МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ

КРЫМСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Сімферополь
2010

ББК 22.162
К65
УДК 517.98

Печатается по решению Ученого совета
РВУЗ "Крымский инженерно-педагогический университет".
Протокол № 2 от 26 ноября 2007 г.

Рецензенты :

Павлов Е.А. – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой математики Крымского инженерно-педагогического университета;
Чехов В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Закора Д.А. – к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д. ***Функциональный анализ*****:** Учебное пособие. – Симферополь: НИЦ КИПУ, 2008. – 140 с. – На русском языке

В пособии излагаются базовые теоретические положения функционального анализа: теория меры и интеграла Лебега, понятия метрических, банаховых, гильбертовых пространств и операторов, действующих в них, теория интегральных уравнений, элементы спектральной теории линейных операторов.

Множество примеров, упражнений и контрольных вопросов позволяют рекомендовать пособие для аудиторных занятий и самостоятельного изучения.

Для студентов, специализирующихся в области прикладной математики и информатики.

К65 Копачевський М.Д. ***Функціональний аналіз*****:** Навчальний посібник. – Сімферополь: НІЦ КІПУ, 2008. – 140 с. – Російською мовою

Посібник містить основні теоретичні поняття функціонального аналізу: теорія міри і інтеграла Лебега, поняття метричних, банахових, гільбертових просторів і операторів, що діють у них, теорія інтегральних рівнянь, елементи спектральної теорії лінійних операторів.

Безліч прикладів, вправ та контрольних питань дозволяють рекомендувати посібник для аудиторних занять і самостійного вивчення.

Для студентів, що спеціалізуються у галузі прикладної математики й інформатики.

Содержание

Введение

Функциональный анализ возник как наука в первой половине 20 столетия в результате взаимодействия и последующего объединения на бесконечномерный случай идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры. Современная математика немыслима без функционального анализа. Сегодня идеи, методы, концепции, терминология и стиль функционального анализа пронизывают чуть ли не все области математики, объединяя их в единое целое. Возрастающая прикладная направленность функционального анализа делает его необходимым для прикладников, информатиков и инженеров, использующих в своей практике математический аппарат.

1.1 О содержании курса

Основу данного учебного пособия составили лекции по функциональному анализу, которые автор читал в течении ряда лет студентам факультета информатики Крымского инженерно – педагогического университета. Это в значительной мере предопределило содержание пособия и характер изложения.

Общий объем учебных часов (лекций, практических занятий и самостоятельной работы) составляет 108 часов. У читателя (слушателя) не предполагается наличия специальных знаний, например, в области теории функций действительного переменного, достаточно лишь знаний по тем математическим курсам, которые обычно читают по специальности "информатика"в первый – второй год обучения. Почти каждое новое понятие иллюстрируется примером или упражнением. Упражнения иногда вклиниваются в доказательства, в примеры, рассуждения. Это сделано для того, чтобы побудить читателя задуматься над связью излагаемого материала с уже известными ему математическими фактами и понятиями, понять их теоретическое и прикладное значение.

Остановимся теперь на содержании пособия. Оно состоит из 13 параграфов и построено по принципу "от простого к сложному". После введения (параграф 1) в параграфах 2 и 3 излагается классический материал, связанный с определением и свойствами меры множества по Лебегу, измеримыми функциями, а также интеграл Лебега.

Далее в параграфе 4 рассматриваются конечномерные и бесконечномерные евклидовы пространства. В параграфе 5 представлены вопросы геометрии абстрактного гильбертового пространства. Предварительно изучаются свойства пространства функций, квадратично измеримых по Лебегу на произвольном конечном отрезке.

В параграфе 6 рассматриваются элементы анализа в линейных нормированных (банаховых) пространствах, дается понятие метрического пространства. Параграф 7 посвящен изучению линейных ограниченных операторов и их некоторых свойств. В частности, рассматриваются примеры нахождения обратных операторов.

В параграфе 8 даются определения и примеры линейных функционалов, доказывается теорема об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, приводится теорема о продолжении функционала с подпространства на все пространство. Рассматривается также понятие слабой сходимости в линейных нормированных пространствах.

Параграф 9 посвящен изучению свойств сопряженных и самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В частности, рассматриваются свойства ортопроекторов. Затем дается общее определение сопряженного оператора.

В параграфе 10 рассматриваются компактные множества и вполне непрерывные (компактные) операторы. Приводятся примеры компактных операторов. На этой основе в параграфе 11 излагается теория линейных уравнений второго рода. Рассматриваются приложения этой теории к линейным интегральным уравнениям в гильбертовом пространстве.

Параграф 12 посвящен рассмотрению элементов спектральной теории линейных ограниченных операторов. Доказывается теорема о базисности собственных элементов и свойствах спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора.

В параграфе 13 рассматриваются основные принципы функционального анализа и даются, в частности, элементы нелинейного анализа. Здесь излагается принцип сжимающих отображений и его применения к интегральным уравнениям второго рода.

1.2 Роль зарубежных и отечественных ученых в создании функционального анализа

Как уже упоминалось, функциональный анализ возник в первой половине 20 века. Первые результаты появились как обобщение идей, связанных с вариационным исчислением и теорией линейных интегральных уравнений. Здесь упомянем выдающуюся роль Д. Гильберта, а затем украинско – польского математика С. Банаха. В их честь названы абстрактные функциональные пространства (гильбертовы и банаховы). Большой вклад в получение первых результатов внесли также Ф. Рисс и другие. В настоящее время количество полученных общих результатов и их приложений столь велико, что невозможно перечислить всех выдающихся математиков, принимающих участие в становлении и формировании функционального анализа.

Назовем лишь фамилии отечественных ученых и некоторые направления, развитые ими. Это: С.Л. Соболев (пространства Соболева и теоремы вложения), братья М.Г. и С.Г. Крейны (пространства с индефинитной метрикой, теория интерполяции линейных операторов, дифференциальные уравнения в банаховых пространствах), А.Н. Колмогоров (теория вероятностей и другие разделы функционального анализа), И.М. Гельфанд (обобщенные функции и действия над ними), М.А. Красносельский (нелинейный функциональный анализ и его приложения), Ю.М. Березанский (самосопряженные операторы в оснащенных гильбертовых пространствах и их приложения), О.А. Ладыженская (гидродинамика, эллиптические и параболические уравнения) и другие. В 20 веке в СССР существовали всемирно известные математические школы (коллективы ученых). Это, в первую очередь, Московская и Ленинградская школы, Киевская школа, Одесская, Львовская, Харьковская и Донецкая школы, Воронежская школа, Новосибирская, Ростовская, Тбилисская и другие.

В настоящее время эти школы по–прежнему активно работают и развивают новые и прежние разделы функционального анализа.

1.3 Примеры приложений функционального анализа

Одним из важнейших приложений идей и методов функционального анализа является создание в первой половине 20 века такой физической теории, как квантовая механика. Здесь активно работает теория самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Достижения 20 века, связанные с использованием ядерных и термоядерных реакций, также основаны на использовании методов функционального анализа.

В настоящее время функциональный анализ пронизывает почти все математические дисциплины и применяется при решении различных прикладных задач. В частности, при приближенном решении многих задач, возникающих на практике (теория управления, математическая экономика, механика сплошных сред), используются методы Ритца, Галеркина, Ньютона – Канторовича, Галеркина – Петрова, метод конечных элементов (сплайнов) и многие другие.

Таким образом, знание основ функционального анализа необходимо любому исследователю и прикладнику, в частности, информатику, использующему в своей работе достижения современной математической науки.

2 Мера множества по Лебегу. Измеримые множества

С понятием меры множества по Жордану на прямой или в $\mathbb{R}^m$ студенты знакомятся в курсе математического анализа. Сейчас будет рассмотрено понятие меры множества по Лебегу, заданного на произвольном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Отметим, что это определение меры множества оказалось весьма плодотворным и укрепилось в современной математике.

2.1 Определение измеримых множеств

Пусть $E \subset [a, b]$ — произвольное множество точек, заданных на отрезке $[a, b]$, а $CE := [a, b] \setminus E$ — его дополнение.

Заключим данное множество E в конечную или счетную систему открытых интервалов с длинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. При этом, очевидно, сумма длин интервалов (конечная или бесконечная) всегда положительна: $\sum\limits_k \alpha_k > 0$. Следовательно, эта сумма ограничена снизу и потому имеет точную нижнюю грань.

Определение 2.1. *Внешней мерой $m^*(E)$ множества $E \subset [a, b]$ называется величина*

$$m^*(E) := \inf \sum_k \alpha_k, \tag{2.1}$$

где инфимум берется по всем системам интервалов, содержащим E. $\square$

Рассмотрим теперь также внешнюю меру дополнения CE, т.е. $m^*(CE)$.

Определение 2.2. *Внутренней мерой $m_*(E)$ множества $E \subset [a, b]$ называется величина*

$$m_*(E) := (b - a) - m^*(CE). \qquad \square \tag{2.2}$$

Отметим простые свойства внешней и внутренней мер. Очевидно, всегда $m^*(E) \geqslant 0$, так как $\sum_k \alpha_k > 0$. Оказывается, что также

$$m_*(E) \geqslant 0.$$

В самом деле, $CE \subset [a,b]$ и потому $m^*(CE) \leqslant (b-a)$, так как CE содержится в интервале $\left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)$ при любом $n \in \mathbb{N}$, а нижняя грань длин таких интервалов равна $b-a$. Поэтому $m_*(E) = (b-a) - m^*(CE) \geqslant 0$.

Теорема 2.1. *Внешняя мера множества $E \subset [a,b]$ не может быть меньше внутренней меры этого множества, т.е. всегда*

$$0 \leqslant m_*(E) \leqslant m^*(E). \tag{2.3}$$

Доказательство. По определению $m^*(E)$, для любого $\delta > 0$ можно найти такую систему интервалов с длинами α_k, содержащую E, что

$$\sum_k \alpha_k < m^*(E) + \delta.$$

Аналогично для множества CE найдется система интервалов с длинами β_k такая, что

$$\sum_k \beta_k < m^*(CE) + \delta.$$

Из этих неравенств имеем

$$\sum_k \alpha_k + \sum_k \beta_k < m^*(E) + m^*(CE) + 2\delta.$$

Однако очевидно, что

$$\sum_k \alpha_k + \sum_k \beta_k \geqslant b - a.$$

Отсюда получаем неравенство

$$b - a < m^*(E) + m^*(CE) + 2\delta,$$

т.е.

$$m_*(E) - 2\delta < m^*(E).$$

Так как $\delta > 0$ — произвольно, то $m_*(E) \leqslant m^*(E)$. □

Определение 2.3. (меры множества по Лебегу). *Множество $E \subset [a,b]$ называется измеримым по Лебегу, если*

$$m_*(E) = m^*(E) =: m(E), \tag{2.4}$$

а величина $m(E)$ называется мерой Лебега множества E. □

Замечание 2.1. *Если множество $E \subset [a, b]$ измеримо по Жордану, то оно измеримо и по Лебегу, причем соответствующие меры по Жордану и Лебегу совпадают.* $\square$

2.2 Свойства измеримых множеств

Перечислим сейчас свойства измеримых множеств $E \subset [a, b]$.

Свойство 2.1. *Если E измеримо, то CE также измеримо.* $\square$

В самом деле, $m(E) = m_*(E) = m^*(E)$ и потому

$$m_*(E) = m(E) = (b - a) - m^*(CE).$$

Значит, $m^*(CE) = (b - a) - m(E)$. С другой стороны,

$$m_*(CE) = (b - a) - m^*(E) = (b - a) - m(E),$$

поэтому $m^*(CE) = m_*(CE)$.

Упражнение 2.1. *Доказать, что произвольное конечное или счетное множество точек $E := \{x_k\} \subset [a, b]$ является измеримым множеством и его мера $m(E) = 0$.* $\square$

Свойство 2.2. (необходимое и достаточное условие измеримости множества). *Для того, чтобы множество $E \subset [a, b]$ было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого как угодно малого $\delta > 0$ можно было представить множество E в виде*

$$E = (S \cup M_1) \setminus M_2,$$

где S есть система конечного числа попарно неперекрывающихся интервалов, а M_1 и M_2 — любые множества, у каждого из которых внешняя мера меньше δ. При соблюдении этого условия

$$m(S) - \delta < m(E) < m(S) + \delta.$$

Доказательство этого утверждения можно найти в ([16], с.126–128). $\square$

Свойство 2.3. *Объединение любого конечного числа измеримых множеств есть измеримое множество, причем если слагаемые попарно не имеют общих точек, то мера объединения множеств равна сумме мер слагаемых.* $\square$

Доказательство этого свойства основано на свойстве 2.1 (см.[16], с.129-131). $\square$

Свойство 2.4. *Разность $E_1 \setminus E_2$ измеримых множеств есть измеримое множество, причем если $E_2 \subset E_1$, то*

$$m(E_1 \setminus E_2) = m(E_1) - m(E_2). \qquad \square$$

Свойство 2.5. *Объединение $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ счетного множества измеримых множеств, содержащихся в $[a, b]$, есть измеримое множество, причем если данные множества попарно не имеют общих точек, то*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k). \qquad \square$$

Свойство 2.6. *Пересечение конечного или счетного множества измеримых множеств, содержащихся в $[a, b]$, есть измеримое множество.* $\square$

Свойство 2.7. *Если*

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset \ldots \subset [a, b]$$

и E_k измеримы, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \qquad \square$$

Свойство 2.8. *Если E_k измеримы и*

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset \ldots,$$

то

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \qquad \square$$

3 Измеримые функции. Интеграл Лебега

В современном функциональном анализе важную роль играет понятие интеграла Лебега, обобщающее понятие интеграла Римана. Оказывается, что при этом существенную роль играет понятие измеримой функции.

3.1 Определение и свойства измеримых функций

Пусть функция $f(x)$ определена на *измеримом* множестве $E \subset [a, b]$.

Определение 3.1. *Функция $f(x)$ называется измеримой на E, если для любого числа $A \in \mathbb{R}$ множество*

$$\{x \in E : f(x) > A\} \tag{3.1}$$

измеримо. $\square$

Отметим важные свойства функций, измеримых на $E \subset [a, b]$.

Свойство 3.1. *Множество*

$$\{x \in E : f(x) \leqslant A\}$$

измеримо для $\forall A \in \mathbb{R}$. $\square$

В самом деле, это множество можно представить в виде

$$E \setminus \{x \in E : f(x) > A\},$$

т.е. в виде разности измеримых множеств.

Свойство 3.2. *Множество*

$$\{x \in E : A < f(x) \leqslant B\}$$

измеримо при любых $A \leqslant B$, $A, B \in \mathbb{R}$. $\square$

Действительно, это множество есть *пересечение* измеримых множеств

$$\{x \in E : A < f(x)\} \cap \{x \in E : f(x) \leqslant B\},$$

поэтому оно измеримо.

Свойство 3.3. *Множество*

$$\{x \in E : f(x) = A\}$$

измеримо при любом $A \in \mathbb{R}$. $\square$

Доказательство основано на формуле

$$\{x \in E : f(x) = A\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \tag{3.2}$$

$$E_k := \{x \in E : A - \frac{1}{k} < f(x) \leqslant A + \frac{1}{k}\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому множество (3.3) измеримо как *пересечение* измеримых множеств.

Упражнение 3.1. *Доказать формулу* (3.2). $\square$

Свойство 3.4. *Множество*

$$\{x \in E : f(x) \geqslant A\}$$

измеримо. $\square$

В самом деле, его можно представить в виде *объединения* измеримых множеств

$$\{x \in E : f(x) > A\} \bigcup \{x \in E : f(x) = A\}.$$

Свойство 3.5. *Множество*

$$\{x \in E : f(x) < A\} \tag{3.3}$$

измеримо для $\forall A \in \mathbb{R}$. $\square$

Действительно, (3.3) есть разность измеримых множеств:

$$\{x \in E : f(x) \leqslant A\} \setminus \{x \in E : f(x) = A\}.$$

Свойство 3.6. *Множества*

$$\{x \in E : A \leqslant f(x) < B\}, \{x \in E : A < f(x) < B\},$$
$$\{x \in E : A \leqslant f(x) \leqslant B\}$$

также измеримы при любых $A \leqslant B$ *из* $\mathbb{R}$. $\square$

Эти свойства показывают, что в определении 3.1 измеримой функции вместо множества (3.1) можно взять любое из множеств

$$\{x \in E : f(x) \geqslant A\}, \{x \in E : f(x) \leqslant A\}, \{x \in E : f(x) < A\}.$$

Отметим еще два важных для дальнейшего факта.

Свойство 3.7. *Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любом измеримом подмножестве $F \subset E$.* $\square$

В самом деле,

$$\{x \in F : f(x) > A\} = F \bigcap \{x \in E : f(x) > A\}, \tag{3.4}$$

и потому $f(x)$ измерима на F, так как левая часть (3.4) представлена в виде *пересечения* измеримых множеств.

Свойство 3.8. *Если функция $f(x)$ измерима на каждом из конечного или счетного множества множеств E_k из $[a,b]$, то она измерима и на объединении этих множеств.* $\square$

Действительно, каждое из множеств E_k и $\{x \in E_k : f(x) > A\}$ измеримы по условию. Поэтому $\bigcup\limits_k E_k$ измеримо и

$$\{x \in \bigcup_k E_k : f(x) > A\} = \bigcup_k \{x \in E_k : f(x) > A\},$$

т.е. указанное объединение множеств измеримо.

Основываясь на свойствах измеримых функций, заданных на отрезке $[a,b]$, далее дается конструкция построения определенного интеграла, который введен Лебегом и является, как выясняется, обобщением интеграла Римана. Предварительно напоминаются определение и некоторые свойства интеграла Римана.

3.2 Построение интеграла Римана. Класс функций, интегрируемых по Риману

Будем считать, что $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и ограничена, т.е. $|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in [a,b]$. Рассмотрим какое-либо разбиение τ отрезка $[a,b]$ на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Далее составим интегральные суммы Римана

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1},$$

$$m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а также интегральные суммы для функции $f(x)$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k, \quad x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда, очевидно, выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

Если при $d(\tau) := \max\limits_{k} \Delta x_k \longrightarrow 0$ левая и правая части стремятся к одному и тому же пределу, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, т.е. интеграл Римана

$$(R) \int_a^b f(x) dx \tag{3.5}$$

принимает конечное значение. Такой класс функций, заданных на $[a, b]$, обозначают $R([a, b])$.

Известно, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, т.е. функция класса $C([a, b])$, интегрируема по Риману:

$$C([a, b]) \subset R([a, b]).$$

Критерий интегрируемости по Риману выглядит следующим образом: *для интегрируемости по Риману на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы на этом отрезке $f(x)$ была ограниченной и удовлетворяла условию*

$$\lim_{d(\tau) \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0, \quad \omega_k := M_k - m_k. \tag{3.6}$$

Известен также критерий Лебега интегрируемости по Риману, выраженный в терминах меры: *для интегрируемости по Риману* *функции $f(x)$ на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы мера множества ее точек разрыва на $[a, b]$ равнялась нулю.*

Будем говорить, что некоторое утверждение имеет место *почти всюду* на отрезке $[a, b]$ (или на любом $E \subset [a, b]$), если оно выполняется для всех точек $[a, b]$, за исключением, возможно, множества точек, мера которого равна нулю. Из критерия Лебега следует, что *класс функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$, совпадает с классом ограниченных почти всюду непрерывных на $[a, b]$ функций.*

Упражнение 3.2. *Доказать, что монотонная на $[a, b]$ функция интегрируема по Риману.* $\square$

Упражнение 3.3. *Доказать, что функция с ограниченной вариацией, заданная на $[a, b]$, интегрируема по Риману.* $\square$

Имеются, однако, примеры функций, неинтегрируемых по Риману на $[a, b]$.

Упражнение 3.4. *Доказать, что функция Дирихле, определяемая формулой*

$$f_D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases} \tag{3.7}$$

неинтегрируема по Риману на $[a, b]$. $\square$

Указание. Проверить, что множество точек разрыва второго рода функции $f(x)$ есть отрезок $[a, b]$. $\square$

Из последнего упражнения ясно, что конструкция интеграла Римана не удовлетворяет естественному интуитивному желанию считать, что определенный интеграл от $f(x)$ есть площадь подграфика соответствующей кривой на плоскости Oxy. Оказывается, этому требованию удовлетворяет конструкция интеграла Лебега, рассмотрение которой приводится далее.

3.3 Определение интеграла Лебега

Основная идея построения интеграла Лебега от функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, состоит в разбиении подграфика кривой $y = f(x)$ не на вертикальные, а на горизонтальные полоски с последующим суммированием составляющих площадей подграфика.

Переходя к описанию этой конструкции, будем считать, что на измеримом множестве $E \subset [a, b]$ задана ограниченная измеримая функция $f(x)$. Пусть m и M — соответственно нижняя и верхняя грани $f(x)$ на E. Возьмем любые числа A и B, удовлетворяющие условиям $A \leqslant m, \quad M < B$, и разобьём отрезок $[A, B]$ на n частей:

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B.$$

Введем, далее, множества

$$E_k := \{x \in E : y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно,

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Ясно также, что множества E_k измеримы, так как $f(x)$ измерима, причем E_k попарно не имеют общих точек. Поэтому

$$m(E) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Составим теперь две суммы,

$$s := \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k), \quad S := \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k),$$

которые называются *нижней и верхней суммами Лебега*. Пусть

$$\Delta y := \max_k \Delta y_k = \max_k (y_k - y_{k-1}).$$

Теорема 3.1. (о существовании интеграла Лебега). *Суммы Лебега s и S стремятся к общему пределу I, не зависящему от способа разбиения $[A, B]$, если только $\Delta y \longrightarrow 0$.*

Доказательство. Рассмотрим подробно нижнюю сумму Лебега $s = \sum\limits_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$. Покажем, что если к точкам $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ разбиения отрезка $[A, B]$ присоединить новые точки деления, то значение суммы s для нового разбиения не может быть меньше исходного. Пусть, например, добавлена лишь одна точка y'_{k-1} на промежутке (y_{k-1}, y_k), т.е. $y_{k-1} < y'_{k-1} < y_k$. Введем множества

$$E'_k := \{x \in E : y_{k-1} \leqslant f(x) < y'_{k-1}\},$$

$$E_k'' := \{x \in E : y_{k-1}' \leqslant f(x) < y_k\}.$$

Очевидно, что

$$E_k = E_k' \bigcup E_k'', \quad m(E_k) = m(E_k') + m(E_k'').$$

При переходе от суммы s к новой сумме слагаемое $y_{k-1}m(E_k)$ заменяется на новую величину

$$y_{k-1}m(E_k') + y_{k-1}'m(E_k'') \geqslant y_{k-1}(m(E_k') + m(E_k'')) = y_{k-1}m(E_k).$$

Отсюда и следует, что при дополнительном разбиении отрезка $[A, B]$ нижняя сумма Лебега может только увеличиться. Так как s ограничена сверху, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}m(E_k) < B\sum_{k=1}^{n} m(E_k) = Bm(E),$$

то при $\Delta y \longrightarrow 0$ сумма s будет стремиться к некоторому пределу:

$$\lim_{\Delta y \longrightarrow 0} s =: \underline{I}.$$

Аналогично можно доказать, что при размельчении разбиения $[A, B]$ верхняя сумма Лебега S может лишь уменьшаться и ограничена снизу.

Тогда существует

$$\lim_{\Delta y \longrightarrow 0} S =: \overline{I}.$$

Докажем, что на самом деле выполнено условие $\underline{I} = \overline{I}$. Действительно,

$$\begin{aligned} S - s = \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})m(E_k) \leqslant \Delta y \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \\ = \Delta y \cdot m(E) \longrightarrow 0 \quad (\Delta y \longrightarrow 0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

С другой стороны, величина справа должна равняться $\overline{I} - \underline{I}$ (почему?).

Введем обозначение

$$I := \underline{I} = \overline{I}$$

Рис. 1:

и докажем, что этот предел не зависит от способа дробления $[A, B]$. Действительно, пусть для некоторого разбиения τ отрезка $[A, B]$ выполнены неравенства

$$s \leqslant I \leqslant S, \quad S - s < \varepsilon/2, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.9}$$

Пусть для другого разбиения τ' имеем в силу (3.8)

$$S' - s' < \varepsilon/2. \tag{3.10}$$

Составим третье разбиение τ'' из точек деления как первого, так и второго разбиения : $\tau'' = \tau' \cup \tau$. Тогда для сумм s'' и S'' этого разбиения имеем

$$s \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S, \quad s' \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S', \tag{3.11}$$

так как третье разбиение есть результат подразбиения как первого, так и второго разбиений.

Из непосредственного рассмотрения неравенств (3.9) — (3.11) следует, что

$$| s' - S | < \varepsilon, \qquad | s' - s | < \varepsilon \Longrightarrow | s' - I | < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Упражнение 3.5. *Доказать неравенства* (3.12). $\square$

Указание. *Рассмотрите вариант, когда $S' - s'$ является наибольшим отрезком (см. рис. 1).*

Аналогично можно убедиться, что

$$| S' - I | < \varepsilon.$$

Это и означает, что I не зависит от способа разбиения $[A, B]$. Теорема доказана. $\square$

Определение 3.2. *Общий предел I, к которому стремятся суммы Лебега s и S при $\triangle y \to 0$, называется интегралом Лебега от $f(x)$ по множеству $E \subset [a, b]$ и обозначается символом*

$$(L)\int_E f(x)dx. \qquad \square \tag{3.13}$$

Если $E = [a, b]$, то интеграл Лебега обозначается в виде

$$(L)\int_a^b f(x)dx. \tag{3.14}$$

Отметим, что вопрос об условиях интегрируемости функции $f(x)$ здесь не возникает, так как *всякая ограниченная измеримая функция интегрируема по Лебегу.*

3.4 Свойства интеграла Лебега

Приведем основные свойства интеграла Лебега для функций, заданных на множестве $E \subset [a, b]$.

Свойство 3.9. (теорема о среднем). *Если на множестве E функция $f(x)$ измерима и $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$, $\forall x \in E$, то*

$$M_1\, m(E) \leqslant (L)\int_E f(x)dx \leqslant M_2\, m(E). \qquad \square \tag{3.15}$$

Упражнение 3.6. *Доказать свойство* (3.15). $\square$

Свойство 3.10. *Если на множестве $E \subset [a, b]$, представляющем собой объединение конечного или счетного множества измеримых множеств $E_1, \ldots, E_k, \ldots$, попарно не имеющих общих точек, задана ограниченная измеримая функция $f(x)$, то*

$$(L)\int_E f(x)dx = \sum_k (L)\int_{E_k} f(x)dx. \qquad \square$$

Весьма важным является вопрос о связи между интегралом Римана и интегралом Лебега для функции $f(x) \in R([a, b])$.

Свойство 3.11. *Если множество точек разрыва функции $f(x)$ на $[a, b]$ имеет нулевую меру, то $f(x)$ измерима на $[a, b]$.* $\square$

Следствием этого свойства является такой факт.

Свойство 3.12. *Если $f(x) \in R([a,b])$, то $f(x)$ интегрируема по Лебегу, $f(x) \in L([a,b])$, и*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство этого свойства основано на неравенствах

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (L)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

и последующем предельном переходе при $d(\tau) \to 0$. $\square$

Заметим, что если $f(x) \in L([a,b])$, то она может быть неинтегрируемой по Риману. Например, функция Дирихле (см. (3.7)) ограничена, измерима и потому интегрируема по Лебегу, причем

$$(L)\int_a^b f_D(x)dx = 0.$$

Однако эта функция неинтегрируема по Риману (см. упражнение 3.4).

Свойство 3.13. (предельный переход под знаком интеграла Лебега). *Если на измеримом множестве E последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к $f(x)$ и все $f_n(x)$ равномерно ограничены, т.е.*

$$| f_n(x) | < M, \quad \forall n, \forall x \in E,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int_E f_n(x)dx = (L)\int_E f(x)dx. \qquad \square$$

В заключение этого пункта приведем (без доказательства) еще два факта, показывающих связь класса измеримых функций с классом непрерывных функций.

