МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

Специальный курс лекций
для студентов специальностей
"Математика" и "Прикладная математика"

Симферополь
2010

ББК 22.311
К65
УДК 517.[958+983+984]

Рецензент :

Закора Д.А. — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

К65 Копачевский Н.Д. ***Абстрактная формула Грина*:** Специальный курс лекций. — Симферополь: б.и., 2010. — 134 с. — На русском языке.

В учебном пособии рассматриваются краевые и спектральные задачи математической физики и их операторные аналоги в гильбертовом пространстве. Приводится абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств. На ее основе исследуются общие классы эллиптических краевых задач, а также спектральных проблем, в частности, задач, содержащих спектральный параметр в уравнениях и краевых условиях.

Примеры и упражнения, представленные в учебном пособии, позволяют рекомендовать его для аудиторных занятий и самостоятельного изучения

Для студентов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики и прикладной математики.

Оглавление

Предисловие

Данный курс лекций предназначен для студентов-магистрантов по специальностям "Математика" и "Прикладная математика". Он основан на использовании так называемой абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств. Конкретные формулы Грина подобного рода играют важную роль в задачах математической физики, механики сплошных сред, теории упругости и других естественных науках. На основе этих формул исследуются общие классы эллиптических краевых задач, а также спектральных проблем, в частности, задач, содержащих спектральный параметр в уравнениях и краевых условиях.

Содержание курса лекций разбито на 4 главы.

В первой главе выводится абстрактная формула Грина. В качестве иллюстрации рассматривается основной пример, связанный с первой формулой Грина для оператора Лапласа.

Во второй главе изучаются абстрактные краевые задачи, а также их конкретные частные случаи для оператора Лапласа. Здесь же рассматриваются краевые задачи линейной теории упругости и гидродинамики. В частности, приводятся обобщенные формулировки соответствующих формул Грина для этих задач.

В третьей главе изучаются спектральные задачи, имеющие приложения в различных разделах математической физики, теории дифракции, теории упругости, гидродинамики и др.

Наконец, в четвертой главе устанавливается формула Грина для смешанных краевых задач, исследуются некоторые задачи сопряжения.

Глава 1

Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств

1.1 Введение

1.1.1 Классические формулы Грина для оператора Лапласа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть $u = u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, т.е. она дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, а $v = v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Напомним, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ оператор Лапласа Δ действует по закону

$$\Delta u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

а градиент функции $u = u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, вычисляется по формуле

$$\nabla u := \operatorname{grad} u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, \vec{e}_k,$$

где $\vec{e}_k$ — орты осей Ox_k, $k = 1, \ldots, m$. Отметим еще, что производная

$(\partial u/\partial n)|_\Gamma$ по внешней нормали $\vec{n}$ к Γ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \nabla u \cdot \vec{n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, n_k, \quad \vec{n} = \sum_{k=1}^{m} n_k\, \vec{e}_k,$$

где n_k — направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}$.

С учетом этих обозначений первая формула Грина для оператора Лапласа Δ записывается в следующем виде:

$$-\int\limits_\Omega (\Delta u) v\, d\Omega = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\Omega - \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\Gamma,\ u \in C^2(\overline{\Omega}),\ v \in C^1(\overline{\Omega}). \quad (1.1)$$

Ее легко вывести из известной формулы Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} \vec{A}\, d\Omega = \oint\limits_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\Gamma,$$

если положить $\vec{A} = v\nabla u$ и воспользоваться свойством

$$\operatorname{div} \vec{A} = v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u.$$

Меняя местами в (1.1) функции $u(x)$ и $v(x)$, а затем вычитая соответствующие левые и правые части этих формул, получим вторую формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\int\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega = \int\limits_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, d\Gamma. \quad (1.2)$$

1.1.2 Первая формула Грина в терминах скалярных произведений

Формулу (1.1) можно переписать в ином виде, используя скалярные произведения в гильбертовых пространствах, наиболее часто встречающихся при исследовании классических задач математической физики.

Введем гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ вещественнозначных скалярных функций $u(x)$, $x \in \Omega$, со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega u(x)\, v(x)\, d\Omega, \quad u, v \in L_2(\Omega), \quad (1.3)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Введем также гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{L_2(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} \varphi\, \psi\, d\Gamma, \quad \varphi, \psi \in L_2(\Gamma). \tag{1.4}$$

Введем, наконец, пространство Соболева $H^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, d\Omega, \quad u, v \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

и соответствующей нормой.

Тогда в терминах введенных скалярных произведений формулу Грина (1.1) можно переписать в виде (проверьте!)

$$\Big(v, u - \Delta u\Big)_{L_2(\Omega)} = \Big(v, u\Big)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma v, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.6}$$

$$u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad v \in C^1(\overline{\Omega}); \quad \gamma v := v|_{\Gamma}, \quad \forall v \in H^1(\Omega); \tag{1.7}$$

здесь γ — так называемый оператор следа, сопоставляющей каждой функции $v \in H^1(\Omega) \supset C^1(\overline{\Omega})$ ее след $v|_{\Gamma}$ на границе $\Gamma = \partial\Omega$.

1.1.3 Обобщения

В данном курсе лекций будет получено обобщение формулы Грина (1.6) по нескольким направлениям.

Во-первых, граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω может быть необязательно гладкой, а так называемой липшицевой, т.е. удовлетворяющей условию Липшица (см. п. 2.3). В частности, она может быть кусочно гладкой с ненулевыми внутренними и внешними двугранными углами между ее гладкими частями.

Во-вторых, вместо скалярных произведений в (1.6) будут стоять соответствующие функционалы, являющиеся расширениями этих скалярных произведений по непрерывности на случай, когда основное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение. Тогда второй "сомножитель" в функционале можно брать из так называемого пространства с негативной нормой (см. п. 2.1.3). Например, для оснащения

$$H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))^*$$

слагаемое слева в (1.6) можно будет записать в виде $\langle v, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}$, т.е. в виде применения линейного ограниченного функционала $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ к элементу $v \in H^1(\Omega)$.

В-третьих, элементы $u(x)$ и $v(x)$ в (1.6) можно брать не из $C^2(\overline{\Omega})$ и $C^1(\overline{\Omega})$ соответственно, а считать, что $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат более широкому множеству — пространству $H^1(\Omega)$.

Наконец, в-четвертых, вместо конкретных гильбертовых пространств $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, а также оператора следа (1.7), фигурирующих в (1.6), можно получить абстрактную формулу Грина для тройки произвольных гильбертовых пространств E, F, G, а также абстрактного оператора следа γ, подчиненных определенным связям (см. п. 2.2). Доказывается, что эта формула имеет вид

$$\langle v, Lu \rangle_E = (v, u)_F - \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \tag{1.8}$$

где Lu — абстрактное дифференциальное выражение, заменяющее выражение $u - \Delta u$ в (1.6), а ∂u — абстрактный оператор производной по внешней нормали, заменяющий $(\partial u/\partial n)_\Gamma$ в (1.6).

1.1.4 Классические формулы Грина линейной теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости

В данном курсе лекций будут встречаться формулы Грина не только для скалярных функций, но также и для векторных полей. Такие формулы находят широкое применение, например, при изучении задач линейной теории упругости и линейных проблем гидродинамики как сжимаемой, так и несжимаемой жидкости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная область с достаточно гладкой границей, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \overline{\Omega}$.

Покажем, что в этом случае имеет место следующая формула, которую также называют формулой Грина (она обобщает формулу интегрирования по частям, отвечающую одномерному случаю):

$$-\int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\psi\, d\Omega = \int\limits_\Omega \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, d\Omega - \int\limits_\Gamma \varphi\psi \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_i)\, d\Gamma, \tag{1.9}$$

где $\vec{n} = \sum\limits_{k=1}^m \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_k)\vec{e}_k$ — внешняя нормаль к Ω.

В самом деле, по формуле Гаусса-Остроградского имеем

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u}\psi)\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} (\vec{u}\psi) \cdot \vec{n}\, d\Gamma = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})\psi\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla\psi\, d\Omega \qquad (1.10)$$

для любого непрерывно дифференцируемого поля $\vec{u}$. Полагая здесь $\vec{u} = \varphi\vec{e}_i$, приходим к (1.9).

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Далее понадобится формула Грина вида (1.1), в которой, во-первых, использованы векторные поля, а во-вторых, слева вместо выражения $-\Delta u$ теперь стоит векторное дифференциальное выражение

$$L\vec{u} := -[\mu\, \Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\, \nabla \operatorname{div}\vec{u}], \qquad (1.11)$$

где λ и μ — физические положительные константы. В теории упругости функция $\vec{u}(x), x \in \Omega$, описывает поле смещений упругой среды относительно состояния ее равновесия, а $L\vec{u}$ — основное дифференциальное выражение в этой теории.

Таким образом, необходимо далее аналогично (1.1) преобразовать выражение

$$\int\limits_{\Omega} (L\vec{u}) \cdot \vec{v}\, d\Omega = -\mu \int\limits_{\Omega} \Delta\vec{u} \cdot \vec{v}\, d\Omega - (\lambda + \mu) \int\limits_{\Omega} (\nabla \operatorname{div}\vec{u}) \cdot \vec{v}\, d\Omega \qquad (1.12)$$

и получить сумму билинейной формы относительно $\vec{u}$ и $\vec{v}$, а также некоторое выражение в виде поверхностного интеграла.

Преобразуем сначала второе слагаемое в правой части (1.12), имеем

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Omega} (\nabla \operatorname{div}\vec{u}) \cdot \vec{v}\, d\Omega &= -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}((\operatorname{div}\vec{u})\vec{v})\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\, d\Omega = \\ &= \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div}\vec{u})\vec{v} \cdot \vec{n}\, d\Gamma. \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Преобразуем теперь выражение $-\int\limits_{\Omega} (\Delta\vec{u}) \cdot \vec{v}\, d\Omega$, воспользовавшись предварительно тождеством

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,, \end{aligned} \qquad (1.14)$$

справедливым для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u_i(x)$. Отсюда получаем, с использованием (1.9), что

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega} \Delta\vec{u}\cdot\vec{v}\,d\Omega = \\
&= -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big] v_i\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\operatorname{div}\vec{u})\Big) v_i\,d\Omega = \\
&= \Big\{\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,d\Omega - \qquad (1.15)\\
&- \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) v_i \cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\,d\Gamma\Big\} + \\
&+ \Big\{-\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div}\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Gamma\Big\}.
\end{aligned}
$$

С помощью тождеств (1.13) и (1.15) вычисляем правую часть (1.12), имеем

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega} \Big(\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{u}\Big)\cdot\vec{v}\,d\Omega = \\
&= \mu\Big\{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)\,d\Omega - \\
&- \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) v_i \cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\,d\Gamma - \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\,d\Omega + \qquad (1.16)\\
&+ \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div}\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Gamma\Big\} + \\
&+ (\lambda+\mu)\Big\{\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\vec{u})(\operatorname{div}\vec{v})\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{div}\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Gamma\Big\}.
\end{aligned}
$$

Введем обозначения:

$$
\tau_{ij}(\vec{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad E(\vec{u},\vec{v}) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij}(\vec{u})\tau_{ij}(\vec{v})\,d\Omega. \qquad (1.17)
$$

В теории упругости $\tau_{ij}(\vec{u})$ — удвоенные элементы тензора деформаций, отвечающего полю перемещений $\vec{u}(x)$; в гидродинамике $E(\vec{u},\vec{u})$ пропорционально скорости диссипации в объеме Ω энергии несжимаемой жидкости для поля скорости $\vec{u}(x)$.

С учетом обозначений (1.17) тождество (1.16) принимает следующий окончательный вид

$$-\int\limits_{\Omega}\Big(\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}\Big)\cdot\vec{v}\,d\Omega=\mu\,E(\vec{u},\vec{v})+\lambda\int\limits_{\Omega}(\mathrm{div}\,\vec{u})(\mathrm{div}\,\vec{v})\,d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\mu\tau_{ij}(\vec{u})+\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}\;\delta_{ij}\Big)v_i\cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\,d\Gamma. \tag{1.18}$$

(Здесь использована формула $\vec{v}\cdot\vec{n}=\sum\limits_{i,j=1}^{3}v_i\,\delta_{ij}\cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)$.)

Тождество (1.18) имеет место в произвольной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ для дважды непрерывно дифференцируемого поля $\vec{u}(x)$ и непрерывно дифференцируемого поля $\vec{v}(x)$, $x\in\overline{\Omega}$. Это тождество называют *формулой Грина линейной теории упругости.*

Пусть теперь $\vec{u}=\vec{u}(x)$ — поле скоростей в вязкой жидкости. Тогда, как это устанавливается в учебниках по гидродинамике (см., например, Ландау, гл. 2, параграф 1.5), основное дифференциальное выражение, в отличие от (1.11), принимает вид

$$L\vec{u}:=-[\mu\,\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\,\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}]+\nabla p, \tag{1.19}$$

где $p=p\,(x)$ — скалярное поле давлений в жидкости, а λ и μ — первый и второй коэффициенты вязкости жидкости.

