot,\cdot]_1$ и $[\cdot,\cdot]_2$. □

Если, в частности, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$, $W_1 = W_2 =: W$, то

$$T^c = W^{-1}T^*W, \tag{3.3}$$

а если $W = J$ (каноническая симметрия), то

$$T^c = JT^*J, \tag{3.4}$$

т.е. T^c и T^* — подобные операторы.

Пусть $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$, $W_1 = W_2$. Тогда так же, как в $\Pi_\varkappa$, имеем следующие свойства спектра для любого T с $\operatorname{dom} T = \mathcal{K}$:

1^0. $\sigma(T^c) = \sigma(T^*)$;

2^0. $\{\lambda \in \rho(T)\} \Longleftrightarrow \{\overline{\lambda} \in \rho(T^c)\}$;

3^0. $\{\lambda \in \sigma(T)\} \Longleftrightarrow \{\overline{\lambda} \in \sigma(T^c)\}$;

4^0. $\{\lambda \in \sigma_c(T)\} \Longleftrightarrow \{\overline{\lambda} \in \sigma_c(T^c)\}$;

5^0.
$$\left\{\lambda \in \sigma_p(T),\ \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda I)} \neq \mathcal{K}\right\} \iff \left\{\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^c),\ \overline{\operatorname{ran}(T^c-\overline{\lambda} I)} \neq \mathcal{K}\right\};$$
6^0. $\{\lambda \in \sigma_r(T)\} \iff \left\{\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^c), \quad \overline{\operatorname{ran}(T-\overline{\lambda} I)} = \mathcal{K}\right\}$.

Отметим еще одно важное свойство.

Лемма 3.1. *Пусть $T:\ \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, а $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — инвариантные подпространства для T и T^c соответственно: $T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, $T^c\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Пусть, далее,*
$$\sigma^*(T|_{\mathcal{L}}) \cap \sigma(T^c|_{\mathcal{M}}) = \emptyset. \tag{3.5}$$
Тогда $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$. В частности, $\mathcal{L}_\lambda(T)[\perp]\mathcal{L}_\mu(T)$, если $\lambda \neq \overline{\mu}$. □

(Доказательство этого утверждения такое же, как в $\Pi_\varkappa$.)
Снова рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{K}$ с формой $[\cdot,\cdot] = (W\cdot,\cdot)$.

Определение 3.2. Оператор $A:\ \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ называется диссипативным по отношению к форме $[\cdot,\cdot]$ (W–диссипативным), если
$$\operatorname{Im}[Ax,x] \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{K}. \tag{3.6}$$
□

Из (3.6) следует, что
$$\operatorname{Im}(WAx,x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{H} = \mathcal{K}, \tag{3.7}$$
т.е. A является W–диссипативным тогда и только тогда, когда WA диссипативен, т.е. диссипативен в $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Докажем некоторые свойства спектра W–диссипативных операторов. Они устанавливаются с помощью интеграла Рисса так же, как в пространстве Понтрягина.

Лемма 3.2. *Если σ — изолированная часть спектра $\sigma(A)$ W–диссипативного оператора A, $\sigma \subset \mathbb{C}^+(\mathbb{C}^-)$ ($\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ — верхняя и нижняя комплексные полуплоскости), то инвариантное подпространство $\mathcal{L}$, отвечающее этому σ, неотрицательно (соответственно неположительно).* □

Доказательство. Если $\sigma \in \mathbb{C}^+$, то можно построить около σ жорданов контур Γ_σ, содержащий внутри себя σ и такой, что $\sigma(A)\backslash\sigma$ находится вне Γ_σ. Кроме того, весь Γ_σ расположен в $\mathbb{C}^+$.

Введем проектор Рисса

$$P_\sigma := -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\sigma}(A-\lambda I)^{-1}\,d\lambda, \tag{3.8}$$

а также подпространство $\mathcal{L} = P_\sigma\mathcal{K}$, инвариантное относительно $A: \ A\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$. Тогда $\sigma(A|_\mathcal{L})=\sigma$.

Осталось лишь теперь убедиться, что $\{\sigma\subset\mathbb{C}^+\} \implies \{\mathcal{L}\geqslant 0\}$. Этот факт доказывается так же, как в $\Pi_\varkappa$.

Аналогично рассматривается случай $\sigma\subset\mathbb{C}^-$. □

Определение 3.3. Оператор $A: \ \mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ называется равномерно диссипативным, если найдется $\alpha>0$ такое, что

$$\operatorname{Im}[Ax,x]\geqslant\alpha\|x\|^2, \quad \forall x\in\mathcal{K}. \tag{3.9}$$

□

Приведем без доказательства некоторые свойства равномерно диссипативных операторов.

1^0. Если A равномерно диссипативен, то $\mathbb{R}\subset\rho(A)$ (как и в $\Pi_\varkappa$!).

2^0. Пусть $\sigma=\sigma(A)\cap\mathbb{C}^+$ — изолированная часть спектра равномерно диссипативного оператора A, расположенная в верхней полуплоскости, а P_σ — соответствующий проектор Рисса (3.8). Тогда подпространство $\mathcal{L}_+ := P_\sigma\mathcal{K}$, инвариантное для A, является равномерно положительным. Если $\sigma\subset\mathbb{C}^-$, то соответствующее этой части спектра σ инвариантное подпространство $\mathcal{L}_-$ равномерно отрицательно. При этом имеем также

$$\mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_- = \mathcal{K}, \quad \mathcal{L}_\pm\in\mathcal{M}^\pm, \tag{3.10}$$

если $\sigma\in\mathbb{C}^+$, $\sigma(A)\backslash\sigma\in\mathbb{C}^-$.

Напомним, что в пространстве Понтрягина у любого диссипативного оператора существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство. В пространстве Крейна аналогичная общая проблема не решена до сих пор.

3.2 Об инвариантных подпространствах диссипативных операторов в пространстве Крейна

Пусть $\{\mathcal{K},[\cdot,\cdot]\}$ — пространство Крейна, а A — диссипативный непрерывный оператор, действующий в $\mathcal{K}$.

Теорема 3.1. (**о существовании инвариантного подпространства для диссипативного оператора**). Если найдется такое каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ пространства Крейна, что выполнено условие

$$P^+AP^- \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{3.11}$$

то у оператора A существует неотрицательное инвариантное подпространство. $\square$

Замечание 3.1. Может оказаться, что в данном каноническом разложении условие (3.11) не выполнено, однако в другом каноническом разложении оно может быть выполнено, и тогда инвариантное неотрицательное подпространство для оператора A существует. $\square$

Прежде чем доказывать теорему 3.1, остановимся кратко на истории вопроса, связанного с доказательством этой важной теоремы, и перечислим основные этапы.

1^0. В пространстве $\Pi_\varkappa$ для самосопряженных операторов первое доказательство в 1944 г. было дано Понтрягиным Л.С. (для $\varkappa = 1$ в 1943 г. — С.Л. Соболевым).

2^0. В $\Pi_\varkappa$ для унитарных операторов соответствующее утверждение доказал И.С. Иохвидов.

3^0. Для диссипативных операторов, действующих в $\Pi_\varkappa$, результат получили Т.Я. Азизов, а также М.Г. Крейн и Г. Лангер.

4^0. В $\Pi_\varkappa$ для несжимающих операторов результат принадлежит Бродскому М.Л., Бонсаллу Ф.Ф. и Крейну М.Г.

5^0. Для самосопряженных операторов в пространстве Крейна теорему доказал Г. Лангер.

6^0. Для унитарных операторов в $\mathcal{K}$ результат принадлежит Крейну М.Г.

7^0. Для несжимающих операторов в $\mathcal{K}$ теорема доказана Крейном М.Г., Иохвидовым И.С., Хацкевичем В.А.

8^0. Наконец, для диссипативных операторов, действующих в $\mathcal{K}$, результат получили Азизов Т.Я., Иохвидов Е.И. и другие. В последние годы интересные результаты для этого случая получены в работах А.А. Шкаликова.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1. Оно проводится по той же схеме, как и в пространстве Понтрягина.

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$, $P^+AP^- \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда в этом ортогональном разложении

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = P^+AP^- \in \mathfrak{S}_\infty, \quad J = P^+ - P^-. \quad (3.12)$$

Рассмотрим последовательность операторов

$$A_n := A + \frac{1}{n}\, iJ, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (3.13)$$

которые, как нетрудно проверить, являются равномерно диссипативными, так как диссипативен A. Пусть

$$\sigma_{+,n} := \sigma(A_n) \cap \mathbb{C}^+, \quad \mathcal{L}_n^+ := P_{\sigma_{+,n}}\mathcal{K} \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.14)$$

Здесь $\mathcal{L}_n^+$ — равномерно положительное инвариантное относительно A_n подпространство (см. свойство 2^0 после определения 3.3), и оно имеет вид

$$\mathcal{L}_n^+ = \left\{x_+ + K_n x_+ :\ x_+ \in \mathcal{K}^+\right\}, \quad (3.15)$$

где K_n — угловой оператор $\mathcal{L}_n^+$, $\|K_n\| \leqslant 1$.

Так как единичный операторный шар

$$B_1 = \left\{K :\ \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^- :\ \|K\| \leqslant 1\right\} \quad (3.16)$$

компактен в слабой операторной топологии, а последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ угловых операторов принадлежит B_1, то из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что $K_n \longrightarrow K$ (в слабой операторной топологии), $\|K\| \leqslant 1$.

Тогда подпространство

$$\mathcal{L} := \left\{x_+ + Kx_+ :\ x_+ \in \mathcal{K}^+\right\} \quad (3.17)$$

является искомым. Оно, очевидно, является максимальным, так как $x_+ \in \mathcal{K}^+$ — произвольный вектор. Докажем, что оно инвариантно для $A :\ A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Как и в пространстве Понтрягина, для этого достаточно убедиться, что предельный оператор K является решением операторного уравнения

$$A_{21} + A_{22}K = KA_{11} + KA_{12}K \quad (3.18)$$

в шаре B_1. Это условие является и необходимым для существования у A инвариантного максимального неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{L}_n^+$ инвариантных подпространств для последовательности операторов A_n. Тогда, очевидно, $A_n\mathcal{L}_n^+ \subset \mathcal{L}_n^+$ и потому

$$A_{21} + \left\{A_{22} - \frac{1}{n}iI\right\} K_n = K_n \left(A_{11} + \frac{1}{n}iI\right) + K_n A_{12} K_n, \qquad (3.19)$$

так как

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{11} + \frac{1}{n}iI & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \frac{1}{n}iI \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пределы, к которым сходятся слагаемые в (3.19) при $n \longrightarrow \infty$.

1^0. Очевидно, $A_{21} \longrightarrow A_{21} \quad (n \longrightarrow \infty)$.

2^0. Далее

$$\left\{A_{22} - \frac{1}{n}iI\right\} K_n = A_{22}K_n - \frac{1}{n}iK_n \longrightarrow A_{22}K_n \quad \text{слабо,}$$

так как $\|K_n\| \leqslant 1$, и потому второе слагаемое равномерно стремится к нулю при $n \longrightarrow \infty$, а оператор A_{22} непрерывен.

3^0. Аналогично устанавливаем, что

$$K_n \left\{A_{11} + \frac{1}{n}iI\right\} \longrightarrow KA_{11} \quad \text{слабо.}$$

4^0. Здесь $\quad K_nA_{12}K_n \longrightarrow KA_{12}K \quad$ слабо.
Действительно, так как $K_n \longrightarrow K$ (слабо), а по условию A_{12} компактен, то $A_{12}K_n \longrightarrow A_{12}K$ (сильно) и потому $K_nA_{12}K_n \longrightarrow KA_{12}K$ (слабо).

Таким образом, в пределе при $n \longrightarrow \infty$ уравнение (3.19) переходит в уравнение (3.18), т.е. существует решение $K = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} K_n$ (слабый предел) уравнения (3.18) в операторном шаре (3.16).

$\square$

Замечание 3.2. Напомним еще раз, как выводится уравнение (3.18) для углового оператора K, отвечающего неотрицательному инвариантному подпространству $\mathcal{L}$ оператора A.

Так как $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ и

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Kx \end{pmatrix} : \ x \in \mathcal{K}^+, \quad \|K\| \leqslant 1 \right\},$$

то
$$A\mathcal{L}=\left\{A\begin{pmatrix}x\\Kx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\Ky\end{pmatrix}:\ x\in\mathcal{K}^+\right\}.$$
Поэтому
$$A_{11}x+A_{12}Kx=y,\quad A_{21}x+A_{22}Kx=Ky.$$
Отсюда имеем
$$KA_{11}x+KA_{12}Kx=A_{21}x+A_{22}Kx,\quad \forall x\in\mathcal{K}^+,$$
откуда и следует операторное уравнение (3.18). □

3.3 Самосопряженные операторы в пространстве Крейна

Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна с формой $[\cdot,\cdot]$.

Определение 3.4. Оператор $A:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ называется самосопряженным в $\mathcal{K}$, $A=A^c$, если
$$[Ax,y]=[x,Ay],\quad \forall x,y\in\mathcal{K}. \tag{3.20}$$
□

Аналогично определяются операторы, самосопряженные по W-форме $[\cdot,\cdot]=(W\cdot,\cdot)$. Тогда, в силу 3.3
$$A^c=W^{-1}A^*W=A\iff A^*W=WA=(WA)^*. \tag{3.21}$$
Отсюда видно, что W-самосопряженный оператор A подобен оператору A^*.

Рассмотрим свойства спектра операторов, самосопряженных в пространстве Крейна. Они следуют, в частности, из свойств 1^0 – 6^0 спектра взаимно сопряженных операторов, которые сформулированы выше перед леммой 3.1.

1^0 $\sigma(A)=\sigma^*(A)$;
2^0 $\rho(A)=\rho^*(A)$;
3^0 $\sigma_c(A)=\sigma_c^*(A)$;
4^0 $\sigma_p(A)\cup\sigma_r(A)=\sigma_p^*(A)\cup\sigma_r^*(A)$.

В качестве иллюстрации особенностей структуры спектра у самосопряженных операторов, действующих в пространстве Крейна, рассмотрим следующий пример. Напомним предварительно, что в пространстве Понтрягина самосопряженный оператор не имеет остаточного спектра.

Пусть теперь $A = A^c : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$. Может ли такой оператор иметь непустой остаточный спектр? Оказывается, может. Пусть, например,

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \operatorname{diag}(T; T^*),$$

где оператор $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ таков, что $\sigma_r(T) \neq \emptyset$. Легко проверить, что $A = A^c$ в $\mathcal{K}$. С другой стороны, такой оператор A будет иметь непустой $\sigma_r(A)$ вместе с T.

Далее, пусть $A = A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, тогда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Если оператор $A = A^c$ действует в $\Pi_\varkappa$, то, за исключением не более конечного числа конечнократных пар взаимно сопряженных собственных значений, спектр оператора $A = A^c$ вещественный:

$$\sigma(A) \backslash \{\lambda_1, \overline{\lambda}_1; \ldots; \lambda_s, \overline{\lambda}_s\} \subset \mathbb{R}.$$

В пространстве Крейна ситуация сложнее. Пусть, например, $A = A^c$ — неограниченный оператор, действующий в $\mathcal{K}$. Можно ли утверждать, что $\rho(A) \neq \emptyset$. Оказывается, нет. Действительно, если взять оператор T из приведенного выше примера таким, что $\rho(T) = \emptyset$, получим оператор $A = A^c$ с пустым регулярным множеством.

Упражнение 3.1. Установить, для каких классов операторов, действующих в пространстве Крейна, справедливы утверждения

$$\{[Ax, y] = [x, Ay], \forall x, y \in \mathcal{K}\} \Longleftrightarrow \{[Ax, x] = [x, Ax], \forall x \in \mathcal{K}\} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \{\operatorname{Im}[Ax, x] = 0, \forall x \in \mathcal{K}\}. \tag{3.22}$$

$\square$

Заметим теперь, что если $A = A^c : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, то этот оператор диссипативен. Поэтому для него справедлива теорема 3.1. Более того, так как

$$\{A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} \Longleftrightarrow \left\{A^c \mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}\right\},$$

то самосопряженный оператор, действующий в пространстве Крейна и удовлетворяющий условию (3.11) теоремы 3.1, обладает свойствами

$$\{A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} \iff \{A\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}\}. \tag{3.23}$$

Поэтому если $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, то $\mathcal{L}_- := \mathcal{L}_+^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$, $A\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$.

Таким образом, у самосопряженного оператора A, действующего в $\mathcal{K}$ и удовлетворяющего условию (3.11), существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ инвариантных относительно A подпространств.

3.4 Несжимающие операторы

Пусть $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-$ и $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^+[+]\mathcal{K}_2^-$ — пространства Крейна с индефинитными скалярными произведениями $[\cdot,\cdot]_1$ и $[\cdot,\cdot]_2$ соответственно.

Введем проекторы $P_j^{\pm}$ и канонические симметрии $J_j = P_j^+ - P_j^-$, $j = 1, 2$.

Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — непрерывный оператор. Напомним, что он называется несжимающим, если

$$[Vx, Vx]_2 \geqslant [x,x]_1, \quad \forall x \in \mathcal{K}_1. \tag{3.24}$$

Напомним еще, что для произвольного оператора $X : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ точка 0 является точкой регулярного типа, $0 \in r(X)$, если

$$\|Xu\| \geqslant k\|u\|, \quad k > 0, \forall u \in \mathcal{H}. \tag{3.25}$$

Заметим теперь, что оператор $V = P^+ : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ является несжимающим. В самом деле,

$$\begin{aligned}&\bigl[P^+x, P^+x\bigr] = \bigl(JP^+x, P^+x\bigr) =\\ &= \bigl(P^+x, P^+x\bigr) \geqslant \bigl(P^+x, P^+x\bigr) - \bigl(P^-x, P^-x\bigr) = [x,x].\end{aligned}$$

(Здесь в первом переходе использовано свойство $JP^+x = P^+x$.) Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} P^+ = \mathcal{K}^-$. Поэтому для P^+ точка 0 не может быть точкой регулярного типа, т.е. неравенство вида (3.25) для этого оператора невозможно.

Однако здесь имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$\|Vx\|_2 \geqslant \delta \|x\|_1, \quad \forall x \geqslant 0. \tag{3.26}$$

Доказательство. Введем билинейную форму

$$\langle x, y\rangle := [Vx, Vy]_2 - [x, y]_1 = [(V^cV - I)\, x, y]_1. \tag{3.27}$$

Из свойства несжимаемости оператора V, очевидно, следует, что $\langle x, x\rangle \geqslant 0, \forall x \in \mathcal{K}_1$. Тогда, согласно неравенству Коши-Буняковского,

$$\begin{gathered} \left|[(V^cV - I)\, x, y]_1\right|^2 \leqslant [(V^cV - I)\, x, x]_1 \cdot [(V^cV - I)\, y, y]_1 \leqslant \\ \leqslant \left(\|V\|^2 + 1\right) \|Vx\|_2^2 \quad (\|x\| = \|y\| = 1). \end{gathered} \tag{3.28}$$

В самом деле, при $\|y\| = 1$ имеем

$$[(V^cV - I)\, y, y]_1 \leqslant \|(V^cV - I)\, y\|\, \|y\| \leqslant (\|V^cV\| + 1) \leqslant \|V^c\| \cdot \|V\| + 1.$$

Так как $V^c = JV^*J$, то $\|V^c\| \leqslant \|V\|$, и тогда справа имеем $\|V\|^2 + 1$. Далее, при $x \geqslant 0$

$$[(V^cV - I)\, x, x]_1 = [Vx, Vx]_2 - [x, x]_1 \leqslant \|Vx\|_2^2.$$

и неравенство (3.28) доказано.

Убедимся теперь, что отсюда следует неравенство

$$\|(V^cV - I)\, x\|_1^2 \leqslant \left(\|V\|^2 + 1\right) \|Vx\|_2^2. \tag{3.29}$$

Действительно, если $(V^cV - I)\, x = 0$, то неравенство тривиально выполнено. Если $(V^cV - I)\, x \neq 0$, то возьмем

$$y = J_1\, (V^cV - I)\, x / \|(V^cV - I)\, x\|_1, \quad \|y\| = 1.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \left|\left[(V^cV - I)\, x, \frac{J_1\, (V^cV - I)\, x}{\|(V^cV - I)\, x\|_1}\right]_1\right|^2 \leqslant \\ \leqslant \|(V^cV - I)\, x\|_1^2 \leqslant \left(\|V\|^2 + 1\right) \|Vx\|_2^2. \end{gathered} \tag{3.30}$$

В последнем переходе использовано неравенство (3.28). Однако левая часть (3.30), очевидно, равна левой части (3.29), и неравенство (3.29) доказано.

Опираясь на установленные факты, проведем при $\|x\| = 1$, $x \geqslant 0$, оценку снизу:

$$\|(V^c V - I)\, x\|_1 \geqslant 1 - \|V\| \cdot \|Vx\|_2.$$

Отсюда и из (3.29)

$$1 - \|V\| \cdot \|Vx\|_2 \leqslant \sqrt{\|V\|^2 + 1} \cdot \|Vx\|_2,$$

откуда следует, что

$$\|Vx\|_2 \geqslant \frac{1}{\|V\| + \sqrt{\|V\|^2 + 1}}\, \|x\|_1 =: \delta \|x\|_1, \quad x \geqslant 0, \quad 0 < \delta < 1. \qquad \square$$

Приведем ряд следствий из этой леммы.

Следствие 3.1. *Имеет место неравенство*

$$\left\|P_2^+ Vx\right\|_2 \geqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}} \|x\|_1,\ x \geqslant 0. \tag{3.31}$$

Доказательство. Имеем

$$\|Vx\|_2^2 = \left\|P_2^+ Vx\right\|_2^2 + \left\|P_2^- Vx\right\|_2^2 \geqslant \delta^2 \|x\|_1.$$

Однако, если $x \geqslant 0$, то в силу несжимаемости (см.(3.24)) будет также $Vx \geqslant 0$ и потому

$$\left\|P_2^- Vx\right\|_2^2 \leqslant \left\|P_2^+ Vx\right\|_2^2.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует (3.31).