Теорема 3.2. (Д.Ф.Егоров). *Последовательность измеримых функций, сходящаяся на множестве E положительной меры, сходится равномерно на подмножестве $E_\varepsilon \subset E$ с $m(E_\varepsilon) > m(E) - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.* $\square$

Теорема 3.3. (Н.Н.Лузин). *Функция $f(x)$, измеримая на множестве E положительной меры, может быть превращена в непрерывную изменением ее значений на множестве сколь угодно малой меры.* $\square$

3.5 Кратные интегралы Лебега. Теорема Фубини

Аналогично проведенному выше построению меры и интеграла Лебега на множестве $E \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$ строится мера и интеграл Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. При этом за меру произвольного ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ принимается величина

$$m(\Omega) := m_*(\Omega) = m^*(\Omega),$$

где $m^*(\Omega)$ — инфимум объемов тел, составленных из объемлющих множество Ω объединения множества ступенчатых прямоугольных параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$, а $m_*(\Omega)$ — разность между объемом объемлющего множество Ω прямоугольного параллелепипеда Π_m и внешней мерой $m^*(\Pi_m \setminus \Omega)$.

Далее интеграл Лебега по измеримому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ строится по той же схеме, что и в одномерном случае (когда $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$), на основе того же определения измеримых функций, заданных на Ω. В итоге возникает кратный интеграл Лебега

$$(L) \int_\Omega f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \ldots dx_m. \tag{3.16}$$

Для кратных интегралов Лебега, как и для кратных интегралов Римана, имеет место утверждение, связанное с повторным интегрированием и переменой порядка интегрирования. Приведем соответствующий результат в двумерном случае.

Теорема 3.4. (Фубини). *Пусть функция $f(x_1, x_2)$ суммируема (т.е. интегрируема по Лебегу) на прямоугольнике $\Pi_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, 2\} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для почти всех x_1, принадлежащих $[a_1, b_1]$, функция $f(x_1, x_2)$ суммируема на $[a_2, b_2]$, а интеграл*

$$(L) \int_{a_2}^{b_2} f_(x_1, x_2) dx_2$$

как функция от переменной x_1 суммируема на $[a_1, b_1]$ и имеет место равенство

$$(L) \int_{\Pi_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2. \tag{3.17}$$

Справедливо также аналогичное утверждение, если x_1 и x_2 поменять местами (перемена порядка интегрирования). $\square$

Если функция $f(x_1,x_2)$ задана на произвольном измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то нужно заключить Ω в прямоугольник Π_2 и перейти в (3.17) к функции

$$\widetilde{f}(x_1,x_2) := \begin{cases} f(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in \Omega; \\ 0, & (x_1,x_2) \in \Pi_2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте определения внешней и внутренней меры.
2. Какое множество называется измеримым по Лебегу?
3. Являются ли измеримыми объединение, пересечение и разность измеримых множеств?
4. Какая функция называется измеримой?
5. Докажите измеримость множества $\{x \in E : A < f(x)\} \cap \{x \in E : f(x) \leqslant B\}$, где E - измеримое множество.
6. Какая функция называется интегрируемой по Риману?
7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие интегрируемости функции по Риману на отрезке.
8. Верно ли, что ограниченная на отрезке функция интегрируема по Риману.
9. Докажите, что монотонная на отрезке функция интегрируема по Риману.
10. Приведите примеры функций, неинтегрируемых по Риману.
11. Докажите, что при размельчении разбиения отрезка верхняя сумма Лебега не увеличивается и ограничена снизу.
12. Докажите теорему о среднем для функции, измеримой по Лебегу.
13. Пусть ограниченная функция измерима на конечном числе непересекающихся измеримых множеств. Чему равен интеграл Лебега на объединении указанных множеств? А если множеств счетное число?
14. Является ли функция, интегрируемая по Лебегу, интегрируемой по Риману? А наоборот?

4 Конечномерные и бесконечномерные евклидовы пространства

В школьном курсе математики и в курсах математического анализа, аналитической геометрии уже встречалось понятие двумерного и трехмерного пространства векторов. Сейчас будут рассмотрены аналогичные вопросы для случая произвольного конечномерного, а также бесконечномерного евклидовых пространств.

4.1 Конечномерные векторные пространства

Напомним, что для любого натурального m вектором (элементом) m-мерного *евклидова пространства* называется совокупность вещественных либо комплексных чисел $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Числа $x_1, \ldots, x_m$ называются координатами вектора.

Вектор, все координаты которого равны 0, называется *нулевым*.

Для векторов определена операция сложения по закону

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m), \tag{4.1}$$

а также операция умножения на вещественное либо комплексное число λ,

$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m). \tag{4.2}$$

Если координаты вектора принимают лишь вещественные значения, а операция умножения производится лишь на вещественное число, то пространство называют *вещественным* и обозначают $\mathbb{R}^m$, а если все величины принимают комплексные значения, — то *комплексным* и обозначают $\mathbb{C}^m$.

Для операций сложения и умножения выполнены следующие законы, которые справедливы для любых линейных систем элементов:

а) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

б) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

в) $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$ (дистрибутивность умножения относительно

г) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ сложения);

д) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения);

е) $0 \cdot x = 0$ (произведение любого вектора на число нуль есть нуль-вектор);

ж) $1 \cdot x = x$ (произведение любого вектора на число единица равно тому же вектору).

Вычитание векторов, как следует из свойств а)–ж), производится по закону

$$x - y = x + (-1)y = (x_1 - y_1, \ldots, x_m - y_m). \tag{4.3}$$

Множество всех векторов при заданном m называется *m-мерным векторным пространством.* Введем координатные орты-векторы согласно формулам

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_m = (0, 0, \ldots, 0, 1). \tag{4.4}$$

Тогда очевидно, что любой вектор $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ представим в виде суммы

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k, \tag{4.5}$$

где числа x_k суть проекции вектора x на орты e_k.

Для векторов из $\mathbb{R}^m$ (либо $\mathbb{C}^m$) вводится понятие нормы (длины) вектора и скалярного произведения векторов. Нормой вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$ называется величина

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2}, \tag{4.6}$$

а скалярное произведение векторов x и y определяется по закону

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{m} x_k y_k \ (\text{в } \mathbb{R}^m), \quad (x, y) := \sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y_k} \ (\text{в } \mathbb{C}^m), \tag{4.7}$$

где $\overline{y_k}$ — комплексное сопряжение числа y_k.

Упражнение 4.1. *Доказать следующие свойства нормы:*

1) $\|x\| \geqslant 0$ *для любого* $x \in \mathbb{R}^m$ *и* $||x|| = 0$ *только при* $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

Последнее неравенство называют, по аналогии с трехмерным либо двумерным вещественными пространствами, *неравенством треугольника.*

Замечание 4.1. *Доказательство неравенства треугольника основано на неравенстве Коши (в вещественном случае)*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} \mid x_k \mid^2\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \mid y_k \mid^2\right). \quad \square \tag{4.8}$$

Позже оно будет установлено в более общей ситуации.

Упражнение 4.2. *Проверить, что имеет место свойство*

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z). \qquad \square$$

Определение 4.1. *Два вектора x и y из $\mathbb{R}^m$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.* $\square$

Из этого определения сразу следует, что орты e_k из (4.4) удовлетворяют условиям

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{4.9}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

т.е. являются попарно ортогональными.

Отметим еще, что

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{4.10}$$

Заметим также, что в $\mathbb{C}^m$ выполнено свойство

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^m. \tag{4.11}$$

4.2 Бесконечномерное евклидово пространство

Начиная с этого момента объектом, изучения будут пространства более сложной структуры, чем $\mathbb{R}^m$. Такие пространства состоят из объектов (элементов, векторов) с бесконечным множеством координат либо из функций, заданных на части пространства $\mathbb{R}^m$ или на всем $\mathbb{R}^m$.

Итак, будем рассматривать далее последовательности вида

$$x := (x_1, \ldots, x_m, \ldots). \tag{4.12}$$

Эти объекты будем называть векторами (элементами) бесконечномерного евклидова пространства, а числа x_k — их координатами, $k = 1, 2, \ldots$.

Определим на этой совокупности элементов вида (4.12) операции сложения и умножения на числа по тем же законам а) – ж), которые были выписаны выше для пространства $\mathbb{R}^m$. Координатными ортами назовем элементы

$$
\begin{aligned}
e_1 = (1, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, \ldots), \quad \ldots, \\
e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots), \quad \ldots .
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Далее будем изучать лишь множество элементов вида (4.12), наиболее близкое к векторам из $\mathbb{R}^m$. Именно, обозначим через l^2 совокупность тех элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$, для которых

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty. \tag{4.14}
$$

Докажем некоторые простые свойства элементов из l^2.

Упражнение 4.3. *Убедиться, что для любых двух элементов x и y из l^2 их сумма $x + y$ также принадлежит l^2 и имеет место неравенство*

$$
\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}. \qquad \square \tag{4.15}
$$

Указание. Воспользоваться неравенством треугольника в $\mathbb{R}^m$ и сделать предельный переход при $m \to \infty$.

Определение 4.2. *Для элементов $x \in l^2$ определим норму по формуле*

$$
\|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}, \tag{4.16}
$$

а скалярное произведение элементов x и y — согласно закону

$$
(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \qquad \square \tag{4.17}
$$

Нетрудно убедиться, что для нормы (4.16) выполнены свойства нормы из упражнения 4.1, а норма и скалярное произведение снова связаны формулой (4.10).

Как и в пространстве $\mathbb{R}^m$, в пространстве l^2 имеется ортонормированная система элементов, которая является базисом этого пространства. Это система элементов (4.13). Очевидно, любой элемент $x \in l^2$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \qquad x_k = (x, e_k), \tag{4.18}$$

и выполнено уравнение замкнутости (равенство Парсеваля):

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2. \tag{4.19}$$

Эти соотношения позже будут установлены в общем случае.

5 Абстрактное гильбертово пространство

Цель этого параграфа — познакомиться с основными понятиями абстрактных бесконечномерных пространств элементов, в которых введено понятие скалярного произведения и нормы. Теорию этих пространств построил выдающийся математик Д. Гильберт. Предварительно рассмотрим соответствующее пространство функций, квадратично суммируемых по отрезку вещественной оси.

5.1 Основные определения и свойства пространства $L_2([a,b])$

Рассмотрим на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ совокупность суммируемых с квадратом по Лебегу комплекснозначных измеримых функций $x(t)$, т.е. таких, для которых конечен интеграл

$$\|x(t)\|^2_{L_2([a,b])} := (L)\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty. \tag{5.1}$$

Множество функций, удовлетворяющих условию (5.1), обозначим через $L_2([a,b])$. Заметим сразу же, что $L_2([a,b])$ является обобщением на непрерывный случай множества элементов из пространства l^2, при этом выражение для суммы ряда при вычислении нормы в l^2 (см. (4.14), (4.16)) заменяется интегрированием по отрезку $[a,b]$.

Отметим еще одно новое обстоятельство. Очевидно, что если какие-либо две функции $x(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ из $L_2([a,b])$ отличаются друг от друга на множестве меры нуль, то для них интегралы (5.1) совпадают. Такие функции назовем *эквивалентными*, и в качестве элементов пространства $L_2([a,b])$ будем далее рассматривать *классы эквивалентных функций.*

Проверим, что при естественном определении алгебраических операций множество $L_2([a,b])$ — линейная система, т.е. для него выполнены свойства а) – ж) п. 4.1 и другие, следующие из них. Очевидно, что если $x(t) \in L_2([a,b])$, то при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $\lambda x(t) \in L_2([a,b])$. Менее очевидно, что если $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат $L_2([a,b])$, то их сумма также принадлежит $L_2([a,b])$.

Докажем этот факт. Заметим сначала, что $x(t)+y(t)$ — измеримая функция. Кроме того, очевидно, что

$$2\,|x(t)|\,|y(t)| \leqslant |x(t)|^2 + |y(t)|^2.$$

Поэтому произведение $x(t)y(t)$, во-первых, измеримая функция, во-вторых, — суммируема на $[a,b]$. Так как

$$|x(t)+y(t)|^2 \leqslant |x(t)|^2 + 2|x(t)||y(t)| + |y(t)|^2 \leqslant 2\left(|x(t)|^2 + |y(t)|^2\right),$$

то

$$x(t)+y(t) \in L_2([a,b]).$$

Введем в $L_2([a,b])$ скалярное произведение для любых функций $x(t)$ и $y(t)$ следующим образом:

$$(x(t),y(t))_{L_2([a,b])} := \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что

$$\|x(t)\|_{L_2([a,b])} = \left((x(t),x(t))_{L_2([a,b])}\right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

Упражнение 5.1. *Доказать, что имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt\right|^2 \leqslant \int_a^b |x(t)|^2dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2dt,$$

откуда следует неравенство Коши-Буняковского

$$\left|(x(t),y(t))_{L_2([a,b])}\right| \leqslant \|x(t)\|_{L_2([a,b])} \cdot \|y(t)\|_{L_2([a,b])}, \tag{5.4}$$

а также неравенство треугольника

$$\|x(t)+y(t)\|_{L_2([a,b])} \leqslant \|x(t)\|_{L_2([a,b])} + \|y(t)\|_{L_2([a,b])}. \qquad \square$$

Указание. Используя неравенство

$$\left|\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt\right|^2 \leqslant \int_a^b |x(t)|\cdot|y(t)|dt,$$

ввести вспомогательную функцию

$$\varphi(\lambda) := \int_a^b (\lambda|x(t)| + |y(t)|)^2dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и воспользоваться тем, что $\varphi(\lambda) \geqslant 0$.

Как и ранее, будем говорить, что элементы $x(t)$ и $y(t)$ из $L_2([a,b])$ *ортогональны*, если

$$(x(t), y(t))_{L_2([a,b])} = 0.$$

Такое определение ортогональности функций уже встречалось в курсе математического анализа. Если, в частности, $[a,b] = [-\pi, \pi]$, то ортогональной и нормированной (т.е. ортонормированной) системой элементов (функций) из $L_2([-\pi,\pi])$ является система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ \dots \ , \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt), \dots . \tag{5.5}$$

Другим примером ортонормированной системы на отрезке $[-1,1]$ является система полиномов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, т.е. система

$$\begin{gathered} P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \dots, \\ P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k], \dots \end{gathered} \tag{5.6}$$

Как известно из курса математического анализа, система (5.5) является не только ортонормированной, но и полной в $L_2([-\pi,\pi])$. Оказывается, система полиномов Лежандра (5.6) также является полной в $L_2([-1,1])$.

Упражнение 5.2. *Убедиться, что система полиномов Лежандра является ортонормированной в* $L_2([-1,1])$. *Проверить свойство ортогональности для нескольких первых функций* (5.6) $\square$

Сопоставим элементу $x(t) \in L_2([-\pi,\pi])$ его ряд Фурье по системе элементов (5.5), т.е.

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(kt)dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin(kt)dt. \tag{5.7}$$

Упражнение 5.3. *Доказать, что для* $x(t)$ *и коэффициентов Фурье* (5.7) *выполнено условие замкнутости*

$$\|x(t)\|^2_{L_2([-\pi,\pi])} = 2\pi|a_0|^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right). \qquad \square$$

Аналогичное уравнение замкнутости можно установить и для элемента $x(t) \in L_2([-1,1])$ при его разложении в ряд по полиномам Лежандра. Общие результаты по этим вопросам будут рассмотрены ниже.

5.2 Определение абстрактного гильбертова пространства

Рассмотрение предыдущих пространств $\mathbb{R}^m, l^2, L_2([a,b])$ показало, что эти линейные системы обладают одним важным свойством: в них помимо операций сложения элементов и умножения их на скаляр определена также операция скалярного умножения элементов, а норма (длина) элемента равна квадратному корню из скалярного произведения элемента самого на себя.

Оказывается, что эту ситуацию можно рассматривать в общем виде, и возникает важный класс пространств, имеющих самые широкие приложения. Эти пространства называются (абстрактными) *гильбертовыми пространствами.*

Определение 5.1. *Пусть* H *— вещественная линейная система и пусть любым двум ее элементам* x *и* y *сопоставлено (вещественное) число* (x,y)*, причем выполнены следующие свойства:*
а) $(x,y) = (y,x)$;
б) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$;
в) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$;
г) $(x,x) \geqslant 0$ *для любого* $x \in H$*, причем* $(x,x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$*.*

При выполнении условий а) – г) число (x,y) *называется скалярным произведением, а* x *и* y *— его сомножителями.* $\square$

Если один из сомножителей равен нулю, то скалярное произведение равно нулю. Однако обратное утверждение неверно уже в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, так как существуют ненулевые взаимно ортогональные элементы.

Определим норму элемента из H по закону

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}, \quad \forall x \in H, \tag{5.8}$$

и проверим, что для этой нормы выполнены те же свойства, которые уже ранее были отмечены в упражнении 4.1 для элементов из $\mathbb{R}^m$. В самом деле, из (5.8) и свойства г) скалярного произведения следует, что $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Далее

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Установим теперь неравенство Коши-Буняковского

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \qquad \forall x, y \in H. \tag{5.9}$$

Для этого рассмотрим квадратный трехчлен

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) := (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x,x) + 2\lambda (x,y) + (y,y) = \\ = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda (x,y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Так как $\varphi(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2 \geqslant 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то его дискриминант неположителен, откуда и следует (5.9).

Теперь легко доказать неравенство треугольника для нормы (5.8):

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \varphi(1) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Отсюда и получаем, что

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in H.$$

Определение 5.2. *Будем говорить, что норма в линейной системе элементов порождена скалярным произведением, если в этой системе задано скалярное произведение любых двух элементов, а норма выражается по формуле* (5.8). □

Рассмотрим произвольную последовательность элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$.

Определение 5.3. *Последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если* $\|x_k - x_m\| \to 0 \quad (k, m \to \infty)$. □

Определение 5.4. *Пространство H называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет предел $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in H$, т.е.*

$$\|x - x_k\| \to 0 \quad (k \to \infty). \qquad \square$$

Упражнение 5.4. *Доказать, что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к пределу x, то она фундаментальна.* $\square$

Упражнение 5.5. *Доказать, что всякая фундаментальная последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена по норме, т.е. $\exists M > 0$ такое, что*

$$\|x_k\| \leqslant M, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Определение 5.5. *Гильбертовым пространством (вещественным) называется полное линейное (вещественное) пространство, в котором норма порождена скалярным произведением.*

Далее абстрактное гильбертово пространство будем обозначать буквой $\mathcal{H}$ (в честь создателя теории этих пространств, выдающегося математика Д. Гильберта, 1862-1943).

Конкретными примерами гильбертовых пространств являются уже рассмотренные выше пространства $\mathbb{R}^m, l^2, L_2([a,b])$.

5.3 Ортогональность, проекция элемента на подпространство, ортогональные разложения гильбертова пространства

Введем понятие ортогональности элементов, которое уже встречалось ранее на примерах.

Определение 5.6. *Два элемента $x, y \in \mathcal{H}$ называются ортогональными, $x \perp y$, если*

$$(x, y) = 0. \qquad \square$$

Упражнение 5.6. *Доказать следующие свойства элементов из $\mathcal{H}$:*

1) *Нулевой элемент $0 \in \mathcal{H}$ ортогонален любому $x \in \mathcal{H}$;*
2) *$x \perp x$ только в том случае, когда $x = 0$;*
3) *если $x \perp y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_n$, то при любых λ_k*

$$x \perp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k. \qquad \square$$

Свойство 3) здесь означает, что если x ортогонален каждому элементу множества $\{y_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}$, то он ортогонален и любому элементу *линейной оболочки*

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\right\}$$

этого множества.

Упражнение 5.7. *Доказать, что скалярное произведение непрерывно относительно своих сомножителей, т.е. если $x_k \to x, y_k \to y$ при $k \to \infty$, то*

$$(x_k, y_k) \to (x, y) \qquad (k \to \infty). \qquad \square$$

Упражнение 5.8. *Доказать, что если $x \perp y_k, k = 1, 2, \ldots,$ и $y_k \to y \quad (k \to \infty)$, то $x \perp y$.*

Указание. *Воспользоваться свойством непрерывности скалярного произведения (упражнение 5.7).* $\square$

Определение 5.7. *Множество $E \subset \mathcal{H}$ называется всюду плотным в $\mathcal{H}$, если $\forall x \in \mathcal{H}$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x_\varepsilon \in E$, что $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$.* $\square$

Простейшим примером всюду плотного множества является множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел в множестве $\mathbb{R}$.

Упражнение 5.9. *Доказать, что если $x \in \mathcal{H}$ ортогонален каждому элементу y из всюду плотного в $\mathcal{H}$ множества E, то $x = 0$.* $\square$

Определение 5.8. *Замыканием $\overline{E}$ множества $E \subset \mathcal{H}$ называется множество всех элементов из $\mathcal{H}$, представимых в виде предела какой-либо последовательности элементов из E.* $\square$

В частности, само E входит в $\overline{E}$, так как для любого $x \in E$ в качестве $x_k \to x$ можно взять $x_k = x$ (стационарная последовательность).

Определение 5.9. *Подмножество $E \subset \mathcal{H}$ называется замкнутым, если $\overline{E} = E$.* $\square$

Определение 5.10. *Элементы конечной или бесконечной системы $\{x_k\} \subset \mathcal{H}$ называются линейно независимыми, если ни один из* *них не является линейной комбинацией конечного числа остальных элементов системы. Это означает, что из условия*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0,$$

где λ_k — произвольные числа из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), следует, что все $\lambda_k = 0, k = 1, \ldots, n$. $\square$

Упражнение 5.10. *Привести примеры линейно независимых систем элементов в $\mathbb{R}^m, l^2, L_2([a,b])$.* $\square$

Определение 5.11. *Подпространством пространства $\mathcal{H}$ называется всякое его замкнутое линейное подмножество.* $\square$

Если элементы $\{x_k\} \subset \mathcal{H}$ являются линейно независимыми, то замыкание линейной оболочки элементов этой системы образует подпространство в $\mathcal{H}$, порожденное этими элементами.

Упражнение 5.11. *Доказать,что если система $\{x_k\} \subset \mathcal{H}$ состоит из взаимно ортогональных элементов, то они линейно независимы.* $\square$

Определение 5.12. *Элемент $x \in \mathcal{H}$ называется ортогональным подпространству $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}, x \perp \mathcal{H}_1$, если $(x,y) = 0$ для любого $y \in \mathcal{H}_1$. Два подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называются ортогональными, $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$, если*

$$(x,y) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{H}_1, \quad \forall y \in \mathcal{H}_2. \qquad \square$$

Два ортогональных подпространства имеют лишь один общий элемент — нулевой (докажите это свойство).

Рассмотрим теперь весьма важный (и хорошо известный в $\mathbb{R}^m$) вопрос о проекции любого элемента на подпространство гильбертова пространства. Предварительно установим следующее вспомогательное утверждение.

Упражнение 5.12. *Доказать, что для любых элементов x,y из $\mathcal{H}$ справедливо тождество параллелограмма:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \qquad \square \tag{5.10}$$

Очевидно, это тождество является обобщением элементарной теоремы из геометрии о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Основываясь на тождестве (5.10), установим следующий факт.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Тогда любой элемент $x \in \mathcal{H}$ представим единственным образом в виде*

$$x = y + z, \qquad y \in \mathcal{L}, \quad z \perp \mathcal{L}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Если $x \in \mathcal{L}$, то можно положить $y = x, z = 0$. Если же $x \notin \mathcal{L}$, то $\|x - y\| > 0$ при любом $y \in \mathcal{L}$, а тогда и

$$d := \inf_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\| > 0. \tag{5.12}$$

Из определения точной нижней грани, т.е. инфимума, следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $y_n \in \mathcal{L}$ такой, что

$$\|x - y_n\| < d_n := d + \frac{1}{n}\ . \tag{5.13}$$

Выбирая любые n и m, а также элементы $x - y_n$ и $x - y_m$ и пользуясь тождеством (5.10) для этих элементов, будем иметь

$$\begin{gathered} \|2x - (y_n + y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = \\ = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) < 2(d_n^2 + d_m^2). \end{gathered} \tag{5.14}$$

Так как $\mathcal{L}$ — подпространство, то $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \mathcal{L}$ и

$$\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\| \geqslant d.$$

Тогда из (5.13), (5.14) имеем

$$\|y_n - y_m\|^2 < 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2 \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty),$$

т.е. последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$ является фундаментальной.

Так как $\mathcal{H}$ — полное пространство, то существует

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n,$$

а так как $\mathcal{L}$ замкнуто, то $y \in \mathcal{L}$. При этом в силу (5.13)

$$\|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| \leqslant d.$$

Здесь, однако, знак „$<$" невозможен (почему?), и тогда

$$\|x - y\| = d. \tag{5.15}$$

Отсюда следует, что инфимум (5.12) достигается на элементе $y \in \mathcal{L}$.

Положим $z := x - y$ и докажем что $z \perp \mathcal{L}$, т.е. z ортогонален любому элементу $u \in \mathcal{L}$. В самом деле, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ элемент $y + \lambda u \in \mathcal{L}$, и тогда, учитывая, что $\|z\| = \|x - y\| = d$, имеем

$$\|x - (y + \lambda u)\|^2 = \|z - \lambda u\|^2 = d^2 - 2\lambda(z, u) + \lambda^2 \|u\|^2 \geqslant d^2.$$

Отсюда следует, что при $\lambda > 0$

$$(z, u) \leqslant \frac{\lambda}{2} \|u\|^2.$$

Так как λ может быть как угодно малым, то $(z, u) \leqslant 0$. Заменяя в проведенных рассуждениях $u \in \mathcal{L}$ на $-u \in \mathcal{L}$, будем иметь неравенство $(z, -u) \leqslant 0$, т.е. $(z, u) \geqslant 0$. Окончательно получаем, что $(z, u) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{L}$, т.е. $z \perp \mathcal{L}$.

Докажем теперь единственность представления (5.11). Если имеется еще одно равенство $x = \tilde{y} + \tilde{z}, \quad \tilde{y} \in \mathcal{L}, \ \tilde{z} \perp \mathcal{L}$, то из соотношения $x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z}$ следует, что $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z = 0$, так как $y - \tilde{y} \in \mathcal{L}$, а $\tilde{z} - z \perp \mathcal{L}$. $\square$

Определение 5.13. *Если для любого элемента $x \in \mathcal{H}$ имеет место его представление в виде* (5.11)*, т.е. $x = y + z, \quad y \in \mathcal{L}, \quad z \perp \mathcal{L}$, то говорят, что y есть проекция элемента x на подпространство $\mathcal{L}$ и обозначают $y = Pr_{\mathcal{L}} x$.* $\square$

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что $Pr_{\mathcal{L}} x$ есть элемент наилучшего приближения в подпространстве $\mathcal{L}$, т.е. $\|x - y\| = d = \inf\limits_{\tilde{y} \in \mathcal{L}} \|x - \tilde{y}\|$. Как установлено, этот элемент находится по элементу x единственным образом.