Используем далее формулу

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega}\nabla p\cdot\vec{v}\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,(p\vec{v})\,d\Omega-\int\limits_{\Omega}p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\Omega=\\&=\int\limits_{\Gamma}p\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\Gamma-\int\limits_{\Omega}p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,d\Omega.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Складывая левые и правые части формул (1.18) и (1.20), приходим к *формуле Грина линейной гидродинамики вязкой сжимаемой* *жидкости*:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega} \Big[-\Big(\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\,\vec{u}\Big) + \nabla p\Big] \cdot \vec{v}\, d\Omega = \mu\, E(\vec{u},\vec{v}) + \\
+ \int\limits_{\Omega} (\lambda \mathrm{div}\,\vec{u} - p)\mathrm{div}\,\vec{v}\, d\Omega - \\
- \int\limits_{\Gamma} \Big[\sum_{i,j=1}^{3} \Big(\mu\tau_{ij}(\vec{u}) + (\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} - p)\delta_{ij}\Big) v_i \cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\Big]\, d\Gamma.
\end{gathered} \tag{1.21}
$$

Здесь

$$
\mu\tau_{ij}(\vec{u}) + (\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} - p)\delta_{ij} =: \sigma_{ij}, \quad i,j = 1,\, 2,\, 3, \tag{1.22}
$$

— это элементы тензора напряжений в вязкой жидкости.

Если жидкость — несжимаемая, то, как известно (и этот факт следует из уравнения неразрывности), поле скоростей $\vec{u}$ *соленоидально*, т.е. $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$. Для такого поля формула (1.21) упрощается и принимает вид

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega} (-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p)\cdot \vec{v}\, d\Omega = \\
= \mu\, E(\vec{u},\vec{v}) - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\mu\tau_{ij}(\vec{u}) - p\,\delta_{ij}\Big) v_i \cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\, d\Gamma.
\end{gathered} \tag{1.23}
$$

Далее ее будем использовать для соленоидальных полей, когда

$$
\mathrm{div}\,\vec{u} = \mathrm{div}\,\vec{v} = 0. \tag{1.24}
$$

Формулу (1.23) называют *формулой Грина линейной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.*

Классические формулы Грина (1.17), (1.21) и (1.23), как выяснится в данном курсе лекций, допускают расширение на случай негладкой (липшицевой) границы области Ω, причем векторные поля $\vec{u}$ и $\vec{v}$ могут иметь компоненты (проекции на оси координат) из пространства $H^1(\Omega)$.

1.2 Общая схема рассмотрения краевых задач

1.2.1 Гильбертовы пары пространств

Пусть F и E — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_F$ и $(\cdot,\cdot)_E$ соответственно, причем $F \subset E$. Будем говорить, что гильбертово пространство F *плотно вложено* в гильбертово пространство E и обозначать $F \hookrightarrow E$, если F является плотным линейным подмножеством в E и существует такая константа $a > 0$, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.25}$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют *гильбертову пару* $(F;E)$.

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная ограниченная область, а скалярные произведения определены (в комплексных пространствах) формулами

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, d\Omega, \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} [\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + u\overline{v}\,]\, d\Omega. \tag{1.26}$$

Здесь очевидно, $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, так как $H^1(\Omega)$ содержит плотное в $L_2(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных функций. При этом для норм, порожденных скалярными произведениями (1.26), имеет место оценка (1.25) с константой $a = 1$.

Введем теперь важное понятие оператора гильбертовой пары. Пусть $u \in F$, $v \in E$. Тогда выражение $(u,v)_E$ является линейным ограниченным функционалом в пространстве F. В самом деле,

$$|(u,v)_E| \leqslant \|u\|_E \cdot \|v\|_E \leqslant (a\|v\|_E)\|u\|_F. \tag{1.27}$$

Поэтому по лемме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве заключаем, что найдется единственный элемент $v_* \in F$ такой, что

$$(u,v)_E = (u,v_*)_F, \quad u \in F, \quad v \in E. \tag{1.28}$$

Возникает отображение $Vv := v_*$, где $V : E \to F$ — линейный ограниченный оператор. Свойства линейности для V очевидны, а ограниченность следует из соотношения

$$(u,v)_E = (u,Vv)_F, \quad u \in F, \quad v \in E, \tag{1.29}$$

при $u = Vv$. В самом деле, имеем с учетом (1.25)

$$\|Vv\|_F^2 = (Vv, Vv)_F = (Vv, v)_E \leqslant \|Vv\|_E \cdot \|v\|_E \leqslant a\|Vv\|_F\|v\|_E, \quad (1.30)$$

откуда при $Vv \neq 0$ получаем, что

$$\|Vv\|_F \leqslant a\|v\|_E. \quad (1.31)$$

Окончательно приходим к неравенствам

$$a^{-1}\|Vv\|_E \leqslant \|Vv\|_F \leqslant a\|v\|_E, \quad (1.32)$$

Убедимся теперь, что оператор $V : E \to E$ самосопряжен и положителен. Действительно, при $u = V\eta$, $\eta \in E$, из (1.29) имеем

$$\begin{gathered}(V\eta, v)_E = \\ = (V\eta, Vv)_F = \overline{(Vv, V\eta)_F} = \overline{(Vv, \eta)_E} = (\eta, Vv)_E, \quad \forall \eta, v \in E,\end{gathered} \quad (1.33)$$

т.е. $V = V^*$. Далее, из (1.30) получаем также, что оператор $V : E \to E$ неотрицателен. Если же $Vv = 0$, то из (1.29) получаем, что $(u, v)_E = 0$ при всех $u \in F$. Так как F плотно в E, то приходим к выводу, что $v = 0$. Значит, $(Vv, v)_E > 0$ при всех $v \neq 0$, т.е. оператор V является положительным.

Если F компактно вложено в E (обозначение: $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$), т.е. каждое ограниченное множество из F является компактным в E, то оператор V компактен (вполне непрерывен). Действительно, если множество $\{v\} \subset E$ ограничено в E, то в силу правого неравенства (1.32) множество $\{Vv\} \subset F$ ограничено в F, а потому оно компактно в E.

Так как оператор V положителен, то он имеет обратный оператор $A := V^{-1}$. Очевидно, по определению

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(V) \subset F, \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}\left(A^{-1}\right) = \mathcal{D}(V) = E. \quad (1.34)$$

Отсюда (а также из спектрального разложения для $V = V^*$) следует, что A — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор.

Из (1.29) приходим к тождеству ($v \mapsto Av$)

$$(u, Av)_E = (u, v)_F, \quad u \in F, \quad v \in \mathcal{D}(A) \subset F. \quad (1.35)$$

Если здесь $u \in \mathcal{D}(A)$, то это тождество принимает вид

$$(A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = (u, v)_F, \quad u, v \in \mathcal{D}(A). \quad (1.36)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\|A^{1/2}u\|_E = \|u\|_F, \quad \forall u \in \mathcal{D}\,(A)\,. \tag{1.37}$$

Напомним (см. часть I), что область определения квадратного корня $A^{1/2}$ оператора $A \gg 0$ получается замыканием области определения $\mathcal{D}\,(A)$ оператора A по норме $\|A^{1/2}u\|_E$. Поэтому из (1.37) следует, что область определения $\mathcal{D}\left(A^{1/2}\right)$ совпадает с замыканием $\mathcal{D}\,(A)$ по норме пространства F, т.е. является подпространством в F. Оказывается, что на самом деле $\mathcal{D}\left(A^{1/2}\right) = F$.

Действительно, в противном случае, нашелся бы такой ненулевой элемент $u_0 \in F$, что $(u_0, v)_F = 0$ при всех $v \in \mathcal{D}\,(A)$ и, значит, при всех $v \in \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right)$. Тогда в силу (1.35)

$$0 = (u_0, v)_F = (u_0, Av)_E, \quad \forall v \in \mathcal{D}\,(A)\,,$$

и так как $\mathcal{R}\,(A) = E$, то $u_0 = 0$, что противоречит предположению.

Таким образом, справедливо тождество

$$\|u\|_F = \|A^{1/2}u\|_E, \quad \forall u \in F. \tag{1.38}$$

Следовательно, пространство F является областью определения положительно определенного самосопряженного оператора $A^{1/2}$, а норма в F определяется формулой (1.38). При этом если F компактно вложено в E ($F \hookrightarrow\hookrightarrow E$), то оператор $A^{-1/2}$, обратный к $A^{1/2}$, компактен.

Назовем оператор A *порождающим оператором* гильбертовой пары $(F; E)$. Из проведенных выше построений следует, что он определяется единственным образом по паре $(F; E)$.

Отметим в качестве замечания, что иногда пространство F состоит из элементов другой природы, чем E, но существует взаимно однозначное отображение множества F на плотное в E множество $\widetilde{F}$, причем это отображение сохраняет алгебраические операции. Тогда F можно отождествить с его образом $\widetilde{F}$, и если снова справедливо неравенство (1.25), то все предыдущие построения проходят и в этом случае.

1.2.2 Примеры гильбертовых пар пространств

Рассмотрим некоторые классические примеры гильбертовых пар пространств скалярных функций, встречающихся в приложениях, а также примеры гильбертовых пар пространств вектор-функций.

1^0. *Гильбертова пара* $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$.
Этот пример уже рассматривался в начале п. 1.2.1. Так как $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \tag{1.39}$$

то $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

2^0. *Гильбертова пара* $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$.
Пусть $L_{2,\Omega}$ — подпространство тех элементов из $L_2(\Omega)$, которые ортогональны к единичной функции 1_Ω:

$$L_{2,\Omega} := \Big\{u \in L_2(\Omega) : \int\limits_\Omega u(x)\,d\Omega = (u, 1_\Omega)_{L_2(\Omega)} = 0\Big\}. \tag{1.40}$$

Можно сказать, что $L_{2,\Omega}$ состоит из тех функций из $L_2(\Omega)$, которые имеют нулевое среднее значение:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega u\,d\Omega = 0. \tag{1.41}$$

Рассмотрим теперь подпространство H^1_Ω тех элементов из $H^1(\Omega)$, для которых также выполнено свойство (1.41). Введем на $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной (см. часть I, теорема 5.5):

$$\|u\|^2_{1,\Omega} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,d\Omega + \Big(\int\limits_\Omega u\,d\Omega\Big)^2. \tag{1.42}$$

Тогда для элементов из H^1_Ω имеем

$$\|u\|^2_{1,\Omega} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,d\Omega, \tag{1.43}$$

т.е. квадрат нормы в H^1_Ω совпадает с интегралом Дирихле.

Так как $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ образуют гильбертову пару пространств, то в силу определений пространств H^1_Ω и $L_{2,\Omega}$ (они являются подпространствами коразмерности единица пространств $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, причем отделяется одно и то же подпространство, состоящее из констант) эти пространства также образуют гильбертову пару пространств.

3^0. *Гильбертова пара* $(H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$.
Рассмотрим подпространство $H_0^1(\Omega)$ тех функций из $H^1(\Omega)$, которые обращаются в нуль на границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω:

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}.$$

В этом подпространстве можно ввести норму в эквивалентной форме:

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega.$$

Так как $H_0^1(\Omega)$ содержит множество финитных бесконечно дифференцируемых функций, которые плотны в $L_2(\Omega)$, то $H_0^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Кроме того, для элементов из $H_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство Фридрихса (см. часть I, ...):

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.44}$$

Отсюда приходим к выводу, что $(H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

4^0. *Гильбертова пара* $(H_{0,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$.
Рассмотрим теперь множество $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ тех функций из $H^1(\Omega)$, которые обращаются в нуль на части Γ границы $\partial\Omega$, причем Γ имеет положительную меру, т.е. $|\Gamma| > 0$. Можно доказать, что $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ образует подпространство в $H^1(\Omega)$. Введем в $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной (снова см. часть I, теор....), по формуле

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \Big(\int\limits_\Gamma u \, d\Gamma \Big)^2. \tag{1.45}$$

Тогда для элементов из $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ эта норма, как и в случае 3^0, совпадает с интегралом Дирихле:

$$\|u\|^2_{H_{0,\Gamma}^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega. \tag{1.46}$$

Так как $H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \supset H_0^1(\Omega)$, то $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, и по теореме вложения Соболева (часть I, ...) имеем

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{c}\|u\|_{H_{0,\Gamma}^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \tag{1.47}$$

Отсюда снова получаем, что $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Рассмотрим, наконец, гильбертовы пары пространств, состоящих из векторных полей, связанных с проблемами линейной теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости (см. п. 1.1.4).

5^0. *Гильбертова пара* $(\overrightarrow{H}^1(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$.

Пусть $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i(x)\vec{e}_i$ — векторное поле, заданное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ пространство векторных полей с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\vec{u}(x)|^2 \, d\Omega < \infty, \tag{1.48}$$

а через $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ — пространство векторных полей с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \Big(|\vec{u}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \Big| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \, d\Omega < \infty. \tag{1.49}$$

Нетрудно видеть, что квадрат нормы (1.49) есть сумма квадратов стандартных норм компонент $u_i(x)$ векторного поля $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i(x)\vec{e}_i$.

Так как $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств для скалярных функций (см. вариант 1^0), то в векторном случае $(\overrightarrow{H}^1(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$ — также гильбертова пара пространств. В самом деле, так как $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и имеет место неравенство (1.39), то $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ и имеет место аналогичное неравенство (см. (1.48), (1.49))

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \leqslant \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega). \tag{1.50}$$

6^0. *Гильбертова пара* $(\overrightarrow{H}^1_0(\Omega); \overrightarrow{L_2}(\Omega))$.