$\square$

Следствие 3.2. *Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда образ $V\mathcal{L}$ неотрицательного подпространства $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_1$ — снова неотрицательное подпространство (в $\mathcal{K}_2$), образ положительного подпространства — положительное подпространство, а образ равномерно положительного подпространства — равномерно положительное подпространство.*

Доказательство. (Первое утверждение уже было упомянуто в следствии 3.1). Если $\mathcal{L} \geqslant 0$ (в $\mathcal{K}_1$), то $[x, x]_1 \geqslant 0$ и потому для элементов

$$V\mathcal{L} := \{Vx : \, x \in \mathcal{L}\}$$

имеем

$$[Vx, Vx]_2 \geqslant [x, x]_1 \geqslant 0. \tag{3.32}$$

Если $x \neq 0$, $x \in \mathcal{L} > 0$, то отсюда следует, что Vx — положительное подпространство. Наконец, если $\mathcal{L}$ — равномерно положительное подпространство ($\mathcal{L} \gg 0$), то

$$[x, x]_1 \geqslant k\|x\|^2, \quad k > 0,$$

и потому

$$[Vx, Vx]_2 \geqslant [x, x]_1 \geqslant k\|x\|_1^2 \geqslant \frac{k}{\|V\|^2}\|Vx\|_2^2, \tag{3.33}$$

т.е. $V\mathcal{L} \gg 0$.

Докажем еще, что если $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$, то $V\mathcal{L} = \overline{V\mathcal{L}}$, т.е. $V\mathcal{L}$ — подпространство. Имеем для любого $x \in \mathcal{P}^+$, т.е. для $x \geqslant 0$:

$$\|V\| \cdot \|x\|_1 \geqslant \|Vx\|_2 \geqslant \delta\|x\|_1. \tag{3.34}$$

Из этих неравенств следует, что из свойства $x_n \longrightarrow x$ (в $\mathcal{L}$) вытекает, что $Vx_n \longrightarrow Vx$, т.е. $V\mathcal{L}$ замкнуто.

$\square$

Упражнение 3.2. Доказать, что ядро $\operatorname{Ker} V$ несжимающего оператора V, если оно нетривиально, является отрицательным.

Доказательство. Если $0 \neq x_0 \in \operatorname{Ker} V$, то $Vx_0 = 0$. В силу (3.34) свойство $[x_0, x_0] \geqslant 0$ невозможно, поэтому $[x_0, x_0] < 0$. $\square$

Упражнение 3.3. Доказать, что это ядро даже равномерно отрицательно. $\square$

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$ — пространство Крейна и $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство в $\mathcal{K}$.

Определение 3.5. Назовем дефектом неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ размерность дефектного подпространства:

$$\operatorname{def}_{\mathcal{K}^+}\mathcal{L} := \dim\left[\left(P^+\mathcal{L}\right)^{\perp} \cap \mathcal{K}^+\right]. \tag{3.35}$$

$\square$

Напомним, что неотрицательное $\mathcal{L}$ является максимальным подпространством, если $P^+\mathcal{L} = \mathcal{K}^+$. Поэтому дефект $\operatorname{def}_{\mathcal{K}^+}\mathcal{L}$ равен размерности дополнительного подпространства, которое необходимо присоединить к $\mathcal{L}$ для того, чтобы объединение этих подпространств стало максимальным.

Теорема 3.2. Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда для любого $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ дефект подпространства $V\mathcal{L}$ постоянен и не зависит от выбора $\mathcal{L}$, т.е.

$$\dim\left[\left(P_2^+ V\mathcal{L}\right)^{\perp} \cap \mathcal{K}_2^+\right] = \mathrm{const}\,. \tag{3.36}$$

□

Доказательство этого утверждения основано на теореме Крейна-Красносельского о сохранении индекса. Здесь оно не приводится.

Рассмотрим пример несжимающего оператора в пространстве Крейна. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$, а оператор V в этом ортогональном разложении имеет матричное представление

$$V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $U : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^+$ — оператор сдвига по ортонормированному базису: если $\{e_j^+\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{K}^+$, то $Ue_j^+ = e_{j+1}^+$ и

$$U\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_{j+1}^+.$$

Нетрудно проверить, что оператор V — несжимающий. Заметим, что если

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

— произвольный оператор, действующий в $\mathcal{K}$, то

$$T^c = \begin{pmatrix} T_{11}^* & -T_{21}^* \\ -T_{12}^* & T_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Поэтому для введенного оператора V имеем

$$V^c = V^* = \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $U^* e_1^+ = 0$ (проверьте!), то V^c не является несжимающим. Таким образом, этот пример показывает, что при переходе от V к V^c свойство сжимаемости может не сохраниться.

Напомним, что оператор V называется бинесжимающим, если V и V^c — несжимающие операторы.

Заметим, что если V и V^c несжимающие, то V^* — тоже несжимающий. Более точно, операторы V и V^c несжимающие тогда и только тогда, когда операторы V и V^* являются несжимающими.

Теорема 3.3 (критерий бинесжимаемости)**.** Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:
а) V — бинесжимающий;
б) существует подпространство $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ такое, что $V\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_2)$;
в) для всякого $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ подпространство $V\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_2)$;
г) существует угловой оператор $K_0 \in \left\{K : \mathcal{K}_1^+ \longrightarrow \mathcal{K}_1^-;\ \|K\| \leqslant 1\right\} =: \mathcal{B}_1$ такой, что $(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}$ задан на всем $\mathcal{K}_2^+$;
д) для любого $K \in \mathcal{B}_1$ оператор $(V_{11} + V_{12}K)^{-1}$ задан на всем $\mathcal{K}_2^+$.

Доказательство. Заметим сначала, что утверждения (б) и (в) эквивалентны в силу теоремы 3.2.

Пусть $\mathcal{L} = \left\{x_+ + Kx_+ : \|K\| \leqslant 1, \quad \forall x_+ \in \mathcal{K}_1^+\right\}$— неотрицательное максимальное подпространство в $\mathcal{K}_1$. Тогда

$$V\mathcal{L} = \left\{\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} V_{11}x_+ + V_{12}Kx_+ \\ V_{21}x_+ + V_{22}Kx_+ \end{pmatrix}\right\}.$$

Так как $V\mathcal{L}$ максимальное вместе с $\mathcal{L}$, то $P^+V\mathcal{L} = \mathcal{K}_2^+$. С другой стороны, $P^+V\mathcal{L} = \operatorname{ran}(V_{11} + V_{12}K)$, т.е. области значений оператора $V_{11} + V_{12}K$.

Эти выкладки показывают, что если выполнено свойство б), т.е. существует подпространство $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ со свойством $V\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_2)$ и угловым оператором K_0, то $\operatorname{ran}(V_{11} + V_{12}K_0) = \mathcal{K}_2^+$ и потому существует обратный оператор $(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}$, заданный на всем пространстве $\mathcal{K}_2^+$ (теорема Банаха об обратном операторе). Действительно, согласно (3.31)

$$\left\|P^+Vx\right\|_2 \geqslant c\|x\|_1, \quad \forall x \geqslant 0,$$

т.е. $\|(V_{11} + V_{12}K_0)\,x_+\|_2 \geqslant c\|x\|_1 \geqslant c\|x_+\|_1$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker}\,(V_{11} + V_{12}K_0) = \{0\}$ и

$$\left\|(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}\right\| \leqslant c^{-1}. \tag{3.37}$$

Таким образом, утверждение б)$\Longrightarrow$ г) доказано. Аналогично доказывается импликация в) $\Longrightarrow$д). Так как здесь все рассуждения обратимы, то имеем утверждения б) $\Longleftrightarrow$ в) $\Longleftrightarrow$ г) $\Longleftrightarrow$ д). Осталось лишь установить, что из утверждения а) следует любое другое, а также в обратную сторону.

Докажем теперь, что из свойства а) следует свойство г), в частности, докажем, что оно выполнено для $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{K}_1^+$, для которого угловой оператор $K_0 = 0$.

Действительно, операторы

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \qquad V^c = \begin{pmatrix} V_{11}^* & -V_{21}^* \\ -V_{12}^* & V_{22}^* \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

являются несжимающими согласно условию а). Тогда из (3.37) при $K_0 = 0$ следует, что существует, ограничен и задан на всем пространстве $\mathcal{K}_2^+$ оператор V_{11}^{-1}, причем $\left\|V_{11}^{-1}\right\| \leqslant c$. Аналогично, применяя те же рассуждения к V^c, приходим к выводу, что оператор $(V_{11}^*)^{-1}$ существует и обладает теми же свойствами. Значит, можно взять $K_0 = 0$ и $\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}_1^+$, и свойство г) доказано. Отметим, что на этом этапе доказательства свойство несжимаемости V^c не необходимо, так как $(V_{11}^*)^{-1} = \left(V_{11}^{-1}\right)^*$ и потому достаточно иметь свойство несжимаемости для V.

Докажем, наконец, что из свойства г) следует а), т.е. из условий несжимаемости V и непрерывности V_{11}^{-1} на всем $\mathcal{K}_2^+$ следует свойство бинесжимаемости V.

С этой целью воспользуемся преобразованием Потапова-Гинзбурга. Пусть $V : \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^- \longrightarrow \mathcal{K}_2^+[+]\mathcal{K}_2^-$ является несжимающим оператором и V_{11}^{-1} непрерывен. Введем отображение (преобразование Потапова-Гинзбурга)

$$T : \mathcal{K}_2^+[\oplus]\mathcal{K}_1^- \longrightarrow \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_2^-$$

по закону

$$\begin{aligned} T =& \delta(V) := \left(P_1^+ + P_2^- V\right)\left(P_1^- + P_2^+ V\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & -V_{11}^{-1}V_{12} \\ V_{21}V_{11}^{-1} & V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Как показывает подсчет (см. (3.38)), имеет место свойство

$$\delta(V^c) = (\delta(V))^*. \tag{3.40}$$

Однако V — несжимающий оператор тогда и только тогда, когда $\delta(V)$ является гильбертовым сжатием (этот факт отмечался ранее в пространстве Понтрягина). Поэтому $\|\delta(V)\| \leqslant 1$, и тогда $\left\|(\delta(V))^*\right\| \leqslant 1$, т.е. $\|\delta(V^c)\| \leqslant 1$. Это возможно лишь тогда, когда V^c — несжимающий оператор.

$\square$

Приведем еще некоторые факты, необходимые для дальнейшего. Здесь будет приведено доказательство теоремы 1.2.

Теорема 3.4. (**Ю.Л. Шмульян**). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $A = A^*$, $B = B^*$ — непрерывные операторы, причем

$$0 \in \rho(A) \cap \rho(B), \quad A \leqslant B. \tag{3.41}$$

Рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$, в которых на элементах из $\mathcal{H}$ билинейные формы определены по законам $[\cdot,\cdot]_A := (A\cdot,\cdot)$ и $[\cdot,\cdot]_B := (B\cdot,\cdot)$ соответственно.

Введем отображение $T:\ \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B$ согласно правилу $Tx := x$. Тогда имеет место свойство

$$\left\{A^{-1} \geqslant B^{-1}\right\} \Longleftrightarrow \{T - \text{бинесжимающий}\}. \tag{3.42}$$

Доказательство. Напомним, что T — бинесжимающий, если T и T^c — несжимающие. Однако T — действительно несжимающий, так как (см. (1.9))

$$[Tx,Tx]_B := [x,x]_B = (Bx,x) \geqslant (Ax,x) = [x,x]_A. \tag{3.43}$$

Далее, из первого условия (3.41) следует, что операторы A и B ограниченно обратимы на всем $\mathcal{H}$. Опираясь на это, найдем выражение для оператора $T^c : \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A$. Имеем при любых x и y из $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} &[Tx,y]_B = (BTx,y) = (Bx,y) = \\ &= (x,By) = \left(Ax, A^{-1}By\right) = \left[x, A^{-1}By\right]_A. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Отсюда следует, что

$$T^c = A^{-1}B. \tag{3.45}$$

Убедимся, что если этот оператор несжимающий, то $A^{-1} \geqslant B^{-1}$. Действительно, если

$$[T^c x, T^c x]_A = \left[A^{-1}Bx, A^{-1}Bx\right]_A \geqslant [x,x]_B,$$

то

$$\left(A^{-1}Bx, Bx\right) \geqslant (Bx,x) = \left(B^{-1}(Bx), Bx\right).$$

Полагая здесь $y = Bx$, $y \in \mathcal{H}$, имеем

$$\left(A^{-1}y, y\right) \geqslant \left(B^{-1}y, y\right), \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

т.е. $A^{-1} \geqslant B^{-1}$. Эти рассуждения можно обратить, и теорема доказана. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 3.4. Пусть, далее, спектр $\sigma(A)\cap(0,\infty)$ имеет кратность $\varkappa_A^+<\infty$. Тогда свойство $A^{-1}\geqslant B^{-1}$ выполнено, если и только если $\sigma(B)\cap(0,\infty)$ конечен и $\varkappa_A^+=\varkappa_B^+$.*

Доказательство. Если $\varkappa_A^+<\infty$, то $\mathcal{H}_A=\Pi_{\varkappa_A^+}$, т.е. является пространством Понтрягина. Поэтому любое максимальное неотрицательное подпространство в $\mathcal{H}_A$ имеет размерность $\varkappa_A^+$. Для оператора B имеем те же утверждения, если спектр $\sigma(B)\cap(0,\infty)$ конечен.

Пусть $A^{-1}\geqslant B^{-1}$. По теореме Ю.Л.Шмульяна это возможно тогда и только тогда, когда T — бинесжимающий оператор, т.е. тогда и только тогда, когда из условия $\mathcal{L}\in\mathfrak{M}^+(\mathcal{H}_A)$ следует условие $B\mathcal{L}\in\ \mathfrak{M}^+(\mathcal{H}_B)$.

Заметим теперь, что оператор T ограниченно обратим. В самом деле, если $Tx_0=0$, $x_0\in\mathcal{L}$, то в силу неравенства $\|Tx\|\geqslant\delta\|x\|$ (см. (3.26)) получаем, что $x_0=0$, т.е. T обратим и $\left\|T^{-1}\right\|\leqslant\delta^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\{\dim(T\mathcal{L})=\dim\mathcal{L}\}\Longleftrightarrow\left\{\varkappa_A^+=\varkappa_B^+\right\}. \qquad \square$$

Следствие 3.4. *Пусть A, B — матрицы размером $n\times n$, $A=\ A^*$, $B=B^*$, $A\leqslant B$. Тогда*

$$\{A\leqslant B\}\Longleftrightarrow\{s(A)=s(B)\}\Longleftrightarrow\{\pi(A)=\pi(B)\},$$

$s(A):=\pi(A)-\nu(A)$, $\pi(A)$ — количество положительных (с учетом кратностей) собственных значений, а $\nu(A)$ — количество отрицательных. Здесь $\pi(A)+\nu(A)=\pi(B)+\nu(B)=n$. $\square$

3.5 Равномерно растягивающие операторы

Напомним (см. определение 1.5), что оператор $T:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ называется равномерно растягивающим, или равномерно бинесжимающим, если найдется $\alpha>0$ такое, что

$$[Tx,Tx]\geqslant[x,x]+\alpha\|x\|^2,\quad\forall x\in\mathcal{K}. \tag{3.46}$$

Определение 3.6. Равномерно растягивающий оператор T называется равномерно бирастягивающим, если T^c — также равномерно растягивающий (быть может, с другой константой $\alpha>0$).

$\square$

Напомним, что множество точек регулярного типа оператора A, по определению, это

$$r(A) := \rho(A) \cup \{\lambda \in \sigma_r(A) : \operatorname{ran}(A - \lambda I) = \overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)}\}$$

и

$$\{\lambda \in r(A) \backslash \rho(A)\} \Longleftrightarrow \{\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*),\ \operatorname{ran}(A^* - \overline{\lambda} I) = \mathcal{K}\}. \qquad (3.47)$$

Лемма 3.4. *Если $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ — равномерно растягивающий оператор, то весь единичный круг*

$$\mathbb{T} := \{\lambda : |\lambda| = 1\}$$

состоит из точек регулярного типа для T.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. существует λ с $|\lambda| = 1$ такое, что $\lambda \notin r(T)$. Тогда существует последовательность элементов x_n с $\|x_n\| = 1$ такая, что $(T - \lambda I)x_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$. Поэтому для $y_n := (T - \lambda I)x_n$ имеем

$$Tx_n = \lambda x_n + y_n, \quad y_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Так как оператор T равномерно растягивающий, то

$$[Tx_n, Tx_n] \geqslant [x_n, x_n] + \alpha \|x_n\|^2 = [x_n, x_n] + \alpha.$$

Поэтому

$$[\lambda x_n + y_n, \lambda x_n + y_n] - [x_n, x_n] \geqslant \alpha > 0, \quad |\lambda| = 1,$$

т.е.

$$\lambda [x_n, y_n] + \overline{\lambda} [y_n, x_n] + [y_n, y_n] \geqslant \alpha > 0.$$

Поскольку $y_n \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty)$ и $|\lambda| = 1$, то возникло противоречие, и лемма доказана. $\square$

Лемма 3.5. *Если T — равномерно растягивающий, то T — равномерно бирастягивающий тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{T} \subset \rho(T). \qquad (3.48)$$

Доказательство.

а) Если T — равномерно бирастягивающий, то по лемме 3.4

$$\mathbb{T} \subset r(T) \cap r(T^c). \tag{3.49}$$

В силу (3.47) точка λ из $\mathbb{T}$ принадлежит $r(T) \setminus \rho(T)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(T)$. Аналогично из (3.49) получаем, что $\lambda \in \sigma_p(T^c)$. Однако это невозможно (см. свойства спектра после формулы (3.4)), и потому $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(T^c)$, т.е.

$$\mathbb{T} \subset \rho(T) \cap \rho(T^c). \tag{3.50}$$

б) Докажем теперь, что если выполнено условие (3.48) и T равномерно растягивающий, то T — равномерно бирастягивающий. С этой целью воспользуемся следующей формулой

$$(BA - I) = (B - I)(A - I)^{-1}(AB - I)(B - I)^{-1}(A - I), \tag{3.51}$$

где все операторы и сомножители непрерывны (докажите это тождество!). Возьмем в этом тождестве $A = T^c$, $B = T$. Тогда

$$(TT^c - I) = (T - I)(T^c - I)^{-1}(T^cT - I)(T - I)^{-1}(T^c - I). \tag{3.52}$$

Если обозначить

$$S := (T - I)^{-1}(T^c - I), \tag{3.53}$$

то

$$(T - I)(T^c - I)^{-1} = S^c, \tag{3.54}$$

$$0 \in \rho(S) \ \text{ и } \ (TT^c - I) = S^c(T^cT - I)S. \tag{3.55}$$

Из свойства равномерной растягиваемости оператора T имеем (проверьте!)

$$[(TT^c - I)x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2. \tag{3.56}$$

Для оператора T^c тогда будем иметь

$$\begin{aligned}[(TT^c - I)x, x] &= [S^c(T^cT - I)Sx, x] = [(T^cT - I)Sx, Sx] \geqslant \\ &\geqslant \alpha \|Sx\|^2 \geqslant \frac{\alpha}{\|S^{-1}\|^2}\|x\|^2,\end{aligned} \tag{3.57}$$

откуда следует свойство равномерной растягиваемости оператора T^c.

□

Вернемся еще раз к теореме 1.3, доказанной Ю.Л. Далецким и М.Г. Крейном, напомним ее формулировку и скажем несколько слов о доказательстве.

Теорема 3.5 (Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн). Пусть оператор T непрерывен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Единичная окружность $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ состоит из регулярных точек оператора T, т.е. $\mathbb{T} \subset \rho(T)$, тогда и только тогда, когда существует непрерывный оператор $W = W^*$, $0 \in \rho(W)$, такой, что T является равномерно бирастягивающим относительно формы $[x, y] := (Wx, y)$.

Доказательство. Если оператор T бирастягивающий в пространстве Крейна с W-формой, то, согласно лемме 3.5, $\mathbb{T} \subset \rho(T)$. В другую сторону утверждение теоремы доказано Ю.Л. Далецким и М.Г. Крейном. $\square$

Следствие 3.5. *В условиях теоремы 3.5*

$$\{\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| < 1\}\} \Longleftrightarrow \{\exists (-W) \gg 0\}\,. \tag{3.58}$$

$\square$

Рассмотрим теперь проблему, которая в общей ситуации еще не нашла своего решения. Это — проблема существования инвариантного подпространства у бинесжимающего оператора.

Теорема 3.6. Пусть $V : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ — бинесжимающий оператор, у которого элемент V_{12} матричного представления V в ортогональном разложении $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$ является компактным оператором. Тогда существует $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ такое, что $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, т.е. оператор V имеет максимальное инвариантное подпространство, которое он отображает на себя.

Доказательство. Введем операторы

$$V_n := VI_n,\ I_n := \operatorname{diag}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) I; \left(1 - \frac{1}{n}\right) I\right) = I + \frac{1}{n} J, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.59}$$

Можно проверить (проделайте это самостоятельно!), что I_n — бирастягивающий оператор при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда V_n — также бирастягивающий. Имеем

$$[V_n x, x] = [VI_n x, VI_n x] \geqslant [I_n x, I_n x] \geqslant [x, x] + \frac{1}{n}\|x\|^2. \tag{3.60}$$

Кроме того, $V_n \longrightarrow V$ при $n \longrightarrow \infty$ (равномерно).

В матричном представлении

$$V_n = \begin{pmatrix} V_{11}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & V_{12}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \\ V_{21}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & V_{22}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \end{pmatrix},$$

причем $(V_n)_{ij} \longrightarrow V_{ij}$ при $n \longrightarrow \infty$ (равномерно), $i,j = 1,2$. Далее доказательство можно продолжить по одному из следующих путей.

Первый путь: если докажем, что при любом n существует $\mathcal{L}_n^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ такое, что $V_n\mathcal{L}_n^+ = \mathcal{L}_n^+$, то затем можно устремить $n \longrightarrow \infty$ и в пределе получить $\mathcal{L}_+ = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{L}_n^+$, $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$. Осталось лишь проверить, что у оператора V_n существует $\mathcal{L}_n^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ при каждом n. Оказывается, это можно установить с использованием интеграла Рисса.