Упражнение 5.13. *Пусть $\mathcal{L}$ — одномерное подпространство, порожденное элементом $e \in \mathcal{H}, \|e\| = 1$. Доказать, что*

$$Pr_{\mathcal{L}} x = (x, e) e. \qquad \square$$

Определение 5.14. *Ортогональным дополнением к подпространству $\mathcal{L}$ в $\mathcal{H}$ называется множеством $\mathcal{M}$ всех элементов из $\mathcal{H}$, ортогональных к $\mathcal{L}$:*

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{H} : \quad x \perp \mathcal{L}\}. \qquad \square$$

Теорема 5.2. *Если $\mathcal{M}$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ в пространстве $\mathcal{H}$, то $\mathcal{M}$ — подпространство пространства $\mathcal{H}$ и имеет место ортогональное разложение*

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}, \tag{5.16}$$

т.е. для любого $x \in \mathcal{H}$ справедливо представление

$$x = y + z, \quad y \in \mathcal{L}, \quad z \in \mathcal{M}.$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{M}$ следует, что оно является линейной системой в $\mathcal{H}$ (докажите этот факт!). Остается лишь проверить, что $\mathcal{M}$ замкнуто. Пусть $z_k \in \mathcal{M}$ и $z_k \to z$. Так как $z_k \perp y, \quad \forall y \in \mathcal{L}$, то

$$(z, y) = (\lim_{k\to\infty} z_k, y) = \lim_{k\to\infty} (z_k, y) = 0,$$

т.е. $z \in \mathcal{M}$. Значит $\mathcal{M}$ — замкнутое линейное множество, т.е. подпространство в $\mathcal{H}$.

Из теоремы 5.1 следует, что любой $x \in \mathcal{H}$ единственным образом представим в виде (5.11), где $z \perp \mathcal{L}$, т.е. $z \in \mathcal{M}$. Значит, имеет место ортогональное разложение (5.16). $\square$

Рассмотрим теперь более общие, чем (5.16), ортогональные разложения пространства $\mathcal{H}$.

Если в $\mathcal{H}$ имеется конечное или счетное множество $\{\mathcal{L}_k\}$ попарно ортогональных подпространств $\mathcal{L}_k$, то аналогично теоремам 5.1 и 5.2 можно установить, что любой элемент $x \in \mathcal{H}$ может быть при любом $m \geqslant 1$ представлен в виде

$$x = \sum_{k=1}^{m} y_k + z, \quad y_k \in \mathcal{L}_k, \quad z \perp \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{L}_k, \tag{5.17}$$

причем y_k и z находятся по элементу $x \in \mathcal{H}$ единственным образом и

$$y_k = Pr_{\mathcal{L}_k} x, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Так как все слагаемые в (5.17) взаимно ортогональны, то по теореме Пифагора получаем

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|Pr_{\mathcal{L}_k} x\|^2 + \|z\|^2,$$

а отсюда неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \|Pr_{\mathcal{L}_k} x\|^2 \leqslant \|x\|^2 < \infty, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Переходя, если необходимо, к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство Бесселя (для подпространств):

$$\sum_{k} \|Pr_{\mathcal{L}_k} x\|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{5.18}$$

где суммирование распространяется на все номера k подпространств $\mathcal{L}_k$. Отсюда следует, что сумма $\sum\limits_{k} Pr_{\mathcal{L}_k} x$ имеет смысл для любого $x \in \mathcal{H}$ и в том случае, когда слагаемых бесконечное множество.

Определение 5.15. *Система взаимно ортогональных подпространств $\mathcal{L}_k \in \mathcal{H}$ называется полной, если в $\mathcal{H}$ не существует элемента, отличного от нуля, ортогонального всем $\mathcal{L}_k$.* □

Теорема 5.3. *Для того, чтобы ортогональные подпространства $\mathcal{L}_k$ образовывали ортогональное разложение пространства $\mathcal{H}$, т.е. чтобы*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k} \mathcal{L}_k, \tag{5.19}$$

необходимо и достаточно, чтобы эта система подпространств $\mathcal{L}_k$ была полной.

Доказательство.

а) *Необходимость.* Пусть подпространства $\mathcal{L}_k$ образуют ортогональное разложение (5.19) пространства $\mathcal{H}$. Тогда, с одной стороны, имеем представление $x = \sum\limits_{k} \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_k} x$, а с другой — согласно доказанному выше (см. (5.17) и затем переход к сумме по всем k)

$$x = \sum_{k} \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_k} x + z, \quad z \perp \bigoplus_{k} \mathcal{L}_k.$$

Отсюда следует, что $z = 0$, т.е. элемент z, ортогональный $\bigoplus\limits_{k} \mathcal{L}_k$, является нулевым. Значит система ортогональных подпространств $\{\mathcal{L}_k\}$ полна в $\mathcal{H}$.

б) *Достаточность*. Пусть система подпространств $\{\mathcal{L}_k\}$ полна. Для любого $x \in \mathcal{H}$ положим $y = \sum\limits_k \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_k} x$ и возьмем $z := x - y$. При каждом фиксированном k имеем

$$x = \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_k} x + z_k, \quad y = \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_k} x + z'_k, \quad z_k, z'_k \perp \mathcal{L}_k.$$

Отсюда

$$z = x - y = z_k - z'_k \perp \mathcal{L}_k, \quad \forall k,$$

и в силу полноты системы $\{\mathcal{L}_k\}$ получим, что $z = 0$. Значит,

$$y = x = \sum_k \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_k} x, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

т.е. имеет место ортогональное разложение (5.19). □

5.4 Ортогональные системы элементов и базисы

Рассмотрим частный случай проведенного выше разложения бесконечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на ортогональные подпространства. Именно, будем считать, что каждое из подпространств $\mathcal{L}_k$ одномерно и порождено нормированным элементом (т.е. элементом, имеющим норму, равную единице) φ_k.

Определение 5.16. *Конечная или счетная система элементов $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{H}$ называется ортогональной, если*

$$(\varphi_k, \varphi_m) = 0, \quad k \neq m.$$

Если, кроме того, элементы φ_k нормированы и потому

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km},$$

то эта система называется ортонормированной.

Ортогональная система элементов называется полной, если в $\mathcal{H}$ не существует элемента, отличного от нулевого и ортогонального всем элементам системы. □

Из теоремы 5.3 получаем следующий важный результат.

Теорема 5.4. *Для того чтобы любой элемент $x \in \mathcal{H}$ был представлен своим разложением Фурье по элементам ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$, т.е. в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \quad , \quad \alpha_k = (x, \varphi_k), \tag{5.20}$$

необходимо и достаточно, чтобы эта система была полной.□

Числа $\alpha_k = (x, \varphi_k)$ называют *коэффициентами Фурье*; они, очевидно, находятся однозначно по $x \in \mathcal{H}$.

Определение 5.17. *Полная ортонормированная система элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется ортонормированным базисом этого пространства.* □

Оказывается, что счетный ортонормированный базис может существовать не во всех гильбертовых пространствах, а лишь в так называемых *сепарабельных* пространствах.

Для ортонормированной системы элементов $\varphi_k \in \mathcal{H}$ выполнено *неравенство Бесселя*, следующее из (5.18):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k), \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{5.21}$$

Если в (5.21) стоит знак равенства, т.е. если выполнено *уравнение замкнутости*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k), \quad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{5.22}$$

то $x \in \mathcal{H}$ представим своим рядом Фурье (5.20).

Упражнение 5.14. *Доказать, что если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис (вещественного, сепарабельного) гильбертова пространства $\mathcal{H}$, то*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k), \quad \beta_k = (y, \varphi_k), \quad x, y \in \mathcal{H}. \qquad \square$$

Если в $\mathcal{H}$ задана конечная или счетная система *линейно независимых* элементов g_k, то по элементам этой системы можно построить ортонормированную систему, осуществляя так называемый *процесс ортогонализации Шмидта* следующим образом.

Сначала строим ортогональную систему элементов $\{\psi_k\}$, полагая последовательно

$$\psi_1 = g_1, \quad \psi_2 = g_2 - \lambda_{21}\psi_1, \quad \ldots, \quad \psi_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{nk}\psi_k \tag{5.23}$$

Коэффициенты λ_{nk} определяются из условий ортогонализации: $(\psi_k, \psi_n) = 0$ при $k \neq n$.

Упражнение 5.15. *Убедиться, что при* $k < n$

$$(\psi_k, \psi_n) = (g_k, \psi_k) - \lambda_{nk}\|\psi_k\|^2. \qquad \square \tag{5.24}$$

Из построения видно, что каждый элемент ψ_k является линейной комбинацией элементов $g_1, \ldots, g_k$, причем коэффициент при g_k (см. (5.23)) равен 1. Поэтому $\psi_k \neq 0$ (g_k линейно независимы!), и из условия $(\psi_k, \psi_n) = 0$ при $k \neq n$, а также из (5.24) получаем

$$\lambda_{nk} = (g_k, \psi_k)/\|\psi_k\|^2.$$

Наконец, полагая далее

$$\varphi_k := \psi_k/\|\psi_k\|,$$

получаем искомую ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$. Можно проследить, что линейные оболочки, порожденные системами $\{g_k\}$ и $\{\psi_k\}$, совпадают.

5.5 Задача о наилучшем приближении. Изоморфизм всех сепарабельных гильбертовых пространств

Использование ортонормированных систем позволяет легко вычислить проекцию элемента $x \in \mathcal{H}$ на любое конечномерное подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$; существование такой проекции было установлено в теореме 5.1.

Пусть $\mathcal{L}$ имеет размерность n и $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис этого подпространства. Тогда любой $y \in \mathcal{L}$ представим в виде

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k, \quad \lambda_k = (y, \varphi_k).$$

Теорема 5.5. *Для любого* $x \in \mathcal{H}$ *в* $\mathcal{L}$ *существует единственный элемент наилучшего приближения*

$$y = Pr_{\mathcal{L}} x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k), \tag{5.25}$$

$$z = x - y \perp \mathcal{L}, \quad \|x - y\| = \|z\| = \inf_{\tilde{y} \in \mathcal{L}} \|x - \tilde{y}\|.$$

Доказательство. Существование и единственность такого элемента y установлено в теореме 5.1, см. также (5.15).

Пусть $\tilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$ — произвольный элемент из $\mathcal{L}$. Тогда

$$\|\tilde{y} - x\|^2 = \|\tilde{y}\|^2 - 2(\tilde{y}, x) + \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k + \|x\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \alpha_k)^2 + \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \geqslant \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k).$$

Нетрудно видеть, что минимальное значение этого выражения достигается при $\lambda_k = \alpha_k$, т.е. на элементе вида (5.25). $\square$

Дадим теперь определение сепарабельности гильбертова пространства. Именно в таких пространствах, как упоминалось выше, существуют ортогональные базисы.

Определение 5.18. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется сепарабельным, если в нем существует счетное плотное множество элементов.* $\square$

Примером сепарабельных гильбертовых пространств являются пространства $\mathbb{R}^m, l^2, L_2([a,b])$ и многие другие. Труднее привести пример несепарабельного пространства.

В $\mathbb{R}^m$ счетным плотным множеством являются элементы $x = (x_1, \ldots, x_m)$ с координатами x_k, являющимися рациональными числами (почему?).

Упражнение 5.16. *Доказать, по аналогии с $\mathbb{R}^m$, что пространство l^2 сепарабельно.* $\square$

Указание. Использовать тот факт, что множество

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k, \quad D_k = \{x \in l^2 : x = (r_1, \ldots, r_k, 0, 0, \ldots)\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где r_k — рациональные числа, является счетным и плотным в l^2.

Теорема 5.6. *В сепарабельном гильбертовом пространстве (нетривиальном, т.е. содержащем ненулевые элементы) существует конечный или счетный ортонормированный базис.*

Доказательство. Так как в $\mathcal{H}$ существует счетное плотное множество элементов, то элементы этого множества можно перенумеровать. Выделим из них лишь линейно независимые, а затем подвергнем процессу ортогонализации Шмидта. В итоге получим конечную или счетную ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$.

Докажем, что эта система полна в $\mathcal{H}$. Пусть некоторый элемент $x \in \mathcal{H}$ ортогонален всем элементам этой системы, т.е. $(x, \varphi_k) = 0, k = 1, 2, \ldots$. Так как элементы линейно независимой подсистемы, выделенной вначале из исходной, являются линейными комбинациями элементов φ_k (процесс ортогонализации Шмидта), то x ортогонален всем элементам этой подсистемы, а поэтому и элементам исходного счетного плотного множества (почему?). Отсюда легко установить (см. упражнение 5.9), что $x = 0$.

В самом деле, пусть $\varepsilon_j \to 0$ $(j \to \infty)$, $\varepsilon_j > 0$, $a\{g_k\} \in \mathcal{H}$ - исходное счетное плотное множество элементов. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ найдется элемент g_{k_j}, такой, что $\|x - g_{k_j}\| < \varepsilon_j$ и $(x, g_{k_j}) = 0$. Тогда $x = \lim\limits_{j\to\infty} g_{k_j}$ и

$$(x, x) = (x, \lim_{j\to\infty} g_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} (x, g_{k_j}) = 0,$$

т.е. $x = 0$. $\square$

Введем теперь понятие алгебраического изоморфизма гильбертовых пространств.

Определение 5.19. *Два гильбертовых пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются алгебраически изоморфными и изометричными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что:*

1) алгебраическим операциям над элементами из $\mathcal{H}_1$ соответствуют те же операции над их образами из $\mathcal{H}_2$;

2) нормы соответствующих друг другу элементов из $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ равны. $\square$

Теорема 5.7. *Всякое бесконечномерное сепарабельное пространство $\mathcal{H}$ алгебраически изоморфно и изометрично пространству l^2.*

Доказательство. В каждом бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по теореме 5.6 существует счетный ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому любой элемент $x \in \mathcal{H}$ разлагается в ряд Фурье:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k).$$

Сопоставим каждому $x \in \mathcal{H}$ совокупность $\alpha := \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ его коэффициентов Фурье. По уравнению замкнутости имеем

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|\alpha\|_{l^2}^2 < \infty, \tag{5.26}$$

т.е. $\alpha \in l^2$.

Нетрудно видеть, что алгебраическим операциям элементов из $\mathcal{H}$ при таком соответствии отвечают те же операции их образов в l^2. Кроме того, из (5.26) следует, что указанное соответствие изометрично. $\square$

Упражнение 5.17. *Доказать, что при изоморфизме между $\mathcal{H}$ и l^2 скалярное произведение любых двух элементов из $\mathcal{H}$ и их образов из l^2 совпадают, т.е.*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = (\alpha, \beta)_{l^2}, \quad \alpha_k = (x, \varphi_k), \quad \beta_k = (y, \varphi_k). \square \tag{5.27}$$

Замечание 5.1. *В комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением (x, y), когда $(y, x) = \overline{(x, y)}$, теорема 5.7 также верна. При этом коэффициенты Фурье $\alpha_k = (x, \varphi_k)$ — комплексные числа, а вместо* (5.27) *имеет место равенство*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} = (\alpha, \beta)_{l^2}. \qquad \square$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какие операции определены для элементов m-мерного евклидова пространства?

2. Каким законам удовлетворяют операции над векторами в m-мерном евклидовом пространстве?

3. Что называется m-мерным векторным пространством? Какой вид имеет разложение любого элемента в m-мерном векторном пространстве? Как вычисляется норма вектора?

4. Докажите свойства нормы вектора в m-мерном евклидовом пространстве.

5. Охарактеризуйте пространство $L_2([a,b])$:

   (a) какие элементы принадлежат пространству $L_2([a,b])$;

   (b) как вычислить скалярное произведение двух элементов, принадлежащих $L_2([a,b])$;

   (c) как вычисляется норма элемента в пространстве $L_2([a,b])$.

6. Докажите неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника в пространстве $L_2([a,b])$.

7. Приведите примеры ортонормированных систем в пространствах $L_2([a,b])$; проверьте выполнение свойств ортогональности и нормированности элементов этих систем.

8. Какое пространство называется полным?

9. Какое пространство называется гильбертовым? Приведите примеры гильбертовых пространств.

10. Докажите следующее утверждение: Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство. Если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ сходится к пределу x, то она фундаментальна.

11. Докажите следующее утверждение: Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство. Всякая фундаментальная последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ ограничена по норме, т.е. $\exists M > 0$ такое, что $\|x_k\| \leqslant M$, $\forall k \in N$.

12. Какие элементы гильбертова пространства называются ортогональными?

13. Какое множество называется всюду плотным в гильбертовом пространстве?

14. Докажите справедливость в гильбертовом пространстве следующих утверждений:

    (a) скалярное произведение непрерывно относительно своих сомножителей;

    (b) элемент, принадлежащий гильбертову пространству и ортогональный каждому элементу из всюду плотного множества, является нулевым.

15. Какие элементы называются линейно независимыми? Приведите примеры линейно независимых систем элементов в пространствах $\mathbb{R}^m$, l^2, $L_2([a, b])$.

16. Какое подмножество гильбертова пространства называется подпространством?

17. Доказать справедливость тождества параллелограмма для любых элементов гильбертова пространства.

18. Сформулируйте теорему о единственности представления любого элемента гильбертова пространства в виде суммы $x = y+z$, где $y \in L$, $z \perp L$, L - подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

19. Какой элемент называется проекцией элемента гильбертова пространства на подпространство?

20. Какая система подпространств называется полной в гильбертовом пространстве?

21. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования ортогонального разложения гильбертова пространства?

22. Какая система элементов называется ортогональной? полной? ортонормированной? ортонормированным базисом?

23. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования разложения любого элемента гильбертова пространства в ряд Фурье?

24. Для чего и каким образом осуществляется процесс ортогонализации Шмидта?

25. Какое гильбертово пространство называется сепарабельным? Приведите примеры сепарабельных гильбертовых пространств.

26. Докажите, что пространство l^2 сепарабельно.

27. Какие гильбертовы пространства называются алгебраически изоморфными и изометричными?

28. Какому пространству алгебраически изоморфно и изометрично всякое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$?

6 Линейные нормированные (банаховы) пространства и метрические пространства

До сих пор рассматривались примеры линейных систем элементов, в которых вводилось скалярное произведение, а норма (длина) элемента определялась через это скалярное произведение, как в конечномерном либо бесконечномерном евклидовом пространстве. Однако в теории и приложениях функционального анализа возникают совокупности объектов, для которых нельзя ввести понятие скалярного произведения. Более того, рассматриваемые множества элементов могут не являться линейной системой. Так возникает понятие линейного нормированного пространства и понятие метрического пространства.

6.1 Определение и примеры линейных нормированных пространств

Напомним еще раз, что множество E называется *линейным пространством* (линейной системой), если для его элементов введение операции сложения и умножения на скаляры (вещественные либо комплексные) с естественными свойствами, которые были перечислены в пункте 4.1, когда рассматривались объекты из $\mathbb{R}^m$ (см. свойства а) — ж) и формулы (4.1) — (4.3)).

Определение 6.1. *Линейное пространство называется m-мерным, если в нем существуют m линейно независимых элементов, а всякие $m+1$ элементов линейно зависимы.* □

Определение 6.2. *Линейное пространство E называется бесконечномерным, если для каждого натурального n в E существуют n линейно независимых элементов.* □

Примером m-мерного пространства, очевидно, является $\mathbb{R}^m$, а бесконечномерных пространств — пространства $l^2, L_2([a,b])$ и другие.

Определение 6.3. *Линейное пространство E называется нормированным пространством, если каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой элемента x, такое, что выполнены следующие три аксиомы (аксиомы нормы):*

1^0. $\|x\| \geqslant 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2^0. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (*или* $\mathbb{C}$)*;*
3^0. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Классическим примером линейного нормированного пространства является множество (вещественно — либо комплекснозначных) непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C([a, b])$ с нормой

$$\|x(t)\|_{C([a,b])} := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|. \tag{6.1}$$

Нетрудно видеть, что это линейное множество, а аксиомы 1^0 — 3^0 нормы также легко проверяются.

Другим примером является множество k раз непрерывно дифференцируемых функций $C^k([a, b])$ с нормой

$$\|x(t)\|_{C^k([a,b])} := \sum_{j=0}^{k} \|x^{(j)}(t)\|_{C([a,b])},\ x^{(0)}(t) := x(t). \tag{6.2}$$

Упражнение 6.1. *Проверить выполнение аксиом нормы для элементов из* $C^k([a, b])$. $\square$

В качестве третьего примера рассмотрим пространство l^p числовых последовательностей

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$$

с нормой

$$\|x(t)\|_{l^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p},\ p \geqslant 1. \tag{6.3}$$

(При $p = 2$ имеем упомянутое выше пространство l^2.)

Здесь при доказательстве справедливости неравенства треугольника используется *неравенство Гельдера*

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^q \right)^{1/q},\ p^{-1} + q^{-1} = 1, \tag{6.4}$$

а также *неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^p \right)^{1/p}. \tag{6.5}$$

(Доказательство этих неравенств можно найти в учебнике В.А.Треногина [15], с. 23-24).

Непрерывным (в противовес "дискретному") аналогом пространства l^p является пространство $L_p([a,b])$ функций, заданных на отрезке $[a,b]$, с нормой

$$\|x(t)\|_{L_p([a,b])} := \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{6.6}$$

Здесь, как и в $L_2([a,b])$, интеграл понимается в смысле Лебега, а элементом пространства считается класс эквивалентных (т.е. отличных лишь на множестве меры нуль) функций.

Вместо (6.4) и (6.5) в $L_p([a,b])$ используются *неравенства Гельдера и Минковского для интегралов* (см. В.А.Треногин [15], с. 28):

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \leqslant \|x(t)\|_{L_p([a,b])} \cdot \|y(t)\|_{L_q([a,b])}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{6.7}$$

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Имеются и другие многочисленные примеры линейных бесконечномерных нормированных пространств.

6.2 Понятие метрического пространства

Естественным обобщением линейного нормированного пространства является понятие метрического пространства, которое уже может не быть линейной системой.

Определение 6.4. *Множество X элементов произвольной природы называется метрическим пространством, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1^0. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(аксиома тождества);*

2^0. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *(аксиома симметрии);*

3^0. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *(аксиома треугольника).* □

Число $\rho(x,y)$ называют *расстоянием* между элементами x и y из X, а перечисленные три условия — *аксиомами метрики.*

Оказывается, любое линейное нормированное пространство является частным случаем метрического пространства, именно, здесь в качестве расстояния можно выбрать величину

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Упражнение 6.2. *Проверить, что для любого линейного нормированного пространства выполнены аксиомы метрики.* □

Упражнение 6.3. *Доказать, что из аксиом метрики следует свойство, которое называют обратным неравенством треугольника:*

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y). \qquad \square$$

Рассмотрим некоторые примеры метрических пространств. Прежде всего, таковыми являются все рассмотренные до сих пор конечномерные, бесконечномерные гильбертовы и линейные нормированные пространства.

Нетривиальным примером метрического пространства является пространство s всех числовых последовательностей с элементами $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и метрикой

$$\rho(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|},\ y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Здесь аксиомы тождества и симметрии очевидны, а аксиома треугольника следует из неравенств

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

доказательство которого можно найти в учебнике Л.А.Люстерника и В.И.Соболева [12], с. 29-30 (Оно опирается на монотонное возрастание функции $f(x) := \frac{x}{1+x}$ и на очевидное правое неравенство; докажите это свойство!).

Другим нетривиальным примером является непрерывный аналог пространства s всех числовых последовательностей — это пространство $S([a, b])$ всех измеримых и почти всюду ограниченных на $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) := \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

Здесь, по аналогии с предыдущим случаем, можно проверить, что аксиомы метрики также выполнены.

6.3 Элементы анализа в линейных нормированных пространствах

Рассмотрим элементы теории множеств и теории пределов в произвольном линейном нормированном пространстве E. Соответствующие понятия и факты можно было бы изучать и в произвольном метрическом пространстве.

Определение 6.5. *Элемент* $x_0 \in E$ *называется пределом последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$, $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, *если* $\|x_k - x_0\| \to 0$ $(k \to \infty)$. $\square$

Определение 6.6. *Множество*

$$S_r(x_0) := \{x \in E : \|x - x_0\| < r\},\ x_0 \in E,\ r > 0,$$

называют открытым шаром с центром в x_0 *и радиусом* r. *Соответственно*

$$\overline{S_r}(x_0) := \{x \in E : \|x - x_0\| \leqslant r\}$$

называют замкнутым шаром, а множество

$$\sigma_r(x_0) := \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

называют сферой (радиуса r *с центром в* x_0*).* $\square$

Определение 6.7. *Окрестностью точки* $x_0 \in E$ *назовем любой открытый шар* $S_r(x_0)$. $\square$

Упражнение 6.4. *Покажите, что если* $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, *т.е.* $x_k \to x_0$, *то:*

1^0. *В любой окрестности* x_0 *находятся все члены последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, *кроме, быть может, конечного их числа.*

2^0. *Предел* x_0 *единственен.*

3^0. *Любая подпоследовательность* $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* x_0.

4^0. *Если* $\lambda_k \to \lambda_0$ $(k \to \infty)$, *то* $\lambda_k x_k \to \lambda_0 x_0$ $(k \to \infty)$.

5^0. *Если* $y_k \to y_0$ $(k \to \infty)$, *то* $x_k + y_k \to x_0 + y_0$ $(k \to \infty)$.

6^0. $\|x_k\| \to \|x_0\|$ $(k \to \infty)$. $\square$

Определение 6.8. *Множество* $F \subset E$ *называется ограниченным, если существует такое* $M > 0$, *что*

$$\|x\| \leqslant M,\ \forall x \in F. \qquad \square$$

Упражнение 6.5. *Докажите, что всякая сходящаяся последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ *ограничена.* $\square$

Определение 6.9. *Множество* $F \subset E$ *называется открытым, если вместе с каждым своим элементом оно содержит некоторую его окрестность, т.е. для любого* $x_0 \in F$ *найдется* $S_r(x_0) \subset F$. $\square$

Определение 6.10. *Точка* $a \in E$ *называется предельной точкой множества* $F \subset E$*, если любая окрестность точки* a *содержит хотя бы одну точку* F*, отличную от* a. $\square$

Упражнение 6.6. *Доказать, что для того, чтобы точка* a *была предельной точкой множества* $F \subset E$*, необходимо и достаточно, чтобы существовала некоторая последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$*, сходящаяся к* a*,* $x_k \neq a,\ k = 1, 2, \ldots$. $\square$

Определение 6.11. *Множество* $F \subset E$ *называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.* $\square$

Пустое множество $\emptyset$ считается открытым и замкнутым множеством по определению.

Определение 6.12. *Множество* $\overline{F} \subset E$*, полученное присоединением к* F *всех его предельных точек, называется замыканием множества* F*. Точки множества* $\overline{F}$ *называются точками прикосновения множества* F. $\square$

Если множество F замкнуто, то, очевидно, $\overline{F} = F$. Иногда это свойство дают в качестве определения замкнутого множества.

Определение 6.13. *Точка* $x \in F \subset E$ *называется внутренней точкой множества* F*, если она входит в* F *с некоторой окрестностью.* $\square$

Приведем и другие определения точечных множеств $F \subset E$. Нетрудно видеть, что они те же, что и для произвольных абстрактных множеств.

По отношению к $F \subset E$ различают *внутренние*, *внешние* и *граничные* точки множества F. Множество $F \subset E$ называется *всюду плотным* в E, если $\overline{F} = E$.

6.4 Определение и примеры банаховых пространств

Пусть X — линейное нормированное пространство. Как и для гильбертовых пространств, здесь можно сформулировать те же свойства и упражнения, что и в п. 5.2.

Определение 6.14. *Последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *называется фундаментальной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что для любых номеров* $k > N, p \in \mathbb{N}$, *выполнено неравенство*

$$\|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Упражнение 6.7. *Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.* $\square$

Упражнение 6.8. *Пусть* $\{x_k\}$ *и* $\{y_k\}$ *— фундаментальные последовательности в* X. *Доказать, что* $\{\lambda x_k + \mu y_k\}$ *— также фундаментальна при любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*).* $\square$

Упражнение 6.9. *Доказать, что всякая сходящаяся в* X *последовательность фундаментальна.* $\square$

Оказывается, не всякая фундаментальная последовательность сходится. Ситуация, когда этот факт имеет место, выделяет соответствующий класс пространств.

Определение 6.15. *Линейное нормированное пространство называется полным, если в нём всякая фундаментальная последовательность сходится, т.е. имеет предел, принадлежащий данному пространству. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством по имени выдающегося математика С. Банаха (1892 – 1945).* $\square$

Простейшим примером банахова пространства является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Очевидно, что $\mathbb{R}^m$ — тоже банахово пространство.