Введем подпространство векторных полей $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i(x)\vec{e}_i$ из $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, у которых все компоненты u_i обращаются в нуль на $\partial\Omega$:

$$\overrightarrow{H}^1_0(\Omega) := \Big\{ \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega) : \vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{0} \Big\}. \tag{1.51}$$

Очевидно, как и в случае 3^0, на этом подпространстве можно вместо

(1.49) ввести норму по закону

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_0(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|^2 d\Omega, \tag{1.52}$$

и имеет место неравенство Фридрихса (см. (1.44))

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} \leqslant c^2 \|\vec{u}\|_{\vec{H}^1_0(\Omega)}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1_0(\Omega). \tag{1.53}$$

Так как $H^1_0(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $\vec{H}^1_0(\Omega)$ плотно в $\vec{L_2}(\Omega)$ и потому $(\vec{H}^1_0(\Omega); \vec{L_2}(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

7^0. *Гильбертовы пары $(\vec{H}^1_0(\Omega); \vec{L_2}(\Omega))$ и $(\vec{H}^1(\Omega); \vec{L_2}(\Omega))$ с эквивалентными нормами.*

В пространствах векторных полей $\vec{H}^1_0(\Omega)$ и $\vec{H}^1(\Omega)$ можно ввести нормы, эквивалентные нормам, порожденным билинейными функционалами из формул Грина (1.17), (1.21) и (1.23) теории упругости и гидродинамики.

Рассмотрим сначала вещественное пространство $\vec{H}^1_0(\Omega)$. Введем на его элементах новую норму

$$\|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} := E(\vec{u}, \vec{u}) + \int\limits_\Omega |\operatorname{div} \vec{u}|^2 \, d\Omega, \tag{1.54}$$

где $E(\vec{u}, \vec{u})$ — квадратичный функционал (1.17). Покажем, что эта норма эквивалентна норме (1.52).

С этой целью преобразуем выражение

$$E(\vec{u}, \vec{u}) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big|^2 \Big) d\Omega =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|^2 \Big) d\Omega + \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big) d\Omega.$$

Так как $\vec{u} \in \vec{H}^1_0(\Omega)$ и потому $\vec{u} = \vec{0}$ на $\partial\Omega$, то второе слагаемое преобразуется по формуле (1.9), и тогда согласно (1.13) имеем

$$\begin{aligned} E(\vec{u}, \vec{u}) &= \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|^2 \Big) d\Omega - \int\limits_\Omega (\nabla \operatorname{div} \vec{u}) \cdot \vec{u} \, d\Omega = \\ &= \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|^2 \Big) d\Omega + \int\limits_\Omega |\operatorname{div} \vec{u}|^2 \, d\Omega, \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Это соотношение называют *тождеством Корна.* Из него и из (1.54) получаем, что

$$\|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} = \|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_0(\Omega)} + 2\int\limits_\Omega |\operatorname{div}\vec{u}|^2\,d\Omega \geqslant \|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_0(\Omega)}. \tag{1.56}$$

С другой стороны, так как

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega |\operatorname{div}\vec{u}|^2\,d\Omega = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega \leqslant \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^3 \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big|\Big)^2 d\Omega \leqslant \\ \leqslant 3\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^3 \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big|^2\Big) d\Omega \leqslant 3\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^3 \Big|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|^2\Big) d\Omega = 3\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_0(\Omega)},\end{gathered} \tag{1.57}$$

то из (1.56) имеем также неравенство

$$\|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} \leqslant 7\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_0(\Omega)}. \tag{1.58}$$

Неравенства (1.56) и (1.58) доказывают эквивалентность норм (1.52) и (1.54). Отсюда следует, что пространство $\vec{H}^1_0(\Omega)$ с нормой (1.54) и $\vec{L_2}(\Omega)$ также образуют гильбертову пару пространств. Отметим еще, что неравенство (1.56) называют *первым неравенством Корна.*

Заметим также, что если векторные поля из $\vec{H}^1_0(\Omega)$ соленоидальны, т.е. $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, как это имеет место для поля скоростей несжимаемой жидкости, то из (1.54) и (1.56) следует, что

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_0(\Omega)} = E(\vec{u},\vec{u}), \quad \vec{u} \in \vec{H}^1_0(\Omega), \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{1.59}$$

Введем теперь соответствующие эквивалентные нормы для пары пространств $(\vec{H}^1(\Omega); \vec{L}_2(\Omega))$; они также играют важную роль в задачах теории упругости и гидродинамики.

Введем в $\vec{H}^1(\Omega)$ норму по формуле

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} := E(\vec{u},\vec{u}) + \int\limits_\Omega |\operatorname{div}\vec{u}|^2\,d\Omega + \int\limits_\Omega |\vec{u}|^2\,d\Omega = \|\vec{u}\|^2_{1,0,\Omega} + \|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}. \tag{1.60}$$

Тогда оказывается, что имеет место *второе неравенство Корна*, которое имеет следующий вид (см. [4], с. 18):

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} \geqslant c_1\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \quad c_1 > 0, \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega), \tag{1.61}$$

где $\|\vec{u}\|_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}$ — стандартная норма (1.49). Вместе с очевидным неравенством противоположного смысла

$$\|\vec{u}\|^2_{1,\Omega} \leqslant c_2 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \quad c_1 > 0, \quad \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega), \tag{1.62}$$

(докажите его!) получаем, что нормы (1.60) и (1.49) эквивалентны.

В ряде приложений важное значение имеет несколько иная форма второго неравенства Корна. Обозначим через $\overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} \subset \overrightarrow{H}^1(\Omega)$ подпространство, описывающее жесткие перемещения (сдвиги и вращения) сплошной среды, т.е. множество вектор-функций вида

$$\vec{\eta} := \vec{a} + \vec{\delta} \times \vec{r}, \quad \forall \vec{a}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k, \tag{1.63}$$

где символом "$\times$" обозначено обычное векторное произведение векторов. Размерность $\overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}}$, очевидно, равна G. Рассмотрим теперь подпространство $\overrightarrow{H}^1_{\vec{\mathbb{R}}}(\Omega)$ тех элементов из $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, для которых выполнено условие

$$\overrightarrow{H}^1_{\mathbb{R}}(\Omega) \cap \overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{\overrightarrow{0}\}. \tag{1.64}$$

Тогда (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) для любой функции $\vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$E(\vec{u}, \vec{u}) + \int_\Omega |\mathrm{div}\vec{u}|^2 \, d\Omega \geqslant c_3 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \quad c_3 > 0, \tag{1.65}$$

которое называют *другой формой второго неравенства Корна* (см. [4], с. 22). Здесь, очевидно, левую часть можно принять в качестве квадрата нормы в подпространстве $\overrightarrow{H}^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$, и эта норма будет эквивалентна стандартной норме (1.49) на $\overrightarrow{H}^1_{\vec{\mathbb{R}}}(\Omega)$.

Пусть, в частности, поле перемещений или поле скоростей сплошной среды обращается в нуль на части $S \subset \partial\Omega$ границы области Ω. Тогда такие поля образуют подпространство $\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространстве $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, причем для элементов $\vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)$ из условия

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{\delta} \times \vec{r} \equiv 0 \quad (\text{на } S)$$

следует, что $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{\delta} = \vec{0}$. Значит, $\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega) \cap \overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{\vec{0}\}$, и потому в силу (1.62) имеет место неравенство (1.65):

$$\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)} := E(\vec{u},\vec{u}) + \int\limits_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{u}|^2\, d\Omega \geqslant c_3 \|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)}, \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega). \tag{1.66}$$

В гидродинамике важную роль играет подпространство $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ соленоидальных полей из $\overrightarrow{H}^1_{0,S}(\Omega)$, когда поле скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega$, обращается в нуль на твердой стенке S, т.е. на части границы области Ω. Тогда из (1.66) и неравенства противоположного смысла получаем, что нормы в $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ и $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ эквивалентны:

$$0 < c_3 \leqslant E(\vec{u},\vec{u})/\|\vec{u}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} \leqslant c_4 < \infty, \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega). \tag{1.67}$$

1.2.3 Гильбертова шкала пространств. Оснащенные гильбертовы пространства

Пусть $(F; E)$ — гильбертова пара пространств и A — оператор этой гильбертовой пары. Так как $A : \mathcal{D}(A) \subset F \subset E \to E$ — положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор, то при любом $\alpha \geqslant 0$ существует (это следует также из спектрального разложения оператора A) оператор A^α, который также является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в E и заданным на тех элементах из E, для которых $A^\alpha x \in E$.

По оператору A можно ввести серию новых гильбертовых пространств следующим образом. Для $\alpha > 0$ обозначим через E^α область определения $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset E$ степени A^α оператора A. Это линейное множество превращается в гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(u,v)_{E^\alpha} := (A^\alpha u, A^\alpha v)_E, \quad \forall u,v \in \mathcal{D}(A^\alpha), \tag{1.68}$$

и нормы

$$\|u\|_{E^\alpha} := \|A^\alpha u\|_E. \tag{1.69}$$

Напомним, что для $A \gg 0$ оператор A^α при $\alpha > 0$ определен через спектральное разложение

$$A := \int\limits_{\sigma(A)} \mu\, dT_\mu \tag{1.70}$$

оператора A по закону

$$A^\alpha := \int\limits_{\sigma(A)} \mu^\alpha \, dT_\mu, \tag{1.71}$$

причем

$$\|A^\alpha u\|_E^2 = \|u\|_{E^\alpha}^2 = \int\limits_{\sigma(A)} \mu^{2\alpha} \, d(T_\mu u, u)_E < \infty, \quad u \in \mathcal{D}(A^\alpha).$$

Здесь $\sigma(A)$ — спектр оператора A, $\inf \sigma(A) > 0$, а T_μ — разложение единицы, отвечающее оператору A.

Из определения E^α и формулы (1.38) следует, что $E^{1/2} = F$ и

$$\|u\|_F := \|u\|_{E^{1/2}}, \quad u \in F = E^{1/2}. \tag{1.72}$$

Очевидно также, что $E^0 = E$.

Заметим теперь, что для отрицательных значений β оператор $A^\beta = V^{-\beta}$ ограничен, задан на всем пространстве E, и если $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$, то A^β компактен. Поэтому для введения пространств E^α с отрицательными индексами поступают следующим образом. На пространстве $E = E^0$ вводится новая норма

$$\|u\|_{E^{-\alpha}} := \|A^{-\alpha} u\|_E, \quad u \in E, \quad \alpha > 0, \tag{1.73}$$

а затем E *пополняется* по этой норме. Полученное гильбертово пространство и обозначается через $E^{-\alpha}$. Очевидно, пространство $E^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, состоит из таких элементов u, для которых

$$\|A^{-\alpha} u\|_E^2 = \|u\|_{E^{-\alpha}}^2 = \int\limits_{\sigma(A)} \mu^{-2\alpha} \, d(T_\mu u, u)_E < \infty. \tag{1.74}$$

Построенное семейство пространств $E^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, называется *гильбертовой шкалой пространств*. Эта шкала обладает следующими свойствами.

1^0. При $\alpha < \beta$ пространство E^β плотно вложено в E^α.

2^0. При $\alpha > 1$ *сужение* оператора A *на* E^α взаимно однозначно и непрерывно отображает пространство E^α *на* пространство $E^{\alpha-1}$.

3^0. При $\alpha \leqslant 1$ *расширение по непреывности* оператора A с $\mathcal{D}(A) = E^1$ на E^α отображает E^α на $E^{\alpha-1}$; в частности, оператор A отображает $E^{1/2} = F$ *на* пространство $E^{-1/2}$.

4^0. Аналогично действие оператора A^β, в частности, оператора $A^{1/2}$. Так, оператор $A^{1/2}$ отображает $E^{1/2} = F$ на $E^0 = E$, а E на $E^{-1/2}$.

Опишем подробнее пространство $E^{-1/2}$ и свяжем его с пространствами E и $E^{1/2} = F$. Пространство $E^{-1/2}$ получается пополнением $E = E^0$ по норме

$$\|v\|_{E^{-1/2}} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0}.$$

Зафиксируем элемент $v \in E^0$. Ему соответствует линейный ограниченный функционал (см. (1.27), (1.28))

$$l_v(u) := (u, v)_{E^0}, \quad u \in F = E^{1/2}, \tag{1.75}$$

причем

$$|l_v(u)| = |(u, v)_{E^0}| = |(A^{1/2}u, A^{-1/2}v)_{E^0}| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|A^{1/2}u\|_{E^0} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|u\|_F.$$

Отсюда следует, что

$$\|l_v\|_{F^*} \leqslant \|A^{-1/2}v\|_{E^0}.$$

Оказывается, здесь имеет место равенство. Действительно, при $w = A^{-1}v$ имеем

$$l_v(w) = (A^{-1}v, v)_{E^0} = (A^{-1/2}v, A^{-1/2}v)_{E^0} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|A^{-1/2}v\|_{E^0} =$$
$$= \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|A^{1/2}(A^{-1}v)\|_{E^0} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0} \cdot \|w\|_F.$$

Поэтому

$$\|l_v\|_{F^*} = \|A^{-1/2}v\|_{E^0}. \tag{1.76}$$

Приведенные рассуждения показывают, что пространство $E = E^0$ можно вложить в пространство F^* линейных ограниченных функционалов на пространстве F. При этом выполнено соотношение (1.76). Отсюда следует, что пространство $E^{-1/2}$, являющееся пополнением пространства $E^0 = E$ по норме $\|A^{-1/2}v\|_{E^0}$, $v \in E$, можно *изометрически* отождествить с подпространством из F^*.