Второй путь доказательства — использование преобразования Кэли-Неймана. Введем операторы

$$A_n := \left(\lambda V_n - \overline{\lambda} I\right)(V_n - I)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^+, \quad (\text{т.е. } \operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{3.61}$$

Эти операторы равномерно диссипативны; этот факт доказывается так же, как в пространстве Понтрягина. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ найдется подпространство $\mathcal{L}_n^+$, инвариантное для A_n, т.е. $A_n\mathcal{L}_n^+ \subset \mathcal{L}_n^+$. Оказывается, это возможно тогда и только тогда, когда $V_n\mathcal{L}_n^+ = \mathcal{L}_n^+$ (поскольку V — бинесжимающий оператор.)

Этими общими комментариями без подробных преобразований завершаем доказательство теоремы. □

Следствие 3.6. *Если для оператора V в условиях теоремы 3.6 вместо условия $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ выполнено условие $V_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$, то существует подпространство $\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}^-(\mathcal{K})$ такое, что $V\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$.*

Доказательство. Достаточно провести аналогичное рассуждение для сопряженного оператора

$$V^c = \begin{pmatrix} V_{11}^* & -V_{21}^* \\ -V_{12}^* & V_{22}^* \end{pmatrix},$$

установить для него существование $\mathcal{L}_n^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$, а затем взять $\mathcal{L}_- := \mathcal{L}_+^{[\perp]}$. Тогда $V\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. □

Приведем в заключение этого раздела без доказательства следующие факты. Установленный выше результат существования максимального инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$ справедлив не только для несжимающих операторов, но также и для диссипативных операторов, самосопряженных операторов. Далее, если оператор V равномерно растягивающий, то упомянутое инвариатное подпространство всегда существует. Действительно, в этом случае $\mathbb{T} \subset \rho(V)$ и, значит, спектр T расположен вне единичной окружности $\mathbb{T}$, а также внутри ее, но не на ней.

3.6 Унитарные операторы.

Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$, $J = P^+ - P^-$, $[x, y] = (Jx, y)$.

Определение 3.7. Оператор U называется унитарным в $\mathcal{K}$ (J-унитарным), если $U\mathcal{K} = \mathcal{K}$ и

$$\{[Ux, Uy] = [x, y]\} \Longleftrightarrow \left\{U^c = U^{-1} = JUJ\right\}. \tag{3.62}$$

Приведем основные свойства спектра J-унитарных операторов.

1^0 $\sigma^*(U) = \sigma^{-1}(U) := \left\{\lambda \in \sigma(U) \Longleftrightarrow \overline{\lambda}^{-1} \in \sigma(U)\right\}$;

2^0 $\rho^*(U) = \rho^{-1}(U) := \left\{\lambda \in \rho(U) \Longleftrightarrow \overline{\lambda}^{-1} \in \rho(U)\right\}$;

3^0 $\sigma_c^*(U) = \sigma_c^{-1}(U) := \left\{\lambda \in \sigma_c(U) \Longleftrightarrow \overline{\lambda}^{-1} \in \sigma_c(U)\right\}$;

4^0 $\sigma_p^*(U) \cap \sigma_r^*(U) = \sigma_p^{-1}(U) \cap \sigma_r^{-1}(U) :=$
$$:= \left\{\lambda \in \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U) \Longleftrightarrow \overline{\lambda}^{-1} \in \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)\right\}.$$

Так как при отображении $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ билинейная форма $[\cdot, \cdot]$ сохраняется, т.е. $[Ux, Uy] = [x, y]$, то для множества неотрицательных, положительных, нейтральных и т.д. элементов имеет свойства $U\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^+, U\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}^0, \ldots$.

Отсюда же следует, что унитарный оператор является несжимающим, а так как $[U^{-1}Ux, U^{-1}Ux] = [x, x] = [Ux, Ux]$, то и обратный оператор U^{-1} — также несжимающий. Так как $U^c = U^{-1}$, то U^c — тоже несжимающий и поэтому U — бинесжимающий оператор. Отсюда следует такое утверждение:

$$\left\{U\mathcal{L}^{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\mathcal{L}^{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}\right\}. \tag{3.63}$$

Из определения унитарного оператора U получаем также, что

$$\{\mathcal{L}[\perp]M\} \Longleftrightarrow \{U\mathcal{L}[\perp]UM\}. \tag{3.64}$$

Можно легко проверить, что $\mathcal{L}^{\pm}$ — равномерно дефинитны тогда и только тогда, когда $U\mathcal{L}^{\pm}$ равномерно дефинитны.

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$. Тогда

$$\mathcal{K} = U\mathcal{K} = U\mathcal{K}^+[\oplus]U\mathcal{K}^- \tag{3.65}$$

— новое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$. Оказывается, с помощью формулы (3.65) можно описать все канонические разложения $\mathcal{K}$. В самом деле, пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^- = \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_1^- \tag{3.66}$$

— два канонических разложения пространства $\mathcal{K}$. Здесь $\mathcal{K}^\pm$, $\mathcal{K}_1^\pm$ — гильбертовы пространства. Возьмем в $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}_1^+$ ортонормированные базисы, $\{e_n^+\} \subset \mathcal{K}^+$, $\{e_{1n}^+\} \subset \mathcal{K}_1^+$, и зададим оператор U соотношением

$$U\sum_j \alpha_j e_j^+ := \sum_j \alpha_j e_{1j}^+.$$

Тогда, очевидно,

$$[Ux, Uy] = [x, y] = \sum_j \alpha_j \overline{\beta_j}, \quad x = \sum_j \alpha_j e_j^+ \in \mathcal{K}^+,\, y = \sum_j \beta_j e_j^+ \in \mathcal{K}^+.$$

Аналогично определяем оператор U для $x, y \in \mathcal{K}^-$. Тогда если $z = x + y$, $x \in \mathcal{K}^+, y \in \mathcal{K}^-$, то полагаем по линейности

$$Uz = Ux + Uy, \quad z \in \mathcal{K}.$$

Напомним теперь, что в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ была установлена связь между унитарными и самосопряженными операторами: если U — унитарный оператор в $\Pi_\varkappa$, $1 \neq \sigma_p(U)$, то

$$A = (\overline{\lambda}U - \lambda I)(U - I)^{-1} = A^c, \tag{3.67}$$

и обратно, если $A = A^c$, $\lambda \in \rho(A)$ то

$$U = (A - \overline{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}, \quad 1 \neq \sigma_p(U), \tag{3.68}$$

— унитарный оператор. Оказывается, аналогичные связи имеются и в пространстве Крейна (см. ниже).

Перейдем теперь к вопросу о существовании инвариантных подпространств для унитарных операторов в пространстве Крейна. Пусть U — унитарный оператор. Тогда он является бинесжимающим. Представим его в матричном виде

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

отвечающем каноническому разложению $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$.

Теорема 3.7 (об инвариантном подпространстве унитарного оператора). Если для унитарного оператора U из (3.69) выполнено условие

$$U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{3.70}$$

то существует пара максимальных инвариантных подпространств $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, таких, что

$$U\mathcal{L}^\pm = \mathcal{L}^\pm. \tag{3.71}$$

Доказательство. Дадим лишь краткие пояснения. Так как унитарный оператор U является бинесжимающим, то в силу условия (3.70) по теореме 3.5 оператор U имеет максимальное инвариантное подпространство $\mathcal{L}^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$, причем $U\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+$. Заметим, теперь, что для самосопряженных и унитарных в $\mathcal{K}$ операторов из (3.70) следует свойство $U_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда существует наряду с $\mathcal{L}^+$ максимальное инвариантное подпространство $\mathcal{L}^- \in \mathfrak{M}^-(\mathcal{K})$, $U\mathcal{L}^- = \mathcal{L}^-$, $\mathcal{L}^- = (\mathcal{L}^+)^{[\perp]}$.

$\square$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об описании (представлении, параметризации) унитарных операторов в пространстве Крейна. Напомним, что если $A = A^c$, то

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \\ A_{11} = A_{11}^*,\ A_{12} = -A_{21}^*,\ A_{21} = -A_{12}^*,\ A_{22} = A_{22}^*. \end{gathered} \tag{3.72}$$

Для матричного представления (3.69) унитарного оператора U имеет место следующий важный результат.

Теорема 3.8 (о параметризации унитарного оператора). Пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-,\ J = P^+ - P^-, \quad [x,y] = (Jx,y).$$

Тогда между всеми тройками

$$\{\Gamma; U_+, U_-\}, \quad \Gamma : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-, \quad \|\Gamma\| < 1, \tag{3.73}$$

где $U_\pm$ — гильбертовы унитарные операторы в $\mathcal{K}^\pm$, и всеми $J-$ унитарными операторами в $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$ существует взаимно однозначное соответствие:

$$U_{11} = (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}U_+, \quad U_{21} = \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}U_+, \tag{3.74}$$

$$U_{12} = \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}U_-, \quad U_{22} = (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}U_-. \tag{3.75}$$

Обратно, если задан унитарный оператор U в виде (3.69), то

$$\begin{aligned} &\Gamma = U_{12}U_{11}^{-1}, \\ &U_+ = (I - \Gamma^*\Gamma)^{1/2}U_{11}, \quad U_- = (I - \Gamma\Gamma^*)^{1/2}U_{22}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Доказательство.

а) Введем оператор

$$U(\Gamma) := \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \|\Gamma\| < 1. \tag{3.77}$$

(Можно проверить, что $U(\Gamma) \gg 0$ в $\mathcal{H} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, однако это свойство далее не понадобится.)

Убедимся, что $U(\Gamma)$ является унитарным оператором в $\mathcal{K}$, т.е. $(U(\Gamma))^c = (U(\Gamma))^{-1}$. Имеем

$$(U(\Gamma))^c = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & -(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}\Gamma^* \\ -(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}\Gamma & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{3.78}$$

Используя (3.77) и (3.78), непосредственно проверяем, что

$$(U(\Gamma))^c U(\Gamma) = U(\Gamma)(U(\Gamma))^c = I. \tag{3.79}$$

Введем также оператор

$$V := \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

Так как $U_\pm$ — гильбертовы унитарные операторы в $\mathcal{K}^\pm$, то $U_\pm^* = (U_\pm)^{-1}$ и потому

$$V^c := \begin{pmatrix} U_+^{-1} & 0 \\ 0 & U_-^{-1} \end{pmatrix} = V^{-1} = V^*. \tag{3.81}$$

Этот оператор является унитарным одновременно в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$.

Из свойств $U(\Gamma)$ и V следует, что оператор $U(\Gamma)V$ является унитарным в $\mathcal{K}$. Действительно,

$$[U(\Gamma)Vx, U(\Gamma)Vy] = [Vx, Vy] = [x, y].$$

Таким образом, установлено, что тройке операторов $\{\Gamma; U_+, U_-\}$ отвечает унитарный оператор $U(\Gamma)V$, матричные элементы которого выражаются формулами (3.74), (3.75).

б) Пусть теперь задан унитарный оператор $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ своим матричным представлением (3.69).

Согласно (3.63) имеем $U\mathcal{K}^+ \in \mathfrak{M}^+$. Заметим теперь, что подпространство $U\mathcal{K}^+$ является равномерно положительным, так как

$$[Ux_+, Ux_+] = [x_+, x_+] = \|x_+\|^2 \geq \frac{1}{\|U\|^2} \|Ux_+\|^2\|, \quad \forall x_+ \in \mathcal{K}^+.$$

Следовательно, угловой оператор Γ подпространства $U\mathcal{K}^+$

$$U \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x_+ \\ U_{21}x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x_+ \\ (U_{21}U_{11}^{-1})U_{11}x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x_+ \\ \Gamma U_{11}x_+ \end{pmatrix}, \quad \forall x_+ \in \mathcal{K}^+. \tag{3.82}$$

имеет норму меньше единицы (лемма 2.1) и справедливо равенство:

$$\Gamma := U_{21}U_{11}^{-1}. \tag{3.83}$$

Введем теперь оператор $U(\Gamma)$ согласно формуле (3.77), а по нему оператор

$$V := (U(\Gamma))^{-1}U. \tag{3.84}$$

Это можно сделать, так как $U(\Gamma)$ — унитарный оператор (см. часть а) доказательства) и потому $(U(\Gamma))^{-1} = (U(\Gamma))^c$ непрерывен. Очевидно, оператор V является унитарным в $\mathcal{K}$, так как он равен произведению унитарных операторов $(U(\Gamma))^{-1}$ и U.

Введем подпространство

$$\mathcal{L}_\Gamma := U(\Gamma)\mathcal{K}^+ = \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{x_+} \\ \Gamma\widetilde{x_+} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}x_+ \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}x_+ \end{array} \right\}, \quad x_+ \in \mathcal{K}^+. \tag{3.85}$$

Так как $(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+$ и $U_{11}\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+$, то из (3.85) и (3.82) следует, что

$$U(\Gamma)\mathcal{K}^+ = U\mathcal{K}^+ \tag{3.86}$$

и потому

$$V\mathcal{K}^+ = (U(\Gamma))^{-1}U\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+. \tag{3.87}$$

Аналогично можно убедиться, что

$$V\mathcal{K}^- = \mathcal{K}^-. \tag{3.88}$$

Из (3.87) и (3.88) следует, что матрица V имеет диагональный вид:

$$V := \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix}, \tag{3.89}$$

и так как $V^c = V^{-1} = V^*$, то $U_\pm^* = U_\pm^{-1}$, т.е. $U_\pm$ — гильбертовы унитарные операторы в $\mathcal{K}^\pm$. □

3.7 Теоремы Филлипса для унитарных операторов и следствия из них

Большой вклад в теорию пространств Крейна внес Р.С. Филлипс. Сейчас будут изложены некоторые его результаты по теории унитарных операторов.

Определение 3.8. Унитарный оператор U называется устойчивым, если все его натуральные степени ограничены:

$$\|U^n\| \leqslant c < \infty, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.90}$$

□

Так как

$$\|U^{-n}\| = \|(U^*)^n\| \leqslant c, \tag{3.91}$$

то можно считать, что в (3.90) $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 3.9. Унитарный оператор U называется нормально разложимым, если найдется такое каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_1^-$, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$. □

Теорема 3.9 (Филлипс). Унитарный оператор U нормально разложим тогда и только тогда, когда он устойчив. □

Этот результат здесь приведен без доказательства.

Упражнение 3.4. Доказать, что J-унитарный оператор U является гильбертово унитарным тогда и только тогда, когда $\|U\| = 1$. □

Теорема 3.10 (Филлипс). Пусть $\{U\}$ — группа J-унитарных операторов, коммутирующих друг с другом. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1^0. Существует константа $c < \infty$ такая, что $\|U\| \leqslant c$ для любого U.

2^0. Существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_1^-$ такое, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ для всех U из семейства. □

Эта теорема также дается здесь без доказательства.

Замечание 3.3. В теореме 3.9 нет информации об элементе U_{12} матричного оператора $U = (U_{ij})_{i,j=1}^2$, однако U нормально разложим. Поэтому $U\mathcal{K}_1^{\pm} = \mathcal{K}_1^{\pm}$ и, следовательно, $U_{12} = 0$. □

Пусть U — унитарный оператор.

Определение 3.10. Унитарный оператор U называется сильно устойчивым, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что любой унитарный оператор V, удовлетворяющий условию $\|U - V\| < \varepsilon$, является устойчивым. □

Если оператор U устойчив, то (теорема 3.9) он нормально разложим, $U\mathcal{K}^{\pm} = \mathcal{K}^{\pm}$, и потому он имеет диагональный вид:

$$U = \operatorname{diag}(U_+; U_-). \tag{3.92}$$

В этом случае он является гильбертово унитарным в $\mathcal{H} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$. Следовательно,

$$\sigma(U) \subset \mathbb{T} = \{\lambda : |\lambda| = 1\}. \tag{3.93}$$

Теорема 3.11 (М. Крейн, Филлипс). Унитарный оператор U является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$ такое, что

$$U\mathcal{K}^{\pm} = \mathcal{K}^{\pm}, \quad \sigma(U|_{\mathcal{K}^+}) \cap \sigma(U|_{\mathcal{K}^-}) = \emptyset. \tag{3.94}$$

В этом случае U имеет единственную инвариантную максимальную дуальную пару $\{\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-\}$. □

Теорема 3.12 (М. Крейн, Филлипс). Пусть $\{U\}$ — семейство унитарных коммутирующих операторов в пространстве $\mathcal{K}$ и любой конечный набор операторов $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$ порождает ограниченную группу. Тогда если $U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ для каждого U, то существуют подпространства $\mathcal{L}^{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}$, $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{L}^-)^{[\perp]}$, такие, что $U\mathcal{L}^{\pm} = \mathcal{L}^{\pm}$ для любого U из семейства. □

Замечание 3.4. В условиях теоремы 3.12 пара коммутирующих унитарных операторов имеет общее максимальное неотрицательное инвариантное подпространство. В общем же случае, для любых унитарных операторов U, V в $\mathcal{K}$, $U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, проблема существования общих инвариантных максимальных неотрицательных подпространств является нерешенной. □

Продолжим рассмотрение свойств семейств операторов. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{A} = \{U\}$ — группа операторов, $U:\ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$.

Определение 3.11. Группа $\mathcal{A}$ называется аменабельной, если на ней существует инвариантное среднее f_*, т.е. линейный непрерывный функционал, заданный на множестве $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ ограниченных функций φ на $\mathcal{A}$, $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, $\varphi(U) \in \mathbb{C}$, такой, что выполнены условия:

1^0. $f_*(1) = 1$;

2^0. $f_*(\varphi) \geqslant 0$, если $\varphi \geqslant 0 \quad (\varphi(U) \geqslant 0, \quad \forall\, U)$;

3^0. $f_*(\varphi) = f_*(\varphi(\cdot U)) = f_*(\varphi(U)\cdot), \quad \forall\, U \in \mathcal{A}$;

$$(\varphi(\cdot U)V) := \varphi(VU). \qquad \square$$

Функционал f_* называют функционалом Маркова. Примерами аменабельных групп являются:

1^0. Коммутативные группы.

2^0. Разрешимые группы (они далее не понадобятся).

3^0. Компактные группы (в равномерной операторной топологии).

4^0. Ограниченные группы матриц.

Теорема 3.13 (Б.С. Надь). Аменабельная группа операторов подобна группе унитарных операторов тогда и только тогда, когда она ограничена.

Доказательство. (в одну сторону утверждение очевидно).

а) Пусть аменабельная группа подобна группе унитарных операторов. Тогда для любого U из группы найдется непрерывный и непрерывно обратимый оператор S такой, что $S^{-1}US = T$, где T — унитарный оператор. Тогда $U = STS^{-1}$ и потому

$$\|U\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|S^{-1}\| \leqslant \|S\|\|S^{-1}\| < \infty \quad (\|T\| = 1).$$

б) Здесь доказательство гораздо сложнее. Пусть $\mathcal{A}$ — аменабельная группа (по умножению), ограниченная, т.е. существует $c > 0$ такое, что $\|U\| \leqslant c$ для всякого $U \in \mathcal{A}$. Для обратного оператора $U^{-1} \in \mathcal{A}$ имеем ту же оценку: $\|U^{-1}\| \leqslant c$.

Пусть f_* — инвариантное среднее (см. определение 3.11). Если φ — вещественная функция, то

$$\inf\{\varphi(U):\ U \in \mathcal{A}\} \leqslant f_* \leqslant \sup\{\varphi(U):\ u \in \mathcal{A}\} =: M. \qquad (3.95)$$

Докажем правое неравенство. Имеем $\varphi(\cdot) = (\varphi(\cdot) - M) + M$. Так как f_* — линейный функционал, то

$$f_*(\varphi) = -f_*\left(M - \varphi(\cdot)\right) + f_*(M).$$

Поскольку $M - \varphi(\cdot) \geqslant 0$, то по свойству 2^0 (определение 3.11) имеем $f_*(M - \varphi(\cdot)) \geqslant 0$; кроме того, $f_*(M) = M f_*(1) = M$. Отсюда следует, что $f_*(\varphi) \leqslant M$.

Рассмотрим функции

$$\varphi_{x,y} = \varphi_{x,y}(U) := (Ux, Uy), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Они ограничены, так как

$$|\varphi_{x,y}(U)| = |(Ux, Uy)| \leqslant \|U\|^2 \|x\| \cdot \|y\| \leqslant c^2 \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тогда определена величина

$$f_*(\varphi_{x,y}) =: (x, y)_1 \in \mathbb{C}. \tag{3.96}$$

Докажем, что (3.96) определяет скалярное произведение в $\mathcal{H}$, эквивалентное исходному. Нужно убедиться сначала, что имеют место свойства, определяющие скалярное произведение, т.е.

1^0. $(x, x)_1 \geqslant 0$, $(x, x)_1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2^0. $(\alpha x + \beta y, z)_1 = \alpha(x, z)_1 + \beta(y, z)_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

3^0. $(x, y)_1 = \overline{(y, x)}_1$.

Проверим, что справедливы свойства 2^0 и 3^0. Имеем

$$f_*(\varphi_{\alpha x+\beta y,z}) = (\alpha x + \beta y, z)_1 = |\text{линейность} f_*| = \alpha(x, z)_1 + \beta(y, z)_1,$$

по пути было использовано также свойство

$$\varphi_{\alpha x+\beta y,z}(U) = \alpha\varphi_{x,z}(U) + \beta\varphi_{y,z}(U).$$

Докажем теперь свойство 1^0. Имеем, в силу (3.95),

$$\inf\left\{\varphi_{x,x}(U)\right\} \leqslant f_*(\varphi_{x,x}) = (x, x)_1 \leqslant \sup\left\{\varphi_{x,x}(U)\right\}.$$

Однако

$$c^{-2}\|x\|^2 \leqslant \varphi_{x,x}(U) = (Ux, Ux) \leqslant c^2\|x\|^2,$$

и тогда из этих неравенств следует, что нормы $\|x\|_1 := \sqrt{(x, x)_1}$ и $\|x\|$ эквивалентны.