Простым нетривиальным примером банахова пространства является пространство $C([a,b])$, состоящее из непрерывных функций с нормой

$$\|x(t)\|_{C([a,b])} := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

В самом деле, если $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset C([a,b])$ — фундаментальная последовательность, то она является равномерно сходящейся на $[a,b]$, так как

$$|x_{k+p}(t) - x_k(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_{k+p}(t) - x_k(t)| < \varepsilon \quad (k > N(\varepsilon),\ p \in \mathbb{N}).$$

Как известно из курса математического анализа, в этом случае существует предельная функция $x(t)$ и она является непрерывной на $[a,b]$, т.е. $x(t) \in C([a,b])$. Значит, $C([a,b])$ — полное пространство.

Оказывается, пространство $C^k([a,b])$, где k — любое натуральное число, также является полным, т.е. банаховым пространством. Доказательство этого факта аналогично проведенному выше.

Рассмотрим теперь пример неполного линейного нормированного пространства. Обозначим через $L_2^0([-1,1])$ совокупность непрерывных на $[-1,1]$ функций $x(t)$ и введём на этом множестве норму в виде

$$\|x(t)\|^2_{L_2^0([-1,1])} := \int_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt,$$

т.е. так же, как в обычном пространстве $L_2([-1,1])$.

Рассмотрим в $L_2^0([-1,1])$ последовательность непрерывных функций

$$x_k(t) := \begin{cases} -1, & t \in [-1, -1/k], \\ kt, & t \in [-1/k, 1/k], \quad k = 2, 3, \ldots, \\ +1, & t \in [1/k, 1], \end{cases}$$

графики которых представляют собой ломаные (постройте их!). Из графика видно, что $|x_k(t)| \leqslant 1$ для любого k и поэтому $|x_{k+p}(t) - x_k(t)| \leqslant 2$. Следовательно,

$$\begin{gathered} |x_{k+p}(t) - x_k\|^2_{L_2^0([-1,1])} = \int_{-1}^{1} |x_{k+p}(t) - x_k(t)|^2 dt = \\ = \int_{-1/k}^{1/k} [x_{k+p}(t) - x_k(t)]^2 dt \leqslant 4 \int_{-1/k}^{1/k} dt = \frac{8}{k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty), \end{gathered} \tag{6.8}$$

т.е. $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная в $L_2^0([a,b])$ последовательность.

Нетрудно видеть, что в каждой точке $t \in [-1,1]$ эта последовательность имеет предел

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0); \\ 0, & t = 0; \\ +1, & t \in (0, 1], \end{cases}$$

причём $|x(t)| \leqslant 1$ и $|x_k(t) - x(t)| \leqslant 2$. Поэтому, как и в (6.8), имеем

$$\|x_k(t) - x(t)\|^2_{L_2^0([a,b])} \leqslant \frac{8}{k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Однако предельная функция $x(t)$ не является непрерывной, т.е. не принадлежит $L_2^0([a,b])$. Значит, $L_2^0([a,b])$ не является полным пространством.

Если некоторое линейное нормированное пространство X неполное по введенной в этом пространстве норме, то его можно пополнить до более широкого множества (линейного нормированного пространства) $\widetilde{X}$ так, что $\widetilde{X}$ будет уже полным пространством.

Опишем вкратце схему такого пополнения. Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_k\}, \{y_k\}, \{z_k\}$, составленные из элементов пространства X, в том числе и сходящиеся к пределу в X. Отнесем к одному классу две последовательности $\{x_k\}$ и $\{x'_k\}$, фундаментальные в X и такие, что $\|x_k - x'_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Можно проверить, что так выделенные классы фундаментальных последовательностей не пересекаются, и каждый класс однозначно определяется любой принадлежащей данному классу последовательностью. Эти классы $\widetilde{x}$ примем в качестве элементов нового пространства $\widetilde{X}$.

Пусть $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ и $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — последовательности из классов $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ соответственно. Из обратного неравенства треугольника для норм следует, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$. В самом деле

$$\big|\|x_n - y_n\| - \|x_m - y_m\|\big| \leqslant \big|\|x_n - y_n\| - \|x_m - y_n\|\big| + \big|\|x_m - y_n\| - \|x_m - y_m\|\big| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Отсюда следует, что числовая последовательность $\|x_k - y_k\|$ удовлетворяет условию Коши, и тогда следует предел

$$\|\widetilde{x - y}\| := \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|,$$

который можно принять в качестве расстояния между элементами $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, а величину

$$\|\widetilde{x}\| := \lim_{k\to\infty} \|x_k\| \tag{6.9}$$

— за соответствующую норму.

Оказывается, такое определение нормы корректно, причём если $x \in X$, то $\|\widetilde{x}\| = \|x\|$, а для новой нормы (6.9) выполнены все аксиомы нормы. Это новое пространство $\widetilde{X}$ уже является полным в норме

(6.9), а исходное пространство X изометрично некоторому множеству $\widetilde{X}_0$, плотному в $\widetilde{X}$.

В частности, пополнение рассмотренного выше пространства $L_2^0([-1,1])$ приводит к пространству $L_2([-1,1])$, т.е. $\widetilde{L_2^0([-1,1])} = L_2([-1,1])$, причём $L_2^0([-1,1])$ плотно в $L_2([-1,1])$.

6.5 Банаховы пространства со счётным базисом

Пусть X — бесконечномерное банахово пространство.

Определение 6.16. *Последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ называется базисом в X, если любой элемент $x \in X$ может быть однозначно представлен в виде сходящегося ряда:*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \Longleftrightarrow \|x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{6.10}$$

При этом скаляры ξ_k называются координатами элемента x в базисе $\{e_k\}$. □

Упражнение 6.10. *Используя однозначность представления* (6.10)*, доказать, что элементы e_k базиса являются линейно независимыми.* □

Если $X = \mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, то, как было выяснено в п.п. 5.4, 5.5, в нём существует ортонормированный базис. В произвольном сепарабельном банаховом пространстве, т.е. в таком, в котором существует счётное плотное множество, могут существовать счетные базисы. Приведем без доказательства примеры таких пространств. Это пространства $C([a,b]), l^p, C^k([a,b]), L^p([a,b])$ и другие.

Общее утверждение о связи упомянутых двух свойств таково.

Теорема 6.1. *Банахово пространство со счётным базисом сепарабельно.*

Доказательство. Достаточно заметить, что множество всевозможных линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k e_k$, где r_k — рациональные числа, n — любое натуральное число, а $\{e_k\}$ — базис в X, образует счётное плотное в X множество.

В самом деле,

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} r_k e_k\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k - \sum_{k=1}^{n} r_k e_k\| =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - r_k) e_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - r_k| \cdot \|e_k\| + \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k\|,$$

и при достаточно больших n можно сделать второе слагаемое справа как угодно малым (почему?), а за счет выбора r_k, близких к ξ_k, можно сделать также как угодно малым первое слагаемое. □

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое пространство называется линейным?

2. Чем определяется размерность линейного пространства?

3. Какое линейное пространство называется бесконечномерным? Приведите примеры конечномерных и бесконечномерных линейных пространств.

4. Какое пространство называется нормированным? Приведите примеры нормированных пространств.

5. Перечислите аксиомы нормы.

6. Проверьте выполнение аксиом нормы для элементов из пространств $C^k([a,b])$, $L_2([a,b])$.

7. Какое пространство называется метрическим? Приведите примеры метрических пространств.

8. Перечислите аксиомы метрики.

9. Проверьте справедливость аксиом метрики для любого линейного нормированного пространства.

10. Проверьте справедливость обратного неравенства треугольника.

11. Сформулируйте понятия предела последовательности, окрестности точки в линейном нормированном пространстве.

12. Докажите, что если последовательность сходится в линейном нормированном пространстве, то предел единственен.
13. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность в линейном нормированном пространстве ограничена.
14. Какое множество в линейном нормированном пространстве называется замкнутым?
15. Какое пространство называется банаховым?
16. Приведите примеры банаховых пространств.
17. Докажите утверждение: элементы базиса бесконечномерного банахова пространства являются линейно независимыми.

7 Линейные операторы

Важнейшую роль в функциональном анализе играют отображения (операторы, функции) множеств одного функционального пространства в другое, а среди них — так называемые линейные операторы, обобщающие понятие матрицы на случай бесконечномерного пространства.

7.1 Общее определение оператора

Пусть X и Y — множества произвольной природы и пусть $\mathcal{D} \subset X$.

Определение 7.1. *Если каждому элементу $x \in \mathcal{D}$ ставится в соответствие определённый элемент $y \in Y$, то говорят, что задан оператор (отображение) F и обозначают $y = F(x)$. При этом множество $\mathcal{D} \subset X$ называют областью определения оператора F и обозначают $\mathcal{D}(F)$.* □

Определение 7.2. *Множество*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(F) := \{y \in Y : y = F(x),\ x \in \mathcal{D}(F)\} \tag{7.1}$$

называют областью значений оператора F. □

Если

$$y = F(x),\ x \in \mathcal{D}(F),\ y \in \mathcal{R}(F),$$

то говорят, что y является образом элемента x, а элемент x — прообразом элемента y. Множества всех прообразов и образов, очевидно, связаны соотношением

$$\mathcal{R}(F) = F(\mathcal{D}(F)).$$

Пусть F действует из X в Y. Для фиксированного $y \in \mathcal{R}(F)$ рассмотрим множество всех прообразов элемента y и обозначим его $F^{-1}(y)$. Это множество не пусто. Очень важна ситуация, когда $F^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента.

Определение 7.3. *Оператор (отображение) F называется взаимно однозначным, если каждому $y \in \mathcal{R}(F)$ отвечает единственный прообраз $x = F^{-1}(y)$. Если F взаимно однозначен, то формула $x = F^{-1}(y),\ y \in \mathcal{R}(F)$, определяет оператор F^{-1}, действующий из $\mathcal{R}(F)$ в $\mathcal{D}(F)$, который называют обратным к F. В этом случае, очевидно,*

$$\mathcal{D}(F^{-1}) = \mathcal{R}(F), \quad \mathcal{R}(F^{-1}) = \mathcal{D}(F). \qquad \square$$

Будем теперь считать, что X и Y — *линейные нормированные* пространства. Пусть дан оператор F такой, что $\mathcal{D}(F)$ содержит окрестность $S(x_0)$ точки $x_0 \in X$, за исключением, быть может, самой точки x_0. Здесь $S(x_0)$ — любой открытый шар с центром в x_0.

Определение 7.4. *Элемент $y_0 \in Y$ называется пределом $F(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in S(x_0)$, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\|_X < \delta$, будет $\|F(x) - y_0\|_Y < \varepsilon$.* $\square$

Такое определение предела $y_0 = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} F(x)$ хорошо известно в случае $X = \mathbb{R}$ и принадлежит Коши.

Определение 7.5. *Оператор F, определённый в окрестности точки $x_0 \in X$, называется непрерывным в этой точке, если $F(x) \longrightarrow F(x_0)$ при $x \longrightarrow x_0$, т.е.*

$$\|F(x) - F(x_0)\|_Y \to 0 \quad (\|x - x_0\|_X \to 0). \qquad \square$$

Определение 7.6. *Оператор F называется ограниченным, если он переводит всякое ограниченное в $\mathcal{D}(F) \subset X$ множество в множество, ограниченное в $\mathcal{R}(F) \subset Y$.* $\square$

7.2 Линейные ограниченные операторы

Важную роль в функциональном анализе играют линейные операторы, действующие из одного пространства в другое или же в одном пространстве.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, оба вещественные либо оба комплексные, а оператор A действует из X в Y.

Определение 7.7. *Оператор A с областью определения $\mathcal{D}(A) \subset X$ и областью значений $\mathcal{R}(A) \subset Y$ называется линейным, если:*

1^0. *$\mathcal{D}(A)$ — линейное многообразие (линейная система), т.е. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathcal{D}(A)$, если $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$, а λ_1, λ_2 — любые скаляры;*

2^0. *выполнено свойство аддитивности и однородности:*

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2. \qquad \square$$

Далее для краткости введём обозначение $A : X \to Y$, если A — линейный оператор, действующий из $\mathcal{D}(A) \subset X$ в $\mathcal{R}(A) \subset Y$.

Понятие линейного оператора обобщает понятие линейной функции $y = \alpha x$, линейного отображения $w = az$ в комплексной плоскости, а также матрицы в случае конечномерного пространства. Поэтому в дальнейшем вместо записи $y = A(x)$ будем использовать запись $y = Ax$.

Упражнение 7.1. *Доказать, что область значений $\mathcal{R}(A)$ всякого линейного оператора $A : X \to Y$ является линейным многообразием.* $\square$

Пусть $A : X \longrightarrow Y$ — линейный оператор, причём $\mathcal{D}(A) = X$. Как уже упоминалось выше, оператор A является непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$. Оказывается, для выяснения факта непрерывности линейного оператора в любой точке x_0 можно проверить его непрерывность лишь в нуле.

Теорема 7.1. *Пусть $A : X \to Y$, где X и Y — банаховы пространства, и A непрерывен в точке $0 \in X$. Тогда A непрерывен в любой точке $x_0 \in X$.*

Доказательство этого факта весьма просто:

$$Ax - Ax_0 = A(x - x_0) =: Az \longrightarrow 0 \quad (z \longrightarrow 0). \qquad \square$$

Эта теорема позволяет дать следующее

Определение 7.8. *Линейный оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в точке $x = 0$.* $\square$

Перейдём теперь к рассмотрению понятия ограниченности оператора. Заметим предварительно, что линейный оператор A, не сводящийся к нулевому оператору 0 (для которого $Ax = 0$ при любом $x \in X$), не может быть ограничен на всем пространстве X.

Определение 7.9. *Будем называть линейный оператор $A : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{D}(A) = X$, ограниченным, если он ограничен в единичном шаре $\overline{S}_1(0)$, т.е. если ограничено множество*

$$\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \leqslant 1\}. \qquad \square$$

Если оператор A ограничен, то существует константа $c > 0$ такая, что

$$\|Ax\|_Y \leqslant c, \quad \|x\|_X \leqslant 1. \tag{7.2}$$

Теорема 7.2. *Оператор A ограничен тогда и только тогда, когда имеет место оценка*

$$\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X, \quad \forall x \in X, \tag{7.3}$$

где c — постоянная из (7.2).

Доказательство. Если $x = 0$, то неравенство (7.3) очевидно. При $x \neq 0$ рассмотрим элемент $x' := x/\|x\|_X$. Тогда $\|x'\|_X = 1$ и из (7.2) имеем $\|Ax'\|_Y = \|A\dfrac{x}{\|x\|_X}\|_Y \leqslant c$, откуда в силу линейности A и однородности нормы получаем (7.3). Обратно, если верно (7.3), то для $x \in \overline{S}_1(0)$ имеем $\|Ax\|_Y \leqslant c$. □

Теорема 7.3. *Пусть $M \subset X$ — произвольное ограниченное множество и $A : X \to Y$ — ограниченный оператор. Тогда множество*

$$\{\|Ax\|_Y : x \in M\}$$

ограничено, т.е. ограниченный оператор переводит ограниченное множество в ограниченное.

Доказательство. Так как M ограничено в X, то существует шар $\bar{S}_R(0) \supset M$. Для $x \in \bar{S}_R(0)$ в силу (7.3) имеем

$$\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X \leqslant cR,$$

и потому A ограничен на $\bar{S}_R(0)$ и тем более на $M \subset \bar{S}_R(0)$. □

В качестве следствия из этой теоремы получаем такой вывод: *если A — линейный ограниченный оператор, то он ограничен на любом шаре $S_R(x_0)$, $x_0 \in X$, $R > 0$.*

Рассмотрим теперь связь между свойствами непрерывности и ограниченности линейного оператора.

Теорема 7.4. *Пусть $A : X \longrightarrow Y$ — линейный оператор, X, Y — банаховы пространства и $\mathcal{D}(A) = X$. Для того, чтобы оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть A ограничен, и поэтому выполнено неравенство (7.3). Тогда $\|Ax\|_Y \to 0$ при $\|x\|_X \to 0$, и A непрерывен в нуле, т.е. непрерывен.

Необходимость. Пусть A непрерывен. Допустим, что теорема неверна и A неограничен. Тогда множество $A\bar{S}_1(0)$ неограничено и поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $x_n \in X, \|x_n\|_X \leqslant 1$, такой, что $\|Ax_n\|_Y \geqslant n$.

Возьмем элементы $x'_n := x_n/n$; для них имеем

$$\|x'_n\|_X = \|x_n\|_X/n \leqslant \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Тогда по свойству непрерывности оператора A должно быть $Ax'_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$. С другой стороны, $\|Ax'_n\|_Y = n^{-1}\|Ax_n\|_Y \geqslant 1$. Получено противоречие. $\square$

Таким образом, из теоремы 7.4 следует, что понятия линейного непрерывного и линейного ограниченного оператора эквивалентны.

7.3 Примеры линейных ограниченных операторов

Рассмотрим некоторые примеры линейных ограниченных операторов, действующих как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах.

Пример 7.1. Пусть $A := (a_{ij})_{i,j=1}^m$ — квадратная матрица, действующая в пространстве $\mathbb{R}^m$, т.е. $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^m$ и для любого вектор-столбца $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$

$$y = Ax \Longleftrightarrow y_i := \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{7.4}$$

Очевидно, свойства линейности (аддитивности и однородности) отображения, задаваемые по закону (7.4), выполнены. $\square$

Упражнение 7.2. *Доказать, что оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ограничен и*

$$\|y\|^2 = \|Ax\|^2 \leqslant (\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}|^2) \cdot \|x\|^2.$$

Указание. Воспользоваться неравенством Коши (4.8) применительно к выражению $\sum\limits_{j=1}^m a_{ij}x_j$, т.е.

$$|\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j| \leqslant (\sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{j=1}^m |x_j|^2)^{1/2}. \qquad \square$$

Таким образом, из упражнения 7.2 следует, что оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, задаваемый матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ в $\mathbb{R}^m$, является линейным ограниченным оператором.

Пример 7.2. Рассмотрим теперь пространство l^2 и оператор (отображение) $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty$, действующий в этом пространстве по закону

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad \forall x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in l^2,$$

причём выполнено условие

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Здесь снова свойство аддитивности и однородности оператора $A : l^2 \to l^2$ очевидны. $\square$

Упражнение 7.3. *Доказать, опираясь на решение предыдущего упражнения 7.2, что оператор* $A : l^2 \longrightarrow l^2$ *ограничен и*

$$\|y\|^2 = \|Ax\|^2 \leqslant (\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2) \cdot \|x\|^2, \quad \forall\, x \in l^2. \qquad \square$$

Пример 7.3. Важнейшим примером линейного ограниченного оператора, действующего в бесконечномерном функциональном пространстве, является интегральный оператор.

Рассмотрим пространство $L_2([a,b])$ и оператор $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, действующий в этом пространстве по закону

$$(Ax)(t) := \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad \forall x(t) \in L_2([a,b]), \tag{7.5}$$

где $K(t,s)$ — непрерывная функция переменных $t, s \in [a,b]$, т.е.

$$K(t,s) \in C([a,b] \times [a,b]).$$

Эта функция называется *ядром* интегрального оператора (7.5). $\square$

Упражнение 7.4. *Доказать, что оператор* $A : L_2([a,b]) \longrightarrow L_2([a,b])$*, определяемый формулой* (7.5)*, является линейным ограниченным оператором и имеет место оценка*

$$\|(Ax)(t)\|_{L_2([a,b])} \leqslant (\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dsdt)^{1/2} \cdot \|x(t)\|_{L_2([a,b])},$$
$$\forall x(t) \in L_2([a,b]).$$

Указание. Воспользоваться неравенством Коши- Буняковского (5.4), т.е. в данном случае неравенством

$$|\int_a^b K(t,s)x(s)ds|^2 \leqslant \int_a^b |K(t,s)|^2 ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 ds. \qquad \square$$

Таким образом, оператор A из (7.5) действующий в $L_2([a,b])$, линеен и ограничен. Оказывается, это же отображение (7.5) можно считать оператором, действующим в пространстве непрерывных функций $C([a,b])$.

Пример 7.4. В пространстве $C([a,b])$ отображение (7.5), очевидно, также обладает свойством аддитивности и однородности. $\square$

Упражнение 7.5. *Доказать, что оператор* $A : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$*, определённый законом* (7.5)*, ограничен в* $C([a,b])$ *и*

$$\|(Ax)(t)\|_{C([a,b])} \leqslant (\max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)|ds) \cdot \|x(s)\|_{C([a,b])}. \qquad \square$$

Из примеров 7.3 и 7.4 видно, что один и тот же оператор (закон) можно считать действующим в различных функциональных пространствах.

Упражнение 7.6. *Доказать, что оператор умножения*

$$(Ax)(t) := a(t)x(t), \quad \forall x(t) \in C([a,b]),\ a(t) \in C([a,b]),$$

является линейным оператором в $C([a,b])$*, и получить оценку*

$$\|(Ax)(t)\|_{C([a,b])} \leqslant \|a(t)\|_{C([a,b])} \cdot \|x(t)\|_{C([a,b])}, \quad \forall\, x(t) \in C([a,b]). \qquad \square$$

7.4 Пространство линейных ограниченных операторов

Пусть $A, B, C, \ldots$ — линейные непрерывные операторы, определенные на всем линейном нормированном пространстве X и действующие в линейное нормированное пространство Y. Определим на множестве таких линейных операторов операции сложения операторов и умножения оператора на скаляр. По определению, считаем

$$(A+B)x := Ax + Bx, \quad (\lambda A)x := \lambda Ax, \quad \forall x \in X. \tag{7.6}$$

Упражнение 7.7. *Проверить, что множество операторов, для которых выполнены свойства* (7.6)*, является линейной системой.* □

Введем в этой линейной системе операторов, которую далее будем обозначать $\mathcal{L}(X,Y)$, норму по закону

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y. \tag{7.7}$$

Согласно определению 7.9 линейного ограниченного оператора $A : X \longrightarrow Y$ и теореме 7.2 имеет место оценка (7.3), из которой следует, что

$$\|A\| \leqslant c < \infty. \tag{7.8}$$

Отсюда и из (7.7) получаем, что $\|A\|$ является *наименьшей* из констант в неравенстве (7.3), и тогда

$$\|Ax\|_Y \leqslant \|A\| \cdot \|x\|_X. \tag{7.9}$$

Упражнение 7.8. *Доказать неравенство* (7.8)*, если имеет место оценка* (7.3)*.* □

Если $X = Y$, то вместо (7.9) пишут просто

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|, \ \forall x \in X. \tag{7.10}$$

Убедимся теперь, что после введения нормы (7.7) линейная система $\mathcal{L}(X,Y)$ является линейным нормированным пространством, т.е. для этой системы выполнены все аксиомы нормы для абстрактного линейного нормированного пространства.

1^0. Очевидно, $\|A\| \geqslant 0$, так как $\|Ax\| \geqslant 0$ для всех $x \in X$. Далее, пусть $\|A\| = 0$. Тогда из (7.10) следует, что $\|Ax\| = 0, \ \forall x \in X$, т.е. $A = 0$.

2^0. $\|\lambda A\| = \sup\{\|\lambda Ax\| : \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda| \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda|\|A\|$.

3^0. Проверим теперь выполнение неравенства треугольника для элементов из $\mathcal{L}(X,Y)$. Пусть $\|x\| \leqslant 1$. Тогда

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

Вычисляя слева sup по всем x с $\|x\| \leqslant 1$, получим, что

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

Таким образом, для $\mathcal{L}(X,Y)$ выполнены все аксиомы нормы. Докажем, что $\mathcal{L}(X,Y)$ — банахово пространство , т.е. полное линейное нормированное пространство. Предварительно познакомимся с понятием равномерной сходимости операторов из $\mathcal{L}(X,Y)$.

Определение 7.10. *Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ равномерно сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, если*

$$\|A_n - A\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \qquad \square \tag{7.11}$$

Отметим два простых свойства равномерно сходящейся последовательности $\{A_n\}$ операторов, действующих из X в Y.

1^0. Для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ сходится к Ax. Действительно,

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

2^0. Если $M \subset X$ — произвольное ограниченное множество в X, то $A_n x \longrightarrow Ax$ $(n \longrightarrow \infty)$ *равномерно* по $x \in M$.

В самом деле, так как для элементов из M выполнено свойство $\|x\| \leqslant R$, то

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\| \leqslant R\|A_n - A\| \to 0 \ (n \to \infty), \ \forall \ x \in M.$$

Теорема 7.5. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда $\mathcal{L}(X,Y)$ — также банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}(X,Y)$, т.е. $\forall \, \varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$, $p \in \mathbb{N}$. Для любого $x \in X$ рассмотрим последовательность $\{A_n x\}$. Очевидно, она фундаментальна, так как

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| = \|(A_{n+p} - A_n)x\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A_{n+p} - A_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|, \quad n \geqslant N, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Поскольку Y — полное пространство, то существует $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x \in Y$, и, следовательно, можно определить оператор A по закону

$$Ax := y = \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n x, \quad \forall x \in X.$$

Из линейности (т.е. аддитивности и однородности) операторов A_n следует, что оператор A также линейный (проверьте это!). Покажем, что A также ограничен, т.е. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Заметим, что последовательность норм $\{\|A_n\|\}$ также фундаментальна (в $\mathbb{R}$), так как (докажите это!)

$$|\, \|A_{n+p}\| - \|A_n\| \,| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\|. \tag{7.12}$$

Но тогда эта последовательность ограничена, т.е. существует $c > 0$ такое, что $\|A_n\| \leqslant\ c, \quad n = 1, 2, ...$ Отсюда следует, что

$$\|A_n x\| \leqslant c\|x\|, \ \forall x \in X, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Переходя в этом числовом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\| \leqslant c\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Отсюда следует, что $\|A\| < c$ и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

Упражнение 7.9. *Докажите свойство*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \| \lim_{n\to\infty} A_n x\| = \|Ax\|, \ \forall x \in X,$$

если выполнено условие (7.11).

Указание. Воспользуйтесь свойством, аналогичным (7.12). $\square$

Для линейных ограниченных операторов, действующих из одного пространства в другое, как и для матриц, можно ввести понятие произведения операторов. Пусть, например, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, а $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Положим для любого $x \in X$

$$BAx := B(Ax).$$

Упражнение 7.10. *Доказать, что для нормы оператора BA, действующего из X в Z, выполнена оценка*

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|. \qquad \square$$

Если операторы A и B действуют в одном пространстве X, т.е. $X = Y = Z$, то имеет место также неравенство

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Отметим, что $AB \neq BA$ для произвольных операторов из $\mathcal{L}(X, X)$. Этот факт хорошо известен уже для матриц, т.е. для операторов в $\mathbb{R}^m$. Таким образом, произведение операторов A и B, вообще говоря, некоммутативно.

7.5 Обратные операторы. Теорема Банаха

Понятие обратного оператора связано с решением уравнений вида

$$Ax = y, \qquad x \in \mathcal{D}(A) \subset X, \ y \in Y. \tag{7.13}$$

В такой общей форме могут быть записаны задачи о нахождении решений линейных алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, интегральных уравнений и других. Если известен обратный оператор $A^{-1} : \ \mathcal{R}(A) \subset Y \to X$, то при $y \in \mathcal{R}(A)$ решение задачи (7.13) имеет вид

$$x = A^{-1}y.$$

Рассмотрим вопрос об условиях, обеспечивающих существование обратного оператора. Введем множество

$$\operatorname{Ker} A := \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax = 0\}, \tag{7.14}$$

называемое *множеством нулей* или *ядром* оператора A. Это множество непусто, так как всегда $0 \in \operatorname{Ker} A$.