Покажем, что это подпространство совпадает со всем F^*. Пусть это не так. Тогда найдется ненулевой элемент $u_0 \in F$ такой, что на этом элементе все функционалы из указанного подпространства обращаются в нуль. Но тогда при любом $v \in E^0$ будет

$$l_v(u_0) = (u_0, v)_{E^0} = 0,$$

откуда следует, что $u_0 = 0$ (противоречие).

Итак, пространство $E^{-1/2}$ *изометрически отождествляется* с пространством F^*, сопряженным с пространством F, т.е.

$$E^{-1/2} = F^* = (E^{1/2})^*. \tag{1.77}$$

Вернемся к рассмотрению линейного ограниченного функционала $l_v(u)$ из (1.75) при $v \in E$, $u \in F$. Здесь элемент v можно отождествить с функционалом из F^*. После такого отождествления, как следует из вышеизложенного, пространство $E = E^0$ будет плотным множеством в пространстве $F^* = E^{-1/2}$. Отсюда следует, что скалярное произведение $(u, v)_E$ при $u \in F$ можно *расширить* на тот случай, когда второй множитель принадлежит F^*. Если $v_n \in E$, $v_n \to v$ в F^*, то возникает линейный ограниченный функционал

$$l_v(u) := \langle u, v\rangle_E := \lim_{n\to\infty} (u, v_n)_E, \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in F^*. \tag{1.78}$$

При этом в силу (1.76) справедливо неравенство

$$|\langle u, v\rangle_E| \leqslant \|v\|_{F^*} \cdot \|u\|_F, \tag{1.79}$$

которое также называют *неравенством Коши-Буняковского.*

При выполнении соотношений (1.78), (1.79) говорят, что функционал $l_v \in F^*$ *определен через скалярное произведение в* E, а тройку пространств

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^* \tag{1.80}$$

называют *оснащением* пространства E.

1.2.4 Обобщенные и слабые решения операторных уравнений

Пусть $(F; E)$ — гильбертова пара пространств и A — порождающий оператор этой пары. Тогда A положительно определен и самосопряжен в $E = E^0$ и задан на области определения

$$\mathcal{D}(A) = E^1 \subset E^{1/2} = F \subset E^0.$$

Многие эллиптические краевые задачи математической физики могут быть кратко записаны в виде операторного уравнения

$$Au = f, \tag{1.81}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(F;E)$, а E и F — гильбертовы пространства, естественно связанные с задачей (см. ниже п. 1.2.5, а также часть I).

Пусть сначала в (1.81) заданный элемент $f \in E$. Так как оператор A имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1} = V$, то при любом $f \in E$ существует единственное решение $u = A^{-1}f$, которое, в отличие от классического решения, называют *обобщенным решением* задачи (1.81). (Напомним, что классическими решениями задач математической физики называют такие решения, которые непрерывны и имеют все непрерывные производные, входящие в уравнения и краевые условия.)

Как следует из теории шкал гильбертовых пространств (см. свойства 1^0 — 4^0 п. 1.2.3), оператор A^{-1} ограниченно действует из $E = E^0$ *на* $E^1 = \mathcal{D}(A)$. Поэтому совокупность $\{A^{-1}f\}$, $f \in E$, всех обобщенных решений задачи (1.81) заполняет всю область определения $\mathcal{D}(A) = E^1$ оператора A. Для указанных обобщенных решений выполнено тождество

$$(v,u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = (v,f)_E, \quad \forall v \in F = \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right). \qquad (1.82)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в (1.81) заданный элемент $f \in F^* = E^{-1/2} \supset E$. В этом случае решения задачи

$$Au = f, \quad f \in F^*, \qquad (1.83)$$

называют *слабыми решениями*. Здесь можно считать, что оператор A действует в шкале гильбертовых пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Так как в этом случае оператор A ограниченно действует из $E^{1/2} = F$ *на* $E^{-1/2} = F^*$, а потому обратный оператор A^{-1} ограниченно действует из $F^* = E^{-1/2}$ *на* $E^{1/2} = F$, то при любом $f \in F^*$ задача (1.83) имеет единственное слабое решение $u = A^{-1}f \in F$. При этом (и этот факт снова следует из теории шкал гильбертовых пространств) совокупность слабых решений $\{A^{-1}f\}$, $f \in F^*$, задачи (1.83) заполняет все пространство F, а совокупность правых частей $\{f\} = \{Au\}$, $u \in F$, соответственно заполняет все пространство F^*.

Итак, для слабых решений задачи (1.83) имеем

$$\mathcal{D}(A) = F = E^{1/2}, \quad \mathcal{R}(A) = F^* = E^{-1/2}, \qquad (1.84)$$

и выполнено тождество

$$(v,u)_F = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_E = \langle v, Au\rangle_E = \langle v, f\rangle_E, \quad \forall v \in F. \qquad (1.85)$$

1.2.5 Некоторые примеры краевых задач для эллиптических уравнений и их слабых решений

Опираясь на введенные в п. 1.2.2 пары гильбертовых пространств, рассмотрим некоторые примеры обобщенных и слабых решений операторных уравнений для оператора Лапласа и близких к нему операторов.

1^0. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma = \partial\Omega$ — граница области Ω, которую сейчас будем считать достаточно гладкой, для простоты даже бесконечно дифференцируемой.

Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения типа Пуассона:

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{1.86}$$

Как известно из курсов математической физики и уравнений в частных производных (см., в частности, [Лионс-Мадженес]), эта задача при $f(x) \in C(\overline{\Omega})$ имеет классическое решение $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, которое определяется единственным образом по $f(x)$.

Если $f(x) \in L_2(\Omega) \supset C(\overline{\Omega})$, то можно определить обобщенное решение $u(x)$ задачи (1.86) посредством тождества (см. (1.82))

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (\eta, f)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.87}$$

Это тождество следует из формулы Грина (1.6), если в ней взять $v = \eta$, $u - \Delta u$ заменить на f и учесть граничные условия на Γ (см. (1.86)).

Наконец, если $f(x) \in (H^1(\Omega))^* \supset L_2(\Omega)$ (сопряжение по форме $L_2(\Omega)$), то слабое решение задачи (1.86) определяется из тождества, обобщающего (1.87):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \tag{1.88}$$

где $\langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}$ — значение функционала $f \in (H^1(\Omega))^*$ на элементе $\eta \in H^1(\Omega)$.

2^0. Рассмотрим теперь взамен (1.86) краевую задачу для однородного уравнения и неоднородного краевого условия:

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.89}$$

Если здесь $\psi = \psi(x)$, $x \in \Gamma$, — достаточно гладкая функция, заданная на $\Gamma = \partial\Omega$ (например, если $\psi \in C^2(\Gamma)$), то задача (1.89) имеет единственное классическое решение $w(x)$ (см., в частности, [Лионс-Мадженес]).

Снова опираясь на формулу Грина (1.6), определим при $\psi(x) \in L_2(\Gamma))$ обобщенное решение $w(x)$ задачи (1.89) посредством тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = (\gamma\eta, \psi)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma\eta := \eta|_\Gamma, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.90}$$

Пусть теперь $\psi(x) \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Gamma)$). Тогда слабое решение $w(x)$ задачи (1.89) определяется из тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.91}$$

Здесь пространства

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))^* \tag{1.92}$$

образуют оснащение пространства $L_2(\Gamma)$. Подробное описание шкал пространств $H^\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, в области Ω с бесконечно дифференцируемой границей $\Gamma = \partial\Omega$ можно найти, например, в монографии [Лионс-Мадженес]. Для области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ описание пространств $H^{1/2}(\Gamma)$ и $(H^{1/2}(\Gamma))^*$ будет дано ниже в п. 1.4.4 (см. теорему Гальярдо).

3^0. Аналогичным образом можно по приведенным в п. 1.2.2 парам пространств $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$, $(H^1_0(\Omega); L_2(\Omega))$ и $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ определить соответственно классические, обобщенные и слабые решения задач, подобных задачам (1.86) и (1.89).

Так, для пары пространств $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$ возникают краевые задачи

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Omega f \, d\Omega = 0, \quad \int_\Omega u \, d\Omega = 0, \tag{1.93}$$

$$\Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \psi \, d\Gamma = 0, \quad \int_\Omega w \, d\Omega = 0. \tag{1.94}$$

Обобщенное и слабое решения задачи (1.93) определяются соответственно из тождеств

$$\int_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \int_\Omega \eta f \, d\Omega, \quad \forall \eta \in H^1_\Omega, \quad f \in L_{2,\Omega}, \tag{1.95}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_{\Omega}, \quad f \in (H^1_{\Omega})^* \supset L_{2,\Omega}. \tag{1.96}$$

Для задачи (1.94) аналогично имеем тождества

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \eta\psi \, d\Gamma, \quad \forall \eta \in H^1_{\Omega}, \quad \psi \in L_{2,\Gamma}, \tag{1.97}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla w \, d\Omega = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall \eta \in H^1_{\Omega}, \quad \psi \in (H^{1/2}_{\Gamma})^* \supset L_{2,\Gamma}, \tag{1.98}$$

$$H^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \quad L_{2,\Gamma} := \{\psi \in L_2(\Gamma) : \int\limits_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = 0\}. \tag{1.99}$$

Для гильбертовой пары пространств $(H^1_0(\Omega); L_2(\Omega))$ рассматривают задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{1.100}$$

Обобщенное и слабое решения этой задачи определяются соответственно из тождеств

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \eta f \, d\Omega, \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega), \tag{1.101}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \forall \eta \in H^1_0(\Omega), \, f \in (H^1_0(\Omega))^* \supset L_2(\Omega). \tag{1.102}$$

Рассмотрим еще гильбертову пару пространств $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$, см. п. 1.2.2. Для простоты будем считать, что граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, в которой изучается задача, состоит из двух непересекающихся кусков, $\partial\Omega = \Gamma \cup S$, $\overline{\Gamma} \cap \overline{S} = \emptyset$, причем Γ и S — бесконечно дифференцируемые поверхности. Тогда возникают следующие так называемые *смешанные краевые задачи*, аналогичные вышеприведенным задачам (1.93) и (1.94), а также (1.100):

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.103}$$

$$\Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } S), \quad w = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.104}$$

Здесь определения обобщенных и слабых решений таковы.
Для задачи (1.103):

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \eta f \, d\Omega, \quad \forall \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega); \tag{1.105}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad f \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^* \supset L_2(\Omega); \tag{1.106}$$

для задачи (1.104):

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{S} \eta \psi \, dS, \quad \forall \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad \psi \in L_2(S), \tag{1.107}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla w \, d\Omega = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(S)}, \quad \forall \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad \psi \in (H^{1/2}(S))^* \supset L_2(S). \tag{1.108}$$

Заметим в заключение этого пункта, что каждая из рассмотренных здесь задач имеет единственное обобщенное либо слабое решение, принадлежащее первому из пространств соответствующей гильбертовой пары. Эти факты следуют из общих рассмотрений п. 1.2.4. Предоставляем возможность самостоятельно детально рассмотреть приведенные примеры на основе общих построений, изложенных в пп. 1.2.1 — 1.2.4.

1.3 Абстрактная формула Грина

1.3.1 Введение

Пусть Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Для функций $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \overline{\Omega}$, как уже упоминалось в п. 1.1.2, справедлива формула Грина (см. (1.6))

$$\Big(\eta, u - \Delta u\Big)_{L_2(\Omega)} = \Big(\eta, u\Big)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \quad \gamma u := u|_{\Gamma}, \tag{1.109}$$

где $\Delta := \sum\limits_{k=1}^{m} \partial^2/\partial x_k^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^m$, γ — оператор следа на Γ, а $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали на Γ.

В п. 1.1.3 уже приведены те варианты обобщений, которые возможны в формуле (1.109). Это, во-первых, — переход к липшицевой границе $\Gamma = \partial\Omega$, во-вторых, — переход к элементам η и u из $H^1(\Omega)$, в-третьих, — переход к функционалам вместо скалярных произведений в (1.109), наконец, в-четвертых, — получение абстрактной формулы Грина для произвольной тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа.

Перейдем к подробному выводу этой формулы Грина. Отметим предварительно, что первые результаты, связанные с получением абстрактной формулы Грина, принадлежат французскому математику Ж.-П. Обену (1970г., см. также его монографию [], с. 188 — 189). Независимо от Ж.-П. Обена аналогичная формула была получена С.Г. Крейном; она опубликована в 1989г. в монографии ([], с. 46 — 47). Позже абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обена использовалась в монографии Р.Е. Шоуволтера ([]).

Дальнейшее ослабление общих условий, обеспечивающих справедливость абстрактной формулы Грина, принадлежит автору данного курса лекций (см., [, ,]). В этой окончательной формулировке и будет приведен и доказан соответствующий результат (см. п. 1.3.5).