Для любого $V \in \mathcal{A}$ преобразуем выражение $(Vx, Vy)_1$. Имеем

$$(Vx, Vy)_1 = f_*(\varphi_{Vx,Vy})(U) = f_*\left(\varphi_{x,y}(\cdot V)\right) = f_*(\varphi_{x,y}) = (x, y)_1, \qquad (3.97)$$

так как $(UVx, UVy) = \varphi_{x,y}(\cdot V)(U)$.

Свойство (3.97) означает, что оператор V является унитарным в новой норме $\|\cdot\|_1$. Тогда, учитывая эквивалентности норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, имеем

$$(x, y)_1 = (Wx, y), \quad W = W^* \gg 0, \qquad (3.98)$$

и из (3.97) и (3.98) получаем, что операторы $W^{1/2}VW^{-1/2}$ унитарны в исходном скалярном произведении. Поэтому каждый элемент $V \in \mathcal{A}$ подобен унитарному оператору. $\square$

Теорема 3.13 позволяет достаточно просто проверить справедливость следующей ниже теоремы 3.14, которая в столь общей форме рассмотрена Т.Я. Азизовым и В.С. Шульманом, однако доказательство при этом в существенном не отличалось от данного Р.С. Филлипсом для коммутативных групп.

Теорема 3.14. Аменабельная группа $\mathcal{A} = \{U\}$ J–унитарных операторов ограничена тогда и только тогда, когда существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-$, такое, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ для любого $U \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$, $J = P^+ - P^-$, $(x, y) = [Jx, y]$, $[x, y] = (Jx, y)$ отвечает исходному каноническому разложению.

а) Предположим, что существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-$, $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$. Так как $\{\mathcal{K}_1^\pm, \pm[x, y]\}$ — гильбертовы пространства, то, как следует из теоремы 3.13 (Б.С. Надя), операторы $U|\{\mathcal{K}_1^\pm, \pm[x, y]\}$ являются гильбертово унитарными в $\mathcal{K}_1^\pm$.

Введем в $\mathcal{K}$ новую норму, порожденную скалярным произведением

$$\begin{aligned} &(x, y)_1 := [x_+^{(1)}, y_+^{(1)}] - [x_-^{(1)}, y_-^{(1)}], \\ &x = x_+^{(1)} + x_-^{(1)}, \quad y = y_+^{(1)} + y_-^{(1)}. \end{aligned} \qquad (3.99)$$

Тогда в новой норме операторы $U \in \mathcal{A}$ подобны унитарным (см. конец доказательства теоремы 3.13) и, значит, аменабельная группа $\mathcal{A}$ ограничена.

б) прежде чем доказывать обратное утверждение, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $A = A^*$ — оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $0 \in \rho(A)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \quad A\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}^\pm, \\
&A = \operatorname{diag}(A^+; A^-), \quad A^+ \gg 0, \quad A^- \ll 0.
\end{aligned} \tag{3.100}
$$

Если B коммутирует с A, $BA = AB$, то $B\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^\pm$, $B = \operatorname{diag}(B^+; B^-)$, где $B^\pm$ — произвольные (вообще говоря) операторы.

Будем теперь считать, что аменабельная группа $\mathcal{A} = \{U\}$ J-унитарных операторов U ограничена. Докажем, что существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-$ такое, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ для любого $U \in \mathcal{A}$.

Возьмем оператор $A := W^{-1/2}JW^{-1/2} = A^*$, где W — оператор, определенный формулой (3.98). Так как $0 \in \rho(J)$, а $W^{1/2}$, $W^{-1/2}$ равномерно положительны, то $0 \in \rho(A)$, и потому пространство $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ можно разложить на подпространства согласно (3.100). Введем теперь оператор $B := W^{1/2}UW^{-1/2}$, $U \in \mathcal{A}$. Проверим, что операторы A и B коммутируют.

Если это так, то

$$
\begin{aligned}
&AB = BA \Longleftrightarrow \left(W^{-1/2}JW^{-1/2}\right)\left(W^{1/2}UW^{-1/2}\right) = \\
&= \left(W^{1/2}UW^{-1/2}\right)\left(W^{-1/2}JW^{-1/2}\right) \Longleftrightarrow \\
&W^{-1/2}(JU) = W^{1/2}UW^{-1}J \Longleftrightarrow (JUJ)W = WU.
\end{aligned} \tag{3.101}
$$

В то же время

$$
JUJ = (U^*)^{-1}. \tag{3.102}
$$

Действительно, так как оператор U является J–унитарным, то

$$
[Ux, Uy] = (JUx, Uy) = [x, y] = (Jx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H} = \mathcal{K}.
$$

Отсюда имеем

$$
(JUJ\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (\widetilde{x}, U^{-1}\widetilde{y}), \quad \widetilde{x} = Jx, \quad \widetilde{y} = Uy,
$$

откуда и следует (3.102).

С учетом (3.102) соотношение (3.101) дает связь

$$
W = U^*WU. \tag{3.103}
$$

Эта формула верна, так как, согласно (3.97), (3.98),

$$
(Ux, Uy)_1 = (WUx, Uy)_1 = (U^*WUx, y)_1 = (x, y)_1 = (Wx, y).
$$

Отсюда следует, после возвращения по всем выкладкам к (3.101), что операторы A и B коммутируют. Тогда, согласно сказанному в начале доказательства части б), имеем свойства

$$\begin{aligned}&B\mathcal{H}^{\pm} \subset \mathcal{H}^{\pm} \Longleftrightarrow W^{-1/2}UW^{-1/2}\mathcal{H}^{\pm} \subset \mathcal{H}^{\pm} \Longleftrightarrow \\ &UW^{-1/2}\mathcal{H}^{\pm} \subset W^{-1/2}\mathcal{H}^{\pm}.\end{aligned} \tag{3.104}$$

Докажем теперь, что:

1^0. $W^{-1/2}\mathcal{H}^{+}[\perp]W^{-1/2}\mathcal{H}^{-}$;

2^0. $W^{-1/2}\mathcal{H}^{+} \geqslant 0$ (в $\mathcal{K}$), $W^{-1/2}\mathcal{H}^{-} \leqslant 0$ (в $\mathcal{K}$);

3^0. $\mathcal{H} = (W^{-1/2}\mathcal{H}^{+})[\perp](W^{-1/2}\mathcal{H}^{-})$.

Если эти свойства имеют место, то, так как $W^{-1/2}\mathcal{H}^{+}$ и $W^{-1/2}\mathcal{H}^{-}$ в сумме дают все $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, то эти подпространства максимальны, т.е.

$$W^{-1/2}\mathcal{H}^{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}. \tag{3.105}$$

Кроме того, они равномерно дефинитны, так как $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{H}^{+} \oplus \mathcal{H}^{-}$.

Отсюда следует, что в качестве подпространств $\mathcal{K}_1^{\pm}$, дающих требуемое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, можно взять подпространства

$$\mathcal{K}_1^{\pm} := W^{-1/2}\mathcal{H}^{\pm}. \tag{3.106}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось лишь проверить свойства $1^0 - 3^0$.

1^0. Пусть $x_{\pm} \in \mathcal{H}^{\pm}$. Тогда $W^{-1/2}x_{\pm} \in \mathcal{K}_1^{\pm}$ и

$$[W^{-1/2}x_{+}, W^{-1/2}x_{-}] = (W^{-1/2}JW^{-1/2}x_{+}, x_{-}) = 0,$$

так как $Ax_{+} = W^{-1/2}JW^{-1/2}x_{+} \in \mathcal{H}^{+}$, $x_{-} \in \mathcal{H}^{-}$.

2^0. $[W^{-1/2}x_{+}, W^{-1/2}x_{+}] = (JW^{-1/2}x_{+}, W^{-1/2}x_{+}) =$
$= (W^{-1/2}JW^{-1/2}x_{+}, x_{+}) = (Ax_{+}, x_{+}) \geqslant 0$, так как $A|_{\mathcal{H}^{+}} = A^{+} \gg 0$. Аналогично проверяем, что $W^{-1/2}\mathcal{H}^{-} \ll 0$.

3^0. Третье свойство следует из (3.105). □

3.8 Преобразование Крейна–Шмульяна и его свойства

Возвращаясь к изучению свойств бинесжимающих операторов, снова рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{K}$, его каноническое разложение

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{+}[\oplus]\mathcal{K}^{-}, \quad J = P^{+} - P^{-},$$

и будем считать, что $V:\ \mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}$ — бинесжимающий оператор,

$$V=\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{aligned}&B^{+}:=\left\{K:\ \mathcal{K}^{+}\longrightarrow\mathcal{K}^{-},\quad \|K\|\leqslant 1\right\},\\ &B^{-}:=\left\{Q:\ \mathcal{K}^{-}\longrightarrow\mathcal{K}^{+},\quad \|Q\|\leqslant 1\right\}\end{aligned}\tag{3.107}$$

— единичные операторные шары, отвечающие совокупностям угловых операторов неотрицательных и соответственно неположительных подпространств из $\mathcal{K}$.

Рассмотрим произвольный $K\in B^{+}$ и отвечающее ему подпространство

$$\mathcal{L}_{+}=\left\{x_{+}+Kx_{+}:\ \forall x_{+}\in\mathcal{K}^{+}\right\}\in\mathfrak{M}^{+}.$$

Так как V — бинесжимающий, то $V\mathcal{L}_{+}\in\mathfrak{M}^{+}$ (следствия 3.1, 3.2),

$$V\mathcal{L}_{+}=\left\{\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{+}\\ Kx_{+}\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{array}{c}(V_{11}+V_{12}K)x_{+}\\ (V_{21}+V_{22}K)x_{+}\end{array}\right\}.$$

Поскольку для бинесжимающего оператора V имеет место свойство $0\in\rho(V_{11}+V_{12}K)$ (теорема 3.3), то

$$\begin{aligned}&V\mathcal{L}_{+}=\left\{\begin{array}{c}y_{+}\\ (V_{21}+V_{22}K)(V_{11}+V_{12}K)^{-1}y_{+}\end{array}\right\},\\ &y_{+}:=(V_{11}+V_{12}K)x_{+}.\end{aligned}\tag{3.108}$$

Отсюда следует, что оператор

$$F_V(K):=(V_{21}+V_{22}K)(V_{11}+V_{12}K)^{-1}\tag{3.109}$$

является угловым оператором для подпространства $V\mathcal{L}_{+}\in\mathfrak{M}^{+}$. Отображение (3.109) является дробно-линейным отображением операторного шара B^{+} и называется преобразованием Крейна–Шмульяна.

Заметим теперь, что свойство $V\mathcal{L}_{+}=\mathcal{L}_{+}$ имеет место тогда и только тогда, когда у неотрицательных подпространств $\mathcal{L}_{+}$ и $V\mathcal{L}_{+}$ их угловые операторы совпадают, т.е.

$$F_V(K)=K.\tag{3.110}$$

Это означает, что K является неподвижной точкой отображения Крейна–Шмульяна $F_V(K)$.

Замечание 3.5. Если оператор V бинесжимающий, то $\|V_{11}^{-1}V_{12}\| < 1$. Поэтому $V_{11} + V_{12}K$ является непрерывным отображением при любом K, $\|K\| \leqslant 1$. Так как V_{11} ограниченно обратим (см. (3.37) при $K = 0$), то отсюда следует, что оператор $I + TK$, $T := V_{11}^{-1}K$, ограниченно обратим при любом K, $\|K\| \leqslant 1$. Предлагаем доказать самостоятельно, что $\|T\| < 1$ (даже в рефлексивном банаховом пространстве). Здесь это свойство можно проверить непосредственно. □

Рассмотрим основные свойства преобразования Крейна–Шмульяна.

Свойство 1°. Пусть V, W — бинесжимающие отображения. Тогда

$$F_{VW}(K) = F_V(F_W(K)). \tag{3.111}$$

Доказательство. Как ясно из предыдущего, $F_W(K)$ является угловым оператором для пространства $W\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_+ = \{x_+ + Kx_+ : x_+ \in \mathcal{K}^+\}$. Аналогично $F_V(F_W(K))$ есть угловой оператор для подпространства $VW\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, однако для этого подпространства угловой оператор равен $F_{VW}(K)$, и (3.111) доказано.

Свойство 2°. Если V является J–унитарным оператором в $\mathcal{K}$, то

$$F_V(B^+) = B^+, \tag{3.112}$$

т.е. преобразование Крейна–Шмульяна отображает шар B^+ на себя.

Доказательство. Так как V является J–унитарным оператором, то, очевидно, $F_V(B^+) \subset B^+$. Далее, так как V^{-1} также J–унитарен, то аналогично $F_{V^{-1}}(B^+) \subset B^+$. Отсюда следует, что

$$(F_V)^{-1} = F_{V^{-1}}. \tag{3.113}$$

Свойство 3°.

Теорема 3.15 (Хацкевича–Шульмана)**.** Пусть V — бинесжимающий оператор. Тогда $F_V(B^+)$ — выпуклое замкнутое в слабой операторной топологии множество.

Доказательство отличается от оригинального доказательства авторов.

Напомним, что выпуклость образа $F_V(B^+)$ означает, что для бинесжимающего оператора V необходимо доказать следующее свойство:

$$\begin{aligned} &\alpha F_V(K_1) + (1-\alpha)F_V(K_2) = F_V(K_3),\\ &0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad K_1, K_2, K_3 \in B^+, \end{aligned} \tag{3.114}$$

т.е. по любым $K_1, K_2 \in B^+$ и любому $\alpha \in [0,1]$ нужно найти $K_3 \in B^+$ такой, что выполнено свойство (3.114).

Воспользуемся установленными выше свойствами 1° и 2°. Представим оператор V в виде $V = WU$, где U является J-унитарным, а W — бинесжимающим оператором вида

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.115}$$

Это можно сделать следующим образом. Введем оператор $\Gamma := -(V_{11}^{-1}V_{12})^*$. Так как для бинесжимающего оператора V имеем $\|V_{11}^{-1}V_{12}\| < 1$ (см. выше), то $\|\Gamma\| < 1$. Поэтому по оператору Γ можно ввести оператор $U(\Gamma)$ по формуле (3.77):

$$U(\Gamma) = \begin{pmatrix} (I-\Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I-\Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \\ \Gamma(I-\Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I-\Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{3.116}$$

Как выяснено при доказательстве теоремы 3.10, оператор $U(\Gamma)$ является J-унитарным, т.е. $U(\Gamma)^c = U(\Gamma)^{-1}$.

Прямо проверяется, что при выбранном Γ произведение $VU(\Gamma)$ является матрицей вида (3.115), т.е. можно положить $W = VU(\Gamma)$. Так как $U(\Gamma)$ является J-унитарным, а V — бинесжимающим, то оператор W также бинесжимающий. Отсюда следует, что оператор V допускает факторизацию вида

$$V = W \cdot U, \tag{3.117}$$

где W — бинесжимающий, а $U = U(\Gamma)^{-1} = U(\Gamma)^c$ — унитарный оператор в $\mathcal{K}$.

Согласно свойствам 1° и 2°,

$$\begin{aligned} F_V(B^+) = F_{WU}(B^+) = F_W(F_U(B^+)) = \\ = F_W(B^+) = \left\{(W_{21} + W_2K)W_{11}^{-1} : \|K\| \leqslant 1\right\}. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Отсюда выпуклость (см. (3.114)) и замкнутость $F_V(B^+)$ (в слабой операторной топологии) следуют непосредственно. □

Замечание 3.6. Если $W_{22} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $F_V(B^+)$ — компакт в сильной операторной топологии. $\square$

Продолжим изучение свойств преобразования Крейна–Шмульяна.

Свойство 4°. Если $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $F_V(K) : B^+ \longrightarrow B^+$ является непрерывной функцией переменной K в слабой операторной топологии.

Доказательство (аналогичная схема уже использовалась ранее при доказательстве теоремы 3.1). Итак, докажем, что для отображения

$$F_V(K) := (V_{21} + V_{22}K)(V_{11} + V_{12}K)^{-1}$$

из свойства $K_n \longrightarrow K_0$ (слабо) следует свойство $F_V(K_n) \longrightarrow F_V(K_0)$ (слабо).

а) Так как $\|V_{11}^{-1}V_{12}\| =: \alpha < 1$, то нормы

$$\|(V_{11} + V_{12}K)^{-1}\|, \quad \|K\| \leqslant 1,$$

равномерно ограничены. Действительно,

$$\|(V_{11} + V_{12}K)^{-1}\| = \|(I + V_{11}^{-1}V_{12}K)^{-1}V_{11}^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(I + V_{11}^{-1}V_{12}K)^{-1}\| \cdot \|V_{11}^{-1}\| \leqslant \frac{\|V_{11}^{-1}\|}{1 - \|V_{11}^{-1}V_{12}K\|} \leqslant \frac{\|V_{11}^{-1}\|}{1-\alpha}. \quad (3.119)$$

б) Так как $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то

$$(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1} \longrightarrow (V_{11} + V_{12}K_0)^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

сильно. В самом деле,

$$\|(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1}x - (V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}x\| =$$

$$= \|(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1}\{V_{12}(K_0 - K_n)\}(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}x\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1}\| \cdot \|\{V_{12}(K_0 - K_n)\}(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}x\|.$$

Здесь первый сомножитель ограничен в силу (3.119), а второй стремится по норме к нулю при $n \longrightarrow \infty$, так как $V_{12}(K_0 - K_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ в сильной операторной топологии.

в) Поскольку $V_{21} + V_{22}K_n \longrightarrow V_{21} + V_{22}K_0$ в слабой операторной топологии, а $(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1} \longrightarrow (V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}$ сильно, то отсюда следует, что $F_V(K_n) \longrightarrow F_V(K_0)$ в слабой операторной топологии.$\square$

3.9 Теоремы Крейна для бинесжимающих операторов

Далее понадобится следующий известный топологический результат.

Теорема 3.16 (Шаудер)**.** Пусть Ω является выпуклым компактом в локально выпуклом топологическом пространстве, а функция $f: \Omega \longrightarrow \Omega$ непрерывна. Тогда найдется такая точка $x_0 \in \Omega$, что $f(x_0) = x_0$. $\square$

С использованием свойств преобразования Крейна–Шмульяна и теоремы Шаудера получаем следующий результат.

Теорема 3.17 (Крейн)**.** У бинесжимающего оператора V с $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство, т.е. существует такое $\mathcal{L}_0^+ \in \mathfrak{M}^+$, что $V\mathcal{L}_0^+ = \mathcal{L}_0^+$.

Более того, любое неотрицательное инвариантное подпространство оператора V допускает расширение до максимального неотрицательного подпространства, инвариантного относительно V, т.е. если $\mathcal{L}_+ \geqslant 0$, $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, то существует $\mathcal{L}^+ \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{L}^+ \supset \mathcal{L}_+$, $V\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+$. $\square$

Доказательство.

а) Так как согласно теореме Тихонова операторный шар B^+ компактен в слабой операторной топологии, а по свойству 4° преобразование Крейна–Шмульяна $F_V(K): B^+ \longrightarrow B^+$ непрерывно в слабой операторной топологии, то из теоремы Шаудера, примененной к $\Omega = B^+$ и $f: K \longrightarrow F_V(K)$, получаем, что существует $K_0 \in B^+$ такой, что $F_V(K_0) = K_0$. Этот оператор, как следует из предыдущего, является угловым оператором подпространства $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+$,

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ K_0 x_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\},$$

которое и будет искомым максимальным неотрицательным инвариантным подпространством.

б) Докажем второе утверждение теоремы. Пусть K_0' — угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$. Возьмем

$$\Omega = B^+(K_0') := \{K \in B^+ : K_0' \subset K\}.$$

Так как $B^+(K_0')$ — выпуклое замкнутое в слабой операторной топологии множество и функция

$$F_V(K_0'): B^+(K_0') \longrightarrow B^+(K_0')$$

непрерывна (в слабой операторной топологии), то по теореме Шаудера найдется $K_0 \in B^+(K_0')$ такой, что $F_V(K_0) = K_0$. Очевидно, этому оператору отвечает подпространство

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ K_0 x_+ \end{pmatrix} : \ x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\} \supset \mathcal{L}_+,$$

так как $K_0 \supset K_0'$. $\square$

Замечание 3.7. В развитие теоремы 3.17 отметим, что если имеется дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ такая, что $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, $V^c\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-$, то найдется максимальная дуальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$, для которой $\widetilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$, $V\widetilde{\mathcal{L}}_+ = \widetilde{\mathcal{L}}_+$, $V^c\widetilde{\mathcal{L}}_- = \widetilde{\mathcal{L}}_-$.

Здесь при использовании схемы, примененной в теореме 3.17, следует взять множество

$$\Omega := \{K \in B^+(K_0') : \ \mathcal{L}_+(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ K_0 x_+ \end{pmatrix} : \ x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\} [\perp] \mathcal{L}_-\},$$

которое является выпуклым и замкнутым в слабой операторной топологии. Тогда $F_V(\cdot) : \ \Omega \longrightarrow \Omega$ является непрерывной функцией K в слабой операторной топологии, и снова работает теорема Шаудера.

$\square$

В качестве следствия из теоремы 3.17 и замечания 3.7 приведем следующий факт.

Теорема 3.18 (теорема М.Г. Крейна для унитарных операторов)**.** Пусть U — унитарный оператор в $\mathcal{K}$, а $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара инвариантных относительно U подпространств,

$$U\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm, \quad U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Тогда найдется максимальная дуальная пара

$$\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm, \quad U\widetilde{\mathcal{L}}_\pm = \widetilde{\mathcal{L}}_\pm. \tag{3.120}$$

Доказательство. Приведем лишь схему доказательства этого утверждения.

Имеем $U\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$. Согласно теоремам 2.4 и 3.17 имеется расширение $\{\mathcal{L}_{1,+}, \mathcal{L}_{1,-}\}$ дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ такое, что

$$\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} \subset \{\mathcal{L}_{1,+}, \mathcal{L}_{1,-}\}, \quad U\mathcal{L}_{1,+} = \mathcal{L}_{1,+}.$$

С другой стороны, из свойства $U\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ и унитарности U и U^{-1} следует, что

$$U^{-1}\mathcal{L}_+ \subset U^{-2}\mathcal{L}_+ \subset \ldots \subset U^{-n}\mathcal{L}_+ \subset \ldots .$$

Здесь все линеалы $U^{-n}\mathcal{L}_+ \geqslant 0$ и они вложены один в другой.