Упражнение 7.11. *Доказать, что* $\operatorname{Ker} A$ *— линейная система в* X. $\square$

Теорема 7.6. *Оператор A переводит $\mathcal{D}(A) \subset X$ в $\mathcal{R}(A) \subset Y$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}. \tag{7.15}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнено условие (7.15) и допустим, что найдется $y \in \mathcal{R}(A)$, имеющий два прообраза: $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A), \ Ax_1 = y, \ Ax_2 = y$. Тогда

$$Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = 0,$$

т.е. $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} A$ и потому $x_1 = x_2$.

Необходимость. Пусть A взаимно однозначен, но $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Тогда найдется $z \neq 0, z \in \operatorname{Ker} A$. По условию (взаимная однозначность) уравнение $Ax = y$ имеет решение $x_* \in \mathcal{D}(A)$. Однако тогда x_*+z - тоже решение этого уравнения, так как $A(x_*+z) = Ax_*+Az = Ax_* = y$. Таким образом, элемент $y \in \mathcal{R}(A)$ имеет по крайней мере два прообраза: x_* и $x_* + z,\ z \neq 0$.

Значит, предположение $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ неверно, и теорема доказана. □

Будем теперь считать, что условие (7.15) выполнено, и потому оператор A отображает $\mathcal{D}(A) \subset X$ на $\mathcal{R}(A) \subset Y$ взаимно однозначно. Тогда существует обратный оператор $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \subset Y \longrightarrow \mathcal{D}(A) \subset X$, также являющийся, очевидно, взаимно однозначным.

Теорема 7.7. *Оператор $A^{-1} : \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1}) \subset Y \longrightarrow \mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^{-1}) \subset X$ также является линейным (т.е. аддитивным и однородным) оператором.*

Доказательство. *Аддитивность.* Если $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1})$, то $x_1 = A^{-1}y_1,\ x_2 = A^{-1}y_2$ — их прообразы. Так как $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$, то $x_1 + x_2 = A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2$.

Однородность. Если $Ax = y$, то для любого скаляра λ имеем $A(\lambda x) = \lambda Ax$. Применяя слева оператор A^{-1}, получим

$$\lambda x = \lambda A^{-1}y = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}(\lambda y),$$

т.е. свойство однородности для A^{-1}. □

Весьма важным является вопрос о том, когда оператор A^{-1} ограничен.

Теорема 7.8. *Оператор A^{-1} существует и ограничен на $\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1}) \subset Y$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathcal{D}(A)$ выполнено неравенство*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X. \tag{7.16}$$

Доказательство. *Достаточность.* Если выполнено условие (7.16), то $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и потому существует оператор A^{-1}, отображающий взаимно однозначно $\mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1})$ на $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^{-1}) \subset X$. Полагая в (7.16) $x = A^{-1}y$, будем иметь

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant m^{-1}\|y\|_Y, \quad y \in \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A),$$

т.е. A^{-1} — ограниченный оператор.

Необходимость. Если оператор A^{-1} существует и ограничен на $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$, то найдется такая константа $c > 0$, что для любого $y \in \mathcal{R}(A)$ выполнено неравенство

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant c\|y\|_Y.$$

Полагая здесь $x = A^{-1}y$, приходим к (7.16) при $m = c^{-1} > 0$. $\square$

Определение 7.11. *Будем говорить, что линейный оператор $A : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим, если $\mathcal{R}(A) = Y$, оператор A обратим и $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.* $\square$

Следствием из теоремы 7.8 является такое утверждение: оператор $A : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(A) = Y$ и выполнено неравенство (7.16).

Если $\mathcal{D}(A) = X$ и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, имеет место следующий важный факт, который здесь приводится без доказательства.

Теорема 7.9. *(***теорема Банаха об обратном операторе***). Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ отображает взаимно однозначно $\mathcal{D}(A) = X$ на $\mathcal{R}(A) = Y$. Тогда обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, т.е. он определен на всем Y и ограничен.* $\square$

Заметим в заключение этого пункта, что если $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, то уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение $x = A^{-1}y$, причем малым изменениям (в пространстве Y) правой части y отвечают малые изменения решения $x \in X$: если $x = A^{-1}y$, $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y}$, то

$$\|x - \tilde{x}\|_X \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|y - \tilde{y}\|_Y.$$

Это означает, что уравнение $Ax = y$ *корректно разрешимо.*

7.6 Примеры нахождения обратных операторов

Приведем некоторые примеры нахождения (вычисления) обратных операторов в некоторых пространствах.

Пример 7.5. Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ оператор $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, определяемый невырожденной матрицей,

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^m, \quad \det A \neq 0,$$

и уравнение

$$Ax = y, \quad x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица $A^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, элементы которой находятся по известному правилу, и тогда $x = A^{-1}y \in \mathbb{R}^m$. $\square$

Пример 7.6. В банаховом пространстве $C([0,1])$ рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$(Ax)(t) := x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = y(t), \tag{7.17}$$

где $y(t) \in C([0,1])$ — заданная функция, а $x(t)$ — искомая. Из (7.17) видно, что решение $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = ct + y(t), \qquad c := \int_0^1 sx(s)ds. \tag{7.18}$$

Для выражения константы c через $y(t)$ подставим $x(t)$ из (7.18) в формулу для c:

$$c = \int_0^1 s(cs + y(s))ds$$

Отсюда находим, что

$$c = \frac{3}{2}\int_0^1 sy(s)ds,$$

и потому

$$x(t) =: (A^{-1}y)(t) = y(t) + \frac{3}{2}\int_0^1 sty(s)ds.$$

Отсюда видно, что оператор A^{-1}, обратный к интегральному оператору A из (7.17), также является интегральным оператором и потому (см. упражнение 7.5) является ограниченным линейным оператором, действующем в $C([a,b])$. $\square$

Пример 7.7. Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда оператор A близок к единичному оператору I, действующему в произвольном банаховом пространстве X.

Очевидно, единичный оператор I имеет ограниченный обратный, так как $I^{-1} = I$. Пусть теперь $A = I - C,\ C \in \mathcal{L}(X)$, причем $\|C\| < 1$. $\square$

Теорема 7.10. *Оператор* $A = I - C$ *непрерывно обратим и для обратного оператора* $A^{-1} = (I - C)^{-1}$ *имеют место оценки*

$$\|(I - C)^{-1}\| \leqslant 1/(1 - \|C\|), \tag{7.19}$$

$$\|I - (I - C)^{-1}\| \leqslant \|C\|/(1 - \|C\|). \tag{7.20}$$

Доказательство. Введем операторы

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} C^k = I + C + C^2 + ... + C^n. \tag{7.21}$$

Можно легко убедиться, что

$$(I - C)S_n = S_n(I - C) = I - C^{n+1}. \tag{7.22}$$

Однако ввиду того, что $\|C\| < 1$, имеем

$$\|C^{n+1}\| \leqslant \|C\|^{n+1} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Поэтому правая часть в (7.22) стремится к единичному оператору при $n \to \infty$ (по равномерной операторной норме, см. определение 7.10).

Проверим, что последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathcal{L}(X)$. В самом деле,

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} C^k\| \leqslant \|C\|^{n+1} + \|C\|^{n+2} + \ldots + \|C\|^{n+p} =$$

$$= \|C\|^{n+1}(1+\|C\|+...+\|C\|^{p-1}) = \frac{\|C\|^{n+1}(1 - \|C\|^p)}{1 - \|C\|} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Так как $\mathcal{L}(X)$ — полное пространство (см. теорему 7.5), то существует предел последовательности операторов (7.21), т.е. предел

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} C^k \in \mathcal{L}(X).$$

Для этого оператора получаем из (7.22), что

$$(I - C)S = S(I - C) = I,$$

т.е. $(I-C)^{-1}$ представляется в виде ряда Неймана:

$$(I-C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k.$$

Отсюда же, как и для геометрической прогрессии, имеем оценку (7.19), а также оценку (7.20), так как

$$I-(I-C)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} C^k, \qquad \|C\| < 1.$$

Теорема доказана. $\square$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какой оператор называется взаимнооднозначным?
2. Какой оператор, действующий в линейном нормированном пространстве, называется линейным?
3. Какой линейный оператор называется непрерывным?
4. Какой линейный оператор называется ограниченным?
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие непрерывности линейного оператора в банаховом пространстве.
6. Докажите утверждение: оператор $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ является ограниченным.
7. Доказать утверждение: интегральный оператор, определяемый формулой $(Ax)(t) := \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ \forall x(t) \in L_2([a,b])$, где $K(t,s)$ - непрерывная функция своих аргументов на отрезке $[a,b]$, является линейным ограниченным оператором.
8. Как определяется норма в пространстве линейных ограниченных операторов?
9. Какое множество называется ядром оператора?
10. Является ли ядро линейного оператора пустым множеством?
11. Какой оператор называется обратным?

12. Сформулируйте достаточное условие существования обратного оператора.

13. Сформулируйте теорему Банаха об обратном операторе.

14. Найдите обратный оператор к оператору $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, определяемому невырожденной матрицей.

8 Линейные функционалы

Важную роль в функциональном анализе наряду с линейными операторами играют линейные функционалы. Хотя эти объекты являются частными случаями линейных операторов, необходимо отдельное рассмотрение их свойств, а также их использования при изучении многих задач.

8.1 Определение и примеры линейных функционалов

Пусть X — полное нормированное вещественное пространство. Рассмотрим линейные операторы (отображения) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, т.е. такие, когда область значений отображения — множество действительных чисел. Эти операторы называются *линейными функционалами*. Как следует из определения нормы линейного оператора (см. п.7.4), норма линейного функционала f равна

$$\|f\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x, f\rangle|, \quad x \in X, \tag{8.1}$$

где символом $\langle x, f\rangle$ обозначено значение функционала f на элементе $x \in X$. Далее будут рассматриваться лишь ограниченные функционалы, т.е. $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.

Отметим, что для линейных функционалов норму можно определить и по следующему правилу:

$$\|f\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle x, f\rangle, \tag{8.2}$$

где в правой части отсутствует знак абсолютной величины. Это связано с тем, что если на некотором элементе $x_0 \in X$ функционал $\langle x_0, f\rangle < 0$, то в силу линейности $\langle -x_0, f\rangle > 0$. Подробное доказательство (8.2) см. в ([5], с. 235).

Рассмотрим примеры линейных функционалов в некоторых (вещественных) нормированных пространствах.

Пример 8.1. Пусть $X = \mathbb{R}^m$ и

$$\langle x, f\rangle := \sum_{k=1}^{m} x_k c_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad c = (c_1, \ldots, c_m), \tag{8.3}$$

где $c_k \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда очевидно, что $\langle x, f\rangle$ линеен, т.е. аддитивен и однороден (относительно $x \in \mathbb{R}^m$). $\square$

Упражнение 8.1. *Используя неравенство Коши-Буняковского для пространства* $\mathbb{R}^m$*, доказать, что*

$$\|f\| \leqslant \|c\| = (\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2)^{1/2}. \qquad \square \tag{8.4}$$

Отсюда следует, что функционал (8.3) линеен и ограничен.

Пример 8.2. Пусть $X = l^2$ и

$$\begin{gathered} \langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k, \\ x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in l^2, \quad c = (c_1, \ldots, c_m, \ldots) \in l^2. \qquad \square \end{gathered} \tag{8.5}$$

Здесь снова очевидно, что функционал (8.5) линеен.

Упражнение 8.2. *Используя неравенство Коши – Буняковского для пространства* l^2*, доказать, что для функционала* (8.5)

$$\|f\| \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2} = \|c\|_{l^2}. \qquad \square \tag{8.6}$$

Пример 8.3. Пусть $X = L_2([a, b])$ и

$$\langle x, f\rangle := \int_a^b x(t)c(t)dt, \quad x(t) \in L_2([a, b]), \quad c(t) \in L_2([a, b]).\square \tag{8.7}$$

По аналогии с предыдущими примерами и упражнениями (и с использованием неравенства Коши – Буняковского для $L_2([a, b])$) можно убедиться, что функционал (8.7) линеен, ограничен и

$$\|f\| \leqslant \|c(t)\|_{L_2([a,b])}. \tag{8.8}$$

Разобранные примеры относятся к случаю, когда X — гильбертово пространство ($X = \mathbb{R}^m, l^2$ или $L_2([a, b])$). Здесь фактически линейный ограниченный функционал задается в виде скалярного произведения произвольного элемента $x \in X$ и фиксированного элемента этого пространства. В банаховых пространствах, не являющихся гильбертовыми, ситуация аналогичная, но более сложная: линейные функционалы в данном пространстве задаются с помощью фиксированных элементов другого пространства. Рассмотрим некоторые примеры, подтверждающие этот факт.

Пример 8.4. Пусть $X = l^p$, $p \neq 2$, и

$$\langle x, f\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in l^p, \quad p > 1, \\ c = (c_1, \ldots, c_m, \ldots) \in l^q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{8.9}$$

Линейность функционала (8.9) здесь снова очевидна.

Упражнение 8.3. *Опираясь на неравенство Гельдера для элементов $x \in l^p$, и $c \in l^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, имеющее вид (см.(6.4))*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k c_k| \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q)^{1/q},$$

доказать, что функционал (8.9) *ограничен и*

$$\|f\| \leqslant \|c\|_{l^q}. \qquad \square$$

Пример 8.5. Пусть $X = L_p([a, b])$, $p \neq 2$, $p > 1$, и

$$\langle x, f\rangle = \int_a^b x(t)c(t)dt, \quad c(t) \in L_q([a, b]), \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \square \tag{8.10}$$

Упражнение 8.4. *Опираясь на неравенство Гельдера* (6.7) *для элементов из $L_p([a, b])$ и $L_q([a, b])$, доказать, что функционал* (8.10) *линеен и ограничен в $L_p([a, b])$, причем*

$$\|f\| \leqslant \|c(t)\|_{L_q([a,b])}. \qquad \square$$

Приведем без доказательства вид линейного функционала в банаховом (но не гильбертовом) пространстве $C([a, b])$. Оказывается (см., например, [5], с. 248-257), что выражение

$$\langle x, f\rangle = \int_a^b x(t)dg(t), \quad x(t) \in C([a, b]), \tag{8.11}$$

где $g(t)$ — так называемая функция ограниченной вариации, а интеграл (8.11) есть интеграл Стильтьеса, является линейным ограниченным функционалом в $C([a, b])$.

Напомним, что функция $g(t)$, $t \in [a, b]$, называется функцией ограниченной вариации, если ее вариация, т.е. точная верхняя грань сумм

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|,$$

отвечающих разбиению $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, ограничена. В частности, любая функция ограниченной вариации есть разность двух неубывающих на $[a, b]$ функций.

8.2 Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве

Свойство, которое уже было обнаружено при рассмотрении примеров 8.1 — 8.3 и состоящее в том, что в гильбертовом пространстве линейный функционал задается в виде скалярного произведения, как оказывается, справедливо и для произвольного гильбертова пространства. Соответствующее утверждение является одной из основных теорем функционального анализа.

Теорема 8.1. *(***Теорема Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве***)*

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (комплексное или вещественное). Для любого ограниченного функционала f, заданного на всем $\mathcal{H}$, существует единственный элемент $c \in \mathcal{H}$ такой, что для всех $x \in \mathcal{H}$

$$\langle x, f \rangle = (x, c). \tag{8.12}$$

При этом

$$\|f\| = \|c\|. \tag{8.13}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ элементов $z \in \mathcal{H}$ таких, что $\langle z, f \rangle = 0$. Это множество, очевидно, линейно. Далее, так как $\langle x, f \rangle$ — линейный ограниченный функционал, то $\mathcal{L}$ — подпространство в $\mathcal{H}$.

В самом деле, если $\{z_n\}$ — фундаментальная последовательность из $\mathcal{L}$, то, во-первых, она имеет предел $z \in \mathcal{H}$, а во-вторых, в силу неравенства

$$\langle z - z_n, f \rangle = |\langle z - z_n, f \rangle| \leqslant C\|z_n - z\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

приходим к выводу, что

$$\langle z, f \rangle - \langle z_n, f \rangle = \langle z, f \rangle \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Значит, $\langle z, f \rangle = 0$, т.е. предельный элемент $z = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} z_n \in \mathcal{L}$, и потому $\mathcal{L}$ — подпространство пространства $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{L} \neq \mathcal{H}$. Тогда найдется элемент $z_0 \perp \mathcal{L}$, $z_0 \neq 0$, т.е. такой, что $\langle z_0, f \rangle \neq 0$. Поэтому можно считать, что $\langle z_0, f \rangle = 1$ (взяв, если потребуется, вместо z_0 элемент $z_0/\langle z_0, f\rangle$). Пусть теперь $x \in \mathcal{H}$. Тогда $x - \langle x, f\rangle z_0 \in \mathcal{L}$, так как

$$\langle x - \langle x, f\rangle z_0, f\rangle = \langle x, f\rangle - \langle x, f\rangle\langle z_0, f\rangle = 0.$$

Следовательно, $x - \langle x, f\rangle z_0 \perp z_0$ и поэтому

$$(x - \langle x, f\rangle z_0, z_0) = (x, z_0) - \langle x, f\rangle \|z_0\|^2 = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\langle x, f\rangle = (x, z_0/\|z_0\|^2) =: (x, c), \quad c \in \mathcal{H}, \tag{8.14}$$

т.е. имеет место представление (8.12). Покажем, что элемент $c \in \mathcal{H}$ определяется по функционалу f единственным образом. Пусть, напротив, имеется два представления (8.14), т.е.

$$\langle x, f\rangle = (x, c) = (x, \widetilde{c}), \quad c, \widetilde{c} \in \mathcal{H}.$$

Тогда $(x, c - \widetilde{c}) = 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Поэтому $c = \widetilde{c}$.

Докажем теперь, что выполнено свойство (8.13). Действительно, по неравенству Коши – Буняковского имеем

$$|\langle x, f\rangle| = |(x, c)| \leqslant \|c\| \cdot \|x\|,$$

а тогда по определению нормы функционала (см. (8.1)) будет $\|f\| \leqslant \|c\|$. Однако при $x = c$ получаем

$$\langle c, f\rangle = (c, c) = \|c\|^2 \leqslant \|f\| \cdot \|c\|,$$

откуда следует, что $\|c\| \leqslant \|f\|$. Поэтому $\|c\| = \|f\|$, и теорема доказана. $\square$

Следствием доказанной теоремы является такое утверждение: в разобранных выше примерах 8.1 — 8.3 вместо неравенств (8.4), (8.6), (8.8), оценивающих нормы функционалов, на самом деле имеют место равенства, так как справедливо общее свойство (8.13).

8.3 Теорема Хана – Банаха

Вернемся к рассмотрению свойств линейных ограниченных функционалов в произвольном банаховом пространстве X.

Пусть $\mathcal{L}$ — одномерное подпространство из X, натянутое на ненулевой элемент $x_0 \in X$, т.е.

$$\mathcal{L} = \{tx_0 : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Легко построить пример линейного ограниченного функционала f с областью определения $\mathcal{D}(f) = \mathcal{L}$. В самом деле, для любого $x = tx_0 \in \mathcal{L}$ определим функционал f согласно закону

$$\langle x, f\rangle = t\|x_0\|^2.$$

Нетрудно видеть, что этот функционал f линеен. Покажем, что он ограничен на $\mathcal{L}$ и для него выполнено свойство

$$\|f\| = \|x_0\|.$$

В самом деле, при $t \neq 0$

$$|\langle x, f\rangle| = |t|\|x_0\|^2 \leqslant \|x_0\| \cdot \|x\|$$

и потому по определению нормы

$$\|f\| \leqslant \|x_0\|.$$

С другой стороны,

$$|\langle x_0, f\rangle| = \|x_0\|^2 \leqslant \|f\| \cdot \|x_0\|,$$

и тогда $\|f\| \geqslant \|x_0\|$. Значит, $\|f\| = \|x_0\|$.

Итак, в произвольном банаховом пространстве X существуют линейные ограниченные функционалы, заданные на одномерных подпространствах $\mathcal{L}$ этого пространства.

Оказывается, что с любого линейного множества $\mathcal{L}$ элементов из X, в том числе и одномерного, как в предыдущем примере, линейный ограниченный функционал f можно продолжить (расширить) на линейное множество $\mathcal{L}_1$ с размерностью, большей размерности $\mathcal{L}$ на единицу, так, что продолженный функционал $\widetilde{f}$, заданный уже на $\mathcal{L}_1$, будет совпадать с функционалом f на $\mathcal{L}$, т.е.

$$\langle x, f\rangle = \langle x, \widetilde{f}\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{L},$$

и при этом выполнено свойство

$$\|f\| = \|\widetilde{f}\|.$$

Такое продолжение функционала с $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_1$ называется *продолжением с сохранением нормы.* Доказательство сформулированного утверждения, которое называется *леммой об элементарном продолжении*, можно найти в ([15], с.170 — 172).

На основе этой леммы доказывается следующий фундаментальный результат.

Теорема 8.2. *(***Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала на все пространство с сохранением нормы***, см. [15], с.170 – 172). Пусть в (вещественном) нормированном полном пространстве X задан линейный ограниченный функционал f с областью определения $\mathcal{D}(f) \subset X$. Тогда существует всюду определенный в X линейный ограниченный функционал $\widetilde{f}$ такой, что $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ и*

$$\langle x, f \rangle = \langle x, \widetilde{f} \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f). \qquad \square$$

Коротко говоря, теорема Хана – Банаха утверждает, что всякий линейный ограниченный функционал, определенный на некотором линейном многообразии (множестве), можно продолжать на все пространство с сохранением нормы.

Вместо доказательства теоремы Хана – Банаха отметим, что если пространство X *сепарабельно*, т. е. в нем существует счетное плотное множество, то продолжение функционала осуществляется с использованием леммы об элементарном продолжении на подпространства, натянутые на линейно независимые элементы этого счетного множества: сначала на первый, затем на первый и второй, и т. д.

Отметим еще, что теорема Хана-Банаха справедлива и в случае комплексного пространства X.

Приведем еще один важный факт, являющийся следствием теоремы Хана-Банаха (см. [15], с.175). Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — линейно независимая система элементов в банаховом пространстве X. Тогда найдется система линейных ограниченных функционалов $\{f_k\}_{k=1}^n$, заданных на всем X, такая, что:

$$\langle x_k, f_l \rangle = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.15}$$

Системы $\{x_k\}_{k=1}^n$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$, обладающие свойствами (8.15), называются *биортогональными*; они обобщают свойства ортонормированных систем, хорошо известных в случае гильбертова пространства, т. е. когда $X = \mathcal{H}$.

8.4 Слабая сходимость в линейных нормированных пространствах

Пусть X — полное линейное нормированное, т. е. банахово, пространство. Множество линейных ограниченных функционалов, действующих в X, обозначим кратко через X^*. В частности, если X — вещественное пространство, то $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, а если комплексное, то $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$.

Пусть дана последовательность элементов $\{x_n\} \subset X$.

Определение 8.1. *Последовательность $\{x_n\}$ называется слабо сходящейся к элементу $x_0 \in X$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, f\rangle = \langle x_0, f\rangle, \qquad \forall f \in X^*. \qquad \square$$

Если $x_n \to x_0$ слабо, то x_0 называют слабым пределом последовательности $\{x_n\}$. Докажем, что слабый предел x_0 последовательности $\{x_n\}$ определяется единственным образом. Пусть, например, последовательность $\{x_n\}$ сходится слабо к x_0 и $\widetilde{x_0}$. Тогда $\langle x_0, f\rangle = \langle \widetilde{x_0}, f\rangle$, т. е. $\langle x_0 - \widetilde{x_0}, f\rangle = 0$, $\forall f \in X^*$. Если бы здесь было $x_0 - \widetilde{x_0} \neq 0$, то, как и в начале п. 8.3, можно убедиться, что существует функционал f_0, заданный на одномерном подпространстве $\{t(x_0 - \widetilde{x_0})\}$, такой, что $\langle x_0 - \widetilde{x_0}, f_0\rangle \neq 0$. По теореме Хана-Банаха этот функционал можно расширить с сохранением нормы на все X^*, и возникает противоречие с тем, что $\langle x_0 - \widetilde{x_0}, f\rangle = 0$ для $\forall f \in X^*$. Значит, $x_0 - \widetilde{x_0} = 0$, т. е. $x_0 = \widetilde{x_0}$.

В отличие от слабо сходящейся последовательности, последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся в X к элементу x_0, т. е. такую, что $\|x_n - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty)$, называют *сильно сходящейся.*

Теорема 8.3. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 сильно, то x_n сходится к x_0 слабо.*

Доказательство. Если $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$, то

$$|\langle x_n, f\rangle - \langle x_0, f\rangle| = |\langle x_n - x_0, f\rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \square$$

Утверждение, обратное теореме 8.3, неверно, т. е. существуют слабо, но не сильно сходящиеся последовательности.

Пример 8.6. Пусть $X = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис. Для любого элемента $x \in \mathcal{H}$, имеем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 < \infty.$$

Поэтому коэффициенты Фурье $(x, e_k) \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$. Однако выражение (y, x), $y \in \mathcal{H}$, является (по теореме 8.1) линейным ограниченным функционалом в $\mathcal{H}$, т.е. $(y, x) = \langle y, f\rangle$. Отсюда следует, что последовательность ортов $\{e_k\}$ слабо сходится к нулевому элементу, так как $(e_k, x) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. С другой стороны, при $k \neq j$ имеем

$$\|e_k - e_j\|^2 = (e_k - e_j, e_k - e_j) = 2.$$

Значит, последовательность не является фундаментальной и поэтому не является сильно сходящейся. $\square$

Приведем без доказательства критерий слабой сходимости последовательности $\{x_n\}$ в банаховом пространстве X (доказательство см. в [15], с. 185).

Теорема 8.4. *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходилась слабо к x_0, необходимо и достаточно, чтобы:*
1^0. *последовательность норм $\{\|x_n\|\}$ была ограничена;*
2^0. $\langle x_n, f\rangle \longrightarrow \langle x_0, f\rangle$ *при $n \longrightarrow \infty$ для любого f из множества функционалов, плотного в X^*.* $\square$

Оказывается, в конечномерных пространствах понятия сильной и слабой сходимости совпадают (см. в [15], с. 184).

Теорема 8.5. *Если X конечномерно и $x_n \longrightarrow x_0$ слабо, то $x_n \longrightarrow x_0$ сильно.* $\square$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте определение линейного функционала. Какова область значений линейного функционала?

2. Как определяется норма линейного функционала?

3. Приведите примеры линейных функционалов, область определения которых являются пространства:

    1. $\mathbb{R}^m$;
    2. l^2.

4. Сформулируйте теорему Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

5. Можно ли расширить линейный ограниченный функционал, определенный на плотном множестве в нормированном пространстве, на все пространство с сохранением нормы? Обоснуйте ответ.

9 Сопряженные и самосопряженные операторы

В линейной алгебре уже встречалось понятие сопряженной и самосопряженной матрицы. Аналогичные понятия имеют место и для операторов, действующих в гильбертовом и банаховом пространстве. Следует отметить, что самосопряженными оказываются многие операторы математической физики, гидродинамики, а квантовая механика описывается на языке теории самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве.

9.1 Определение сопряженного оператора

Пусть $\mathcal{H}$ (комплексное или вещественное) — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Составим выражение

$$\langle x, f_y \rangle := (Ax, y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}, \tag{9.1}$$

т. е. зададим функционал f_y формулой (9.1). Очевидно, этот функционал определен на всем $\mathcal{H}$ и линеен относительно x, т. е.