1.3.2 Предварительные построения

Пусть $\{E,(\cdot,\cdot)_E\},\{F,(\cdot,\cdot)_F\},\{G,(\cdot,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1^0. Пространство F плотно вложено в E, $F \hookrightarrow E$, и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.110}$$

2^0. На пространстве F задан оператор γ, называемый *абстрактным оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma)=:G_+$ пространства G, т.е. $\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G$, и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \quad b > 0, \quad u \in F. \tag{1.111}$$

Переходя к выводу абстрактной формулы Грина при предположениях 1^0 и 2^0, обозначим через N ядро оператора γ:

$$N := \ker\gamma = \{u \in F : \gamma u = 0\}. \tag{1.112}$$

Так как в силу (1.111) оператор γ ограничен из F в G, то N есть подпространство пространства F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F, т.е. считаем, что

$$F = N \oplus M, \tag{1.113}$$

и будем рассматривать основной для приложений случай, когда N и M бесконечномерны:

$$\dim N = \dim M = \infty. \tag{1.114}$$

В силу свойства 2^0 оператор $\gamma_M := \gamma|_M$, являющийся сужением оператора γ на подпространство M, осуществляет взаимно-однозначное отображение M на G_+. Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{1.115}$$

Опираясь на это определение скалярного произведения в G_+, выведем некоторые свойства и неравенства, связывающие элементы из N, F и G_+.

Пусть $u \in F$, $\gamma u = \varphi \in G_+$. Тогда найдется такой единственный элемент $w \in M$, что $\gamma w = \gamma_M w = \varphi$. При этом

$$\gamma u - \gamma_M w = \gamma(u - w) = 0 \Leftrightarrow v := u - w \in N. \tag{1.116}$$

Так как в силу ортогонального разложения (1.113)

$$\|u\|_F^2 = \|w + (u - w)\|_F^2 = \|w\|_F^2 + \|u - w\|_F^2,$$

то

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 = \|w\|_F^2 \leqslant \|u\|_F^2, \quad \forall u \in F, \quad \gamma u = \varphi. \tag{1.117}$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min_{\gamma u = \varphi} \|u\|_F. \tag{1.118}$$

Из неравенства (1.111) и из (1.117) при $\gamma u = \gamma_M u = \varphi$, $u \in M$, имеем

$$\|\varphi\|_G = \|\gamma_M u\|_G \leqslant b\|u\|_F = b\|\varphi\|_{G_+}, \tag{1.119}$$

и так как согласно условию 2^0 G_+ плотно вложено в G, то $(G_+;G)$ — гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $G_+ {=} G^{1/2}$, $G = G^0$, $(G_+)^* = G^{-1/2}$. Это можно сделать согласно рассмотрениям п. 1.2.3.

Далее понадобится следующее общее определение сопряженного оператора, действующего из одного пространства в другое.

Определение 1.3.1. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}\ (X, Y)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из X в Y. Пусть X^* и Y^* — сопряженные пространства для X и Y соответственно.*

Будем говорить, что оператор $A^* : Y^* \to X^*$ является ***сопряженным*** *к оператору A, если для любых $x \in X$ и $y \in Y^*$ выполнено тождество*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle. \tag{1.120}$$

(Здесь слева стоит значение линейного функционала $y \in Y^*$ на элементе $Ax \in Y$, а справа — значение функционала $A^* y \in X^*$ на элементе $x \in X$.) □

Опираясь на это определение сопряженного оператора, обозначим через T_M оператор, сопряженный к оператору γ_M в смысле скалярного произведения в G. Поскольку в силу (1.115) оператор γ_M *изометрически* отображает пространство M *на* пространство $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M = (\gamma_M)^*$ изометрически отображает пространство $(G_+)^* = G^{-1/2}$ *на* пространство M. При этом, по определению T_M, имеем

$$\Big(\eta, T_M \psi\Big)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi\rangle_G\,, \quad \forall \eta \in M, \quad \forall \psi \in (G_+)^* = G^{-1/2}. \tag{1.121}$$

Обозначим теперь через ∂_M оператор, обратный к T_M, который, очевидно, существует, так как между элементами из M и G_+ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрия. Тогда из (1.121) получаем тождество

$$\Big(\eta, w\Big)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w\rangle_G\,, \quad \forall \eta, w \in M, \tag{1.122}$$

где

$$\gamma_M \eta \in G_+, \quad \partial_M w \in (G_+)^*.$$

При $\eta = T_M \varphi$, $\varphi \in (G_+)^*$, из (1.121) следует также соотношение

$$\Big(T_M \varphi, T_M \psi\Big)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi\rangle_G\,, \quad \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*. \tag{1.123}$$

Из этого тождества следует, в частности, что оператор $C_M := \gamma_M T_M$ обладает следующими свойствами. Во-первых, C_M изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ *на* $G^{1/2} = G_+$, так как T_M изометрически отображает $(G_+)^*$ на M, а γ_M также изометрически отображает M

на G_+. Во-вторых, как следует из (1.123), сужение $C_M|_G$ оператора C_M на пространство G является ограниченным в G оператором, самосопряженным и положительным. Действительно, при $\varphi, \psi \in G$ из (1.123) имеем

$$\begin{aligned}&\langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G = \\ &\langle C_M \varphi, \psi \rangle_G = ((C_M|_G)\varphi, \psi)_G = (T_M\varphi, T_M\psi)_F.\end{aligned} \tag{1.124}$$

Поэтому $C_M|_G = (C_M|_G)^*$. Полагая здесь $\varphi = \psi$, убеждаемся, что

$$((C_M|_G)\varphi, \varphi)_G = \|T_M\varphi\|_F^2 \geqslant 0,$$

причем равенство нулю достигается при $T_M\varphi = 0$. Так как T_M имеет обратный, то $\varphi = 0$, и потому $(C_M|_G)$ — положительный оператор, действующий в G.

Введем оператор $(C_M|_G)^{-1}$, существующий в силу доказанных выше свойств оператора $(C_M|_G)$. Его область определения

$$\mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) = \mathcal{R}(C_M|_G) \subset G_+, \tag{1.125}$$

так как область значений оператора $C_M = \gamma_M T_M$ совпадает с G_+. При этом $\mathcal{D}((C_M|_G)^{-1})$ плотна в G_+, поскольку по построению $(G_+)^*$ для оснащения

$$G_+ \hookrightarrow G \hookrightarrow (G_+)^*$$

пространство G плотно в $(G_+)^*$, а тогда $\mathcal{R}(C_M|_G)$ плотно в $G_+ = \mathcal{R}(C_M)$, $\mathcal{D}((C_M) = (G_+)^*$.

Напомним (см. (1.35)), что оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ определяется из тождества

$$(u, v)_F = (u, Av)_E, \quad u \in F, \quad v \in \mathcal{D}\,(A) \subset F. \tag{1.126}$$

Покажем, что аналогичное тождество имеет место для гильбертовой пары $(G_+; G)$ и оператора $(C_M|_G)^{-1}$.

Действительно, положим в (1.124) при φ и ψ из G

$$\begin{aligned}&T_M\varphi = u, \quad \gamma_M u = \widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+,\\ &T_M\psi = v, \quad \gamma_M v = \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+.\end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\varphi}, (C_M|_G)^{-1}\widetilde{\psi})_G = (u, v)_F =: (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})_{G_+},\\ &\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+.\end{aligned} \tag{1.127}$$

Так как, согласно установленному выше, $\mathcal{D}((C_M|_G)^{-1})$, плотно в G_+, то, аппроксимируя произвольный элемент $\widetilde{\varphi} \in G_+$ элементами $\widetilde{\varphi_n} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1})$ и используя для них тождество (1.127), после предельного перехода при $n \to \infty$ получаем, что имеет место тождество

$$\begin{aligned} &(\widetilde{\varphi}, (C_M|_G)^{-1}\widetilde{\psi})_G = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})_{G_+}, \\ &\widetilde{\varphi} \in G_+, \quad \widetilde{\psi} \in \mathcal{D}((C_M|_G)^{-1}) \subset G_+. \end{aligned} \tag{1.128}$$

Отсюда и следует, согласно определению (1.126), что $(C_M|_G)^{-1}$ — оператор гильбертовой пары $(G_+; G)$.

Отметим в качестве замечания, что если оператор A из (1.126) расширить с $\mathcal{D}(A) \subset F \subset E$ на все F (согласно теории шкал гильбертовых пространств это можно сделать), то формула (1.126) переходит в тождество

$$(u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = \langle u, Av\rangle_E, \quad u \in F, \quad v \in F, \tag{1.129}$$

где $Av \subset F^*$. Соответственно при таком же расширении оператора $(C_M|_G)^{-1}$ до оператора C_M^{-1} с $\mathcal{D}(C_M^{-1}) = G_+$ формула (1.128) преобразуется в тождество

$$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})_{G_+} = \langle \widetilde{\varphi}, C_M^{-1}\widetilde{\psi}\rangle_G, \quad \forall \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in G_+. \tag{1.130}$$

1.3.3 Абстрактное дифференциальное выражение

Опираясь на установленные факты, продолжим построения, связанные с выводом абстрактной формулы Грина.

Будем теперь считать, что выполнено условие 1^0 п. 1.3.2, и рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$. Построим по порождающему оператору A этой пары шкалу пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $F = E^{1/2}$, $E = E^0$, $F^* = E^{-1/2}$. В этой шкале оператор A ограниченно действует из E^α *на* $E^{\alpha-1}$, в частности, из $E^{1/2} = F$ *на* $E^{-1/2} = F^*$. Обратно, при любом $f \in E^{-1/2} = F^*$ обратный к нему оператор A^{-1} ограниченно действует из $E^{-1/2}$ на $E^{1/2} = F$ и дает слабое решение задачи $Au = f$ по формуле $u = A^{-1}f \in F = E^{1/2}$.

Далее под A будем понимать оператор, заданный на $\mathcal{D}(A)=F = E^{1/2}$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A)=E^{-1/2} = F^*$. Тогда $A^{1/2}$ ограниченно действует из F *на* E и из E *на* F^*, при этом имеет место тождество (см. (1.129))

$$(A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F = \langle \eta, Au\rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.131}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M из ортогонального разложения (1.113),

$$F = N \oplus M, \tag{1.132}$$

и введем линейный оператор

$$L := AP_N, \quad \mathcal{D}(L) = F, \tag{1.133}$$

ограниченно действующий, как установлено выше, из F в F^*. Так как подпространства N и M ортогональны, то, очевидно,

$$Lw = 0, \quad \forall w \in M. \tag{1.134}$$

Далее оператор L будем называть *абстрактным дифференциальным выражением.* Он в абстрактной схеме играет ту же роль, что и линейные дифференциальные выражения в обыкновенных дифференциальных уравнениях или уравнениях в частных производных. Так, в формуле Грина (1.6)) — это $u - \Delta u$, в формуле Грина (1.18) — это дифференциальное выражение

$$-\Big(\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}\vec{u}\Big),$$

и т.п. (см. (1.19), (1.23)).

1.3.4 Абстрактный оператор производной по внешней нормали

Введем теперь оператор ∂, являющийся расширением оператора ∂_M (см. (1.122)) с подпространства M на все пространство $F = N \oplus M$.

С этой целью рассмотрим неравенство

$$|\langle \eta, Lu\rangle_E| \leqslant \|Lu\|_{F^*}\|\eta\|_F = \|Lu\|_{F^*}\|\gamma_M\eta\|_{G_+}, \forall \eta \in M,\ u \in N. \tag{1.135}$$

Из него следует, что величину $l_u(\eta) := \langle \eta, Lu\rangle_E$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал на G_+. Обозначим через $-\partial_N u$ тот элемент из $(G_+)^*$, который представляет этот функционал через скалярное произведение в G. Тогда

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = -\langle \gamma_M\eta, \partial_N u\rangle_G, \quad \forall \eta \in M \Leftrightarrow \gamma_M\eta \in G_+, \quad u \in N, \tag{1.136}$$

причем

$$\|\partial_N u\|_{(G_+)^*} \leqslant \|Lu\|_{F^*}. \tag{1.137}$$

Построим теперь по операторам ∂_M и ∂_N оператор $\partial : F \to (G_+)^*$ по следующему правилу: для любого $u = P_N u + P_M u \in F$ полагаем

$$\partial u := \partial_N P_N u + \partial_M P_M u, \quad u \in F. \tag{1.138}$$

Отсюда видно, что оператор ∂ является расширением оператора ∂_N с N на все F и одновременно расширением оператора ∂_M с M на все F; при этом, очевидно, оператор ∂ сохраняет свойство линейности и действует из F в $(G_+)^*$.

Назовем введенный оператор ∂ *абстрактным оператором производной по внешней нормали.* Такое название оправдано тем, что в классическом случае (см. параграф 1.4) этот оператор действительно является оператором производной по внешней нормали.

1.3.5 Основная теорема

Итак, если выполнены условия 1^0 и 2^0 п. 1.3.2, то по пространствам E, F и G с введенными на них скалярными произведениями и по оператору следа γ *однозначно* строятся операторы L и ∂ — абстрактное дифференциальное выражение и абстрактный оператор производной по внешней нормали. Эти построения позволяют установить следующий основной результат.

Теорема 1.3.1. *Пусть для гильбертовых пространств* $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$ *и* $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$, *а также для абстрактного оператора следа* γ *выполнены условия* 1^0 *и* 2^0 *п. 1.3.2 (см. также* (1.110), (1.111)*). Тогда имеет место следующая абстрактная формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.139}$$

Здесь операторы $L : F \to F^*$ *и* $\partial : F \to (G_+)^*$ *определяются по пространствам* E, F *и* G *с введенными на них скалярными произведениями и по оператору* γ *единственным образом согласно формулам* (1.133), (1.138), (1.136) *и* (1.122).

Доказательство. Отметим еще раз, что операторы A, P_N и P_M находятся по E, F, G и оператору γ однозначно, а потому и операторы L и ∂ также определены однозначно.