Возьмем линеал

$$\mathcal{L}'_{1,+} := \cup_{n=0}^{\infty} U^{-n}\mathcal{L}_+, \tag{3.121}$$

который, очевидно, является неотрицательным. Для него имеем свойство

$$U\mathcal{L}'_{1,+} = \mathcal{L}'_{1,+},$$

так как объединение в (3.121) можно проводить, начиная с любого номера. Тогда

$$\overline{U\mathcal{L}'_{1,+}} = U\overline{\mathcal{L}'_{1,+}} = \overline{\mathcal{L}'_{1,+}} =: \widetilde{\mathcal{L}}_+.$$

Для линеала $\widetilde{\mathcal{L}}_-$ рассуждения аналогичные. □

Замечание 3.8. Вернемся к теореме 3.15 Хацкевича–Шульмана. Как было установлено в ходе доказательства этой теоремы (см. (3.118)),

$$F_V(B^+) = F_W(B^+) = \{(W_{21} + W_{22}K)W_{11}^{-1} : \ \|K\| \leqslant 1\},$$

причем (см. замечание 3.6) $F_W(B^+)$ является компактом в сильной операторной топологии, если $W_{22} \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда отображение $F_V : \ \Omega := F_V(B^+) \longrightarrow \Omega$ всегда сильно непрерывная функция K, и по теореме Шаудера существует неподвижная точка $F_V(K)$, независимо от того, выполнено ли свойство компактности V_{12} или нет. Отсюда следует, что операторы вида WU, где U — унитарный, а W — бинесжимающий оператор вида (3.115) с $W_{22} \in \mathfrak{S}_\infty$, имеют инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$. □

Замечание 3.9. Для непрерывных диссипативных либо самосопряженных в $\mathcal{K}$ операторов верны полные аналоги доказанных выше утверждений для бинесжимающих и унитарных операторов. В частности, если A — диссипативный оператор, $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то существует $\mathcal{L}^+ \in \mathfrak{M}^+$, $A\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^+$; если $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, где $\mathcal{L}_+$ инвариантно относительно A, а $\mathcal{L}_-$ — относительно A^c, то существует максимальная дуальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$:

$$A\widetilde{\mathcal{L}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{L}}_+, \quad A^c\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \widetilde{\mathcal{L}}_-, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm.$$

То же справедливо для $A = A^c$.

Доказательство основано на том, что по оператору A строится бинесжимающий либо унитарный (в $\mathcal{K}$) оператор (преобразование Кэли оператора A)

$$V := (A - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I)^{-1}, \tag{3.122}$$

причем

$$\{V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\} \Longleftrightarrow \{A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\}. \qquad \square$$

Эти идеи сейчас будут использованы при формулировке и доказательстве соответствующих утверждений.

Теорема 3.19. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$ — пространство Крейна, $J = P^+ - P^-$, а оператор A является ограниченным J-диссипативным оператором, представленным матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{3.123}$$

Тогда какова бы ни была дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, инвариантная относительно A, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, $A^c\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$, найдется максимальная дуальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$, инвариантная относительно A, т.е. $A\widetilde{\mathcal{L}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{L}}_+$, $A^c\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \widetilde{\mathcal{L}}_-$.

Доказательство. Сначала наметим еще раз идею доказательства, эта идея уже упоминалась в замечании 3.9.

Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и рассмотрим оператор $V := (A - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$. Тогда V — бинесжимающий оператор и $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$. Далее выберем λ так, чтобы $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$ и $V^c\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. Как ранее было установлено, можно рассмотреть дуальную пару $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\} \supset \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $V\widetilde{\mathcal{L}}_+ = \widetilde{\mathcal{L}}_+$, $V^c\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \widetilde{\mathcal{L}}_-$. Затем выразим A через V, $A = (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V - I)^{-1}$, и докажем, что

$$(V - I)^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{L}}_+, \quad (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V - I)^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{L}}_+, \quad (V^c - I)\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \widetilde{\mathcal{L}}_-.$$

1°. Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| > \|A\|$ и $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и рассмотрим преобразование Кэли оператора A:

$$V := (A - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I)^{-1}, \quad V^c = (A^c - \lambda I)(A^c - \overline{\lambda} I)^{-1}. \tag{3.124}$$

Оказывается, оператор V (при фиксированном выбранном λ) является бинесжимающим, причем $0 \in \rho(V)$ и $0 \in \rho(V^c)$, так как в (3.124) все сомножители обратимы.

Докажем, что для оператора V выполнены свойства

$$V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+, \quad V^c\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-. \tag{3.125}$$

Согласно условиям теоремы, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$. Рассмотрим оператор $B := A|\mathcal{L}_+$, т.е. сужение оператора A на инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$. Очевидно, $\|B\| \leqslant \|A\| < |\lambda|$ и потому

$$(A - \lambda I)\mathcal{L}_+ = (B - \lambda I)\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+, \tag{3.126}$$

так как λ для B является регулярной точкой. Таким образом, $\mathcal{L}_+ = (A - \lambda I)^{-1}\mathcal{L}_+$, откуда следует, что

$$V\mathcal{L}_+ = (A - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I)^{-1}\mathcal{L}_+ = (A - \overline{\lambda} I)\mathcal{L}_+ = (B - \overline{\lambda} I)\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+.$$

Аналогично доказывается второе свойство (3.125).

2°. Докажем теперь, что

$$\{A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\} \Longrightarrow \{V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\}. \tag{3.127}$$

По определению оператора V имеем $V(A - \lambda I) = A - \overline{\lambda} I$. Запишем это соотношение в матричной форме, отвечающей каноническому разложению. Имеем

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - \overline{\lambda} I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \overline{\lambda} I \end{pmatrix}.$$

Приравнивая операторные элементы в верхнем правом углу, получим

$$V_{11}A_{12} + V_{12}(A_{22} - \lambda I) = A_{12}.$$

Отсюда следует, что

$$V_{12} = -(V_{11} - I)A_{12}(A_{22} - \lambda I)^{-1}. \tag{3.128}$$

Так как здесь $V_{11} - I$ и $(A_{22} - \lambda I)^{-1}$ — непрерывные операторы, а $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$.

3°. Поскольку оператор V бинесжимающий, $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ и выполнены свойства (3.125), то по теореме Крейна (см. теорему 3.17 и замечание 3.7) существует максимальная дуальная пара

$$\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\} \supset \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}, \quad V\widetilde{\mathcal{L}}_+ = \widetilde{\mathcal{L}}_+, \quad V^c\widetilde{\mathcal{L}} \subset \widetilde{\mathcal{L}}_-. \tag{3.129}$$

4°. Докажем теперь, что

$$(V-I)\widetilde{\mathcal{L}}_+ = \widetilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+. \tag{3.130}$$

Напомним, что для канонического разложения пространства $\mathcal{K}$ и любого $\widetilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+$ имеют место свойства $P^+\widetilde{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{K}^+$ и непрерывность операторов $\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)$ и $\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1}$. При этом

$$\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1} :\ \mathcal{K}^+ \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_+.$$

Поэтому свойство (3.130) равносильно свойству

$$\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)(V-I)\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1}\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+, \tag{3.131}$$

т.е. оператор $(V-I)|\widetilde{\mathcal{L}}_+$ подобен оператору

$$\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)(V-I)\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1}.$$

Пусть $\widetilde{K}$ — угловой оператор подпространства $\widetilde{\mathcal{L}}_+$. Тогда

$$\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1} x_+ = \begin{pmatrix} x_+ \\ \widetilde{K}x_+ \end{pmatrix}$$

и потому

$$(V-I)\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1} x_+ = (V-I)\begin{pmatrix} x_+ \\ \widetilde{K}x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (V_{11}-I+V_{12}\widetilde{K})x_+ \\ * \end{pmatrix},$$

где звездочкой здесь и далее будем обозначать выражения, несущественные для доказательства. Значит,

$$\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1}(V-I)\left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1} x_+ =$$

$$= \left(P^+|\widetilde{\mathcal{L}}_+\right)^{-1}\begin{pmatrix} (V_{11}-I+V_{12}\widetilde{K})x_+ \\ * \end{pmatrix} = (V_{12}-I+V_{12}\widetilde{K})x_+.$$

Отсюда следует, что оператор $(V-I)|\widetilde{\mathcal{L}}_+$ подобен оператору $V_{11}-I+V_{12}\widetilde{K}$. Таким образом, свойство (3.130) равносильно условию

$$1 \in \rho(V_{11}+V_{12}\widetilde{K}). \tag{3.132}$$

В силу (3.122) $V-I=(\lambda-\overline{\lambda})(A-\lambda)^{-1}$ и потому является ограничено обратимым оператором, т.е. $1\in\rho(V)$ и потому $1\notin\sigma_p(V|\widetilde{\mathcal{L}}_+)$. В виду подобия операторов $(V-I)\widetilde{\mathcal{L}}_+$ и $V_{11}+V_{12}\widetilde{K}-I$ получаем

$$1\notin\sigma_p(V_{11}+V_{12}\widetilde{K}). \tag{3.133}$$

Докажем, что $1\in\rho(V_{11})$. Тогда, в силу компактности $V_{12}\widetilde{K}$ и теоремы Фредгольма, будем иметь

$$1\in\rho(V_{11}+V_{12}\widetilde{K})\cup\sigma_p(V_{11}+V_{12}\widetilde{K}). \tag{3.134}$$

Так как выполнено свойство (3.133), то тогда получим, что

$$1\in\rho(V_{11}+V_{12}\widetilde{K}).$$

Для доказательства свойства $1\in\rho(V_{11})$ рассмотрим, согласно определению (3.124), соотношение

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}-\lambda I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}-\overline{\lambda}I & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}-\overline{\lambda}I.\end{pmatrix}$$

Отсюда получаем $V_{11}(A_{11}-\lambda I)+V_{12}A_{21}=A_{11}-\overline{\lambda}I$. Тогда

$$V_{11}=(A_{11}-\overline{\lambda}I)(A_{11}-\lambda I)^{-1}-V_{12}A_{21}(A_{11}-\lambda I)^{-1}=$$

$$=I+(\lambda-\overline{\lambda})(A_{11}-\lambda I)^{-1}-V_{12}A_{21}(A_{11}-\lambda I)^{-1}.$$

Поэтому

$$V_{11}-I=(\lambda-\overline{\lambda})(A_{11}-\lambda I)^{-1}-V_{12}A_{21}(A_{11}-\lambda I)^{-1}=:X+Y.$$

Здесь, очевидно, $0\in\rho(X)$, $Y\in\mathfrak{S}_\infty$. Значит, согласно теореме Фредгольма,

$$0\in\rho(X+Y)\cup\sigma_p(X+Y).$$

Если $0\in\rho(X+Y)$, то $1\in\rho(V_{11})$. Покажем, что $0\notin\sigma_p(V_{11}-I)$.

Предположим противное, т.е. $0\in\sigma_p(V_{11}-I)$. Тогда существует ненулевой элемент $x_+^0\in\mathcal{K}^+$ такой, что $V_{11}x_+^0=x_+^0$. Имеем для этого элемента

$$[Vx_+^0,Vx_+^0]=(V_{11}x_+^0,V_{11}x_+^0)-(V_{21}x_+^0,V_{21}x_+^0)=$$

$$=(x_+^0,x_+^0)-(V_{21}x_+^0,x_+^0)\geqslant[x_+^0,x_+^0]=(x_+^0,x_+^0),$$

где использовано свойство несжимаемости оператора V. отсюда следует, что $-(V_{21}x_+^0, V_{21}x_+^0) \geqslant 0$, т.е. $V_{21}x_+^0 = 0$. Но тогда $(V-I)x_+^0 = 0$, т.е. $1 \in \sigma_p(V)$, в противоречии со свойством $1 \in \rho(V)$, о котором упоминалось выше. Значит, $1 \in \rho(V_{11})$.

5°. Проведенные рассуждения показали, что имеет место свойство (3.132), а потому, как установлено в части 4°, имеет место свойство (3.130).

Отсюда следует с учетом свойства $V\widetilde{\mathcal{L}}_+ = \widetilde{\mathcal{L}}_+$ (см. (3.129)), что

$$A\widetilde{\mathcal{L}}_+ = (\lambda V - \overline{\lambda} I)(V-I)^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}_+ = (\lambda V - \overline{\lambda} I)\widetilde{\mathcal{L}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{L}}_+.$$

Поскольку $A\widetilde{\mathcal{L}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{L}}_+$ тогда и только тогда, когда $A^c\widetilde{\mathcal{L}}_- \subset \widetilde{\mathcal{L}}_- = \widetilde{\mathcal{L}}_+^{[\perp]}$, то $\left\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\right\}$ — максимальная дуальная пара, о которой шла речь в формулировке теоремы. $\square$

4 Спектральные проблемы

В этом разделе будут получены теоремы о структуре спектра, о полноте и базисности системы корневых элементов основных классов операторов, действующих в пространстве Крейна.

4.1 Операторы класса (H) и $\mathcal{K}(H)$

Начнем изучение этого вопроса с некоторых простых фактов. Далее для простоты будем считать, если не оговорено противное, все операторы ограниченными.

Лемма 4.1. *Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве Крейна, $A = A^c$. Если подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A, т.е. $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, то*

$$A\left(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}\right) \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}. \tag{4.1}$$

Доказательство. В силу (3.23) имеем $A\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}$. Остается воспользоваться тем, что пересечение инвариантных подпространств является инвариантным подпространством. □

Замечание 4.1. Если оператор U унитарен в $\mathcal{K}$ и $U\mathcal{L} = \mathcal{L}$, то

$$U\left(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}\right) \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}. \tag{4.2}$$

□

Упражнение 4.1. Выяснить, имеют ли место свойства (4.1) и (4.2) для диссипативного и J-бинесжимающего оператора A, соответственно. □

Пусть $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{K}$ — нейтральное подпространство. Тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M} \oplus J\mathcal{L}_0, \tag{4.3}$$

где

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_0^{\perp}. \tag{4.4}$$

Заметим, что в (4.3) – (4.4)

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus]\mathcal{M}, \quad \mathcal{L}_0^{\perp} = \mathcal{M}[\oplus]J\mathcal{L}_0. \tag{4.5}$$

Поэтому
$$\mathcal{K} = (\mathcal{L}_0 \oplus J\mathcal{L}_0)\,[\oplus]\mathcal{M}\,. \tag{4.6}$$
Здесь подпространство $\mathfrak{M}$ проекционно полное или, что то же, регулярное, т.е. является пространством Крейна. Тогда
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{+}[+]\mathcal{M}^{-}. \tag{4.7}$$
Далее, сумма $\mathcal{L}_0 \oplus J\mathcal{L}_0$ допускает каноническое разложение
$$\mathcal{L}_0 \oplus J\mathcal{L}_0 = P^{+}\mathcal{L}_0[\oplus]P^{-}\mathcal{L}_0, \tag{4.8}$$
где $P^{\pm}$ — исходные канонические проекторы.

В итоге имеем
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^{+}[+]\mathcal{K}_1^{-}, \quad \mathcal{K}_1^{\pm} = P^{\pm}\mathcal{L}_0[\oplus]\mathcal{M}^{\pm}. \tag{4.9}$$
В разложении (4.3) оператор J приобретает вид
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & V \\ 0 & J_1 & 0 \\ V^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$
и условие $J^2 = I$ даёт соотношения
$$V^*V = I, \quad VV^* = I, \tag{4.11}$$
откуда следует, что V — унитарный оператор, $V^* = V^{-1}$.

Если нейтральное подпространство $\mathcal{L}_0$ является инвариантным относительно оператора $A = A^c$, т.е. $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, то по лемме 4.1 $A\mathcal{L}_0^{[\perp]} \subset \mathcal{L}_0^{[\perp]}$, и тогда в разложении (4.3)
$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * & * \\ 0 & A_1 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} = A^c. \tag{4.12}$$
Свойство $(JA)^* = JA$ приводит к связям
$$A_1 = A_1^c, \quad A_2 = V^*A_0^*V, \tag{4.13}$$
(проверьте эти формулы!). Так как $V^* = V^{-1}$, то $A_2 = V^{-1}A_0^*V$ и потому
$$\sigma\left(V^{-1}A_0^*V\right) = \sigma\left(A_0^*\right). \tag{4.14}$$

В этих построениях оператор A_0 может быть совершенно произвольным. В самом деле, если в исходном каноническом разложении

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где B — произвольный оператор, то $(JA)^* = JA$, т.е. $A = A^c$.

Пусть найдётся каноническое разложение

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^+[\oplus]\mathcal{M}^- \tag{4.16}$$

такое, что

$$A_1\mathcal{M}^\pm \subset \mathcal{M}^\pm, \tag{4.17}$$

где A_1 — элемент матрицы (4.12). Тогда вместо (4.10) и (4.12) имеем

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ V^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & * & * & * \\ 0 & A_+ & * & * \\ 0 & 0 & A_- & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Перейдем теперь, после предварительных замечаний, к основным определениям.

Определение 4.1. Будем говорить, что неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+$ принадлежит классу h^+, если

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^0 \oplus \mathcal{L}_1^+, \quad dim\,\mathcal{L}_+^0 < \infty, \quad \mathcal{L}_1^+ \gg 0. \tag{4.19}$$

□

Определение 4.2. Неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$ принадлежит классу h^-, если

$$\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-^0 \oplus \mathcal{L}_1^-, \quad dim\,\mathcal{L}_-^0 < \infty, \quad \mathcal{L}_1^- \ll 0. \tag{4.20}$$

□

Определение 4.3. Будем говорить, что $A = A^c$ принадлежит классу (H), если у оператора A существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, и всякая дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ для оператора A обладает свойствами $\mathcal{L}_\pm \in \mathrm{h}^\pm$. □

Упражнение 4.2. Установить, что

$$\left\{\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathrm{h}^+\right\} \Longleftrightarrow \left\{\mathcal{L}_+^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^- \cap \mathrm{h}^-\right\}. \tag{4.21}$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : \ \forall x_+ \in \mathcal{K}^+, \ \|K\| \leqslant 1 \right\}, \\ \mathcal{L}_+^{[\perp]} &= \left\{ \begin{pmatrix} K^* x_- \\ x_- \end{pmatrix} : \ \forall x_- \in \mathcal{K}^- \right\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

□

Пример 4.1 (подпространств класса h^+)**.** Пусть $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ и его угловой оператор $K = K(\mathcal{L}_+) \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда $\mathcal{L}_+ \in \mathrm{h}^+$. □

Обратное утверждение неверно.

Упражнение 4.3. Пусть известно, что $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathrm{h}^+$. Доказать, что существует такое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$, что угловой оператор K подпространства $\mathcal{L}$ является конечномерным.

Рассмотрим подробно решение этого упражнения. Пусть $\mathcal{L}_+ \geqslant 0$; выделим изотропную часть $\mathcal{L}_+$, т.е.

$$\mathcal{L}_+^0 := \{x \in \mathcal{L}_+ : \ [x,x] = 0\}. \tag{4.23}$$

Для элементов $x \in \mathcal{L}_+^0$ имеем

$$[x,x] = (x_+, x_+) - (Kx_+, Kx_+) = ((I - K^*K)\, x_+, x_+) = 0. \tag{4.24}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для элементов x_+ и y_+ из $\mathcal{K}^+$, имеем

$$((I - K^*K)\, x_+, y_+) = 0, \quad \forall y_+ \in \mathcal{K}^+. \tag{4.25}$$

Поэтому

$$(I - K^*K)\, x_+ = 0, \quad x_+ = P^+ x, \quad x \in \mathcal{L}_+^0. \tag{4.26}$$

Так как $\mathcal{L}_+ \in \mathrm{h}^+$, то $\dim \mathcal{L}_+^0 < \infty$ и потому $\dim \mathrm{Ker}\,(I - K^*K) < \infty$. Введём подпространство $\mathcal{L}_+^1$ согласно формуле

$$\mathcal{L}_+^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : \ x_+ \in \mathrm{ran}\,(I - K^*K) \right\} \tag{4.27}$$

и обозначим

$$K|_{\mathrm{ran}(I - K^*K)} = K_1. \tag{4.28}$$

Поскольку по условию $K \in \mathfrak{S}_\infty$, то $K_1 \in \mathfrak{S}_\infty$.

Для элементов из $\mathcal{L}_+^1$ имеем $[x,x] > 0$, $x \neq 0$. Тогда $[x,x] = (x_+,x_+) - (K_1x_+, K_1x_+) > 0$, $x_+ \neq 0$. Так как $K_1 \in \mathfrak{S}_\infty$, то найдётся элемент $x_+^0 \in \mathcal{K}^+$ такой, что $\|K\| = \|Kx_+^0\|$, $\|x_+^0\| = 1$. Тогда на этом элементе $(x_+^0, x_+^0) - \left(K_1x_+^0, K_1x_+^0\right) = 1 - \|K_1\| > 0$, т.е. $\|K_1\| < 1$. Последнее эквивалентно равномерной положительности подпространства $\mathcal{L}_+^1$ (лемма 2.1). Этим утверждение из примера 4.1 доказано. $\square$

Пример 4.2 (оператора $A = A^c \in (H)$)**.** Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, а оператор $A = A^c$ в этом разложении имеет вид

$$\begin{aligned} &A = A_0 + D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & D_{12} \\ D_{21} & D_2 \end{pmatrix}, \\ &D \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \sigma(B) \cap \sigma(C) = \emptyset. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Докажем, что $A \in (H)$, т.е. существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, инвариантная для A, и всякая дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ для A обладает свойствами $\mathcal{L}_\pm \in \mathrm{h}^\pm$.

Доказательство.