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, f_y \rangle = \alpha_1 (Ax_1, y) + \alpha_2 (Ax_2, y) = \alpha_1 \langle x_1, f_y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, f_y \rangle.$$

Далее, этот функционал ограничен, так как

$$|\langle x, f_y \rangle| = |(Ax, y)| \leqslant \|A\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|,$$

и поэтому

$$\|f_y\| \leqslant \|A\| \cdot \|y\|. \tag{9.2}$$

Отсюда следует, что согласно теореме Ф.Рисса (теорема 8.1) его можно представить в виде скалярного произведения (x, y_*), где элемент $y_* \in \mathcal{H}$ однозначно находится по f_y. Таким образом, имеем

$$(Ax, y) = (x, y_*), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{9.3}$$

Элемент y_*, очевидно, определяется по элементу y и оператору A, и возникает отображение $y_* =: A^* y$, т. е.

$$(Ax, y) = (x, A^* y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{9.4}$$

Отображение A^*, как легко убедиться, является линейным ограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H}$, и называется оператором, *сопряженным* с оператором A.

Упражнение 9.1. *Проверить свойство линейности оператора A^*.*
□

Лемма 9.1. *Для любого $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ справедливо свойство*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Доказательство. Установим сначала неравенство

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|, \tag{9.5}$$

откуда следует ограниченность оператора A^*. По теореме Ф.Рисса (и из (9.2)) имеем

$$\|f_y\| = \|y_*\| = \|A^*y\| \leqslant \|A\| \cdot \|y\|, \qquad \forall y \in \mathcal{H},$$

и (9.5) доказано.

Введем теперь аналогично предыдущему функционал

$$\langle y, \varphi_x \rangle := (A^*y, x) = (y, Ax).$$

Тогда

$$|\langle y, \varphi_x \rangle| \leqslant \|A^*\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|$$

и поэтому

$$\|\varphi_x\| = \|Ax\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|x\|,$$

откуда следует неравенство $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. □

Упражнение 9.2. *Пусть $X = \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)^t$, а оператор A задается матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$. Доказать, что $A^* = (a_{ji})_{i,j=1}^m$, т. е. A^* – транспонированная матрица.* □

Упражнение 9.3. *Пусть $X = \mathbb{C}^m$, и снова оператор A задается в виде $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, где теперь a_{ij} — комплексные числа. Доказать, что в этом случае $A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^m$, т. е. A^* — матрица, эрмитово сопряженная к матрице A.* □

Рассмотрим теперь важный для дальнейшего пример интегрального оператора.

Пример 9.1. Пусть $X = L_2([a, b])$ — вещественное пространство, а оператор $K : L_2([a, b]) \to L_2([a, b])$ является интегральным оператором,

$$(Kx)(t) := \int_a^b K(t, s)x(s)ds, \tag{9.6}$$

с непрерывным в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ ядром $K(t, s)$.

Пользуясь определением (9.4) сопряженного оператора, имеем

$$(Kx, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds \right) y(t)dt =$$
$$= \int_a^b x(s) \left(\int_a^b K(t,s)y(t)dt \right) ds =$$
$$= \int_a^b x(t) \left(\int_a^b K(s,t)y(s)ds \right) dt =: (x, K^* y),$$

откуда следует, что

$$(K^* y)(t) = \int_a^b K(s,t)y(s)ds.$$

Таким образом, сопряженный оператор K^* является интегральным оператором с ядром

$$K^*(t, s) = K(s, t),$$

транспонированным по отношению к исходному ядру $K(t, s)$. □

Упражнение 9.4. *Проверить, что в комплексном гильбертовом пространстве $L_2([a, b])$ оператор, сопряженный к интегральному оператору* (9.6)*, определяется формулой*

$$(K^* y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds,$$

т.е. его ядро $K^*(t, s)$ транспонировано и комплексно сопряжено по отношению к $K(t, s)$:

$$K^*(t, s) = \overline{K(s,t)}. \qquad \square$$

9.2 Самосопряженные операторы

Пусть $\mathcal{H}$ — *комплексное* гильбертово пространство.

Определение 9.1. *Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется самосопряженным (или эрмитовым), если $A = A^*$, т.е. если*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \qquad \square \tag{9.7}$$

Как уже упоминалось, самосопряженные операторы часто встречаются при исследовании прикладных задач методами функционального анализа. Рассмотрим некоторые примеры самосопряженных операторов и установим их некоторые свойства.

Если $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$ (см. упражнение 9.3), то матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ является самосопряженным оператором, если

$$\overline{a_{ji}} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Как следует из упражнения 9.4, интегральный оператор (9.6) является самосопряженным в (комплексном) пространстве $L_2([a, b])$ тогда и только тогда, когда для его ядра $K(t, s)$ выполнено условие

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s).$$

Теорема 9.1. *Пусть A, B — самосопряженные операторы в $\mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha A + \beta B$ — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Оно основано на прямом вычислении, связанном с проверкой свойства (9.7) для линейной комбинации операторов:

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$
$$= \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha Ay + \beta By) = (x, (\alpha A + \beta B)y). \qquad \square$$

Теорема 9.2. *Если A – самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор, то*

$$(Ax, x) \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Доказательство. Оно очень простое:

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Теорема 9.3. *Если A — самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор, то*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Пусть

$$c_A := \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|. \tag{9.8}$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| \leqslant 1$, имеем

$$|(Ax, x)| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2 \leqslant \|A\|,$$

и поэтому

$$c_A \leqslant \|A\|.$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Воспользуемся тождеством (проверьте его справедливость!)

$$4\,\mathrm{Re}(Ax, y) = (A(x+y), (x+y)) - (A(x-y), (x-y)).$$

Отсюда и из неравенства

$$|(Ax, x)| \leqslant c_A \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

следующего из (9.8), получаем, что

$$4|\,\mathrm{Re}(Ax, y)| \leqslant c_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2c_A(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Тогда при $\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant 1$ имеем

$$|\,\mathrm{Re}(Ax, y)| \leqslant c_A.$$

Полагая здесь $y = Ax/\|Ax\|$, $Ax \neq 0$, получим

$$\frac{(Ax, Ax)}{\|Ax\|} \leqslant c_A, \quad \|x\| \leqslant 1,$$

откуда и следует неравенство

$$\|A\| \leqslant c_A. \qquad \square$$

Определение 9.2. *Будем говорить, что самосопряженный оператор A неотрицателен, и писать $A \geqslant 0$, если*

$$(Ax, x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Упражнение 9.5. *Проверить, что если $A_1 \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, то*

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \geqslant 0. \qquad \square$$

Определение 9.3. *Пусть A, B — самосопряженные операторы из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Будем писать $A \geqslant B$, если $A - B \geqslant 0$, т.е.*

$$(Ax, x) \geqslant (Bx, x), \quad \forall\, x \in \mathcal{H}. \qquad \square$$

9.3 Операторы ортогонального проектирования

Рассмотрим более подробно важный частный случай ограниченного самосопряженного неотрицательного оператора — *оператор ортогонального проектирования*, или *ортопроектор*.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано подпространство $\mathcal{L}$. Согласно теореме 5.1 каждому элементу $x \in \mathcal{H}$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in \mathcal{L}$ – ортогональную проекцию элемента x на $\mathcal{L}$. Тем самым определен оператор $P = P_{\mathcal{L}} : \mathcal{H} \to \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$, действующий по закону

$$y = Px, \quad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

и называемый *ортопроектором*.

Перечислим основные свойства ортопроекторов, которые вытекают в результате рассмотрения следующих упражнений.

Упражнение 9.6. *Покажите, что $y \in \mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда $Py = y$, а $z \in \mathcal{L}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $Pz = 0$.* $\square$

Упражнение 9.7. *Докажите, основываясь на разложении $x = y + z,\ \ y \in \mathcal{L},\ \ z \in \mathcal{L}^{\perp}$, что ортопроектор $P = P_{\mathcal{L}}$ является всюду определенным в $\mathcal{H}$ линейным оператором, т.е. для него выполнено свойство*

$$P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P x_1 + \lambda_2 P x_2, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{H}. \qquad \square$$

Отметим далее и другие важные свойства ортопроекторов.

Свойство 9.1. *Ортопроектор $P = P_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, причем $\|P\| = 1$, если $\mathcal{L} \neq \{0\}$.* $\square$

В самом деле, по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2, \quad y = Px, \tag{9.9}$$

и потому $\|Px\|^2 \leqslant \|x\|^2$, т.е. $\|P\| \leqslant 1$. Если $\mathcal{L} \neq \{0\}$, то существует $x_0 \in \mathcal{L}$, $\|x_0\| = 1$. Тогда $1 = \|x_0\| = \|Px_0\| \leqslant \|P\| \cdot \|x_0\| = \|P\|$, т.е. $\|P\| \geqslant 1$. Поэтому $\|P\| = 1$.

Свойство 9.2. *Справедливо соотношение*

$$P^2 = P. \qquad \square$$

Действительно, для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем $y = Px \in \mathcal{L}$,

$$Py = P^2 x = y = Px.$$

Свойство 9.3. *Оператор P самосопряжен:*

$$P = P^*. \qquad \square$$

В самом деле, пусть $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$ – произвольные элементы из $\mathcal{H}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$, $z_1, z_2 \in \mathcal{L}^{\perp}$. Тогда

$$(Px_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, Px_2),$$

так как $(y_1, z_2) = (z_1, y_2) = 0$. $\quad \square$

Свойство 9.4. *Ортопроектор P неотрицателен.*

Действительно,

$$(Px, x) = (P^2 x, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geqslant 0, \ \forall x \in \mathcal{H}. \tag{9.10}$$

Свойство 9.5. *Равенство $\|Px\| = \|x\|$ выполнено тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{L}$.* $\quad \square$

Этот факт очевиден из теоремы Пифагора (см. (9.9)).

Свойство 9.6. *Для любого $X \in \mathcal{H}$*

$$(Px, x) \leqslant \|x\|^2,$$

причём равенство здесь достигается только лишь в случае, когда $Px = x$, т.е. $x \in \mathcal{L}$. $\quad \square$

Действительно,

$$(Px, x) \leqslant \|Px\| \cdot \|x\|^2 = \|x\|^2.$$

Если же $(Px, x) = (x, x)$, то согласно (9.10) $\|Px\|^2 = \|x\|^2$ и по свойству (9.5) $x \in \mathcal{L}$.

Приведём ещё критерий того, что оператор P является ортопроектором: для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$P^2 = P = P^*.$$

9.4 Взаимоотношения между подпространствами и ортопроекторами

Здесь будут приведены без доказательства основные факты, описывающие связи между подпространствами гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и отвечающими им ортопроекторами (подробности см. в [15], с. 195-199).

Теорема 9.4. *Пусть P_1 — ортопроектор на подпространство $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{H}$, а P_2 — на подпространство $\mathcal{L}_2$. Тогда следующие условия эквивалентны, т.е. из выполнения любого из них следует справедливость всех других:*
1^0. $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$;
2^0. $P_1 P_2 = P_2$;
3^0. $P_2 P_1 = P_2$;
4^0. $\|P_2 x\| \leqslant \|P_1 x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}$;
5^0. $(P_2 x, x) \leqslant (P_1 x, x), \quad \forall x \in \mathcal{H}$. $\square$

Доказательство этого утверждения предлагается провести самостоятельно.

Определение 9.4. *Проекторы P_1 и P_2 называются ортогональными, $P_1 \perp P_2$, если $P_1 P_2 = 0$.* $\square$

Если $P_1 \perp P_2$, то и $P_2 \perp P_1$, так как $0 = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$, т.е. $P_2 \perp P_1$.

Здесь использовано общее свойство

$$(AB)^* = B^* A^*$$

для операторов из $L(\mathcal{H})$; предоставляем доказать это свойство самостоятельно.

Теорема 9.5. *Пусть P_1 — ортопроектор на подпространство $\mathcal{L}_1$, а P_2 — на подпространство $\mathcal{L}_2$. Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны тогда и только тогда, когда $P_1 \perp P_2$.* $\square$

Теорема 9.6. *Произведение $P_1 P_2$ двух проекторов P_1 и P_2 является проектором в том и только том случае, когда они перестановочны : $P_1 P_2 = P_2 P_1$.* $\square$

Теорема 9.7. *Пусть P_i — проектор на подпространство $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$. Пусть P_1 и P_2 перестановочны. Тогда $P_1 P_2$ — проектор на $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.* $\square$

Теорема 9.8. *Сумма конечного числа операторов проектирования, т.е. $P_1 + ... + P_n$, является оператором проектирования тогда и только тогда, когда эти операторы попарно ортогональны: $P_k P_l = 0$ при $k \neq l$.* $\square$

Теорема 9.9. *Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — попарно ортогональные проекторы, причем P_i проектирует $\mathcal{H}$ на $\mathcal{L}_i$. Тогда $P_1 + \dots + P_n$ проектирует $\mathcal{H}$ на ортогональную сумму подпространств*

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n = \oplus_{k=1}^n \mathcal{L}_k. \qquad \square$$

Теорема 9.10. *Разность $P_1 - P_2$ проекторов P_1 и P_2 является проектором тогда и только тогда, когда $P_1 \geqslant P_2$. В этом случае $P_1 - P_2$ есть проектор пространства $\mathcal{H}$ на ортогональную разность $\mathcal{L}_1 \ominus \mathcal{L}_2$.* $\square$

9.5 Общее определение сопряженного оператора

До сих пор рассматривались сопряженные (и самосопряженные) операторы, действующие в одном и том же и притом гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Эту ситуацию можно значительно обобщить, считая, во-первых, что оператор действует из одного пространства в другое, а во-вторых, операторы действуют не в гильбертовых, а в банаховых пространствах (см. например [15], стр.186-188).

Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, где X и Y — банаховы пространства. Составим выражение $\langle Ax, f \rangle$, где $x \in X$, $Ax \in Y$, $f \in Y^*$, и введем функционал $\varphi(x)$ формулой

$$\varphi(x) := \langle x, \varphi \rangle := \langle Ax, f \rangle, \; x \in X, \; \varphi \in X^*. \tag{9.11}$$

Отметим некоторые свойства этого функционала.

1^0. $\mathcal{D}(\varphi) = X$;

2^0. φ — линейный функционал, так как

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \langle A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), f \rangle =$$

$$= \alpha_1 \langle Ax_1, f \rangle + \alpha_2 \langle Ax_2, f \rangle = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2);$$

3^0. φ ограничен, поскольку

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax, f \rangle| \leqslant \|Ax\| \cdot \|f\| \leqslant \|A\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|.$$

Значит, $\varphi \in X^*$. Итак, каждому $f \in Y^*$ поставлен в соответствие по формуле (9.11) элемент $\varphi \in X^*$. Тем самым задан линейный ограниченный оператор A^* формулой $\varphi = A^* f$. Этот оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и называется оператором, сопряженным к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Теперь формула (9.11) переписывается в виде

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle, \quad \forall x \in X,\ f \in Y^*, \tag{9.12}$$

более общем, чем соответствующая формула (9.3) для случая $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. При этом снова, как и в лемме 9.1, справедливо свойство $\|A^*\| = \|A\|$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Докажите утверждение: Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определен линейный ограниченный оператор A. Тогда сопряженный оператор A^* является линейным.

2. Какой оператор называется самосопряженным?

3. Какому условию должен удовлетворять самосопряженный оператор, определенный в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$?

4. Является ли самосопряженным произвольный оператор, определенный в пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$?

5. Какой оператор называется неотрицательным? положительно определенным?

6. Докажите утверждение: сумма неотрицательных операторов является неотрицательным оператором.

7. Какой оператор называется ортопроектором?

10 Компактные множества и вполне непрерывные операторы

В математическом анализе хорошо известна теорема Больцано – Вейерштрасса, в которой утверждается, что из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Эта теорема справедлива и в любом конечномерном банаховом пространстве, однако в бесконечномерном пространстве она уже не имеет места.

В самом деле, если $X = \mathcal{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ — ортонормированный базис, то эта последовательность ограничена, но ни она, ни любая её подпоследовательность не являются сходящимися ($\|e_k - e_j\|^2 = 2, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}, \quad k \neq j$).

Свойство, выражаемое теоремой Больцано – Вейерштрасса, весьма важно и в бесконечномерных пространствах. Поэтому представляет смысл выделить случаи, когда оно справедливо.

10.1 Компактные множества в банаховых пространствах

Перейдём к введению соответствующих понятий.

Определение 10.1. *Множество M банахова пространства X называется компактным, если из каждой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность, т.е. найдётся такая последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что*

$$\|x_{n_k} - x_{n_j}\| \longrightarrow 0 \quad (k, j \longrightarrow \infty). \qquad \square$$

Так как X — банахово, то $x_{n_k} \to x_0 \in X$ $(k \longrightarrow \infty)$, однако не обязательно $x_0 \in M$.

Определение 10.2. *Множество M банахова пространства X называется бикомпактным, если из каждой последовательности $\{x_n\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, предел x_0 которой принадлежит M.* $\square$

Отметим, что всякое бикомпактное множество M ограничено. В самом деле, если оно не ограничено, то найдётся $\{x_n\} \subset M$, такая, что $\|x_n\| > n$, $n = 1, 2, \ldots$, а тогда из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как предел норм любой подпоследовательности элементов будет равен $+\infty$.

Заметим ещё, что компактное множество в банаховом пространстве бикомпактно тогда и только тогда, когда оно (множество) замкнуто.

Сейчас будет сформулирован критерий компактности множества. Этот критерий основан на следующем важном определении.

Определение 10.3. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ и пусть $\varepsilon > 0$. Множество M_ε называется ε - сетью множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется такая точка $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$, что $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$.* □

Геометрически ε - сеть M_ε для множества M — это объединение шаров $S_\varepsilon(x_\varepsilon)$ радиуса ε с центрами в точках x_ε множества M_ε, такое, что

$$M \subset \bigcup_{x_\varepsilon \in M_\varepsilon} S_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Приведем далее без доказательств ряд утверждений, связанных с понятием компактного множества в банаховом пространстве.

Теорема 10.1. *(**Теорема Хаусдорфа**, см. [15] с. 203-205). Множество $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε - сеть.* □

Из этой теоремы, которая дает критерий компактности множества $M \subset X$, можно вывести такое следствие.

Теорема 10.2. *Если при любом $\varepsilon > 0$ для множества $M \subset X$ существует компактная ε - сеть $M_\varepsilon \subset X$, то множество M компактно.* □

Отметим еще два свойства компактных множеств:

1^0. Компактное множество ограничено.

2^0. Всякое компактное множество сепарабельно, т.е. в нем существует счетное плотное подмножество.

Критерии компактности множеств в конкретных банаховых пространствах могут иметь формулировки, отличные от теоремы Хаусдорфа. Здесь будет приведен лишь результат для пространства $X = C([a, b])$.

Определение 10.4. *Будем говорить, что элементы множества* $M \subset C([a,b])$ *равномерно ограничены, если существует такая постоянная* $c > 0$*, что* $|x(t)| \leqslant c,\ \forall t \in [a,b]$ *для любых* $x(t) \in M$. $\square$

Определение 10.5. *Будем говорить, что элементы из* $M \subset C([a,b])$ *равностепенно непрерывны, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* $\dot{t}, \ddot{t} \in [a,b]$*, удовлетворяющих неравенству* $|\dot{t} - \ddot{t}| < \delta$*, имеет место неравенство* $|x(\dot{t}) - x(\ddot{t}|) < \varepsilon$ *сразу для всех* $x(t)$ *из* M. $\square$

Теорема 10.3. *(***теорема Арцела***, см. [15], с. 207-209).*

Для того, чтобы множество $M \subset C([a,b])$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции из* M *были:*

1^0. *равномерно ограничены;*

2^0. *равностепенно непрерывны.* $\square$

10.2 Линейные вполне непрерывные операторы

Пусть X, Y - банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Определение 10.6. *Оператор* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *называется вполне непрерывным (или компактным), если он переводит замкнутый единичный шар пространства* X *в компактное множество пространства* Y. $\square$

Отметим сразу же, что далеко не всякий оператор A из $\mathcal{L}(X,Y)$ будет вполне непрерывным. Если, например, $Y = X$ и $A = I$, где I — единичный (тождественный) оператор, то он не является вполне непрерывным, если только X — бесконечномерное пространство.

Непосредственно из определения 10.6 вытекает следующее свойство.

Теорема 10.4. *Если* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *вполне непрерывен, то любое ограниченное в* X *множество он переводит в множество, компактное в* Y.

Доказательство. Пусть M — ограниченное в X множество и $\|x\| \leqslant R, \quad \forall x \in M$. Возьмём любую последовательность $\{x_n\} \subset M$, а также последовательность $\{y_n\}$, $y_n = Ax_n$. Последовательность элементов $\{x_n/R\}$ принадлежит единичному шару в X. Так как A

вполне непрерывен, то $\{Ax_n/R\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{Ax_{n_k}/R\}$. Но тогда $\{Ax_{n_k}\}$ — фундаментальная подпоследовательность последовательности $y = Ax_n$, т.е. множество

$$AM := \{y \in Y : y = Ax, x \in M\}$$

компактно. $\square$

Множество всех вполне непрерывных операторов далее будем обозначать символом $\mathfrak{S}(X,Y)$. Сформулируем без доказательства некоторые свойства множества $\mathfrak{S}(X,Y)$ (доказательства см., например, в [15], с. 213-215).

Теорема 10.5. $\mathfrak{S}(X,Y)$ *является подпространством в* $\mathcal{L}(X,Y)$. $\square$

Теорема 10.6. *Если* X *или* Y *конечномерны, то* $\mathfrak{S}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$. $\square$

В частности, всякий линейный функционал $f \in X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ вполне непрерывен, так как $\mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство. То же свойство справедливо при $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in X$, а $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X^*$. Линейный оператор P_n,

$$P_n x := \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle \varphi_k,$$

называют *конечномерным* . Такие операторы ограничены, так как

$$\|P_n x\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\langle x, f_k \rangle| \|\varphi_k\| \leqslant c\|x\|, c = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| \cdot \|\varphi_k\| > 0.$$

Кроме того, они вполне непрерывны, так как область их значений конечномерна (n - мерна).

В качестве следствия из этого факта и теоремы 10.5 получаем такой вывод.

Теорема 10.7. *Если* $A = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} A_n$ *(в метрике* $\mathcal{L}(X,Y)$*), где* A_n *— конечномерные или вполне непрерывные операторы, то* A *вполне непрерывен.* $\square$

Весьма полезным является и следующий результат.

Теорема 10.8. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Если хотя бы один из этих операторов вполне непрерывен, то вполне непрерывен будет и оператор $BA : X \longrightarrow Z$.*

Доказательство. Оно следует из того, что ограниченный оператор переводит ограниченное множество в ограниченное, а вполне непрерывный - ограниченное множество в компактное. $\square$

Ещё один факт даёт связь между вполне непрерывными операторами, а также сильно и слабо сходящимися последовательностями.

Теорема 10.9. *Пусть $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 в X, а $A \in \mathfrak{S}(X,Y)$. Тогда $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к $Ax_0 \in Y$.* $\square$

Наконец, напомним, что если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то согласно общему определению сопряженного оператора (см. п. 9.5), оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

Теорема 10.10. *(**теорема Шаудера**, см. [15], с. 215). Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, где X и Y — банаховы пространства. Оператор A вполне непрерывен, т.е. $A \in \mathfrak{S}(X,Y)$, тогда и только тогда, когда $A^* \in \mathfrak{S}(Y^*, X^*)$.* $\square$

10.3 Примеры вполне непрерывных операторов

Рассмотрим некоторые примеры вполне непрерывных операторов, действующих в гильбертовых либо банаховых пространствах.

Пример 10.1. Рассмотрим в $X = l^2$ оператор A, действующий в этом пространстве на любой элемент $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ по закону $y = Ax$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$y_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l, \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 < \infty.$$

Операторы такого вида называют *матричными операторами Гильберта – Шмидта.*

Как уже упоминалось в примере 7.2 и упражнении 7.3, оператор A ограничен в l^2 и

$$\|A\| \leqslant c := (\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2)^{1/2}.$$

Докажем теперь, что A вполне непрерывен. Обозначим через A_n оператор, переводящий всякий элемент $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ в элемент

$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots\}$. Так как область значений оператора A_n конечномерна (n – мерна), то каждый A_n по теореме 10.6 вполне непрерывен.

Поскольку, кроме того,

$$\|A_n - A\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

то по теореме 10.7 оператор A вполне непрерывен. $\square$

Продолжим рассмотрение примеров.

Пример 10.2. Пусть $X = Y = C([a,b])$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(Kx)(t) := \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \tag{10.1}$$

с непрерывным ядром $K(t,s)$, заданным на квадрате $Q := [a,b] \times [a,b]$. Пусть $M := \max\limits_{Q} |K(t,s)|$.

Возьмем в $C([a,b])$ единичный шар

$$S := \{x(t) \in C([a,b]) : \ \|x(t)\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \leqslant 1\}. \tag{10.2}$$

Тогда

$$\|Kx\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)M \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| = (b-a)M\|x\| \leqslant (b-a)M.$$

Отсюда следует, что функции из множества $KS := \{(Kx)(t) : x(t) \in S\}$ равномерно ограничены.

Докажем теперь равностепенную непрерывность функций из KS, тогда по теореме Арцела (см. теорему 10.3) множество KS будет компактным и потому оператор K будет вполне непрерывным. Имеем для любой функции $y = Kx$ из KS:

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_a^b K(t_1,s)x(s)\,ds - \int_a^b K(t_2,s)x(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \cdot |x(s)|\,ds.$$

Тогда по неравенству Коши – Буняковского получаем

$$|y(t_1)-y(t_2)|^2 \leqslant \int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)|^2\,ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)\int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)|^2\,ds \cdot (\max_{a\leqslant s\leqslant b}|x(s)|)^2 =$$

$$= (b-a)\int_a^b |K(t_1,s)-K(t_2,s)|^2\,ds.$$

Так как непрерывная функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна на $Q=[a,b]\times[a,b]$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых t_1, t_2 из $[a,b]$ и любого $s\in[a,b]$ при $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ выполнено условие $|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\varepsilon$. Поэтому из предыдущего неравенства имеем

$$|y(t_1)-y(t_2)|^2 < (b-a)^2\varepsilon^2,$$

откуда следует равностепенная непрерывность множества KS, и, следовательно, оператор $K:\ C([a,b])\longrightarrow C([a,b])$ вполне непрерывен. $\square$

Некоторым видоизменением примера 10.2 является следующий пример.

Пример 10.3. Пусть $X=Y=L_2([a,b])$, а оператор K снова является интегральным, задан выражением (10.1) и его ядро обладает прежними свойствами.

Покажем, что K вполне непрерывен как оператор, действующий в $L_2([a,b])$. Пусть S — единичный шар в $L_2([a,b])$, т.е.

$$S=\{x(t)\in L_2([a,b]):\ \|x\|^2=\int_a^b |x(t)|^2\,dt\leqslant 1\}.$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ из S и последовательность

$$y_n(t) := (Kx_n)(t) = \int_a^b K(t,s)x_n(s)\,ds.$$

Докажем, что функции $y_n(t)$ непрерывны на $[a,b]$, а их совокупность $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — равностепенно непрерывное множество в $C([a,b])$.

В самом деле,

$$
\begin{gathered}
|y_n(t_1) - y_n(t_2)| \leqslant \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \cdot |x_n(s)|\,ds \leqslant \\
\leqslant \left\{ \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|^2\,ds \right\}^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |x_n(s)|^2\,ds \right)^{1/2} < \\
< \varepsilon\sqrt{b-a},
\end{gathered}
\tag{10.3}
$$

если только $|t_1 - t_2| < \delta = \delta(\varepsilon)$, как и в примере 10.2. Далее, множество $\{y_n(t)\}$ равномерно ограничено в $C([a,b])$, так как

$$
\begin{gathered}
|y_n(t)| \leqslant \int_a^b |K(t,s)| \cdot |x_n(s)|\,ds \leqslant \\
\leqslant \left\{ \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \right\}^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |x_n(s)|^2\,ds \right)^{1/2} \leqslant \\
\leqslant \left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \right)^{1/2} \leqslant M(b-a)^{1/2},
\end{gathered}
\tag{10.4}
$$

где M — константа из примера 10.2.