Докажем теперь, что справедлива формула Грина (1.139). Пусть η и u — произвольные элементы из F. Тогда

$$\begin{aligned} \eta &= P_N \eta + P_M \eta =: \eta_N + \eta_M \in N \oplus M, \\ u &= P_N u + P_M u =: u_N + u_M \in N \oplus M. \end{aligned} \tag{1.140}$$

В силу (1.134), (1.138) получаем:

$$Lu = Lu_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M, \quad \gamma\eta = \gamma_M \eta_M. \tag{1.141}$$

Кроме того, в силу ортогонального разложения $F = N \oplus M$ и (1.141) имеем

$$(\eta, u)_F = (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F. \tag{1.142}$$

Вычислим, опираясь на формулы (1.140) — (1.142), разность между левой и правой частями формулы (1.139). Будем иметь

$$\begin{aligned}
&\langle \eta, Lu\rangle_E - (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \\
&= [\langle \eta_N, Lu_N\rangle_E + \langle \eta_M, Lu_N\rangle_E] - [(\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F] + \\
&+ [\langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G] = \\
&= [\langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G - (\eta_M, u_M)_F] + [\langle \eta_N, Lu_N\rangle_E - (\eta_N, u_N)_F] + \\
&+ [\langle \eta_M, Lu_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G].
\end{aligned} \tag{1.143}$$

Здесь первая скобка равна нулю в силу (1.122). Далее, в силу определения оператора L (см. (1.133)) и (1.141) вторая скобка равна

$$\langle \eta_N, Lu_N\rangle_E - (\eta_N, u_N)_F = \langle \eta_N, Au_N\rangle_E - (\eta_N, u_N)_F = 0,$$

так как имеет место формула (1.131), которая здесь применена к элементам η_N и u_N из $N \subset F$.

Наконец, из (1.136) следует, что

$$\langle \eta_M, Lu_N\rangle_E = -\langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G, \quad \eta_M \in M, \quad u_N \in N,$$

а тогда и третья скобка в (1.143) равна нулю, что и завершает доказательство теоремы.

□

Назовем формулу (1.139) ***первой абстрактной формулой Грина*** для тройки гильбертовых пространств.

Следствием теоремы (1.3.1) является такое утверждение.

Теорема 1.3.2. *(**вторая абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств**). Если выполнены условия предыдущей теоремы, то в случае вещественных гильбертовых пространств E, F и G справедлива формула*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \langle u, L\eta\rangle_E = \langle \gamma u, \partial\eta\rangle_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.144}$$

Для комплексных гильбертовых пространств E, F и G соответственно имеем

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \overline{\langle u, L\eta\rangle_E} = \overline{\langle \gamma u, \partial\eta\rangle_G} - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.145}$$

□

Предоставляем читателю возможность доказать эти утверждения самостоятельно.

1.4 Классический пример

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная ограниченная область с границей $\partial\Omega$.

Определение 1.4.1. *Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет* ***липшицеву границу*** *$\partial\Omega$, если для каждой точки границы существует такая ее окрестность и в ней такая ортогональная система координат $Oy_1, \dots, y_m$, что уравнение части границы $\partial\Omega$, попадающей в эту окрестность, имеет вид $y_m = f(y_1, \dots, y_{m-1})$, где f — функция, удовлетворяющая* ***условию Липшица*** *по переменным $y_1, \dots, y_{m-1}$:*

$$|f(y_1, \dots, y_{m-1}) - f(z_1, \dots, z_{m-1})| \leqslant C\Big(\sum_{k=1}^{m-1} |y_k - z_k|^2\Big)^{1/2}.$$

□

Введем, как и выше, гильбертовы пространства $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ со стандартными скалярными произведениями (1.5), (1.3) соответственно. Как следует из п. 1.2.1, эти пространства образуют гильбертову пару пространств. Более того, как следует из теоремы вложения С.Л. Соболева (см. часть I), $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$, т.е. соответствующий оператор вложения компактен.

1.4.1 Порождающий оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$

Пусть A — порождающий оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$. Наша цель — выяснить аналитическую природу оператора A, т.е. узнать, по какому закону он действует.

Предположим сначала, что граница $\partial\Omega$ области Ω достаточна гладкая, функции $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, и для них выполнено тождество (1.35), служащее определением оператора A гильбертовой пары $(F;E)$:

$$(u,v)_F = (u,Av)_E, \quad u \in F, \quad v \in \mathcal{D}(A) \subset F. \tag{1.146}$$

В рассматриваемом случае это тождество выглядит следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \eta(Au)\, d\Omega. \tag{1.147}$$

Используя формулу Грина для оператора Лапласа $\Delta := \sum\limits_{k=1}^{m} \partial^2/\partial x_k^2$, т.е. тождество

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u-\Delta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u)\, d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, dS, \tag{1.148}$$

из (1.147) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \eta(Au - u + \Delta u)\, d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, dS, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{1.149}$$

Считая в этом тождестве $\eta(x)$ произвольной *финитной* функцией, т.е. обращающейся в нуль в окрестности границы $\partial\Omega$, и учитывая плотность таких функций в пространстве $L_2(\Omega)$, приходим к выводу, что

$$Au = u - \Delta u. \tag{1.150}$$

Тогда из (1.149) следует, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{1.151}$$

Так как совокупность следов $\{\eta(x)|_{\partial\Omega}\}$ множества функций из $C^1(\overline{\Omega})$ плотна в $L_2(\partial\Omega)$, то из (1.151) получаем граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{1.152}$$

Таким образом, порождающий оператор A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ есть оператор краевой задачи Неймана (см. (1.86)).

$$Au := u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{1.153}$$

Эта задача уже обсуждалась в п. 1.2.5 в случае, когда граница $\partial\Omega$ достаточна гладкая.

Будем теперь считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω липшицева. Здесь весьма полезен следующий факт.

Теорема 1.4.1. *(Реллих, Кондрашов) В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ имеет место компактное вложение:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega). \tag{1.154}$$

□

Доказательство этого утверждения здесь не приводится, его можно найти, например, в [Гаевский, ...].

Воспользуемся теоремой 1.4.1 в случае липшицевой $\partial\Omega$ и рассмотрим задачу (1.153) при $f = f(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда ее обобщенное решение $u(x) \in H^1(\Omega)$ определяется из тождества (см. п. 1.2.4)

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (\eta, f)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.155}$$

Согласно общим рассмотрениям п. 1.2.4 это обобщенное решение $u = A^{-1}f \in \mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$.

Если $f(x) \in (H^1(\Omega))^*$, то задача (1.153) имеет (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) слабое решение $u = A^{-1}f \in H^1(\Omega)$, определяемое из тождества (см. (1.88))

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.156}$$

При этом, согласно теории шкал гильбертовых пространств (п. 1.2.3), оператор A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $(H^1(\Omega))^*$, а обратный оператор A^{-1} — из $(H^1(\Omega))^*$ на $H^1(\Omega)$. Наконец, сужение оператора A^{-1} на $L_2(\Omega)$ является положительным компактным (в силу компактности вложения (1.154)) оператором, действующим в $L_2(\Omega)$.

1.4.2 Теорема Гальярдо

Введем теперь для элементов η из $H^1(\Omega)$ оператор следа γ по закону

$$\gamma\eta := \eta|_\Gamma, \quad \Gamma := \partial\Omega, \quad \mathcal{D}(\gamma) = H^1(\Omega). \tag{1.157}$$

Оказывается, этот оператор ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на пространство функций, заданных на Γ и образующих множество, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$. Именно, здесь имеет место следующий важный результат.

Теорема 1.4.2. *(Гальярдо). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$. Введем на Γ гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с квадратом нормы*

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma} |\varphi|^2 \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x} \int\limits_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}} \, d\Gamma_x \, d\Gamma_y. \tag{1.158}$$

Тогда оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$ и имеет место оценка

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.159}$$

Обратно, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ) такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{1.160}$$

При этом пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$:

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma). \tag{1.161}$$

$\square$

Замечание 1.4.1. Для области Ω с бесконечно дифференцируемой границей $\Gamma = \partial\Omega$ строят шкалу гильбертовых пространств $H^\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. При этом, оказывается, что оператор следа γ действует ограниченно из $H^1(\Omega)$ на $H^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha = 1/2$, а из любого $H^\beta(\Omega)$ он ограниченно действует на $H^{\beta-1/2}(\Gamma)$ (см., например, [Лионс, Мадженес]). Если $\Gamma = \partial\Omega$ липшицева, то, согласно теореме Гальярдо, γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$ (теорема о следах). $\square$

Итак, γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ на $G_+ := H^{1/2}(\Gamma)$, причем G_+ компактно вложено в $G := L_2(\Gamma)$.

1.4.3 Ортогональное разложение пространства $H^1(\Omega)$

Рассмотрим, согласно общей схеме п. 1.3.2, подпространство

$$N = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = u|_\Gamma = 0\} =: H^1_0(\Omega) \tag{1.162}$$

и выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H^1_0(\Omega)$ в $H^1(\Omega) = F$.

Если $\eta \in H_0^1(\Omega)$ и $u \in M$, то в силу ортогональности η и u имеем

$$\int\limits_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega = 0, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{1.163}$$

Лемма 1.4.1. *При любых* $\eta \in H_0^1(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ *имеет место тождество*

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}, \\ u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*, \quad \Delta u := \operatorname{div} \nabla u. \end{gathered} \tag{1.164}$$

Доказательство. Как хорошо известно, для функций из $C^2(\Omega)$ имеет место формула $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u \in C(\Omega)$. Далее, если $u \in H^1(\Omega)$, то $\nabla u = \sum\limits_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \vec{e}_k$ принадлежит пространству вектор-функций $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\vec{v}|^2\, d\Omega$$

и соответствующим скалярным произведением.

Покажем, что для любого элемента $\vec{v} = \nabla u \in \overrightarrow{L_2}(\Omega)$ определено понятие $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla u =: \Delta u$ как элемента пространства $(H_0^1(\Omega))^*$. В самом деле, выражение

$$l(\eta) := -\int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u\, d\Omega = -\int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \vec{v}\, d\Omega \tag{1.165}$$

из левой части (1.164) является линейным ограниченным функционалом на пространстве $H_0^1(\Omega)$, так как

$$|l(\eta)| = \Big| \int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \vec{v}\, d\Omega \Big| \leqslant \|\vec{v}\|_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \cdot \|\nabla\eta\|_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \leqslant \|\vec{v}\|_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} \cdot \|\eta\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Следовательно, этот функционал является элементом пространства $(H_0^1(\Omega))^*$. Учитывая, что имеет место оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^*, \tag{1.166}$$

обозначим элемент из $(H_0^1(\Omega))^*$, порождающий функционал (1.165) с помощью скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, через

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*. \tag{1.167}$$

(Такое обозначение естественно, так как для гладких $\vec{v} = \nabla u$ это свойство имеет место.) Тогда из (1.165) получаем формулу

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega = -\langle \eta, \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)}, \\ \eta \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega), \quad \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*. \end{gathered} \tag{1.168}$$

Отсюда с учетом равенства

$$\int\limits_{\Omega} \eta u \, d\Omega = (\eta, u)_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, u \rangle_{L_2(\Omega)}$$

приходим к формуле (1.164). □

Замечание 1.4.2. Формула (1.164) следует также из определения обобщенных производных, т.е. тождества (1.168), рассматриваемого для финитных бесконечно дифференцируемых функций $\eta(x)$ и $u \in H^1(\Omega)$. Тогда выражение Δu понимают в смысле обобщенных функций (распределений). В лемме 1.4.1 установлено, что $\Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*$, т.е. конкретному классу так называемых обобщенных функций конечного порядка, см. [Березанский]. □

Вернемся к тождеству (1.163) и учтем формулу (1.164), будем иметь

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \tag{1.169}$$

Отсюда следует, что функционал, порожденный элементом $u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*$, обращается в нуль на всем пространстве $H_0^1(\Omega)$. Поэтому

$$u - \Delta u = 0, \quad \forall u \in M \subset H^1(\Omega). \tag{1.170}$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что $\Delta u = u \in H^1(\Omega)$.

Окончательно имеем

$$M =: H_h^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u = u\}. \tag{1.171}$$

Далее для простоты будем называть $H_h^1(\Omega)$ *подпространством гармонических функций*. Таким образом, возникает ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \tag{1.172}$$

где $H_0^1(\Omega) = \ker\gamma$, а $H_h^1(\Omega)$ определено в (1.171).

Установленные свойства пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$ и $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, а также оператора следа γ, вместе с теоремой Гальярдо, показывают, что для этой тройки пространств выполнены условия 1^0 и 2^0 из п. 1.3.2. Поэтому по общей теореме 1.3.1 получаем, что для этих пространств справедлива формула Грина вида

$$\langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} = \\ = \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{1.173}$$

Здесь, согласно определению (1.133) и формуле $Au = u - \Delta u$ (см. (1.153)),

$$Lu := u - \Delta u \in (H_0^1(\Omega))^*, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \tag{1.174}$$

причем

$$Lu = 0, \quad \forall u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.175}$$

1.4.4 Оператор производной по внешней нормали

Получим теперь в рассматриваемом случае выражение для $\partial u = \partial_M P_M u + \partial_N P_N u$ и попутно установим разрешимость некоторых краевых задач, возникающих при выводе абстрактной формулы Грина (1.139).