Запишем оператор A в виде

$$A = \begin{pmatrix} B + D_1 & D_{12} \\ D_{21} & C + D_2 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Так как $D_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то по теореме 3.19 существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ для оператора A, причём (см. пример 4.1) $\mathcal{L}_+ \in \mathrm{h}^+$, так как угловой оператор K подпространства $\mathcal{L}_+$ является компактным. Докажем последнее утверждение, т.е. компактность K.

Имеем,

$$\mathcal{L}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} :\ x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\}, \quad A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+. \tag{4.31}$$

Отсюда, как в ранее встретившихся подобных случаях, можно вывести, что для оператора A уравнение для углового оператора K имеет вид

$$K(B + D_1) + KD_{12}K = D_{21} + (C + D_2)K. \tag{4.32}$$

Поэтому

$$KB - CK = T(K) := D_{21} + D_2K - KD_1 - KD_{12}K. \tag{4.33}$$

Так как спектры операторов B и C, согласно условию (4.29), не пересекаются, то их можно окружить жордановыми контурами Γ_B и Γ_C соответственно, которые отстоят на положительном расстоянии один от другого. Воспользуемся формулой для решения уравнения (4.33):

$$K = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_B} \oint_{\Gamma_C} \frac{(B-\lambda I)^{-1} T(K) (C-\mu I)^{-1}}{\lambda - \mu} \, d\lambda d\mu. \tag{4.34}$$

Поскольку $T(K)$ компактен в силу компактности D_1, D_2, D_{12} и D_{21}, то оператор K, выраженный формулой (4.34), также компактен, и утверждение доказано. Заметим, что (4.34) есть уравнение для K, эквивалентное уравнению (4.33).

$\square$

Возникает вопрос: если оператор $A \in (H)$, всегда ли его можно записать в форме (4.29)? Оказывается, не всегда. Действительно, пусть

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 \notin \sigma_p(B). \tag{4.35}$$

В этом случае, по сравнению с (4.29), имеем $C = 0,\ D = 0$, причём $\sigma(B) \cap \sigma(C) \neq \emptyset$. Тем не менее оператор $A = A_0 \in (H)$.

В самом деле, очевидно, что $A\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+,\ A\mathcal{K}^- \subset \mathcal{K}^-$, и так как $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$ — равномерно дефинитные подпространства, то $\mathcal{K}^\pm \in \mathrm{h}^\pm$. Докажем, что других инвариантных подпространств нет. Действительно, здесь уравнение (4.33) для углового оператора K принимает вид $KB = 0$, и так как $0 \notin \sigma_p(B)$, то существует обратный (неограниченный) оператор B^{-1}. Поэтому $K = 0$ и ему отвечает лишь неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+ = \mathcal{K}^+$. Аналогично рассуждение для $\mathcal{K}^-$.

Замечание 4.2. Класс (H) определён не только для самосопряжённых операторов, действующих в пространстве Крейна, но также для унитарных, диссипативных и даже нормальных операторов. В этом случае требования к паре подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ таковы: $T\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+,\ T^c\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. Остальные требования сохраняются.

Определение 4.4. Будем говорить, что оператор T принадлежит классу операторов $\mathcal{K}(H, A)$, если $A \in (H)$ и T коммутирует с A.

Если оператор $A \in (H)$ не играет роли, то вместо $T \in \mathcal{K}(H, A)$ пишут $T \in \mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.1. Пусть для операторов $\{A_j\}_{j=1}^n$, $A_j = A_j^c$, выполнены условия $A_jA_k = A_kA_j$. Тогда найдётся оператор $A \in (H)$ такой, что $A_j \in \mathcal{K}(H, A)$ для всех j в том и только в том случае, когда найдётся подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathrm{h}^+$ такое, что $A_j\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ для всех j.

$\square$

Этот факт здесь приведен без доказательства.

Отметим, что класс (H) ввел Дж. У. Хелтон, что отразилось в обозначении этого класса. Класс $\mathcal{K}(H)$ ввел и исследовал Т.Я. Азизов. В теоретических работах эти классы использовал В.А. Штраус, а в приложениях — Н.Д. Копачевский и его ученики.

Продолжим рассмотрение свойств операторов класса (H) и $\mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.2. Если $A = A^c \in (H)$, то найдётся каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_1^-$ пространства Крейна такое, что

$$A_{12},\ A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{4.36}$$

Доказательство. Пусть $A = A^c \in (H)$. Тогда, согласно определению класса (H), найдётся такая максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, что $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$. Обозначим $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$. Так как $\mathcal{L}_\pm \in \mathrm{h}^\pm$, то $\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1^\pm$, $\dim \mathcal{L}_0 < \infty$, а $\mathcal{L}_\pm$ — равномерно дефинитны. Поэтому

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus]\left(\mathcal{L}_1^+[+]\mathcal{L}_1^-\right). \tag{4.37}$$

Следовательно,

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \oplus \left(\mathcal{L}_1^+[\oplus]\mathcal{L}_1^-\right) \oplus J\mathcal{L}_0, \tag{4.38}$$

и в этом разложении (см. (4.18))

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ V^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & * & * & * \\ 0 & A_1^+ & * & * \\ 0 & 0 & A_1^- & * \\ 0 & 0 & 0 & V^{-1}A_0^*V \end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

где V — унитарный оператор. Здесь

$$\begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & A_1^+ \end{pmatrix} = A|_{\mathcal{L}_+}, \quad \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & A_1^- \end{pmatrix} = A|_{\mathcal{L}_-}. \tag{4.40}$$

Вычислим

$$4P^+AP^- = 4A_{12} = (I+J)A(I-J) =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & V \\ 0 & 2I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ V^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & * & * & * \\ 0 & A_1^+ & 0 & * \\ 0 & 0 & A_1^- & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -V \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I & 0 \\ -V^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Здесь все операторы, обозначенные звёздочкой $*$, являются конечномерными, и потому компактными. Значит, $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$. Аналогично проверяется, что и $A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$. Следовательно, в качестве искомого канонического разложения можно взять следующее:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-, \quad \mathcal{K}_1^\pm = P^\pm \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1^\pm. \qquad \square$$

Из этой теоремы вытекает такой факт.

Следствие 4.1. *Пусть $A = A^c \in (H)$, $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$. Тогда существует такая максимальная дуальная пара $\left\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\right\}$, что $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$, $A\tilde{\mathcal{L}}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, и потому исходная пара обладает свойствами $\mathcal{L}_\pm \in h^\pm$.*

Доказательство. Возьмём, согласно теореме 4.2, такое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, в котором $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда найдётся максимальная дуальная пара $\left\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\right\}$ такая, что $A\tilde{\mathcal{L}}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$. Так как $A \in (H)$, то $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap h^\pm$ (см. определение 4.3), а так как $\mathcal{L}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, то $\mathcal{L}^\pm \in \mathrm{h}^\pm$. $\square$

Следующий результат является одним из центральных для выяснения свойств операторов класса (H) и $\mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.3. Пусть $A = A^c \in (H)$. Тогда найдётся $\varkappa_A \in \mathbb{N}$ такое, что размерность любого нейтрального инвариантного подпространства оператора A не превышает $\varkappa_A$, т.е. если $\mathcal{L}_0 \subset \mathfrak{P}^0$, $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, то $\dim \mathcal{L}_0 \leqslant \varkappa_A$.
(Это утверждение верно и для унитарных операторов.)

Доказательство. Пусть сформулированное утверждение неверно, т.е. не существует указанной константы $\varkappa_A$. Тогда найдётся последовательность $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n, \ldots$ нейтральных инвариантных относительно A подпространств таких, что $\dim \mathcal{L}_j < \dim \mathcal{L}_{j+1}$, $\dim \mathcal{L}_j \longrightarrow \infty$ $(j \longrightarrow \infty)$, $A\mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}_j$ для любого j.

Построим новые нейтральные инвариантные относительно A подпространства $\mathcal{M}_j$ следующим образом: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_{k+1} :=$ л.о. $\left\{\mathcal{M}_k,\ \mathcal{M}_k^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_{k+1}\right\}$. Тогда будем иметь

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{M}_k \subset \ldots, \quad \dim\mathcal{M}_k \longrightarrow \infty \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{4.42}$$

Рассмотрим теперь $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Нетрудно видеть, используя индукцию, что $A\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_k$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\overline{A\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\right)} \subset \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\right)} =: \mathcal{L}_+, \\ &\mathcal{L}_+ \subset \mathfrak{P}^0, \quad \dim \mathcal{L}_+ = \infty, \quad A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Возникло противоречие, так как $A \in (H)$, и потому для любого $\mathcal{L}_+ \subset \mathfrak{P}^0$ должно быть $\dim \mathcal{L}_+ < \infty$.

$\square$

Изучим теперь некоторые спектральные свойства операторов класса (H).

Теорема 4.4. Пусть $A = A^c \in (H)$. Тогда

1. $\dim$ л.о. $\left\{\mathcal{L}_\lambda(A) : \lambda \neq \overline{\lambda}\right\} \leqslant 2\varkappa_A$.

2. Если $\lambda = \overline{\lambda}$, то

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) =: \mathcal{M} = \mathcal{M}^+[\oplus]\mathcal{M}^0[\oplus]\mathcal{M}^-, \tag{4.44}$$

$$\min\left\{\dim\left(\mathcal{M}^+ + \mathcal{M}^0\right),\ \dim\left(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^-\right)\right\} \leqslant \varkappa_A, \tag{4.45}$$

   где $\mathcal{M}^+, \mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}^-$ — положительное, нейтральное и отрицательное подпространства соответственно.

3. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ имеется разложение

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\lambda(A) = \mathfrak{N}_\lambda[+]\mathfrak{M}_\lambda, \quad A\mathfrak{N}_\lambda \subset \mathfrak{N}_\lambda, \\ &A\mathfrak{M}_\lambda \subset \mathfrak{M}_\lambda \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I), \quad \dim \mathfrak{N}_\lambda \leqslant 2\varkappa_A + 1, \end{aligned} \tag{4.46}$$

   причём $\mathfrak{M}_\lambda$ — регулярное подпространство.

4. Существует не более $\varkappa_A$ вещественных собственных значений оператора A таких, что в $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ имеются нейтральные элементы.

Доказательство. Заметим сначала, что так как для оператора A класса (H) его матричный элемент $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ (теорема 4.2) в некотором каноническом разложении, то $\sigma_{\text{нев}}(A)$, т.е. невещественный спектр оператора A, состоит из нормальных собственных значений.

1. Пусть $\lambda \neq \overline{\lambda}$ — нормальное собственное значение оператора A. Докажем, что таких собственных значений может быть не более конечного числа.

   Пусть $\mathcal{L} :=$ л.о. $\{\mathcal{L}_\lambda(A) : \ \mathrm{Im}\lambda > 0\}$. Здесь все подпространства $\mathcal{L}_\lambda(A)$ нейтральны, $\mathcal{L}_\lambda(A) \subset \mathcal{P}^0$, и ортогональны между собой:

   $$\mathcal{L}_{\lambda_1}(A)[\perp]\mathcal{L}_{\lambda_2}(A), \quad \mathrm{Im}\lambda_1 > 0, \quad \mathrm{Im}\lambda_2 > 0. \tag{4.47}$$

   Тогда, согласно теореме 4.3, $\mathrm{dim}\mathcal{L} \leqslant \varkappa_A$. Аналогичная ситуация для линейной оболочки, отвечающей собственным значениям λ с $\mathrm{Im}\lambda < 0$. Поэтому имеет место свойство 1.

2. В этом случае имеем свойства $A\mathcal{M}^{\pm} \subset \mathcal{M}^{\pm}$, $A\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}^0$, и так как $\mathcal{M}^0$ состоит из нейтральных элементов, то $\mathrm{dim}\mathcal{M}^0 \leqslant \varkappa_A$. В то же время подпространства $\mathcal{M}^{\pm}$ равномерно дефинитны. Поэтому $\mathcal{K}_1 := \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ является пространством Крейна. Значит, в $\mathcal{K}_1$ найдётся подпространство $\mathcal{M}_0 \subset \mathfrak{P}^0$, причём $\dim \mathcal{M}_0 = \min\{\dim \mathcal{M}^+, \dim \mathcal{M}^-\}$. Так как $A\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_0$ — нейтральное подпространство, то снова по теореме 4.3 имеем $\dim \mathcal{M}_0 \leqslant \varkappa_A$.

   Возьмём теперь подпространство $\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0$. Тогда $A\left(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0\right) \subset \mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0$ и потому $\dim\left(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0\right) \leqslant \varkappa_A$. Однако, согласно построению $\mathcal{M}_0$,

   $$\dim\left(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0\right) = \min\left\{\dim\left(\mathcal{M}^+ + \mathcal{M}^0\right), \dim\left(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^-\right)\right\},$$

   и потому утверждение 2 доказано.

3. Доказательство этого свойства — то же, что и в пространстве Понтрягина (см. [5]). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $$\mathcal{M} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^-. \tag{4.48}$$

   Так как $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^-$ — равномерно дефинитные подпространства, то $\mathcal{M}_\lambda := \mathcal{M}^+[\oplus]\mathcal{M}^-$ — регулярное подпространство и потому $\mathcal{L}_\lambda(A) = \mathcal{M}_\lambda[+]\mathfrak{N}_\lambda$, т.е. $\mathcal{M}_\lambda$ — дополняемо. Поскольку $A\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{M}_\lambda$ и $A\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}_\lambda$, то $A\mathfrak{N}_\lambda \subset \mathfrak{N}_\lambda$.

Заметим теперь, что возможные цепочки из собственных и присоединенных элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ обладают тем свойством, что обязательно $x_0 \in \mathcal{M}^0$ (как и в $\Pi_\varkappa$), а так как $\dim \mathcal{M}^0 < \infty$, то количество таких цепочек конечно. Кроме того, в силу соотношений $(A - \lambda I)x_n = x_{n-1}$ присоединенные элементы также находятся в подпространстве $\mathcal{M}^0$. Поэтому, как и в $\Pi_\varkappa$, доказываем, что $\dim \mathfrak{N}_\lambda \leqslant 2\varkappa_A + 1$.

4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — вещественные собственные значения оператора A, и пусть $\{x_k\}_{k=1}^s$ — собственные элементы оператора A, которые являются нейтральными, т.е. $[x_k, x_k] = 0$, $k = 1, \ldots, s$.

   Так как $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_k I)[\perp]\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j I)$ при $\lambda_k \neq \lambda_j$, то л.о. $\{x_k\}_{k=1}^s \subset \mathcal{P}^0$, причём A л.о.$\{x_k\}_{k=1}^s \subset$ л.о.$\{x_k\}_{k=1}^s$. Отсюда по теореме 4.3 получаем, что $s \leqslant \varkappa_A$.

$\square$

Из доказанных утверждений следует такой результат.

Теорема 4.5. Если $A = A^c \in (H)$ и у A нет нейтральных собственных элементов (в частности, если $\sigma_p(A) = \emptyset$), то у оператора A существует единственная максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, где $\mathcal{L}_\pm$ — равномерно дефинитные подпространства.

Доказательство. Так как $A = A^c \in (H)$, то существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_\pm \in h^\pm$, инвариантная относительно оператора A. Возьмём

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^{[\perp]} = \mathcal{L}_- \cap \mathcal{L}_-^{[\perp]}, \quad A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0. \tag{4.49}$$

Так как здесь $\mathcal{L}_0$ — конечномерное подпространство, то при $\dim \mathcal{L}_0 > 0$ существует собственное значение $\lambda \in \sigma_p(A)$ и собственный элемент x_λ оператора A, т.е. $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. Получено противоречие с тем, что у оператора A нет нейтральных собственных элементов. Значит, $\mathcal{L}_0 = \{0\}$ и потому $\mathcal{L}_+ \gg 0$, $\mathcal{L}_- \ll 0$ и они максимальны. Тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^- := \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_-, \tag{4.50}$$

а оператор A в этом разложении имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Докажем, что полученное каноническое разложение единственно. Пусть существует ещё одна дуальная пара $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$, $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathrm{h}^\pm$, $A\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_1^\pm$, $\mathcal{L}_1^+ \gg 0$, $\mathcal{L}_1^- \ll 0$. Пусть K — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}_1^+$, $K: \mathcal{L}_+ \longrightarrow \mathcal{L}_-$. Тогда

$$\mathcal{L}_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : \ x_+ \in \mathcal{L}_+ \right\}. \tag{4.52}$$

Отсюда получаем, что свойство $A\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_1^\pm$ выполнено тогда и только тогда, когда $(tK)A_+ = A_-(tK)$ для любого t. (Этот факт следует из уравнения для углового оператора K, которое здесь принимает вид $KA_+ - A_-K = 0$.) Значит, все подпространства вида

$$\mathcal{L}_t^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ tKx_+ \end{pmatrix} : \ x_+ \in \mathcal{L}_+, \ 0 < t \leqslant 1/\|K\| \right\} \tag{4.53}$$

также являются неотрицательными инвариантными подпространствами для A, т.е. $A\mathcal{L}_t^+ \subset \mathcal{L}_t^+$. В частности, при $t = 1/\|K\|$ имеем $K_1 = K/\|K\|$ и потому $\|K_1\| = 1$. Отсюда следует, что подпространство $\mathcal{L}^+(K_1) = \mathcal{L}_t^+|_{t=1/\|K\|}$ не является равномерно положительным, т.е. не выполнено условие $\mathcal{L}_1^+ \gg 0$. (Напомним, что для свойства равномерной положительности необходимо и достаточно, чтобы норма углового оператора инвариантного подпространства была меньше 1).

Полученное противоречие доказывает, что второй максимальной дуальной пары для A с равномерно дефинитными $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ не существует. (Если у оператора A нет собственных значений, то нет и нейтральных собственных элементов.) $\square$

Теорема 4.6. Если $A = A^c \in (H)$, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_+ \gg 0$, то $A_1 := A|_{\mathcal{L}_+^{[\perp]}} \in (H)$ в $\mathcal{K}_1 := \mathcal{L}_+^{[\perp]}$, т.е. существует дуальная пара $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$, $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{M}^\pm(\mathcal{K}_1)$, $A_1\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_1^\pm$, и любая дуальная пара $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$ в $\mathcal{K}_1$ обладает свойствами $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathrm{h}^\pm$. Аналогичное утверждение имеет место и для унитарного оператора.

Доказательство. Согласно определению подпространства $\mathcal{K}_1$ имеем разложение $\mathcal{K} = \mathcal{L}_+[+]\mathcal{K}_1$. Так как оператор A самосопряжён в $\mathcal{K}$, то он имеет в этом разложении диагональную структуру

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = A|_{\mathcal{L}_+}. \tag{4.54}$$

Поскольку $A \in (H)$, то по теореме существует такое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, что в этом разложении $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$

и потому существует расширение $\tilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ подпространства $\mathcal{L}_+$, $A\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+$. При этом

$$\tilde{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+[+]\mathcal{L}_1^+, \quad \mathcal{L}_1^+ := \tilde{\mathcal{L}}_+ \cap \mathcal{K}_1, \quad A_1\mathcal{L}_1^+ \subset \mathcal{L}_1^+, \tag{4.55}$$

причём $\mathcal{L}_1^+$ максимально в K_1, т.е. $\mathcal{L}_1^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$. Поэтому искомой дуальной парой, о которой говорится в теореме, является пара

$$\left\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \mathcal{L}_-^1\right\}, \quad \mathcal{L}_-^1 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{K}_1. \tag{4.56}$$

Докажем теперь, что любая дуальная пара $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$ в $\mathcal{K}_1$ обладает свойствами $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathrm{h}^\pm$. Возьмём любую пару $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$ для $\mathcal{K}_1$. Тогда $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ и $A\left(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+\right) \subset \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+$. Так как $A \in (H)$, то $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+ \in \mathrm{h}^+$, откуда следует, что $\mathcal{L}_1^+ \in \mathrm{h}^+$ (в $\mathcal{K}_1$).

Для $\mathcal{L}_1^-$ доказательство аналогично. □

Установим ещё один полезный факт.

Лемма 4.2. *Пусть $A = A^c \in (H)$, $\mathcal{L}_0$ — нейтральное инвариантное подпространство, $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$. Тогда*

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus]\left(\mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{L}^1\right) =: \mathcal{L}_0[\oplus]\mathfrak{M}, \quad \mathcal{L}^1 := \mathcal{K} \ominus \mathcal{L}_0, \tag{4.57}$$

и если P — проектор из $\mathcal{L}_0^{[\perp]}$ на $\mathfrak{M}$, то $A_1 = PA|_{\mathfrak{M}} \in (H)$ в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Так как A — самосопряжённый оператор в $\mathcal{K}$ и $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, то $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^{[\perp]}$ являются инвариантными подпространствами относительно A и в ортогональном разложении $\mathcal{K}_1 = \mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus]\mathfrak{M}$ оператор $A_1 = A|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$ имеет треугольную матричную структуру:

$$A_1|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} A_0 & A_{01} \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_0 \in \mathfrak{M}^+$, $\tilde{\mathcal{L}}_0 \geqslant 0$, $\tilde{\mathcal{L}}_0 \supset \mathcal{L}_0$, $A\tilde{\mathcal{L}}_0 \subset \tilde{\mathcal{L}}_0$, т.е. $\tilde{\mathcal{L}}_0$ является максимальным расширением $\mathcal{L}_0$; такие расширения существуют согласно теореме 3.19 с учетом упражнения 4.3. Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0 \oplus \left(\tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M}\right), \tag{4.59}$$

откуда следует, что $\tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}^+(\mathfrak{M})$ и

$$A_1\left(\tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M}\right) \subset \tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M}. \tag{4.60}$$

Значит, $\mathcal{L}_1^+ := \tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M}$ и $\mathcal{L}_1^- := \mathcal{L}_1^{[\perp]} \cap \mathfrak{M}$ образуют максимальную дуальную пару $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$ для A_1, и потому $A_1 \in (H)$, так как $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathrm{h}^\pm$.