Из (10.3), (10.4) по теореме Арцела (теорема 10.3) получаем, что последовательность $\{y_n(t)\}$ компактна в $C([a,b])$ и потому найдется такая ее подпоследовательность $\{y_{n_k}(t)\}$, что она равномерно сходится к некоторой функции $y_0(t) \in C([a,b]) \subset L_2([a,b])$. Тогда эта же подпоследовательность $\{y_{n_k}(t)\}$ сходится к $y_0(t)$ и в $L_2([a,b])$ (докажите это!). Значит, $\{y_n(t)\}$ компактна в $L_2([a,b])$ и, следовательно, интегральный оператор K вполне непрерывен в $L_2([a,b])$. $\square$

Следующий пример обобщает предыдущие.

Пример 10.4. Пусть снова $X = Y = L_2([a,b])$ и опять рассмотрим интегральный оператор (10.2), однако теперь будем предполагать, что ядро $K(t,s) \in L_2(Q)$, $Q = [a,b] \times [a,b]$, т.е. конечен двойной интеграл Лебега:

$$
\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds < \infty. \tag{10.5}
$$

Интегральные операторы с такими свойствами называют *интегральными операторами Гильберта – Шмидта.*

Докажем, что K вполне непрерывен в $L_2([a,b])$. Так как множество $C(Q)$ непрерывных функций плотно в $L_2(Q)$ (см. параграф 3), то найдется последовательность $\{K_n(t,s)\}$ непрерывных ядер, сходящаяся к $K(t,s)$ в $L_2(Q)$, т.е.

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 \, ds \, dt \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Введем аналогично (10.1) интегральные операторы K_n с ядрами $K_n(t,s)$:

$$(K_n x)(t) := \int_a^b K_n(t,s) x(s) \, ds.$$

По неравенству Коши – Буняковского имеем

$$|(Kx)(t) - (K_n x)(t)|^2 = \left| \int_a^b [K(t,s) - K_n(t,s)] x(s) \, ds \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 \, ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \, ds.$$

Тогда

$$\|(Kx)(t) - (K_n x)(t)\|^2 = \int_a^b |(Kx)(t) - (K_n x)(t)|^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 \, ds \, dt \cdot \|x\|^2$$

и потому

$$\|K - K_n\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(t,s) - K_n(t,s)|^2 \, ds \, dt \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Значит, оператор K является пределом (в метрике $\mathcal{L}(L_2([a,b]))$) последовательности $\{K_n\}$ интегральных операторов с непрерывными ядрами, которые вполне непрерывны, как это следует из рассмотрения примера 10.3. Поэтому согласно теореме 10.7 интегральный оператор K (Гильберта – Шмидта) сам вполне непрерывен. $\square$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое множество в банаховом пространстве называется компактным?

2. Какое множество в банаховом пространстве называется бикомпактным?

3. Верно ли утверждение: предел каждой сходящейся последовательности, принадлежащей компактному множеству в банаховом пространстве, принадлежит этому множеству?

4. Верно ли утверждение: предел каждой сходящейся последовательности, принадлежащей бикомпактному множеству в банаховом пространстве, принадлежит этому множеству?

5. Сформулируйте понятие ε-сети множества в банаховом пространстве.

6. Сформулируйте критерий компактности множества в банаховом пространстве.

7. Сформулируйте критерий компактности множества в пространстве $C([a, b])$.

8. Какой оператор называется компактным?

9. Верно ли утверждение: любой линейный ограниченный оператор является компактным? Верно ли обратное утверждение?

10. Приведите примеры компактных операторов в пространствах:

    1. l^2;
    2. $C([a, b])$;
    3. $L_2([a, b])$.

11 Теория Рисса – Шаудера линейных уравнений второго рода

Здесь будет сначала рассмотрена абстрактная теория линейных уравнений второго рода в произвольном банаховом пространстве, а затем приложения этой теории к интегральным уравнениям Фредгольма и Вольтерра.

11.1 Общие результаты

Пусть A — вполне непрерывный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X, т.е. $A \in \mathfrak{S}(X)$. Рассмотрим линейное уравнение вида

$$x - Ax = y, \quad y \in X, \tag{11.1}$$

где y — заданный, а $x \in X$ — искомый элемент. Уравнения вида (11.1) называют *линейными уравнениями второго рода* (этот термин заимствован из теории интегральных уравнений). Теория уравнений вида (11.1) построена Ф. Риссом и Ю. Шаудером.

Переходя к изложению этой теории, рассмотрим наряду с неоднородным уравнением (11.1) соответствующее ему однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{11.2}$$

а также еще два уравнения: так называемое сопряженное неоднородное уравнение

$$f - A^*f = \varphi, \quad \varphi \in X^*, \quad f \in X^*, \tag{11.3}$$

и отвечающее ему однородное уравнение

$$\psi - A^*\psi = 0. \tag{11.4}$$

Напомним, что согласно теореме Шаудера (теорема 10.10) оператор A^*, действующий в пространстве X^*, также является вполне непрерывным.

Сначала познакомимся со следующим утверждением.

Теорема 11.1. *Пусть $A \in \mathfrak{S}(X)$. Тогда множества значений $\mathcal{R}(I - A)$ и $\mathcal{R}(I - A^*)$ операторов $I - A$ и $I - A^*$ замкнуты и потому являются подпространствами в X и X^* соответственно.*

Доказательство. Оно будет проведено лишь частично (см. [15], с.220 – 221). Пусть последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{R}(I - A)$, т.е. она из множества значений оператора $I - A$. Тогда найдутся такие $x_n \in X$, что $x_n - Ax_n = y_n$. Пусть $y_n \longrightarrow y_0$ при $n \longrightarrow \infty$. Покажем, что $y_0 \in \mathcal{R}(I-A)$ при дополнительном условии, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Но тогда $\{Ax_n\}$ компактна и потому $x_n = y_n + Ax_n$ тоже компактна, так как $\{y_n\}$ сходится, а из $\{Ax_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Значит, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторому элементу x_0. Переходя к пределу по элементам подпоследовательности $\{n_k\}$ в соотношении $x_{n_k} - Ax_{n_k} = y_{n_k}$, получим в силу непрерывности A, что $x_0 - Ax_0 = y_0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{R}(I - A)$.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано при введенном выше предположении ограниченности $\{x_n\}$. Аналогично доказывается утверждение теоремы относительно $\mathcal{R}(I - A^*)$. $\square$

Сформулируем теперь основные теоремы теории Рисса — Шаудера.

Теорема 11.2. (первая теорема Фредгольма). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Следующие четыре утверждения эквивалентны:*

1^0. *уравнение* (11.1) *имеет решение при любой правой части y;*

2^0. *уравнение* (11.2) *имеет только тривиальное решение;*

3^0. *уравнение* (11.3) *имеет решение при любой правой части φ;*

4^0. *уравнение* (11.4) *имеет только тривиальное решение.* $\square$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [15], с. 221 – 222.

Здесь будут даны лишь небольшие пояснения.

Во-первых, утверждения 1^0 и 2^0, а также 3^0 и 4^0 — идентичны, одно в пространстве X, а второе — в X^*. Далее, если уравнение (11.1) имеет решение при любом $y \in X$, то область значений $\mathcal{R}(I-A)$ оператора $I - A$ совпадает со всем пространством и потому по теореме Банаха (см. теорему 7.9) существует ограниченный обратный $(I-A)^{-1}$, заданный на всем пространстве X. В этом случае $\operatorname{Ker}(I - A) = \{0\}$ и потому уравнение (11.2) имеет лишь тривиальное решение.

Обратно, если уравнение (11.2) имеет лишь тривиальное решение, то $\operatorname{Ker}(I - A) = \{0\}$. Так как $\mathcal{R}(I - A)$ есть подпространство в X (по теореме 11.1), то в этом случае можно доказать, что $\mathcal{R}(I-A)=X$ и потому (по теореме Банаха) $(I-A)$ непрерывно обратим.

Аналогичные рассуждения можно провести и для уравнений (11.3), (11.4), рассматривая A^* вместо A и X^* вместо X.

Теорема 11.3. (вторая теорема Фредгольма). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в X. Тогда уравнения* (11.2) *и* (11.4) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.* $\square$

Докажем лишь *конечность* числа линейно независимых решений уравнения (11.2). Пусть $\mathcal{L}$ — произвольное ограниченное множество, лежащее в $\operatorname{Ker}(I-A)$. Тогда $\mathcal{L}=A\mathcal{L}$ (в силу уравнения (11.2)) и потому $\mathcal{L}$ компактно (по теореме 10.4). Отсюда, как доказывается в учебниках по функциональному анализу (см., например, [15], с. 206, теорема Ф. Рисса), следует, что ядро $\operatorname{Ker}(I-A)$ конечномерно.

Теорема 11.4. (третья теорема Фредгольма). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в X. Для того, чтобы уравнение* (11.1) *имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\langle y,\psi\rangle=0, \tag{11.5}$$

где ψ — любое решение уравнения (11.4). $\square$

Вместо доказательства убедимся, что условие (11.5) необходимо для разрешимости уравнения (11.1). Если $\operatorname{Ker}(I-A)=\{0\}$, то, как уже выше было выявлено, оператор $I-A$ ограниченно обратим, решение $x=(I-A)^{-1}y$ однозначно определено при любом $y\in X$ и в (11.5) можно взять $\psi=0$. Далее, если $\operatorname{Ker}(I-A)\neq\{0\}$ и уравнение (11.1) имеет решение $x=x_0$, то для любого элемента $\psi\in\operatorname{Ker}(I-A^*)$ имеем

$$\langle y,\psi\rangle=\langle (I-A)x_0,\psi\rangle=\langle x_0,(I-A^*)\psi\rangle=0.$$

В качестве замечания к теореме 11.4 отметим, что условие

$$\langle z,\varphi\rangle=0 \tag{11.6}$$

является необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (11.3), если z — любое решение уравнения (11.2).

11.2 Приложения к линейным интегральным уравнениям в гильбертовом пространстве

Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве $L_2([a,b])$ неоднородное интегральное уравнение

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \tag{11.7}$$

однородное уравнение

$$z(t) - \int_a^b K(t,s)z(s) = 0, \tag{11.8}$$

а также соответствующие сопряженные уравнения

$$f(t) - \int_a^b K(s,t)f(s)\,ds = \varphi(t), \tag{11.9}$$

$$\psi(t) - \int_a^b K(s,t)\psi(s)\,ds = 0. \tag{11.10}$$

Уравнения (11.7) — (11.10) называются *интегральными уравнениями Фредгольма второго рода* и являются частным случаем совокупности уравнений (11.1) — (11.4). Действительно, здесь $X = L_2([a,b])$, и если $K(t,s)$ — непрерывное ядро, то интегральный оператор в (11.7) вполне непрерывен (см. пример 10.3). Далее, интегральный оператор (11.9) является сопряженным к оператору (11.7) в вещественном гильбертовом пространстве $L_2([a,b])$ (см. пример 9.1). Наконец, по теореме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве (см. теорему 8.1) заключаем, что в данном случае X^* можно отождествить с $X = L_2([a,b])$ и потому все уравнения (11.7) — (11.10) также рассматривать в этом пространстве.

Отсюда следует, что для уравнений (11.7) — (11.10) справедливы три теоремы Фредгольма (теоремы 11.2 — 11.4). В частности, уравнение (11.7) имеет решение $x(t) \in L_2([a,b])$ при $y(t) \in L_2([a,b])$ тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна всем решениям $\psi(t)$ сопряженного однородного уравнения (11.10), т.е. выполнено условие (см. (11.5))

$$\int_a^b y(t)\psi(t)\,dt = 0.$$

Если при этом $y(t) \in C([a,b])$, то, как видно из уравнения (11.7), $x(t)$ также принадлежит $C([a,b])$, т.е. является непрерывной функцией.

Аналогичные утверждения справедливы и для пары уравнений (11.9) и (11.8), а необходимое и достаточное условие существования решения уравнения (11.9) имеет вид (см. (11.6))

$$\int_a^b \varphi(t)z(t)\,dt = 0,$$

где $z(t)$ — любое решение уравнения (11.8).

Отметим еще, что если однородные уравнения (11.8) и (11.10) имеют только тривиальные (нулевые) решения, то уравнения (11.7) и (11.9) однозначно разрешимы.

В заключение выпишем формально так называемые интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Они имеют вид

$$\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad \int_a^b K(s,t)f(s)\,ds = \varphi(t).$$

Задачи такого вида являются некорректными, и теория их разрешимости сложнее, чем для уравнений второго рода.

11.3 Интегральные уравнения Вольтерра второго рода

Частным случаем интегральных уравнений Фредгольма являются *уравнения Вольтерра*, когда выполнено условие

$$K(t,s) \equiv 0, \quad a \leqslant t < s \leqslant b.$$

Тогда вместо (11.7), (11.9) возникают уравнения

$$x(t) - \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \tag{11.11}$$

$$f(t) - \int_t^b K(s,t)f(s)\,ds = \varphi(t), \tag{11.12}$$

а соответствующие однородные уравнения имеют лишь тривиальные решения и потому не выписаны.

Отметим, что оператор, сопряженный к интегральному оператору Вольтерра

$$(Kx)(t) := \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds,$$

в вещественном $L_2([a,b])$ имеет вид (11.12), т.е.

$$(K^*f)(t) = \int_t^b K(s,t)f(s)\,ds.$$

Этот факт легко установить переменой порядка интегрирования:

$$(Kx,f) = \int_a^b \left(\int_a^t K(t,s)x(s)\,ds\right) f(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b x(s) \left(\int_s^b K(t,s)f(t)\,dt\right) ds =$$
$$= \int_a^b x(t) \left(\int_t^b K(s,t)f(s)\,ds\right) dt = (x, K^*f).$$

Так как однородные уравнения имеют лишь нулевые решения, то, согласно первой теореме Фредгольма, уравнения (11.11) и (11.12) имеют единственные решения при любых $y(t)$ и $\varphi(t)$ из $L_2([a,b])$, и эти решения принадлежат $L_2([a,b])$. Если, однако, $y(t)$ и $\varphi(t)$ — непрерывные функции, то $x(t)$ и $f(t)$ непрерывны.

Отметим еще, что для нахождения решения уравнения (11.11) можно применить метод последовательных приближений (метод итераций) по схеме

$$x_0(t) := y(t), \quad x_1(t) = y(t) + \int_a^t K(t,s)y(s)\,ds, \ldots, \tag{11.13}$$

$$x_{n+1}(t) = y(t) + \int_a^t K_n(t,s)y(s)\,ds, \quad K_1(t,s) := K(t,s),$$

$$K_{n+1}(t,s) := \int_a^t K_n(t,\xi)K_1(\xi,s)\,d\xi, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{11.14}$$

где $K_n(t,s)$ — так называемые итерированные ядра.

Доказательство этого утверждения будет приведено позже на основе использования принципа сжимающих отображений и его модификаций.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какой вид имеет линейное уравнение второго рода?

2. Сформулируйте первую теорему Фредгольма.

3. Какое условие должно удовлетворяться для существования решения линейного уравнения второго рода? В какой теореме сформулировано это условие?

4. Какой вид имеет интегральное уравнение Фредгольма второго рода?

5. Какой вид имеет интегральное уравнение Вольтерра второго рода?

6. Сколько решений имеет интегральное уравнение Вольтерра второго рода?

7. Запишите схему метода последовательных приближений для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

12 Элементы спектральной теории линейных операторов

Спектральная теория линейных операторов, действующих в банаховом либо гильбертовом пространстве, является весьма важным разделом функционального анализа и имеет многочисленные применения на практике, в частности, при изучении процессов колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы, сплошных сред и других.

12.1 Собственные значения и собственные элементы линейных операторов (общие свойства)

Пусть X — комплексное банахово пространство, бесконечномерное либо конечномерное, и A — линейный ограниченный оператор, $A \in \mathcal{L}(X)$.

Определение 12.1. *Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой элемент $x_0 \in X$, такой, что*

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0. \tag{12.1}$$

При этом x_0 называют собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ_0. □

Если x_0 — собственный элемент, а λ_0 — собственное значение оператора A, то легко видеть, что элемент tx_0 при любом $t \neq 0$ также является собственным элементом, отвечающим собственному значению λ_0, т.е. собственные элементы находятся с точностью до произвольного (ненулевого) множителя.

Упражнение 12.1. *Доказать, что совокупность $\mathcal{L}_\lambda \subset X$ собственных элементов, отвечающих данному собственному значению λ, дополненная нулевым элементом, является линейной системой (линеалом) в X.* □

Отметим, что действие оператора A на линеале $\mathcal{L}_\lambda$ сводится к умножению на λ любого элемента $x \in \mathcal{L}_\lambda$, т.е. $Ax = \lambda x$.

Теорема 12.1. *Собственные элементы линейного оператора $A : X \longrightarrow X$, отвечающие различным его собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $x_1 \neq 0$ — собственный элемент оператора A, отвечающий собственному значению λ_1. Он, очевидно, линейно независим, так как равенство $c_1 x_1 = 0$ возможно лишь при $c_1 = 0$.

Проведем далее доказательство по индукции. Пусть известно, что любые n собственных элементов оператора A, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Допустим, что тем не менее существует линейно зависимая система из $n+1$ собственных элементов x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1}, отвечающая собственным значениям λ_1, λ_2, …, λ_n, λ_{n+1}, где $\lambda_i \neq \lambda_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n+1$. Тогда найдутся скаляры c_1, c_2, …, c_n, c_{n+1}, не все равные нулю одновременно и такие, что

$$\sum_{k=1}^{n+1} c_k x_k = 0. \tag{12.2}$$

Применим к этому равенству слева оператор $A - \lambda_{n+1} I$, получим

$$(A - \lambda_{n+1} I) \sum_{k=1}^{n+1} c_k x_k = \sum_{k=1}^{n+1} c_k A x_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} c_k x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} c_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = \sum_{k=1}^{n} c_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = 0.$$

Так как x_1, …, x_n линейно независимы (по предположению индукции), то отсюда следует, что

$$c_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому и $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, так как $\lambda_k \neq \lambda_{n+1}$ при $k \leqslant n$. Тогда из (12.2) получаем, что $c_{n+1} = 0$. Значит, в (12.2) все $c_k = 0$, в противоречии с предположением о линейной зависимости элементов x_1, …, x_{n+1}. $\square$

Упражнение 12.2. *В банаховом пространстве $C([-\pi; \pi])$ найти все собственные значения и собственные элементы (собственные функции) интегрального оператора*

$$(Kx)(t) := \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s) x(s)\, ds. \qquad \square$$

12.2 Собственные значения и собственные элементы линейных операторов в конечномерных пространствах

Исследование задачи о нахождении собственных значений и собственных элементов (собственных векторов) операторов, действующих в конечномерных пространствах, составляет, как известно, одну из глав линейной алгебры. Здесь будут упомянуты лишь некоторые простые факты из этой проблемы.

Пусть $X = \mathbb{C}^m$ — комплексное m – мерное пространство и A — линейный оператор, действующий в $\mathbb{C}^m$. Если $\{e_k\}_{k=1}^m$ — базис в $\mathbb{C}^m$, то любой элемент $x \in \mathbb{C}^m$ представляется в виде суммы $x = \sum\limits_{k=1}^m x_k e_k$, $x_k \in \mathbb{C}$.

Пусть

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i, \quad j = 1, \dots, m,$$

— разложения образов базисных элементов по базису. Матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^m$ называется матрицей оператора (отображения) A в базисе $\{e_k\}_{k=1}^m$. Тогда для любого $x = \sum\limits_{j=1}^m x_j e_j \in \mathbb{C}^m$ имеем

$$Ax = \sum_{j=1}^m x_j Ae_j = \sum_{j=1}^m x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) e_i.$$

Поэтому уравнение $Ax = \lambda x$ в координатном представлении приводит к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = \lambda x_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^m (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0, \quad i = 1, \dots, m. \qquad (12.3)$$

Так как разыскиваются ненулевые элементы x, то система уравнений (12.3) имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда

$$\det (a_{ij} - \lambda \delta_{ij})_{i,j=1}^m = 0. \qquad (12.4)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* и представляет собой алгебраическое уравнение степени m относительно λ, причем коэффициент при λ^m равен $(-1)^m$. Поэтому, согласно основной теореме алгебры, уравнение (12.4) имеет ровно m комплексных корней (с учетом их кратностей).

Если λ_0 — один из этих корней, то, подставляя λ_0 в (12.3), найдем собственный элемент x_0, отвечающий собственному значению λ_0 оператора A. Если уравнение (12.4) имеет m различных корней, т.е. каждое собственное значение однократно, то оператор A имеет m собственных элементов, которые согласно теореме 12.1 являются линейно независимыми. Тогда они образуют базис пространства $\mathbb{C}^m$ и удовлетворяют соотношениям

$$A\widetilde{e}_k = \lambda_k \widetilde{e}_k, \quad k = 1, \ldots, m,$$

где λ_k — собственные значения, а $\widetilde{e}_k$ — отвечающие им собственные элементы. При этом для любого $x \in \mathbb{C}^m$ в новом базисе $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$x = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{x}_k \widetilde{e}_k, \quad Ax = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{x}_k \widetilde{e}_k.$$

Если уравнение (12.4) имеет кратные корни, то для составления базиса из собственных векторов, отвечающих этим собственным значениям, этих векторов может оказаться недостаточно. Так будет, в частности, если матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^{m}$ оператора A имеет так называемые *жордановы клетки*, т.е. не является диагональной. В этом случае кроме собственных векторов следует привлекать в качестве дополнительных элементов базиса *присоединенные векторы*. Как утверждает теорема Жордана, в любом комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$ можно выбрать базис, составленный из собственных и присоединенных векторов любого линейного оператора $A : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$.

12.3 Собственные значения и собственные элементы линейных вполне непрерывных самосопряженных операторов

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и A — линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в $\mathcal{H}$.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{12.5}$$

для этого оператора. Сначала установим некоторые простые свойства решений уравнения (12.5).

Свойство 12.1. *Собственные значения любого самосопряженного оператора вещественны.* $\square$

В самом деле, если $x \neq 0$ — решение уравнения (12.5), то

$$\lambda = \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}, \tag{12.6}$$

так как $(x, x) > 0$ и $(Ax, x) \in \mathbb{R}$, см. теорему 9.2.

Свойство 12.2. *Все собственные значения λ оператора A расположены на отрезке $[m, M]$,*

$$m := \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M := \sup_{\|x\|=1} (Ax, x). \quad \square \tag{12.7}$$

Этот факт следует непосредственно из (12.6).

Свойство 12.3. *Собственные элементы задачи* (12.5)*, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.* $\square$

Действительно, если $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$(Ax_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2).$$

Поэтому $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$, откуда следует, что $(x_1, x_2) = 0$.

Свойство 12.4. *Собственный линеал $\mathcal{L}_\lambda$, отвечающий ненулевому собственному значению λ, конечномерен.* $\square$

Пусть, напротив, собственному значению $\lambda \neq 0$ отвечает счетное множество линейно независимых собственных элементов, нормы которых выбираем равными единице. Будем считать их ортонормированными по Шмидту. Тогда для этих элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем: $Ax_k = \lambda x_k$, $\|x_k\| = 1$. Так как A — вполне непрерывный оператор, то из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $\{Ax_{k_j}\}$ — сходящаяся подпоследовательность. Однако $Ax_{k_j} = \lambda x_{k_j}$ и потому $\|Ax_{k_j} - Ax_{k_i}\|^2 = |\lambda|^2 \|x_{k_j} - x_{k_i}\|^2 = |\lambda|^2 \cdot 2$, т.е. последовательность $\{Ax_{k_j}\}$ не является фундаментальной. Это противоречие доказывает конечномерность линеала $\mathcal{L}_\lambda$ при $\lambda \neq 0$.

Получим теперь ряд важных результатов о свойствах решений задачи (12.5).

Теорема 12.2. *Если $A = A^* \neq 0$, $A \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, то A имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля.*

Доказательство. Так как A — самосопряженный оператор, то по теореме 9.3 $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. Тогда по определению супремума найдется последовательность элементов $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, такая, что $|(Ax_n, x_n)| \longrightarrow \|A\|$ при $n \longrightarrow \infty$. Поскольку $A \neq 0$, то числа $(Ax_n, x_n) \neq 0$ для всех достаточно больших n (иначе было бы $A = 0$). Поэтому найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}$, такая, что $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \longrightarrow \lambda$ при $k \longrightarrow \infty$, где $\lambda = \|A\|$ либо $\lambda = -\|A\|$.

Для этой подпоследовательности имеем следующую оценку

$$\|Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}\|^2 = (Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}, Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}) =$$

$$= \|Ax_{n_k}\|^2 - 2\lambda(Ax_{n_k}, x_{n_k}) + \lambda^2 \leqslant 2\lambda(\lambda - (Ax_{n_k}, x_{n_k})) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

(Здесь при выводе учтено, что $\|x_{n_k}\| = 1$, $\|Ax_{n_k}\|^2 \leqslant \|A\|^2 = \lambda^2$, а также тот факт, что $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \in \mathbb{R}$.)

Таким образом, $y_{n_k} := Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$. Однако последовательность $\{x_{n_k}\}$ ограничена ($\|x_{n_k}\| = 1$), и вследствие свойства полной непрерывности оператора A последовательность $\{Ax_{n_k}\}$ компактна. Значит, существует ее сходящаяся подпоследовательность, которую обозначим $\{A\widetilde{x}_m\}$. Но тогда $\widetilde{x}_m = \lambda^{-1}(A\widetilde{x}_m - \widetilde{y}_m)$ также сходится, так как $\widetilde{y}_m \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$, где $\widetilde{y}_m$ — элементы подпоследовательности y_{n_k} с теми же номерами, что и $\widetilde{x}_m$. Обозначим через $x := \lim\limits_{m \longrightarrow \infty} \widetilde{x}_m$. Тогда в пределе будем иметь

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0, \quad \|x\| = \lim_{m \longrightarrow \infty} \|\widetilde{x}_m\| = 1.$$

Теорема доказана. $\square$

Опираясь на установленный результат, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 12.3. *Пусть m и M — числа, определенные формулами* (12.7). *Тогда M является наибольшим, а m — наименьшим собственным значением оператора A.*

Доказательство. Оно проводится по той же схеме, что и в теореме 12.2, с заменой $\|A\|$ на M либо на m. $\square$

Отметим в качестве следствия из двух предыдущих теорем такой факт: *для вполне непрерывного оператора $A = A^*$ норма $\|A\| = |\lambda_1|$, где λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение оператора A.*

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основных результатов о свойствах решений задачи (12.5).

Теорема 12.4. (теорема Гильберта – Шмидта). *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то задача* (12.5) *имеет конечное либо счетное количество конечнократных ненулевых собственных значений и ортонормированную систему собственных элементов, отвечающих этим собственным значениям, а также, возможно, точке нуль. При этом для любого элемента $x \in \mathcal{H}$ его образ Ax разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе собственных элементов оператора A, отвечающих ненулевым собственным значениям.*

Если $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, то ненулевых собственных значений счетное множество, а собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Если $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$, то совокупность собственных элементов, отвечающих ненулевым собственным значениям, а также нулю, образует ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть φ_1 — нормированный собственный элемент задачи (12.5), отвечающий наибольшему по модулю собственному значению λ_1 оператора A (см. теоремы 12.2, 12.3). Рассмотрим подпространство

$$\mathcal{H}_1 := \{x \in \mathcal{H} :\ (x, \varphi_1) = 0\}$$

тех элементов из $\mathcal{H}$, которые ортогональны к одномерному подпространству $\{t\varphi_1\}$, $t \in \mathbb{C}$, натянутому на первый собственный элемент φ_1. Так как

$$(Ax, \varphi_1) = (x, A\varphi_1) = (x, \lambda_1\varphi_1) = \lambda_1(x, \varphi_1) = 0, \quad x \in \mathcal{H}_1,$$

то отсюда следует, что $Ax \in \mathcal{H}_1$ при $x \in \mathcal{H}_1$, т.е. подпространство $\mathcal{H}_1$ *инвариантно* относительно оператора A. В этом подпространстве оператор $A = A|\mathcal{H}_1$ (т.е. сужение оператора A на подпространство $\mathcal{H}_1$) снова самосопряжен и вполне непрерывен. По теореме 12.2 оператор $A|\mathcal{H}_1$ имеет в $\mathcal{H}_1$ собственное значение λ_2 (наибольшее по модулю) и отвечающий ему собственный элемент φ_2, $\|\varphi_2\| = 1$. Так будет, в частности, если $A|\mathcal{H}_1$ не является тождественно нулевым оператором. Очевидно, по построению $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$, так как соответствующий супремум $|\lambda_2| = \|A|\mathcal{H}_1\|$ теперь находится на более узком множестве, чем все пространство $\mathcal{H}$, т.е. на $\mathcal{H}_1$.