Рассмотрим сначала выражение $\partial = \partial_M$ на подпространстве $M = H_h^1(\Omega)$. Как следует из общей схемы, описанной в п. 1.3.2, оператор $\gamma_M := \gamma|_M$ отображает пространство $M = H_h^1(\Omega)$ изометрически на пространство $G_+ = H^{1/2}(\Gamma)$, в котором норма в соответствии с (1.118) введена по формуле

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \min_{\gamma\eta=\varphi} \|\eta\|_{H^1(\Omega)}, \quad \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.176}$$

Здесь минимум достигается на гармонической функции $u \in H_h^1(\Omega)$, для которой $\gamma u = \gamma_M u = \varphi$. Отметим еще, что норма (1.176), согласно теореме Гальярдо (теорема (1.4.2)), эквивалентна норме (1.158). Этот факт следует из неравенств (1.159) и (1.160).

Из указанной изометрии между $H_h^1(\Omega)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, следует, что задача Дирихле

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.177}$$

имеет единственное решение $u \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь задачу Неймана

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.178}$$

Если $w \in H^1(\Omega)$, то, согласно определению (1.174), $Lw = 0$, и потому $w \in H^1_h(\Omega) = M$.

Опираясь на оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))^* \tag{1.179}$$

пространства $L_2(\Gamma)$, которое существует в силу теоремы Гальярдо (для области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) и считая, что в задаче (1.178) $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, определим слабое решение задачи (1.178) посредством тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.180}$$

Это тождество имеет в точности тот же вид, что аналогичное определение слабого решения в области Ω с достаточно гладкой границей, см. (1.95).

Лемма 1.4.2. *При любой $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ существует единственное слабое решение $w \in H^1_h(\Omega)$ задачи* (1.178).

Доказательство. Правая часть в (1.180) есть линейный ограниченный функционал в пространстве $H^1(\Omega)$. В самом деле, его линейность по η очевидна и

$$\begin{aligned} &|\langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}| \leqslant \\ &\leqslant \|\gamma\eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \cdot \|\eta\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.181}$$

где при выводе использовано неравенство (1.159). Поэтому по лемме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала, примененной к гильбертову пространству $H^1(\Omega)$, приходим к выводу, что правая часть в (1.180) равна левой.

Полагая теперь $\eta \in H^1_0(\Omega)$ в (1.180), получаем, что $\langle \eta, w \rangle_{H^1(\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega)$, т.е. $w \in H^1_h(\Omega) \perp H^1_0(\Omega)$. $\square$

Опираясь на эту лемму, приходим к тождеству

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial w}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{1.182}$$

Полагая здесь $\eta \in M = H^1_h(\Omega)$, будем иметь

$$\begin{aligned} &(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ &\forall \eta \in H^1_h(\Omega) = M, \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \tag{1.183}$$

Отсюда и из общего определения (1.121) оператора T_M, возникающего в абстрактной схеме п. 1.3.2, получаем, что слабое решение w задачи (1.178) дается формулой

$$w = T_M\psi = (\gamma_M)^*\psi, \quad \forall\psi \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.184}$$

причем T_M изометрически отображает пространство $(G_+)^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ *на* пространство $M = H_h^1(\Omega)$. Из этого факта следует, в частности, такое утверждение: задача (1.178) имеет слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Так как ∂_M по определению равен $(T_M)^{-1}$, то, отсюда следует, что

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi = \partial w = \partial_M w, \quad \forall w \in H_h^1(\Omega). \tag{1.185}$$

Определим теперь аналитическое выражение для оператора ∂_N, действующего на подпространстве $N = H_0^1(\Omega)$. Здесь следует повторить рассуждения, проведенные в п. 1.3.4.

Именно, рассмотрим функционал

$$l_u(\eta) := \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta \in H_h^1(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.186}$$

Так как

$$\begin{aligned} &|\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}| \leqslant \|u - \Delta u\|_{(H^1(\Omega))^*} \cdot \|\eta\|_{H^1(\Omega)} = \\ &= \|u - \Delta u\|_{(H^1(\Omega))^*} \cdot \|\gamma_M \eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{1.187}$$

то можно считать $l_u(\eta)$ линейным ограниченным функционалом в $H^{1/2}(\Gamma)$. Поэтому его можно представить через скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ с помощью элемента $-(\partial u/\partial n)|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$, т.е. в виде

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = -\left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \eta \in H_h^1(\Omega), \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.188}$$

Такое обозначение здесь использовано потому, что в гладком случае, т.е. когда $\Gamma = \partial\Omega$ достаточно гладкая, $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, $\quad \eta \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H_h^1(\Omega)$, имеет место формула (проверьте!)

$$\int\limits_\Omega \eta(u - \Delta u)\, d\Omega = -\int\limits_\Gamma \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \tag{1.189}$$

а (1.188) является ее обобщением на случай функционалов.

С другой стороны, из общей формулы (1.136), задающей определение оператора ∂_N, имеем в рассматриваемом случае

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = -\langle \gamma\eta, \partial_N u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \ u \in H_0^1(\Omega), \ \eta \in H_h^1(\Omega). \qquad (1.190)$$

Сравнивая (1.188) и (1.190), приходим к выводу, что

$$\left\langle \gamma\eta, \ \partial_N u - \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)} = 0, \quad \forall \eta \in H_h^1(\Omega) \Leftrightarrow \forall \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma). \qquad (1.191)$$

Поэтому

$$\partial_N u = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_\Gamma, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \qquad (1.192)$$

Теперь из (1.185) и (1.192) окончательно получаем

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N = \frac{\partial}{\partial n}(u_N + u_M) = \frac{\partial u}{\partial n}, \ \forall u \in H^1(\Omega) = N \oplus M. \qquad (1.193)$$

Возвращаясь к абстрактной формуле (1.121) для данного случая, имеем

$$(\eta, T_M \psi)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta \in H_h^1(\Omega), \quad \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \qquad (1.194)$$

Отсюда приходим к выводу, что изометрия, которую осуществляет оператор $\partial = \partial_M = T_M^{-1}$ на подпространстве $M = H_h^1(\Omega)$, показывает еще раз, что задача Неймана (1.178) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

1.4.5 Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа

Так как в формуле (1.173) уже определены все символы, то приведенные рассмотрения изучаемого в данном параграфе классического примера приводят к следующему окончательному выводу.

Теорема 1.4.3. *Для тройки гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, определенных на области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, а также для оператора следа γ (см. (1.157)) имеет место следующая* ***первая формула Грина для оператора Лапласа:***

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \ (1.195)$$

причем

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{1.196}$$

□

Замечание 1.4.3. Имеет место также "обычная" первая формула Грина для оператора Лапласа:

$$\langle \eta, -\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{1.197}$$

□

Формула (1.195) обобщает, таким образом, классическую формулу Грина (1.148) на случай негладкой (липшицевой) границы области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и для менее гладких, чем в (1.148), функций $\eta(x)$ и $u(x)$, именно, для $\eta(x)$ и $u(x)$ из $H^1(\Omega)$.

Меняя $\eta(x)$ и $u(x)$ местами в (1.195) и вычитая левые и правые части этих формул, приходим ко ***второй формуле Грина для оператора Лапласа*** (проверьте это самостоятельно):

для вещественных пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} &\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} - \langle u, \eta - \Delta\eta\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \left\langle \gamma u, \frac{\partial \eta}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega); \end{aligned} \tag{1.198}$$

для комплексных пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} &\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} - \overline{\langle u, \eta - \Delta\eta\rangle}_{L_2(\Omega)} = \\ &= \overline{\left\langle \gamma u, \frac{\partial \eta}{\partial n}\right\rangle}_{L_2(\Gamma)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.199}$$

1.5 Равномерно эллиптические уравнения и системы уравнений

Во многих задачах математической физики возникают краевые, начально-краевые либо спектральные проблемы не только для оператора Лапласа $-\triangle u$ или близкого к нему дифференциального выражения $u - \triangle u$, но и для общих дифференциальных выражений, которые обладают свойством эллиптичности либо равномерной эллиптичности. Кроме того, аналогичные проблемы появляются и для систем эллиптических уравнений. В данном параграфе приводятся классические формулы Грина и их обобщения на случай липшицевой границы области.

1.5.1 Обобщенная формула Грина для равномерно эллиптического оператора

Пусть снова $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\partial\Omega =: \Gamma$ — сначала достаточно гладкая. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u, \qquad (1.200)$$

определенная на функциях $u = u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. Будем считать, что функции $a_{jk}(x)$ непрерывно дифференцируемы и обладают свойством симметрии

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x), \quad x \in \Omega, \quad j,k = \overline{1,m}; \qquad (1.201)$$

кроме того, полагаем, что $a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ и

$$a_0(x) \geqslant a_0 > 0, \quad x \in \Omega. \qquad (1.202)$$

Наконец, будем считать, что выполнено также условие

$$\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^2, \quad c>0, \quad x \in \Omega, \qquad (1.203)$$

которое называют *условием равномерной эллиптичности.*

Упражнение 1.5.1. Докажите, что для произвольных $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ имеет место классическая формула Грина для эллиптического оператора (1.200):

$$\begin{gathered}\int_\Omega \eta\Big(-\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u\Big)d\Omega = \\ = \int_\Omega \Big(\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + a_0(x)\eta u\Big)d\Omega - \\ - \int_\Gamma \eta\Big(\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j)\Big)d\Gamma.\end{gathered} \qquad (1.204)$$

□

В формуле (1.204) выражение

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_j) \tag{1.205}$$

называют *производной по конормали*, отвечающей дифференциальному выражению (1.200).

Введем, как и выше, гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ с обычными скалярными произведениями, а также пространство $H^1_{э}(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{H^1_э(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + a_0(x)|u|^2 \Big] d\Omega. \tag{1.206}$$

Упражнение 1.5.2. Доказать, опираясь на свойства (1.201) — (1.203), норма (1.206) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1(\Omega)$, т.е. норме :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \Big(|\nabla u|^2 + |u|^2 \Big] d\Omega. \tag{1.207}$$

□

В терминах введенных скалярных произведений и норм формулу Грина (1.204) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &(\eta, Lu)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_э(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big)_{L_2(\Gamma)}, \\ &\eta \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma\eta := \eta|_{\Gamma}. \end{aligned} \tag{1.208}$$

Будем теперь считать, что $\partial\Omega$ — липшицева, и заметим, что для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1_э(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, а также для оператора следа γ выполнены общие условия 1° и 2° существования абстрактной формулы Грина (см. п. 1.3.2, теорему 1.3.1, теорему 1.4.3). В самом деле, так как нормы в $H^1(\Omega)$ и $H^1_э(\Omega)$ эквивалентны (см. упражнение 1.5.2), то $F := H^1_э(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega) =: E$ (условие 1°, теорема Реллиха-Кондрашова, см. теорему 1.4.1). Далее, по теореме Гальярдо 1.4.2 получаем, что оператор следа γ ограниченно действует из $H^1_э(\Omega) = H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$. Значит, имеет место обобщенная формула Грина для дифференциального выражения Lu, записанная в терминах функционалов для элементов из $H^1_э(\Omega)$.

Упражнение 1.5.3. Убедиться, что справедлива следующая обобщенная формула Грина (в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$) для равномерно эллиптического оператора (1.200):

$$\begin{gathered}\langle\eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_{э}(\Omega)} - \left\langle\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial\nu}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\eta, u \in H^1_{э}(\Omega), \\ Lu \in (H^1_{э}(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial\nu} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*.\end{gathered} \tag{1.209}$$

□

Формула (1.209) будет использоваться далее для исследования краевых и спектральных задач в областях с негладкой границей.

Замечание 1.5.1. Если выполнены условия

$$a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}(x), \quad a_0(x) \equiv 1, \tag{1.210}$$

то дифференциальное выражение Lu переходит в выражение $u - \triangle u$, производная по конормали $\partial u/\partial\nu$ из (1.205) переходит в выражение $\partial u/\partial n$. При этом норма в $H^1_{э}(\Omega)$ становится равной норме пространства $H^1(\Omega)$, а формула Грина (1.209) переходит в формулу (1.195) (см. теорему 1.4.3). □

1.5.2 Обобщенная формула Грина для системы эллиптических уравнений

Если изучается краевая либо спектральная задача об отыскании не одной функции $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, а системы функций, которую удобно считать искомым вектор-столбцом

$$u(x) := (u_1(x); \ldots; u_n(x))^{т}, \quad x \in \Omega, \tag{1.211}$$

где символом $(\cdot; \ldots; \cdot)^{т}$ обозначена операция транспонирования (в данном случае вектор-столбца), то возникает не одно дифференциальное выражение вида (1.200), а система дифференциальных выражений

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j\Big[a_{jk}(x)\partial_k u(x)\Big] + a_0(x)u(x), \quad \partial_j := \partial/\partial x_j. \tag{1.212}$$

Здесь $a_{jk}(x)$ — матрицы, подчиненные условиям симметрии (в комплексных пространствах):

$$a^*_{jk}(x) = a_{jk}(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{rs}_{jk}(x) = \overline{a^{sr}_{kj}(x)}, \quad r, s = \overline{1, n}, \tag{1.213}$$

а матрица $a_0(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т.е.

$$a_0^*(x) = a_0(x) \gg 0. \tag{1.214}$$

Введем производную по конормали, отвечающую дифференциальному выражению (1.212):

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} n_j(x) a_{jk}(x) \partial_k u(x), \tag{1.215}$$

где

$$n(x) := (n_1(x); \ldots; n_m(x))^\tau - \tag{1.216}$$

— единичный вектор внешней нормали к $\Gamma := \partial\Omega$.