Пусть теперь $\left\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\right\}$ — любая максимальная дуальная пара для A_1. Тогда пара $\left\{\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^-\right\}$ будет максимальной дуальной парой для A, так как $A\left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^\pm\right) \subset \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^\pm$, $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^\pm \in \mathrm{h}^\pm$, т.е. $A_1 \in (H)$. □

Замечание 4.3. Утверждение, аналогичное лемме 4.2, справедливо и для J-унитарных операторов. Соответствующие утверждения получаются из леммы 4.2, если воспользоваться преобразованием Кэли–Неймана. □

4.2 О нерешённых проблемах существования инвариантных подпространств у произвольного оператора.

Пусть $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ — произвольный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Возникает естественный вопрос: имеется ли у любого такого оператора нетривиальное, т.е. отличное от нуля и всего пространства, инвариантное подпространство? Очевидно, если $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, то ответ положительный. Однако, в общем случае этот вопрос не решён. Тем более он не решён в случае произвольного семейства $\{A\}$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Приведём теперь классы операторов, для которых обсуждаемая проблема имеет положительное решение.

Прежде всего, если $A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty$, то, очевидно, справедлива теорема Гильберта-Шмидта, т.е. в этом случае решение положительно. Далее, если $A \in \mathfrak{S}_\infty$ или $\{A\}$ — семейство коммутирующих компактных операторов, то положительное решение установил Дж. фон-Нейман. Затем в 1973 г. В. Ломоносов доказал, что если $\{A\}$ — семейство всех (непрерывных) операторов, коммутирующих с оператором $B \in \mathfrak{S}_\infty$, то существует нетривиальное подпространство $\mathcal{L}$, инвариантное относительно любого оператора A из семейства.

Перейдём теперь к операторам, действующим в пространстве Крейна $\mathcal{K}$. Здесь имеют место следующие факты.

Пусть $A = A^c \in (H)$ и имеется семейство операторов $\{B\}$, коммутирующих с A, т.е. $BA = AB$ для любого $B \in \{B\}$. Тогда существует нетривиальное подпространство $\mathcal{L}$, инвариантное относительно A и любого оператора B из семейства.

Приведём общие соображения, связанные с доказательством сформулированного утверждения. Если у оператора A есть собственное значение $\lambda \in \sigma_p(A)$, то $B\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$, и утверждение установлено. Если же $\sigma_p(A) = \emptyset$, то, как доказано выше (см. теорему 4.5), существует единственная максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, инвариантная относительно A. Поскольку из условия $BA = AB$ следует, что $B^c A = AB^c$, то в силу связи

$$B = \frac{B+B^c}{2} + i\frac{B-B^c}{2i} \tag{4.61}$$

можно считать, что все операторы B являются J-самосопряженными. Далее можно доказать, что $B\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm,\ B = B^c$.

Для унитарных операторов класса (H) аналогичное утверждение доказывается на основе взаимосвязи их с самосопряжёнными с помощью преобразования Кэли–Неймана. Если $A \mapsto U,\ B \mapsto V$, то $U\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$, и так как $UV\mathcal{L}_\pm = VU\mathcal{L}_\pm = V\mathcal{L}_\pm$, то $V\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$ является искомым инвариантным подпространством, причём оно единственное.

Что касается общих непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{K}$, то проблема существования нетривиального инвариантного подпространства, как и в гильбертовом пространстве, ещё не нашла своего решения.

Приведём еще некоторые утверждения, полученные на этом пути. Напомним, что если $A \in (H)$, то по определению $B \in \mathcal{K}(H, A)$, если $AB = BA$. В частности, если найдётся $A \in (H)$ такой, что $BA = AB$, то говорят, что $B \in \mathcal{K}(H)$. Как установлено выше, если семейство операторов $\{B\} \subset \mathcal{K}(H)$, то найдётся нетривиальное подпространство $\mathcal{L}:\ B\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$.

Упражнение 4.4. Доказать, что если $\{B\}$ — семейство коммутирующих операторов, $B = B^c \in \mathcal{K}(H)$, то существует неотрицательное нетривиальное подпространство $\mathcal{L}:\ B\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. □

Теорема 4.7. Пусть $U \in (H)$ — унитарный оператор, а $\{V\}$ — семейство коммутирующих операторов класса $\mathcal{K}(H, U)$. Тогда, какова бы ни была дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $U\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm,\ V\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$, существует максимальная дуальная пара $\left\{\tilde{\mathcal{L}}_+,\ \tilde{\mathcal{L}}_-\right\},\ \tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm,\ \tilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ такая, что $U\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm,\ V\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm$.

Аналогичное утверждение имеет место и для самосопряжённых, бинесжимающих и диссипативных операторов, действующих в $\mathcal{K}$.

Доказательство. Обозначим через $\left\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\right\}$ максимальную по вложению дуальную пару, $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$, такую, что $U\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, $V\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm$. Такая пара существует согласно лемме Цорна. Установим, что $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, и утверждение теоремы будет доказано.

Имеем

$$\mathcal{L}_+^0 = \tilde{\mathcal{L}}_+ \cap \tilde{\mathcal{L}}_+^{[\perp]} = \tilde{\mathcal{L}}_- \cap \tilde{\mathcal{L}}_-^{[\perp]} = \mathcal{L}_-^0 = \tilde{\mathcal{L}}_+ \cap \tilde{\mathcal{L}}_- =: \mathcal{L}_0. \tag{4.62}$$

Действительно, если бы это соотношение не было выполнено, то $\tilde{\mathcal{L}}_+$ и $\tilde{\mathcal{L}}_-$ можно было бы расширить с сохранением необходимых свойств, и таким расширением была бы пара $\left\{\mathcal{L}_-^0 + \tilde{\mathcal{L}}_+, \mathcal{L}_-^0 + \tilde{\mathcal{L}}_-\right\}$.

Рассмотрим разложение $\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M}$. Тогда, как и для самосопряжённых в $\mathcal{K}$ операторов (см. лемму 4.2), имеем для операторов V и U разложения

$$V|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} V_0 & V_{01} \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}, \quad U|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} U_0 & U_{01} \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}, \tag{4.63}$$

где U_1 и V_1 — коммутирующие унитарные операторы, причем $U_1 \in \ (H)$. При этом

$$\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \mathcal{L}_0 \oplus \tilde{\mathcal{L}}_1^\pm, \quad \mathcal{L}_1^\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm \cap \mathcal{M}, \tag{4.64}$$

и так как

$$V\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm, \quad U\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm, \tag{4.65}$$

то $V\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0$, $U\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0$. Далее, поскольку $U_1 \in \ (H)$, $U\mathcal{L}_1^\pm = \mathcal{L}_1^\pm$, $V\mathcal{L}_1^\pm = \mathcal{L}_1^\pm$, то $\mathcal{L}_1^\pm$ — равномерно дефинитные подпространства. Следовательно, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1^+[+]\mathcal{L}_1^-$ — регулярное подпространство.

Учитывая сказанное, можно в исходном разложении, не ограничивая общности, считать, что пара $\left\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\right\}$ состоит из равномерно дефинитных подпространств, т.е. $\mathcal{L}_0 = \{0\}$ и потому $\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{M} = \mathcal{K}$. Отсюда будет следовать, что

$$\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{L}}_+[+]\tilde{\mathcal{L}}_-[+]\mathfrak{N}, \tag{4.66}$$

причём здесь все подпространства инвариантны относительно V и U. Тогда в этом разложении операторы U и V имеют диагональный вид:

$$U = \begin{pmatrix} U_+ & 0 & 0 \\ 0 & U_- & 0 \\ 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_+ & 0 & 0 \\ 0 & V_- & 0 \\ 0 & 0 & V_1 \end{pmatrix}. \tag{4.67}$$

Так как $U \in (H)$, то $\tilde{\mathcal{L}}_+ \gg 0$ и потому, согласно теореме 4.6,

$$\begin{pmatrix} U_- & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \in (H). \tag{4.68}$$

Поэтому и $U_1 \in (H)$ (по той же причине). Кроме того, из условия $UV = VU$ следует, что $U_1 V_1 = V_1 U_1$.

Итак, оператор $U_1 \in (H)$, семейство $\{V_1\} \in \mathcal{K}(H, U_1)$, и у операторов $\{V_1\}$ нет общего неотрицательного инвариантного подпространства; в противном случае исходная максимальная по вложению инвариантная дуальная пара не была бы максимальной. Наша задача — показать, что в этом случае $\mathfrak{N} = \{0\}$, что и докажет утверждение. Предположим противное: $\mathfrak{N} \neq \{0\}$, и рассмотрим все возможные варианты.

1. Пусть у U_1 имеется вырожденное ядро $\operatorname{Ker}(U_1 - \lambda I)$ с некоторым λ. Тогда $\operatorname{Ker}(U_1 - \lambda I) \cap (\operatorname{Ker}(U_1 - \lambda I))^{[\perp]}$ является инвариантным подпространством для семейства $\{V_1\}$, а это невозможно по предположению.

2. У оператора U_1 имеется собственное значение λ, причём ядро $\operatorname{Ker}(U_1 - \lambda I)$ невырождено и является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с некоторым $\varkappa > 0$. В этом случае из теории пространств Понтрягина следует, что у семейства операторов $\{V_1|_{\Pi_\varkappa}\}$ имеется по крайней мере один общий неотрицательный собственный вектор, что вновь противоречит предположению.

3. У оператора U_1 нет собственных значений, которым отвечали бы либо вырожденные ядра, либо являющиеся пространствами Понтрягина. Тогда в подпространстве $\mathfrak{N}$ по теореме 4.5 найдётся, причем единственная, дуальная пара $\{\mathfrak{N}_+, \mathfrak{N}_-\}$, инвариантная относительно операторов V_1, а это снова, как и выше, приводит к противоречию.

   Таким образом, $\mathfrak{N} = \{0\}$, $\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{L}}_+[+]\tilde{\mathcal{L}}_-$, и теорема доказана полностью. $\square$

Приведём теперь некоторые следствия из доказанного утверждения.

Следствие 4.2. *Если $\{V\} \subset \mathcal{K}(H,U)$, то найдётся такое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$, что в этом разложении $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, более того, этот оператор является конечномерным.* □

Замечание 4.4. Аналогичное утверждение имеет место не только для унитарных операторов, но и для самосопряжённых. Этот факт доказывается с помощью преобразования Кэли. □

Учитывая эти факты, далее будем говорить лишь о самосопряжённых операторах, действующих в пространстве Крейна.

Упражнение 4.5. Пусть $A \in (H)$, $B \in \mathcal{K}(H,A)$. Доказать, что в этом случае $\sigma_{\text{нев}}(B)$, т.е. невещественный спектр оператора B, состоит из не более чем $2\varkappa_A$ нормальных собственных значений. □

Лемма 4.3. *Пусть $B \in \mathcal{K}(H,A)$, $\lambda = \overline{\lambda} \in \sigma_p(B)$. Тогда:*

1. *$Ker(B-\lambda I) = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^-$, где $\mathcal{M}^\pm$ — равномерно дефинитные подпространства, а $dim\,\mathcal{M}^0 \leqslant \varkappa_A$.*
2. *$\mathcal{L}_\lambda(B) = \mathcal{N}_\lambda(B)[+]\mathcal{M}_\lambda$, где $\mathcal{M}_\lambda$ — регулярное подпространство, $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^- \subset Ker(B-\lambda I)$, $dim\,\mathcal{M}_\lambda < \infty$, $B\mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$.*
3. *У оператора A в подпространстве $Ker(B-\lambda I)$ имеется максимальная инвариантная дуальная пара подпространств.*

□

Лемма 4.4. *У оператора $B \in \mathcal{K}(H,A)$, $A = A^c \in (H)$, имеется не более $\varkappa_A$ вырожденных ядер $Ker(B-\lambda I)$ с $\lambda = \overline{\lambda}$.*

□

Таким образом, кроме, быть может, не более $\varkappa_A$ вырожденных ядер, остальные ядра $\operatorname{Ker}(B-\lambda I)$ невырождены, т.е. они сами являются пространствами типа $\mathcal{K}$.

Доказательство леммы 4.3 вытекает из свойства $A\operatorname{Ker}(B-\lambda I) \subset \operatorname{Ker}(B-\lambda I)$, откуда следует, что $A\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}^0$.

Заметим к доказательству леммы 4.4, что если собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (из $\mathbb{R}$) отвечают вырожденные подпространства $\mathcal{M}^0_1, \mathcal{M}^0_2, \dots$, то $\mathcal{M}_0 := \text{л.о.}\{\mathcal{M}^0_1, \mathcal{M}^0_2, \dots\}$ является нейтральным инвариантным подпространством по отношению к A, т.е. $A\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$. Поэтому $\dim \mathcal{M}_0 \leqslant \varkappa_A < \infty$.

Приведём еще один факт, необходимый для дальнейшего.

Лемма 4.5. *Пусть A — самосопряжённый оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $\sigma(A)$ счётен (с учётом кратностей собственных значений), $dim\mathcal{H} = \infty$ и $\mathcal{H}$ — сепарабельно. Тогда в $\mathcal{H}$ существует счётный ортонормированный базис, составленный из собственных элементов оператора A.*

Перед доказательством этого утверждения напомним, что если λ — изолированная точка спектра оператора $A = A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, то λ — собственное значение оператора A. Далее, напомним ещё, что если произвольное множество точек счётное и замкнутое, то найдётся изолированная точка этого множества.

Переходя к доказательству леммы 4.5, рассмотрим ядра $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$ и ортонормированные базисы $\left\{e_{ij}^{(\lambda)}\right\}$ в них. Введём ортонормированную систему элементов $\bigcup\limits_{\lambda\in\sigma_p(A)} \left\{e_{ij}^{(\lambda)}\right\}$, которая, очевидно, является ортонормированным базисом в подпространстве

$$\mathcal{E}_0(A) := \text{з.л.о.} \left\{\bigcup_{\lambda} \mathrm{Ker}(A - \lambda I)\right\}_{\lambda\in\sigma_p(A)} \subset \mathcal{H}. \tag{4.69}$$

Докажем, что $\mathcal{E}_0(A) = \mathcal{H}$.

Предположим, что это не так. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_0(A) \oplus \left(\mathcal{E}_0(A)\right)^{\perp}, \tag{4.70}$$

и у $A|_{(\mathcal{E}_0(A))^{\perp}}$ нет собственных значений. Поскольку спектр $\sigma(A|_{(\mathcal{E}_0(A))^{\perp}}) \subset \sigma(A)$ не более чем счётен и образует замкнутое множество, а $\dim\left(\mathcal{E}_0(A)\right)^{\perp} > 0$, то в этом спектре найдётся изолированная точка, которая является изолированным собственным значением оператора A. Это противоречит тому, что $\mathcal{E}_0(A)$ является замыканием линейной оболочки собственных элементов оператора A, отвечающих всем его собственным значениям, и лемма доказана. $\square$

4.3 О полноте и базисности системы корневых элементов операторов, действующих в пространстве Крейна

Пусть $A = A^c \in (H),\ B \in \mathcal{K}(H, A)$, т.е. $BA = BA$.

Тогда, согласно утверждению 2 леммы 4.3, $\mathcal{L}_\lambda(B) = \mathcal{N}_\lambda[+]\mathcal{M}_\lambda,\ \dim\mathcal{M}_\lambda < \infty,\ B\mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda,\ \mathcal{M}_\lambda \subset \mathrm{Ker}(B - \lambda I)$

и $\mathcal{M}_\lambda$ — регулярное подпространство. Далее, как следует из предыдущих рассмотрений (см. теорему 4.4, собственных значений λ, отвечающих вырожденным подпространствам $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)$, не более $\varkappa_A$. Остальные ядра $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I) = \mathcal{L}_\lambda(B) = \mathcal{M}_\lambda$ регулярны.

Рассмотрим сужение $A|_{\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)}$ оператора A на регулярное подпространство $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)$. У этого оператора существует максимальная дуальная пара $\left\{\mathcal{L}_\lambda^+, \mathcal{L}_\lambda^-\right\}$ в $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)$, $A\mathcal{L}_\lambda^\pm \subset \mathcal{L}_\lambda^\pm$.

Лемма 4.6. *Существует не более $\varkappa_A$ собственных значений оператора B таких, что $Ker(B-\lambda I)$ невырождено, а пара $\left\{\mathcal{L}_\lambda^+, \mathcal{L}_\lambda^-\right\}$ — вырожденная, т.е. $\mathcal{L}_\lambda^0 := \mathcal{L}_\lambda^+ \cap \mathcal{L}_\lambda^- \neq \{0\}$.*

Доказательство. Для каждого $\mathcal{L}_\lambda^0$ имеем $A\mathcal{L}_\lambda^0 \subset \mathcal{L}_\lambda^0$, причём в силу свойства $A \in (H)$ будет $\dim \mathcal{L}_\lambda^0 < \infty$. Поэтому $A|_{\mathcal{L}_\lambda^0}$ имеет по крайней мере один собственный элемент x_λ, т.е. $Ax_\lambda = \alpha x_\lambda, x_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda^0$. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — такие собственные значения, отвечающие собственным элементам $x_1, \dots, x_p$, то $[x_k, x_j] = 0$ и линейная оболочка л.о.$\{x_k\}_{k=1}^p$ имеет размерность $p \leqslant \varkappa_A$.

$\square$

Заметим, что для других собственных значений λ ядра $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)$ регулярны и потому их можно разложить в ортогональную сумму дефинитных инвариантных подпространств $\mathcal{L}_\lambda^+[+]\mathcal{L}_\lambda^-$.

Определение 4.5. Будем обозначать через $s(B)$ величину

$$s(B) := \left\{\lambda \in \sigma_p(B) :\ \lambda = \overline{\lambda},\ \mathrm{Ker}\,(B-\lambda I) \text{— вырождено}\right\}. \tag{4.71}$$

$\square$

Определение 4.6. Через $s_1(B, A)$ будем обозначать величину

$$s_1(B,A) :=$$
$$\left\{\lambda \in \sigma_p(B) :\ \lambda = \overline{\lambda},\ \mathrm{Ker}\,(B-\lambda I) \text{— невырождено},\ \mathcal{L}_\lambda^0 = \mathcal{L}_\lambda^+ \cap \mathcal{L}_\lambda^- \neq \{0\}\right\}.$$

$\square$

Из этих определений следует, что если $\lambda \notin s(B) \cap s_1(B,A)$, то $\mathcal{L}_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I) = \mathcal{L}_\lambda^+[+]\mathcal{L}_\lambda^-$, $A\mathcal{L}_\lambda^\pm \subset \mathcal{L}_\lambda^\pm$, причём $\mathcal{L}_\lambda^\pm$ — равномерно дефинитные подпространства. В этом случае подпространство $\mathrm{Ker}(B-\lambda I)$ регулярно.

Напомним теперь определения некоторых видов базисов и J-ортонормированных систем.

Определение 4.7. Система элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется J-ортонормированной, если $[e_j, e_k] = \pm\delta_{jk}$. $\square$

Определение 4.8. Система элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется почти J-ортонормированной, если ее можно представить в виде

$$\{e_j\} = \{e'_{j_k}\}_{k=1}^{m} \cup \{f_j\}, \tag{4.72}$$

где $\{f_j\}$ является J-ортонормированной, а $[e'_{j_k}, f_l] = 0$ для любых k и l. $\square$

Определение 4.9. Система элементов $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется базисом Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если

$$g_j = Ge_j, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{4.73}$$

где $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а G — ограниченный и ограниченно обратимый оператор. $\square$

Определение 4.10. Базис Рисса $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется p-базисом, $1 \leqslant p < \infty$, если $G = I + T,\ T \in \mathfrak{S}_p$. $\square$

Из этих определений следует, что если имеется базис Рисса $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, то он будет p-базисом тогда и только тогда, когда $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \setminus \{e_{j_k}\}_{k=1}^{m}$ является p-базисом в своей замкнутой линейной оболочке. Поэтому если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ является почти J-ортонормированным базисом, то любую конечную его часть можно заменить на другую с новыми условиями нормировки. Это утверждение справедливо и для свойства p-базисности.

Определение 4.11. Коразмерностью линеала $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ называется величина

$$\begin{gathered}\operatorname{codim}_{\mathfrak{M}} \mathcal{L} := \dim \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathfrak{M} \iff \mathfrak{M} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}_1, \\ \dim \mathcal{L}_1 = \dim (\mathfrak{M} \ominus \mathcal{L}), \quad \operatorname{codim}_{\mathfrak{M}} \mathcal{L} = \dim \mathcal{L}_1.\end{gathered} \tag{4.74}$$

$\square$

Пусть $B \in \mathcal{K}(H, A),\ A = A^c \in (H)$. Рассмотрим вопросы полноты и базисности системы корневых элементов таких операторов.

Заметим сразу же, что невещественный спектр оператора B и отвечающие ему корневые элементы не влияют на свойство полноты и базисности системы всех корневых элементов этого оператора.

В самом деле, такой невещественный спектр имеет суммарную конечную алгебраическую кратность, так как все корневые линеалы конечномерны.

Пусть $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ — невещественные собственные значения оператора B, которым отвечают корневые линеалы $\mathcal{L}_{\mu_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда

$$\mathcal{K} = \text{л.о.}\,\{\mathcal{L}_{\mu_k}(B)\}_{k=1}^{m}\,[+]\mathcal{K}_1, \quad \sigma(B|_{\mathcal{K}_1}) \subset \mathbb{R}. \tag{4.75}$$

Здесь размерность первого подпространства конечна и не превышает, как следует из предыдущих рассмотрений, величины $2\varkappa_A$. Далее, так как

$$B\ \text{л.о.}\,\{\mathcal{L}_{\mu_k}(B)\}_{k=1}^{m} \subset \text{л.о.}\,\{\mathcal{L}_{\mu_k}(B)\}_{k=1}^{m}, \quad BA = AB, \tag{4.76}$$

то

$$A|_{\mathcal{K}_1} \in (H) \Longleftrightarrow A \in (H). \tag{4.77}$$

Поэтому достаточно далее проводить все рассмотрения не в $\mathcal{K}$, а в $\mathcal{K}_1$. Тогда $\sigma(B) \subset \mathbb{R}$.

Введём обозначения:

$$\mathcal{E}_0(B) := \text{з.л.о.}\,\{\operatorname{Ker}(B - \lambda I)\}, \quad \mathcal{E}(B) := \text{з.л.о.}\,\{\mathcal{L}_\lambda(B)\}. \tag{4.78}$$

Возникает естественный вопрос, когда эти подпространства невырождены и регулярны. Ответ на это дают последовательно следующие утверждения.