Рассмотрим далее подпространство

$$\mathcal{H}_2 := \{x \in \mathcal{H}_1 : \ (x, \varphi_2) = 0\}$$

и снова повторим предыдущие рассуждения. Здесь далее возникает одна из двух возможностей. Первая возможность: процесс оборвется, т.е. найдется номер n такой, что на соответствующем подпространстве $\mathcal{H}_n$ элементов, ортогональных к собственным элементам φ_1, φ_2, ..., φ_n, оператор A оказывается равным нулевому оператору. В этом случае для любого $x \in \mathcal{H}$ элемент $y := x - \sum\limits_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k \in \mathcal{H}_n$, так как $(y, \varphi_k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Поэтому $Ay = 0$, т.е.

$$Ax = A\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\lambda_k\varphi_k.$$

Другая возможность состоит в том, что процесс не оборвется ни на каком шаге. В результате возникает последовательность собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и отвечающая ей ортонормированная последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных элементов оператора A. При этом в последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения λ_k повторяются столько раз, какова размерность собственного подпространства $\mathcal{L}_{\lambda_k}$. Согласно свойству 12.4 кратность такого собственного значения, т.е. $\dim \mathcal{L}_{\lambda_k}$, конечна для любого k и потому $\lambda_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$.

Воспользуемся теперь тем фактом, что, как видно из доказательства теоремы 12.2, $\|A\|^2 = |\lambda_{max}|^2$. Применяя его к пространству $\mathcal{H}_n$, имеем

$$\|A|\mathcal{H}_n\|^2 = \lambda_{n+1}^2.$$

Отсюда следует, что

$$\|A\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k\right)\|^2 \leqslant \lambda_{n+1}^2 \|x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k\|^2 =$$

$$= \lambda_{n+1}^2 \left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k, x - \sum_{j=1}^{n} (x, \varphi_j)\varphi_j\right)$$

$$= \lambda_{n+1}^2 \left\{(x, x) - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)(\varphi_k, x) - \right.$$

$$- \sum_{j=1}^{n}(x,\varphi_j)(x,\varphi_j) + \sum_{k,j=1}^{n}(x,\varphi_k)(x,\varphi_j)(\varphi_k,\varphi_j) \Bigg\} =$$

$$= \lambda_{n+1}^2 \left\{ \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x,\varphi_k)|^2 \right\} \leqslant \lambda_{n+1}^2 \|x\|^2 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Поэтому

$$A\left(x - \sum_{k=1}^{n}(x,\varphi_k)\varphi_k\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \tag{12.8}$$

т.е.

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\lambda_k\varphi_k, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{12.9}$$

Продолжая далее доказательство теоремы, заметим, что если $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то ни на каком шаге процесс не оборвется, причем в этом случае на области значений $\mathcal{R}(A)$ оператора A существует обратный оператор A^{-1}. Тогда из (12.8) либо (12.9) имеем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\varphi_k, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

т.е. ортонормированная система собственных элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора A в этом случае является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$.

Пусть теперь $\mathcal{H}_0 := \operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Тогда это множество является подпространством в $\mathcal{H}$, ортогональным к замыканию $\widetilde{\mathcal{H}}$ линейной оболочки собственных элементов, отвечающих ненулевым собственным значениям, так как для любого элемента $\varphi_0 \in \mathcal{H}_0$ имеем $A\varphi_0 = 0$ и потому

$$(A\varphi_0,\varphi_k) = (\varphi_0, A\varphi_k) = (\varphi_0,\lambda_k\varphi_k) = \lambda_k(\varphi_0,\varphi_k) = 0, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Иными словами, имеет место ортогональное разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}.$$

Из соотношения (12.9), записанного в виде

$$A\left(x - \sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\varphi_k\right) = 0,$$

следует, что элемент

$$x_0 := x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k \in \mathcal{H}_0.$$

Так как подпространство $\mathcal{H}_0$, как и все $\mathcal{H}$, сепарабельно, то в нем, согласно теореме 5.6, существует ортонормированный базис $\{\varphi_{0,j}\}_{j=1}^{\infty}$, и тогда $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_0, \varphi_{0,j}) \varphi_{0,j}$. Поэтому

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, \varphi_{0,j}) \varphi_{0,j} + \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k.$$

Как следует из проведенного доказательства, в этом разложении одна или обе суммы могут быть и конечными.

Теорема полностью доказана. □

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое число называется собственным значением линейного ограниченного оператора в комплексном банаховом пространстве? Какой элемент называется собственным элементом, отвечающим этому собственному значению?

2. Докажите утверждение: совокупность собственных элементов, отвечающих собственному значению линейного ограниченного оператора в комплексном банаховом пространстве, дополненная нулевым элементом, является линейной системой.

3. Являются ли собственные элементы линейного оператора в банаховом пространстве, отвечающие различным его собственным значениям, линейно зависимыми? линейно независимыми?

4. Как вычислить собственные значения линейного оператора, действующего в пространстве $\mathbb{C}^m$?

5. Являются ли собственные значения любого линейного компактного самосопряженного оператора, действующего в комплексном гильбертовом пространстве, комплексными? вещественными?

6. Какому отрезку принадлежат собственные значения любого линейного компактного самосопряженного оператора, действующего в комплексном гильбертовом пространстве?
7. Сколько собственных элементов, отвечающих ненулевому собственному значению, имеет любой линейный компактный самосопряженный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве?
8. Чему равны наибольшее и наименьшее собственные значения любого линейного компактного самосопряженного оператора, действующего в комплексном гильбертовом пространстве?
9. Сформулируйте теорему Гильберта-Шмидта.

13 Об основных принципах функционального анализа

В этом параграфе остановимся на некоторых основных фактах, которые являются „краеугольными камнями” в функциональном анализе и потому играют важную роль в развитии функционального анализа как современной науки высочайшего математического уровня. Эти факты иногда называют основными принципами функционального анализа.

13.1 Принцип открытости отображения

Формулировка этого принципа (теоремы) очень проста и понятна, она имеет следующий вид.

При непрерывном линейном отображении одного банахова пространства на другое образ каждого открытого множества является открытым множеством.

Таким образом, согласно этому утверждению, любой оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ переводит любое открытое множество $U \subset X$ в открытое множество $AU := \{y \in Y : \ \ y = Ax, \quad x \in U\}$ пространства Y.

Следствиями из этого принципа являются такие утверждения.

1^0. *Если линейный оператор A осуществляет непрерывное взаимно однозначное отображение банахова пространства X на банахово пространство Y, то обратный оператор A^{-1} непрерывен.*

Эта теорема, которую называют *теоремой Банаха об обратном операторе*, уже была приведена в параграфе 7 (см. теорему 7.9).

2^0. *Пусть в пространстве X введены две нормы: $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$, причем $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$. Если по обеим нормам пространство X полно, т.е. банахово, то справедливо обратное неравенство $\|x\|_2 \leqslant \widetilde{c}\|x\|_1$ и потому нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны, т.е.*

$$c^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x_2\| \leqslant \widetilde{c}\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Эквивалентные нормы часто используются при исследовании конкретных проблем: может оказаться, что свойства изучаемых операторов, функционалов либо каких-либо других объектов в одной из норм обладают дополнительными полезными свойствами. Например, оператор может оказаться самосопряженным в одной норме, порожденной скалярным произведением, и не обладать этим свойством в другой.

13.2 Принцип продолжимости линейного функционала

С этим принципом уже было знакомство в данном курсе лекций. Напомним еще раз соответствующие факты.

1^0. *Если на подпространстве $\mathcal{L}$ банахова пространства X задан линейный ограниченный функционал, то он может с сохранением нормы быть расширен (распространен) до линейного ограниченного функционала на всем пространстве X.*

Это — теорема Хана – Банаха, см. теорему 8.2. Частными случаями этой теоремы являются такие утверждения.

2^0. *Пусть $\mathcal{L}$ — (замкнутое) подпространство банахова пространства X и $x_0 \notin \mathcal{L}$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $\langle x, f\rangle$, равный нулю на $\mathcal{L}$ и такой, что $f(x_0) = 1$.*

3^0. *Для любого элемента $x_0 \in X$ найдется линейный функционал $\langle x, f\rangle$ такой, что $\|f\| = 1$ и $\langle x, f\rangle = \|x_0\|$.*

Отметим, что утверждения 2^0 и 3^0 обсуждались в начале п. 8.3.

13.3 Принцип равномерной ограниченности

Этот принцип и следствия из него не встречались ранее в данном курсе лекций. Приведем соответствующие формулировки.

1^0. *Пусть на банаховом пространстве X задано семейство непрерывных функционалов $\{f_\alpha(x)\}$, каждый из которых обладает свойствами выпуклости, т.е.* (вспомните аксиомы нормы!)

$$\text{а)}\quad f_\alpha(x) \geqslant 0; \quad \text{б)}\quad f_\alpha(\lambda x) = |\lambda| f_\alpha(x);$$

$$\text{в)}\quad f_\alpha(x+y) \leqslant f_\alpha(x) + f_\alpha(y).$$

Если при каждом $x \in X$ справедливо неравенство

$$\sup_\alpha f_\alpha(x) \leqslant k(x) < \infty,$$

то существует такая константа c, что

$$f_\alpha(x) \leqslant c\|x\| \Longrightarrow \|f_\alpha\| \leqslant c, \quad \forall \alpha.$$

Принцип равномерной ограниченности позволяет для доказательства ограниченности семейства функционалов проверять это свойство на элементах банахова пространства X.

На принципе равномерной ограниченности основаны следующие утверждения.

2^0. *Если последовательность линейных ограниченных функционалов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к функционалу f, т.е. $\langle x, f_n\rangle \longrightarrow \langle x, f\rangle$* при $n \longrightarrow \infty$ *для любого $x \in X$, то предельный функционал линеен и ограничен.*

3^0. **Теорема Банаха – Штейнгауза**. *Для того, чтобы последовательность линейных ограниченных функционалов слабо сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась на каком-либо плотном в пространстве множестве и чтобы последовательность норм этих функционалов была ограничена.*

В качестве приложения теоремы Банаха – Штейнгауза сформулируем соответствующие утверждения для последовательности операторов (см. [15], с. 128 – 129).

4^0. *Если последовательность $\{A_n x\}$ ограничена при каждом фиксированном $x \in X$, то последовательность норм $\{\|A_n\|\}$ ограничена.*

13.4 Принцип сжимающих отображений

Этот принцип и его модификации играют существенную роль как при качественном исследовании линейных и нелинейных уравнений в банаховых либо метрических пространствах, так и при приближенных вычислениях на основе метода итераций (см., например, [10], с. 9 – 10, а также [15], с. 389 – 393).

Рассмотрим эту проблему более подробно и приведем формулировки и доказательства соответствующих утверждений.

Пусть в банаховом пространстве X действует оператор (отображение) F, не обязательно линейный, с областью определения $\mathcal{D}(F) \subset X$ и областью значений $\mathcal{R}(F) \subset X$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{R}(F)$ не является пустым.

Определение 13.1. *Точка $x_* \in X$ называется неподвижной точкой отображения F, если*

$$F(x_*) = x_*. \qquad \square \tag{13.1}$$

Заметим, что к нахождению решений уравнения

$$x = F(x), \quad x \in X,$$

сводятся многие задачи, возникающие в приложениях.

Упражнение 13.1. *В пространстве* $X = \mathbb{R}$ *найти неподвижные точки операторов (отображений):*

$$а)\quad F(x) := x^3; \quad б)\quad F(x) := \operatorname{tg} x. \qquad \square$$

Упражнение 13.2. *Найти в вещественном пространстве* $X = C([0,1])$ *неподвижные точки отображения*

$$F(x) := \int_0^1 x(t)x(s)\,ds + f(t),$$

если

$$f(t) \in C([0,1]), \quad \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant 1/4. \qquad \square$$

Определение 13.2. *Будем говорить, что отображение* F*, действующее в банаховом пространстве* X*, является сжимающим на множестве* $M \subset X$*, если существует константа* $q \in (0,1)$ *такая, что*

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant q\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in M. \tag{13.2}$$

Число q *называют коэффициентом сжатия.* $\square$

Теорема 13.1. (**Теорема Банаха**). *Пусть оператор* F *отображает замкнутое множество* $M \subset X$ *в себя, т.е.*

$$F(x) \in M, \quad \forall x \in M, \tag{13.3}$$

и на этом множестве является сжимающим отображением с коэффициентом сжатия q*. Тогда в множестве* M *оператор* F *имеет единственную неподвижную точку* x_**, т.е. выполнено уравнение* (13.1).

Если $x_0 \in M$ *— произвольный элемент, а*

$$x_n := F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{13.4}$$

то последовательность $\{x_n\} \subset M$ *и* $x_n \longrightarrow x_*$ *при* $n \longrightarrow \infty$*. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости* x_n *к* x_**:*

$$\|x_n - x_*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|F(x_0) - x_0\|. \tag{13.5}$$

Доказательство. Очевидно, все элементы последовательности $\{x_n\}$ принадлежат M в силу (13.3). Введем число $\theta := \|x_1 - x_0\| =$

$\|F(x_0) - x_0\|$ и, используя свойство сжимаемости (13.2), последовательно находим:

$$\|x_2 - x_1\| = \|F(x_1) - F(x_0)\| \leqslant q\|x_1 - x_0\| = \theta q,$$

$$\|x_3 - x_2\| = \|F(x_2) - F(x_1)\| \leqslant q\|x_2 - x_1\| = \theta q^2.$$

Отсюда по методу полной математической индукции получим

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \theta q^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Имея эти оценки и используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии с показателем q, устанавливаем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \theta(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \ldots + q^n) = \frac{\theta(q^n - q^{n+p})}{1-q} \leqslant$$

$$\leqslant \theta \frac{q^n}{1-q} = \|F(x_0) - x_0\| \frac{q^n}{1-q}. \tag{13.6}$$

Так как $q^n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то из (13.6) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Поскольку X — полное пространство, а M — замкнутое множество, то существует предельный элемент

$$x_* := \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n \in M.$$

Докажем, что x_* — неподвижная точка отображения F. Из условия сжимаемости (13.2) вытекает непрерывность отображения F. В самом деле, если $y_n \longrightarrow y_0$ при $n \longrightarrow \infty$, то из условия

$$\|F(y_n) - F(y_0)\| \leqslant q\|y_n - y_0\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

следует, что отображение F непрерывно на $M \subset X$. Поэтому, переходя в равенстве (13.4) к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получаем, что для элемента x_* выполнено уравнение (13.1).

Проверим еще, что x_* — единственная неподвижная точка отображения F в множестве M. Если имеется еще какая-либо неподвижная точка $x_{**} = F(x_{**})$, то

$$\|x_* - x_{**}\| = \|F(x_*) - F(x_{**})\| \leqslant q\|x_* - x_{**}\|,$$

откуда видно, что это неравенство (в силу условия $0 < q < 1$) выполнено, если $\|x_* - x_{**}\| = 0$, т.е. $x_* = x_{**}$.

Докажем, наконец, что выполнена оценка (13.5) скорости сходимости x_n к x_*. Действительно, переходя в (13.6) к пределу при $p \longrightarrow \infty$, приходим к (13.5). Теорема доказана. $\square$

Следствием установленной теоремы Банаха является ее обобщение, связанное со свойством сжимаемости не самого отображения F, а его так называемой n -ой степени (n - ой итерации).

Определение 13.3. *Пусть F отображает множество $M \subset X$ в себя, т.е. выполнено свойство* (13.3)*. Тогда n - ой степенью отображения F (n - ой итерацией) называется отображение, состоящее в n последовательном применении отображения F, т.е.*

$$F^2(x) := F(F(x)), \quad F^3(x) := F(F^2(x)), \ldots, F^n(x) := F(F^{(n-1)}(x)). \square$$

Теорема 13.2. (теорема Пикара – Банаха). *Пусть F отображает замкнутое множество $M \subset X$ в себя и при некотором натуральном m отображение F^m является сжимающим. Тогда в M существует единственная неподвижная точка x_* отображения F. Последовательные приближения* (13.4) *сходятся к x_*, начиная с любого начального приближения $x_0 \in M$.* $\square$

Отметим, что теорема 13.1 является частным случаем теоремы 13.2 и отвечает варианту, когда $m = 1$. В свою очередь, теорема 13.2 является частным случаем следующего важного факта.

Теорема 13.3. *Пусть в банаховом пространстве X рассматривается уравнение*

$$x = G(x), \tag{13.7}$$

причем отображение $G: \ X \longrightarrow X$ коммутирует с отображением F на замкнутом множестве $M \subset X$, т.е.

$$G(F(x)) = F(G(x)), \quad \forall x \in M. \tag{13.8}$$

Если отображение F является сжимающим на M и F отображает M в себя, то отображение G имеет единственную неподвижную точку на множестве M, т.е. уравнение (13.7) *имеет единственное решение $x_* \in M$.*

Доказательство. Так как отображение F является сжимающим, то для уравнения $x = F(x)$ по теореме 13.1 (теорема Банаха) существует единственная неподвижная точка $x_* \in M$, т.е. $x_* = F(x_*)$.

Далее, так как отображения F и G коммутируют на M, т.е. имеет место свойство (13.8), то

$$F(G(x_*)) = G(F(x_*)) = G(x_*),$$

т.е. $G(x_*)$ — единственная неподвижная точка отображения F. Поэтому $G(x_*) = x_*$, т.е. уравнение (13.7) имеет единственное решение $x_* \in M$. $\square$

Заметим теперь, что отображения F и F^n коммутируют при любом n, так как

$$F(F^n(x)) = F^n(F(x)) = F^{n+1}(x).$$

Из этого факта и из теоремы 13.3 действительно следует теорема 13.2 (теорема Пикара – Банаха).

13.5 Применения принципа сжимающих отображений

В качестве простых упражнений рассмотрим сначала одномерные трансцендентные задачи.

Упражнение 13.3. *Проверить, что уравнение*

$$x = 1 + \frac{1}{2}\sin x =: F(x)$$

имеет единственное решение $x_* \cong 1,008803012$. *Если* $x_0 = 0$, *то метод итераций даст* $x_5 \cong x_6 \cong x_*$. $\square$

Упражнение 13.4. *Проверить, что уравнение*

$$x = 1 + \frac{1}{2}\cos x =: F(x)$$

имеет единственное решение $x_* \cong 1,499828702$, *и если* $x_0 = 0$, *то* $x_3 \cong x_4 \cong x_*$. $\square$

Отметим, что для одномерных уравнений вида

$$x = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

достаточным условием сжимаемости является условие

$$\max_x |F'(x)| \leqslant q < 1. \tag{13.9}$$

В самом деле, по теореме Лагранжа для любой дифференцируемой функции $F(x)$ имеем

$$F(x_1) - F(x_2) = F'(\xi)(x_1 - x_2),$$

где ξ лежит между x_1 и x_2. Отсюда при выполнении условия (13.9) следует свойство сжимаемости:

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|.$$

Вернемся теперь к линейному уравнению второго рода (11.1), т.е. к уравнению

$$x - Ax = y, \tag{13.10}$$

где $A \in \mathcal{L}(X)$, т.е. он может не быть компактным. Перепишем его в виде

$$x = y + Ax =: F(x), \tag{13.11}$$

т.е. введем нелинейное отображение $F: \ X \longrightarrow X$, где X — произвольное банахово пространство. В качестве $M \subset X$ возьмем само пространство X и будем считать, что $\|A\| < 1$. Как следует из теоремы 7.10, при выполнении этого условия существует ограниченный обратный оператор $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, а задача (13.10) имеет единственное решение $x = (I - A)^{-1}y$.

Это решение можно найти методом итераций, отправляясь от любого элемента $x_0 \in X$. В самом деле, отображение $F(x)$ из (13.11) является сжимающим, так как

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leqslant \\ \leqslant \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\|, \quad \|A\| < 1,$$

и потому к (13.11) применимы утверждения теоремы 13.1.

В качестве другого приложения принципа сжимающих отображений рассмотрим линейное уравнение Вольтерра второго рода (см. п.11.3)

$$x(t) = y(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds =: F(x(t)). \tag{13.12}$$

Будем считать, что $X = C([a,b])$, $y(t) \in C([a,b])$, а ядро $K(t,s)$ также непрерывно, т.е. $K(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$. Тогда

$$|K(t,s)| \leqslant M, \quad \forall t,s \in [a,b] \times [a,b]. \tag{13.13}$$

Рассмотрим вопрос о том, будут ли сжимающими некоторые степени отображения F из (13.12). Имеем

$$F^{(2)}(x) = F(F(x)) := \int_a^t K(t,s)\left\{y(s) + \int_a^s K(s,\xi)x(\xi)\,d\xi\right\} + y(t) =:$$

$$=: (I+K)y + K^{(2)}x, \tag{13.14}$$

где для краткости через K обозначен интегральный оператор Вольтерра (13.12) с ядром $K(t,s)$.

Вычислим выражение для второго слагаемого в (13.14):

$$(K^{(2)}x)(t) = \int_a^t K(t,s)\left\{\int_a^s K(s,\xi)x(\xi)\,d\xi\right\} ds =$$

$$= \int_a^t x(\xi)\left\{\int_\xi^t K(t,s)K(s,\xi)\,ds\right\} d\xi =:$$

$$=: \int_a^t K_2(t,s)x(s)\,ds, \quad K_2(t,s) = \int_s^t K(t,\xi)K(\xi,s)\,d\xi.$$

Здесь $K_2(t,s)$ — так называемое *итерированное* ядро. С учетом (13.13) для этого ядра получаем оценку

$$|K_2(t,s)| \leqslant M^2(t-s) = M^2\frac{(t-s)^{2-1}}{(2-1)!} \leqslant \frac{M^2(b-a)^{2-1}}{(2-1)!}.$$

Для последующих степеней отображения F аналогично (13.14) по индукции выводим

$$F^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} K^j y + K^{(m)}x, \tag{13.15}$$

$$(K^{(m)}x)(t) = \int_a^t K_m(t,s)x(s)\,ds,$$

$$K_m(t,s) = \int_s^t K(t,\xi)K_{m-1}(\xi,s)\,d\xi, \tag{13.16}$$

причем

$$|K_m(t,s)| \leqslant \frac{M^m(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} \leqslant \frac{M^m(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}. \tag{13.17}$$

Из оценки (13.17) следует, что отображение $F^{(m)}$ при достаточно большом m является сжимающим в $C([a,b])$, поскольку

$$\|F^{(m)}(x_1) - F^{(m)}(x_2)\| = \|K^{(m)}x_1 - K^{(m)}x_2\| =$$

$$= \|K^{(m)}(x_1 - x_2)\| \leqslant \|K^{(m)}\| \cdot \|(x_1 - x_2)\|,$$

а $\|K^{(m)}\| \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$. В самом деле, согласно (13.16) и (13.17),

$$\|(K^{(m)}x)(t)\|_{C([a,b])} = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left| \int_a^t K_m(t,s)x(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant t\leqslant b} |K_m(t,s)| \cdot \max_{a\leqslant s\leqslant b} |x(s)| \cdot (b-a) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^m(b-a)^m}{(m-1)!} \|x(t)\|_{C([a,b])},$$

и потому

$$\|K^{(m)}\| \leqslant \frac{M^m(b-a)^m}{(m-1)!} = \frac{(M(b-a))^{m-1}}{(m-1)!} M(b-a).$$

Однако последовательность $\{(M(b-a))^{m-1}/(m-1)!\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к нулю при $m \longrightarrow \infty$, так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(M(b-a))^{m-1}}{(m-1)!} = e^{M(b-a)} < \infty.$$

Опираясь на доказанный факт, рассмотрим вместо исходного уравнения Вольтерра (13.12) уравнение

$$x = F^{(m)}(x) \tag{13.18}$$

при таком m, когда в представлении (13.15) оператор $K^{(m)}$, выражаемый формулами (13.16), является сжимающим. Тогда по теореме 13.1 задача (13.18) имеет в пространстве $C([a,b])$ единственное решение $x_*(t)$. Далее, в силу коммутируемости отображений F и $F^{(m)}$ задача (13.12) имеет ту же функцию $x_*(t)$ в качестве единственного решения этой проблемы. При этом данную функцию $x_*(t)$, согласно теореме 13.2, можно найти методом последовательных приближений, т.е. осуществить процедуру, описанную формулами (11.13), (11.14).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какая точка называется неподвижной точкой отображения?

2. Вычислить неподвижные точки отображения $x = F(x)$, где $F(x) = x^2 - 1$.

3. Какое отображение, действующее в банаховом пространстве, называется сжимающим?

4. Сформулируйте теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения.

5. Докажите применимость принципа сжимающих отображений для решения уравнений, запишите схему вычислений:

    1. $x - 1 = \frac{1}{3}\mathrm{sin}2x$;
    2. $x = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x$;
    3. $x - 2 = \frac{1}{4}\mathrm{cos}x$.

Список литературы

[1] А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. *Функциональный анализ и интегральные уравнения.* — Минск: Изд-во Белорусского госуниверситета, 2003. — 432 с.

[2] А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно (ред.) *Функциональный анализ и интегральные уравнения.* (Лабораторный практикум). — Минск: Изд-во Белорусского госуниверситета, 2003. — 180 с.

[3] Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. *Функциональный анализ.* — Киев.: Выща школа, 1990. — 600 с.

[4] И.И. Ворович, Л.П. Лебедев. *Функциональный анализ.* — М.: Вузовская книга, 2000. — 320 с.

[5] Б.З. Вулих. *Введение в функциональный анализ.* — М.: Наука, 1967. — 416 с.

[6] Б.З. Вулих. *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* — М.: Наука, 1965. — 304 с.

[7] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1972. — 496 с.

[8] М.Л. Краснов. *Интегральные уравнения.* — М.: Наука, 1975. — 304 с.

[9] М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. *Интегральные уравнения (задачи и упражнения).* — М.: Наука, 1976. — 216 с.

[10] М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука, 1969. — 456 с.

[11] С.Г. Крейн. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* — М.: Наука, 1971. — 104 с.

[12] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. *Краткий курс функционального анализа.* — М.: Высшая школа, 1982. — 271 с.

[13] Ф. Рисс, Б. Секефальви – Надь. *Лекции по функциональному анализу.* — М.: Мир, 1979. — 588 с.

[14] С.А. Теляковский. *Сборник задач по теории функций действительного переменного.* — М.: Наука, 1980. — 112 с.

[15] В.А. Треногин. *Функциональный анализ.* — М.: Наука, 1980. — 496 с.

[16] Н.А. Фролов. *Теория функций действительного переменного.* — М.: ГИТТЛ, 1961. — 172 с.

Навчально-методичне видання

Копачевський М.Д.

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

(російською мовою)

Підписано до друку 10.12.2007р. Формат 60*84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Обл.-вид. друк. арк. 6,4. Об'єм 8,75 друк. арк.
Тираж 300 прим.

Надруковано
95015, м. Сімферополь, вул. Севастопольська, пров. Учбовий, 8