Лемма 4.7. *$\mathcal{E}_0(B)$ невырождено тогда и только тогда, когда $s(B) = \emptyset$. (Равносильное утверждение: $\mathcal{E}_0(B)$ вырождено тогда и только тогда, когда $s(B) \neq \emptyset$.)*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_0(B)$ вырождено и $\mathcal{L}_0 := \mathcal{E}_0(B) \cap (\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]} \neq \{0\}$. Так как $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, A)$, $A\mathcal{E}_0(B) \subset \mathcal{E}_0(B)$ и $A = A^c \in (H)$, то $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, $\dim\mathcal{L}_0 < \infty$.

Аналогично имеем $B\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$ и потому (в силу конечномерности $\mathcal{L}_0$) существует собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ оператора $B|_{\mathcal{L}_0}$, отвечающее собственному элементу x_0, т.е. $Bx_0 = \lambda_0 x_0$. Этот элемент x_0 ортогонален (в $\mathcal{K}$) элементам всех ядер $\operatorname{Ker}(B - \lambda I)$, а потому $x_0[\perp]\mathcal{E}_0(B)$. Отсюда, в силу определения 4.5, следует, что $\lambda_0 \in s(B) \neq \emptyset$.

В обратную сторону: пусть $s(B) \neq \emptyset$. Тогда существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, являющееся собственным значением оператора B и отвечающее собственному элементу x_0. При этом $x_0[\perp]\operatorname{Ker}(B - \lambda_0 I)$ и x_0 ортогонален всем остальным ядрам $\mathrm{Ker}(B-\lambda I)$, т.е. $\mathcal{E}_0(B)$. Значит, $\mathcal{E}_0(B)$ вырождено.

$\square$

Лемма 4.8. *$\mathcal{E}(B)$ вырождено тогда и только тогда, когда хотя бы одно из корневых подпространств $\mathcal{L}_\lambda(B)$, $\lambda \in s(B)$, вырождено.*

Доказательство. Пусть подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_0}(B)$, $\lambda_0 \in s(B)$, вырождено. Тогда в этом подпространстве существует изотропный вектор $x_0[\perp]\mathcal{L}_{\lambda_0}(B)$. Так как $x_0[\perp]\mathcal{L}_\lambda(B)$ при $\lambda \neq \lambda_0$, то $x_0[\perp]\mathcal{E}(B)$ и $x_0 \in \mathcal{E}(B)$, т.е. $\mathcal{E}(B)$ вырождено.

В обратную сторону: если $\mathcal{L}_0 := \mathcal{E}(B) \cap \mathcal{E}(B)^{[\perp]} \neq \{0\}$, то $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, $\dim\mathcal{L}_0 < \infty$, и потому существует λ_0 и x_0 такие, что $Bx_0 = \lambda_0 x_0$, $x_0 \in \mathcal{L}_0$. Тогда, по определению, $\lambda_0 \in s(B)$.

$\square$

Лемма 4.9. *$\mathcal{E}(B)$ невырождено тогда и только тогда, когда*

$$\text{з.л.о.}\,\{\mathcal{L}_\lambda(B):\ \lambda \notin s(B) \cup s_1(B,A)\} \tag{4.79}$$

невырождено. $\square$

Лемма 4.10. *Если $\mathcal{E}_0(B)$ и $\mathcal{E}(B)$ невырождены, то они регулярны, и тогда*

$$\mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B)[+]\left(\mathcal{E}_0(B)\right)^{[\perp]}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{E}(B)[+]\left(\mathcal{E}(B)\right)^{[\perp]}. \tag{4.80}$$

$\square$

В качестве замечания отметим, что если выполнено условие $\dim\left(\mathcal{E}_0(B)\right)^{[\perp]} < \infty$, то $\left(\mathcal{E}_0(B)\right)^{[\perp]} = \{0\}$, поскольку в этом конечномерном подпространстве у оператора B (или A) должны быть собственные значения, а их нет, все собственные значения учтены при образовании $\mathcal{E}_0(B)$. Значит, $\left(\mathcal{E}_0(B)\right)^{[\perp]} = \{0\}$.

Итогом предыдущих рассмотрений вопросов полноты и базисности корневых элементов операторов, действующих в пространстве Крейна, является следующее утверждение.

Теорема 4.8. Пусть $B \in \mathcal{K}(H,A)$, $A = A^c \in (H)$, и $\sigma(B)$ имеет не более счётного множества точек сгущения. Тогда:

1. $\mathrm{codim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}(B) \leqslant \mathrm{codim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_0(B) < \infty$.
2. $\mathcal{E}_0(B) = \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $s(B) = \emptyset$.

3. $\mathcal{E}(B) = \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка подпространств $\mathcal{L}_\lambda(B)$ с $\lambda \in s(B)$ является невырожденным подпространством.

4. Если $\mathcal{E}_0(B) = \mathcal{K}$ (соответственно $\mathcal{E}(B) = \mathcal{K}$), то в $\mathcal{K}$ существует (почти) J-ортонормированный базис Рисса, составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора B.

5. Указанный базис можно выбрать p-базисом тогда и только тогда, когда у оператора B существует инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, $B\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, с угловым оператором $K \in \mathfrak{S}_p$.

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{codim}_{\mathcal{E}(B)}\mathcal{E}_0(B) < \infty$ (см. теоремы 4.3, 4.4) и $\mathcal{E}_0(B) \subset \mathcal{E}(B)$, то для доказательства утверждения 1 достаточно установить, что

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}(B) < \infty. \tag{4.81}$$

Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная дуальная пара инвариантных подпространств для A и B (см. теорему 4.7 применительно не к унитарному оператору U, а самосопряжённому $A = A^c \in (H)$). Здесь $\mathcal{L}_\pm \in h^\pm \cap \mathfrak{M}^\pm$. Пусть $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, $\dim \mathcal{L}_0 < \infty$. Тогда

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \dim J\mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{L}_0 < \infty. \tag{4.82}$$

Рассмотрим разложение пространства $\mathcal{K}$ в форме

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \oplus \left\{\mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_0^{\perp}\right\} \oplus J\mathcal{L}_0 \tag{4.83}$$

и докажем, что

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}\left(\mathcal{E}(B) \cap \mathcal{L}_0^{[\perp]}\right) < \infty. \tag{4.84}$$

Пусть

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M}\,. \tag{4.85}$$

Представим $\mathcal{M}$ в каноническом виде

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-, \quad \mathcal{M}^\pm = \mathcal{L}^\pm \cap \mathcal{M}\,. \tag{4.86}$$

Тогда оператор $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$ в разложении $\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ представляется в виде матрицы

$$B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} B_0 & B_{01} & B_{02} \\ 0 & B_+ & 0 \\ 0 & 0 & B_- \end{pmatrix}. \tag{4.87}$$

Поскольку $\sigma(B)$ счётен, то $\sigma(B_\pm)$ не более чем счётен, так как $\sigma(B_\pm) \subset \sigma(B)$, что следует из треугольного вида матрицы $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$.

Заметим теперь, что оператор $B_+|_{\mathcal{L}_+}$ является обычным самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве $\{\mathcal{L}_+, [\cdot,\cdot]\}$, а $B_-|_{\mathcal{L}_-}$ — такой же оператор в гильбертовом пространстве $\{\mathcal{L}_-, -[\cdot,\cdot]\}$. Так как спектры этих операторов не более чем счётны, то, согласно лемме 4.5, в каждом из этих пространств имеется ортонормированный базис, состоящий из собственных элементов операторов $B_+|_{\mathcal{L}_+}$ и $B_-|_{\mathcal{L}_-}$ соответственно, т.е. в $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ имеется базис из собственных элементов оператора

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix}. \tag{4.88}$$

Итак, в силу свойства $\operatorname{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{L}_0^{[\perp]} < \infty$ для доказательства свойства $\operatorname{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}(B) < \infty$ достаточно доказать, что

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} \left(\mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{E}(B) \right) < \infty. \tag{4.89}$$

Установим этот факт. Для оператора B_1 имеем $\operatorname{Ker}(B_1 - \lambda I) \subset \mathcal{E}(B) \cap \mathcal{L}_0^{[\perp]}$, т.е. $\mathcal{E}_0(B_1) \subset \mathcal{E}(B) \cap \mathcal{L}_0^{[\perp]}$. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = \sigma(B|_{\mathcal{L}_0}) = \sigma(B_0)$, а $k_1, \ldots, k_p$ — кратности собственных значений λ_k, $k = 1, \ldots, p$. Тогда, как следует из вида матрицы $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$, $\sigma(B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}) = \sigma(B_0) \cup \sigma(B_1)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}})$ и $x_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda(B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}})$ — соответствующий корневой элемент. Тогда, как следует из треугольного вида матрицы $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$, будем иметь

$$(B - \lambda_1 I)^{k_1} (B - \lambda_2 I)^{k_2} \ldots (B - \lambda_p I)^{k_p} (B - \lambda I) x_\lambda = 0. \tag{4.90}$$

Отсюда следует, что если $x_\lambda \in \operatorname{Ker}(B_1 - \lambda I)$, то $x_\lambda \in$ л.о. $\{\cup_{k=1}^p \mathcal{L}_{\lambda_k}(B), \mathcal{L}_\lambda(B)\}$.

2-3. Докажем теперь утверждения 2 и 3. Пусть $\mathcal{E}_0(B)$ и $\mathcal{E}(B)$ невырождены. Тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B)[+]\left(\mathcal{E}_0(B)\right)^{[\perp]}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{E}(B)[+]\left(\mathcal{E}(B)\right)^{[\perp]}. \tag{4.91}$$

Так как $(\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]}$ и $(\mathcal{E}(B))^{[\perp]}$ — конечномерные подпространства, то оператор B имеет в этих подпространствах собственные элементы. Однако такие элементы, согласно определению, находятся в $\mathcal{E}_0(B)$ и соответственно в $\mathcal{E}(B)$. Значит, $(\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]}$ (соответственно, $(\mathcal{E}(B))^{[\perp]}$) — тривиальные подпространства, $\mathcal{E}_0(B) = \{0\}$ ($\mathcal{E}(B) = \{0\}$), и потому $\mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B)$ (соответственно $\mathcal{K} = \mathcal{E}(B)$).

Доказательство в другую сторону аналогично.

4. Пусть $\mathcal{E}_0(B) = \mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{E}_0(B)$ невырождено. Тогда, согласно лемме 4.7, $s(B) = \emptyset$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B) = \sum[+]\left(\mathcal{L}_\lambda^+[+]\mathcal{L}_\lambda^-\right)\big|_{\lambda\notin s_1(B,A)}[+] \\ \left(\sum[+]\mathrm{Ker}(B-\lambda I)\right)\big|_{\lambda\in s_1(B,A)}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Здесь в первой сумме подпространств, как следует из доказательства в части 1, имеется базис Рисса в своей замкнутой оболочке, являющийся J-ортонормированным базисом в ней, а вторая сумма представляет собой подпространство конечной размерности и потому в $\mathcal{K}$ существует почти J-ортонормированный базис, составленный из собственных элементов оператора B и базиса второй суммы подпространств. Если, в частности, эта вторая сумма подпространств тривиальна, то в $\mathcal{K}$ имеется J-ортонормированный базис, составленный из собственных элементов оператора B.

Пусть теперь $\mathcal{E}(B) = \mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{E}(B)$ невырождено. Тогда, согласно лемме 4.9, любое подпространство $\mathcal{L}_\lambda(B)$ обладает свойством $\lambda \notin s(B) \cup s_1(B,A)$. В этом случае

$$\mathcal{L}_\lambda(B) = \left(\mathcal{L}_\lambda^+[+]\mathcal{L}_\lambda^-\right)[+]\mathfrak{M}_\lambda[+]\mathfrak{N}_\lambda, \tag{4.93}$$

причём в $\left(\mathcal{L}_\lambda^+[+]\mathcal{L}_\lambda^-\right)[+]\mathfrak{M}_\lambda$ имеется J-ортонормированный базис, а $\mathfrak{N}_\lambda$ конечномерно и количество таких подпространств не более чем конечно. Отсюда следует, что в $\mathcal{K}$ существует почти J-ортонормированный базис, составленный из собственных (либо корневых) элементов оператора B.

5. Пусть $\{e_j^\pm\}$ является J-ортонормированным базисом и p-базисом в $\mathcal{K}$, т.е. имеется ортонормированный базис $\{g_j^\pm\}$ такой, что

$$e_j^\pm = (I+T)g_j^\pm, \quad T \in \mathfrak{S}_p, \tag{4.94}$$

причём $I+T$ обратим.

Введём подпространства

$$\mathcal{L}^\pm := \text{з.л.о.}\left\{e_j^\pm\right\}. \tag{4.95}$$

Тогда, очевидно,

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}^+[+]\mathcal{L}^-, \tag{4.96}$$

где $\mathcal{L}^\pm$ — равномерно дефинитные максимальные подпространства в $\mathcal{K}$.

Пусть K — угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}^+$. Тогда, согласно лемме 2.1, $\|K\| < 1$. Рассмотрим элементы

$$f_j^\pm = U^{-1}(K)e_j^\pm, \tag{4.97}$$

где

$$U(K) = \begin{pmatrix} (I-K^*K)^{1/2} & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{4.98}$$

— унитарный оператор, представленный матрицей в построенном каноническом разложении пространства $\mathcal{K}$. Здесь элементы $\{f_j^\pm\}$ образуют (в силу унитарности $U(K)$) J-ортонормированный базис, причём $\{f_j^+\}$ и $\{f_j^-\}$ образуют гильбертово ортонормированные системы. Имеем

$$f_j^\pm = U^{-1}(K)(I+T)g_j^\pm, \tag{4.99}$$

и потому $U^{-1}(K)(I+T)$ — гильбертово унитарный оператор. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &(I+T)^*U^{-2}(K)(I+T) = I, \\ &U^{-1}(K)(I+T) = (I+T)^*U^{-1}(K). \end{aligned} \tag{4.100}$$

Из этих соотношений приходим к выводу, что

$$(I+T)(I+T)^* = U^2(K), \tag{4.101}$$

и потому

$$(I+T)(I+T)^* - I = U^2(K) - I. \tag{4.102}$$

Отсюда следует, что

$$U^2(K) - I = T + T^* + TT^* \in \mathfrak{S}_p, \qquad (4.103)$$

так как $T \in \mathfrak{S}_p$. Далее, поскольку $U(K) \gg 0$ (**лемма ??**), то существует непрерывный обратный оператор $(I + U(K))^{-1}$ и, значит, **??????**

$$U(K) - I = (U(K) + I)^{-1}(U^2(K) - I) =$$

$$= \begin{pmatrix} (I - K^*K)^{-1/2} - I & K^*(I - KK^*)^{-1/2} \\ K(I - K^*K)^{-1/2} & (I - KK^*)^{-1/2} - I \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_p, \qquad (4.104)$$

т.к. каждый элемент матрицы принадлежит $\mathfrak{S}_p$. В частности,

$$K = \left(K(I - K^*K)^{-1/2}\right)(I - KK^*)^{1/2} \in \mathfrak{S}_p, \qquad (4.105)$$

поскольку первый сомножитель класса $\mathfrak{S}_p$, а второй ограничен.

В обратную сторону можно провести аналогичные рассуждения, предполагая, что $K \in \mathfrak{S}_p$ и учитывая свойство $U(K) = I + T(K)$, $T(K) \in \mathfrak{S}_p$. □

4.4 Приложение основной спектральной теоремы к операторному пучку С.Г. Крейна

Рассмотрим операторный пучок С.Г. Крейна в предположениях более общих, чем те, которые имели место в задаче о нормальных колебаниях тяжёлой вязкой жидкости в открытом сосуде.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и в нём рассматривается спектральная задача

$$L(\lambda)\varphi := (\lambda G + \lambda^{-1} H - I)\varphi = 0, \quad \lambda \neq 0, \qquad (4.106)$$

где оператор G положителен ($G > 0$ и потому самосопряжён) и компактен, а H — самосопряжённый оператор, спектр $\sigma(H)$ которого является счётным. Покажем, что эту задачу можно привести к задаче на собственные значения для J-самосопряжённого оператора в некотором пространстве Крейна.

Осуществим в задаче (4.106) замену спектрального параметра по формуле

$$\lambda = \mu^{-1} - a, \quad a > 0, \quad \mu \neq a^{-1}. \qquad (4.107)$$

Тогда вместо (4.106) придём к спектральной проблеме

$$L_1(\mu)\varphi := \left\{\mu^2(aI + a^2G + H) - \mu(I + 2aG) + G\right\}\varphi = 0. \qquad (4.108)$$

Выберем теперь $a > 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$F_a := aI + a^2 G + H \gg 0. \tag{4.109}$$

Так как $G > 0$, то для этого достаточно, чтобы

$$a > \|H\|. \tag{4.110}$$

Осуществим затем в (4.108) замену искомого элемента по формуле

$$F_a^{1/2}\varphi =: \psi \tag{4.111}$$

и применим слева (ограниченный и ограниченно обратимый) оператор $F_a^{-1/2}$. Тогда вместо (4.108) придём к спектральной задаче для квадратичного по μ операторного пучка

$$L_2(\mu)\psi := (\mu^2 I - \mu B_a + C_a)\psi = 0, \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned} &B_a := F_a^{-1/2}(I + 2aG)F_a^{-1/2} = B_a^* \gg 0, \\ &C_a := F_a^{-1/2} G F_a^{-1/2} = C_a^* > 0. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Эта задача равносильна исходной задаче (4.106), а цепочки из собственных и присоеденённых элементов задач (4.106) и (4.112) однозначно выражаются известным образом одни через другие.

Проведём теперь в (4.112) так называемую глобальную линеаризацию по параметру μ, введя новый искомый элемент η по формуле

$$C_a^{1/2}\psi = \mu\eta. \tag{4.114}$$

Тогда (4.112) и (4.114) приводят к системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & C_a^{1/2} \\ -C_a^{1/2} & B_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{4.115}$$

то есть к задаче на собственные значения для оператора

$$\mathcal{A}_a := \begin{pmatrix} 0 & C_a^{1/2} \\ -C_a^{1/2} & B_a \end{pmatrix} : \ \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{H}^2. \tag{4.116}$$

Нетрудно видеть, что оператор $\mathcal{A}_a$ является J-самосопряжённым, если ввести каноническую симметрию

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

и индефинитное скалярное произведение

$$[u, v] = (Ju, v)_{\mathcal{H}^2}, \quad u = \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}. \tag{4.118}$$

Оператор $\mathcal{A}_a$ называют линеаризатором задачи (4.112).

Выясним, какими дополнительными свойствами обладает линеаризатор $\mathcal{A}_a$. Прежде всего, из второй формулы (4.113) следует, что $C_a \in \mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{S}_p$, поскольку $F_a^{-1/2}$ ограничен и ограниченно обратим. Поэтому $C_a^{1/2} \in \mathfrak{S}_p \iff G \in \mathfrak{S}_{p/2}$. Далее, спектр оператора $\mathcal{A}_a$ счётен, так как $C_a^{1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$, а спектр оператора H счётен и потому спектр B_a также счётен.

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_a$ при условии $G \in \mathfrak{S}_p$ удовлетворяет условиям основной спектральной теоремы 4.8. В самом деле, так как $(\mathcal{A}_a)_{12} = C_a^{1/2}$ — компактный оператор, а $B_a \gg 0$, то оператор $\mathcal{A}_a$ является частным случаем матричного оператора, рассмотренного в примере 4.2. Поэтому $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_a^c \in (H)$ и спектр оператора $\mathcal{A}_a$ счётен. Значит, для него справедливы все утверждения теоремы 4.8. В частности, если собственные элементы $\mathcal{A}_a$ образуют J-ортонормированный базис, то этот базис является p-базисом в $\mathcal{H}^2$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{S}_{p/2}$, т.е. при условии, что угловой оператор K максимального неотрицательного инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$. Последнее утверждение для оператора $\mathcal{A}_a$ прямо следует из уравнения для углового оператора, которое в данном случае имеет вид

$$KC_a^{1/2}K = -C_a^{1/2} + B_a K \Longrightarrow K = B_a^{-1}(KC_a^{1/2}K + C_a^{1/2}). \tag{4.119}$$

Здесь B_a^{-1} непрерывен, а $C_a^{1/2} \in \mathfrak{S}_p$, если $G \in \mathfrak{S}_{p/2}$, и потому $K \in \mathfrak{S}_p$.

Возвращаясь по приведенным выкладкам от задачи (4.112) к исходной задаче (4.106) для обобщённого пучка Крейна, приходим к выводу, что эта задача имеет решения, обладающие свойством базисности и p-базисности.

Список литературы

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* — М.: Наука, 1986.

[2] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой.* Математический анализ // Итоги науки и техники, ВИНИТИ. Математический анализ, т. 17, — М.: Наука, 1979.

[3] Гинзбург, Иохвидов И.С. *Исследования по геометрии бесконечномерных пространств.* // УМН, т. 17, № 4, 1962.

[4] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Линейные операторы в гильбертовом пространстве с G – метрикой.* // УМН, т. 26, № 4, 1971.

[5] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. *Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций.* — Симферополь: ООО "ФОРМА", 2008. — 112 с.

[6] Крейн М.Г. *Введение в геометрию индефинитных J–пространств и теорию операторов в этих пространствах.* II летняя математическая школа, т.1, Киев, 1965.

[7] Иохвидов И.С., Крейн М.Г. *Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* Труды ММО, I, 1956, т.5; II, 1959, т.8.

[8] Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H. *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric.* Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

Введение в теорию пространств Крейна

Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности "Математика"

Авторы:
Азизов Томас Яковлевич,
Копачевский Николай Дмитриевич

Корректура и верстка: Газиев Э.Л.

Подписано к печати 01.02.2010г. Формат 60x84/16.
Бумага тип. ОП. Объем 5,6 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. Сергеева-Ценского 5, оф. 6.
ООО "ФОРМА".