Далее будем считать, что выполнены следующие свойства:
1°. Матрица

$$a(x,\xi) := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1, \tag{1.217}$$

называемая *главным символом* дифференциального выражения (1.212), является положительно определенной равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, т.е. выражение $L_a u$ *сильно эллиптично*. (Как указано в [Агранович, статья], с. 11, из условия (1.217), т.е. свойства 1°, следует *свойство эллиптичности* $\det a(x,\xi) \neq 0$ и выполнение так называемого условия Шапиро-Лопатинского).
2°. Имеет место неравенство

$$\sum a_{jk}^{rs} \xi_j^r \overline{\xi_k^s} \geqslant c \sum |\xi_j^r|^2, \quad x \in \Gamma, \quad \xi_j^r \in \mathbb{C}, \quad c > 0. \tag{1.218}$$

Тогда, как установлено в [Агранович], имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|u\|_F^2 &:= \int\limits_\Omega E(u,u)\, d\Omega + \int\limits_\Omega (a_0(x)u) \cdot \overline{u}\, d\Omega \geqslant \\ &\geqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := c \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{m} \|u_k\|_{H^1(\Omega)}^2 d\Omega, \end{aligned} \tag{1.219}$$

$$E(u,u) := \sum a_{jk}^{rs} \partial_j u^r \partial_k \overline{u^s}. \tag{1.220}$$

Упражнение 1.5.4. Доказать, что для вектор-функций $\eta(x) := (\eta_1(x)\,;\,\dots\,;\,\eta_n(x))^\tau \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u(x) := (u_1(x)\,;\,\dots\,;\,u_n(x))^\tau \in C^2(\overline{\Omega})$ в области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ имеет место следующая формула Грина

$$(\eta, L_a u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_F - (\gamma\eta, \partial_{\nu_a} u)_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.221}$$

где

$$L_2(\Omega) := \{u = (u_1\,;\,\dots\,;\,u_n)^\tau \,:\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \sum_{r=1}^{n} \int_\Omega |u_r|^2 d\Omega < \infty\},$$

$$L_2(\Gamma) := \{\varphi = (\varphi_1\,;\,\dots\,;\,\varphi_n)^\tau \,:\, \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} := \sum_{r=1}^{n} \int_\Gamma |\varphi_r|^2 d\Gamma < \infty\},$$

норма в пространстве F определена левой частью (1.219), а γ — оператор следа для вектор-функций

$$\gamma u := (\gamma u_1\,;\,\dots\,;\,\gamma u_n)^\tau. \tag{1.222}$$

□

Можно проверить, опираясь на неравенство (1.219), что норма в пространстве F и пространстве вектор-функций $H^1(\Omega)$ (см. правую часть (1.219)) эквивалентны.

Упражнение 1.5.5. Доказать, эквивалентность норм в пространствах F и $H^1(\Omega)$ и на этой основе установить, опираясь на теоремы 1.3.1, 1.4.3, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ имеет место формула Грина

$$\begin{aligned} &\langle \eta, L_a u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial_{\nu_a} u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in F, \\ &L_a u \in F^*, \quad \partial_{\nu_a} u \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \end{aligned} \tag{1.223}$$

обобщающая формулу Грина (1.221). □

1.6 Обобщенные формулы Грина линейной теории упругости и гидродинамики

Построения, проведенные выше в параграфе 1.5, можно применить также для получения обобщений классических формул Грина линейной теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости (см. формулы (1.18), (1.21) и (1.23)).

1.6.1 Формулы Грина линейной теории упругости

Напомним (см. п. 1.1.4 и п.п. 7° п. 1.2.2), что в линейной теории упругости основным дифференциальным выражением для поля $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, т.е. поля перемещений сплошной упругой среды, является дифференциальное выражение (1.11):

$$L\vec{u} := \vec{u} - [\mu\triangle\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{u}], \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \tag{1.224}$$

а классическая формула Грина, отвечающая выражению (1.224) в области Ω с гладкой границей, имеет вид (1.18):

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \vec{\eta}\cdot(L\vec{u})\,d\Omega &= \mu E(\vec{\eta},\vec{u}) + \lambda\int\limits_\Omega (\mathrm{div}\,\vec{\eta})(\mathrm{div}\,\vec{u})\,d\Omega + \int\limits_\Omega \vec{\eta}\cdot\vec{u}\,d\Omega - \\ &- \int\limits_\Gamma \gamma\vec{\eta}\cdot(P\vec{u})\,d\Gamma, \quad \vec{\eta}\in C^1(\overline{\Omega}), \quad \vec{u}\in C^2(\overline{\Omega}),\end{aligned} \tag{1.225}$$

$$E(\vec{\eta},\vec{u}) := \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{\eta})\tau_{jk}(\vec{u})\,d\Omega, \;\; \tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{1.226}$$

$$P\vec{u} := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{u}) + \lambda\mathrm{div}\,\vec{u}\delta_{jk})\cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{e}_j), \tag{1.227}$$

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j\vec{e}_j, \quad \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^{3}(\gamma\vec{u}_j)\vec{e}_j = \vec{\eta}|_\Gamma. \tag{1.228}$$

Введем, как и в п. 1.2.2 (п.п. 5°, п.п. 7°), пространство вектор-функций $\overrightarrow{L}_2(\Omega)$ с нормой (1.48), а также пространство $\overrightarrow{H}^1_э(\Omega)$ с нормой вида (1.60):

$$\|u\|^2_{\overrightarrow{H}^1_э(\Omega)} := \mu E(\vec{u},\vec{u}) + \lambda\int\limits_\Omega |\mathrm{div}\,\vec{u}|^2 d\Omega + \int\limits_\Omega |\vec{u}|^2 d\Omega. \tag{1.229}$$

Упражнение 1.6.1. Опираясь на второе неравенство Корна (1.61) и определение стандартной нормы (1.49) в пространстве $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$, доказать, что нормы в пространствах $\overrightarrow{H}^1_э(\Omega)$ (см. (1.229)) и $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ эквивалентны. □

Рассмотрим теперь (см. п. 1.2.2, п.п. 7°) подпространство $\overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega)$ тех элементов из $\overrightarrow{H}^1_э(\Omega)$, для которых выполнено условие (1.62):

$$\overrightarrow{H}^1_э(\Omega) \cap \overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{\vec{0}\}, \tag{1.230}$$

где $\overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}}$ — подпространство из $\overrightarrow{H}^1_э(\Omega)$, описывающее жесткие перемещения (сдвиги и вращения) сплошной среды:

$$\vec{\eta} := \vec{a} + \vec{\delta} \times \vec{r}, \quad \vec{a},\, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k. \tag{1.231}$$

Упражнение 1.6.2. Опираясь на другую форму второго неравенства Корна, т.е. на неравенство (1.65), доказать, что на множестве $\overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega)$ можно ввести норму по закону

$$\|u\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega)} := \mu E(\vec{u},\vec{u}) + \lambda \int\limits_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{u}|^2 d\Omega, \tag{1.232}$$

и эта норма эквивалентна норме (1.49) пространства $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$. □

Утверждения упражнений 1.6.1 и 1.6.2 показывают, что справедливы следующие две обобщенные формулы Грина линейной теории упругости:

$$\langle \vec{\eta}, L\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\overrightarrow{H}^1_э(\Omega)} - \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_э(\Omega), \tag{1.233}$$

$$\langle \vec{\eta}, L_0\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega)} - \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{u} \rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)}, \; \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega), \tag{1.234}$$

$$L_0\vec{u} := L\vec{u} - \vec{u} \in (\overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega))^*, \quad P\vec{u} \in (\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{1.235}$$

В самом деле, формула (1.233) следует из абстрактной теоремы 1.3.1, примененной для пространств $E = \overrightarrow{L_2}(\Omega)$, $F = \overrightarrow{H}^1_э(\Omega)$, $G = \overrightarrow{L_2}(\Gamma)$ и векторного оператора следа γ (см. (1.228)), а также из эквивалентности норм в $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ (упражнение 1.6.1) и теоремы Гальярдо 1.4.2.

Аналогично формула (1.234) следует из теоремы 1.3.1, если $E = \overrightarrow{L_2}(\Omega)$, $F = \overrightarrow{H}^1_{э,\overrightarrow{R}}(\Omega) \supset \overrightarrow{H}^1_0(\Omega)$, $G = \overrightarrow{L_2}(\Gamma)$ и того же оператора следа.

При этом использован тот факт, что $\overrightarrow{H}_0^1(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$, а норма в $\overrightarrow{H}^1_{\text{э},\overrightarrow{R}}(\Omega)$ эквивалентна норме $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ (упражнение 1.6.2).

Отметим еще, что $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma)$ — это пространство вектор-функций, заданных на Γ и имеющих проекции на оси координат, являющиеся функциями (элементами) из $H^{1/2}(\Gamma)$.

1.6.2 Формула Грина линейной гидродинамики вязкой жидкости

В частности, из выведенных выше формул (1.233) — (1.235) получаем соответствующие обобщенные формулы Грина гидродинамики вязкой сжимаемой либо несжимаемой жидкости.

Если $\vec{u} = \vec{u}(x)$ — поле скоростей в вязкой жидкости, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma = \partial\Omega$ — липшицева, то, используя классическую формулу (1.20), т.е. тождество

$$\begin{gathered}(\vec{\eta}, \nabla p)_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = -(\operatorname{div}\vec{\eta}, p)_{L_2(\Omega)} + (\gamma_n\vec{\eta}, \gamma p)_{L_2(\Gamma)}, \\ \forall\vec{\eta} \in \overrightarrow{H}^1_{\text{э}}(\Omega), \quad \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega), \quad \gamma_n\vec{\eta} := (\vec{\eta}\cdot\vec{n})_\Gamma,\end{gathered} \tag{1.236}$$

приходим из (1.233) к обобщенной форуле Грина гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}&\langle\vec{\eta}, -[\mu\triangle\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{u}] + \nabla p\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = \\ &= \mu E(\vec{\eta}, \vec{u}) + (\operatorname{div}\vec{\eta}, (\lambda\operatorname{div}\vec{u} - p))_{L_2(\Omega)} - \\ &- \langle\gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)} + (\gamma_n\vec{\eta}, \gamma p)_{L_2(\Gamma)}, \quad \vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{\text{э}}(\Omega), \quad \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega).\end{aligned} \tag{1.237}$$

(Здесь слагаемые $\langle\vec{\eta}, \vec{u}\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)}$ слева и справа в (1.233) взаимно уничтожены.)

Напомним (см. (1.22), что выражение $P\vec{u}$ определено в (1.227), а тогда

$$\sigma_{jk}(\vec{u}; p) := \mu\tau_{jk}(\vec{u}) + (\lambda\operatorname{div}\vec{u} - p)\delta_{jk}, \quad j,k = \overline{1,3}, \tag{1.238}$$

представляет собой тензор напряжений в вязкой жидкости. Поэтому последние два слагаемых справа в (1.237) можно переписать в виде

$$-\langle\gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Gamma)} + (\gamma_n\vec{\eta}, \gamma p)_{L_2(\Gamma)} = -\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma\eta_j, \sum_{k=1}^{3}\sigma_{jk}(\vec{u}; p)n_k\rangle, \tag{1.239}$$

где

$$\vec{n} := \sum_{k=1}^{3} n_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_k) \vec{e}_k$$

— вектор внешней нормали к Γ.

Если жидкость несжимаемая, то поле скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$ соленоидально, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, и из (1.237) — (1.239) приходим к обобщенной формуле Грина гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\langle \vec{\eta}, (-\mu \triangle \vec{u} + \nabla p) \rangle_{\overrightarrow{L_2(\Omega)}} = \mu E(\vec{\eta}, \vec{u}) - \\ - \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma \eta_j, \sum_{k=1}^{3} (\mu \tau_{jk}(\vec{u}) - p \delta_{jk}) n_k \rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.240}$$

$$\vec{\eta}, \vec{u} \in \overrightarrow{H}^1_{\text{э}}(\Omega), \quad \nabla p \in \overrightarrow{L_2}(\Omega), \quad \operatorname{div} \vec{\eta} = \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{1.241}$$

Здесь $\partial\Omega$ — липшицева, причем

$$-\mu \triangle \vec{u} \in (\overrightarrow{H}^1_{\text{э}}(\Omega))^*, \quad \sum_{k=1}^{3} \mu \tau_{jk}(\vec{u}) n_k \in (\overrightarrow{H}^{1/2}_{\text{э}}(\Gamma))^*, \tag{1.242}$$

а норма в $\overrightarrow{H}^1_{\text{э}}(\Omega)$ определяется формулой, следующей из (1.229):

$$\|u\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{\text{э}}(\Omega)} := \mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega \qquad (\operatorname{div} \vec{u} = 0). \tag{1.243}$$

Аналогичные рассуждения для элементов из $\overrightarrow{H}^1_{\text{э}, \overrightarrow{R}}(\Omega)$, которые являются соленоидальными полями в Ω, приводят снова к формуле (1.240), причем теперь

$$\|u\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{\text{э}, \overrightarrow{R}}(\Omega)} := \mu E(\vec{u}, \vec{u}) \qquad (\operatorname{div} \vec{u} = 0). \tag{1.244}$$

Если, в частности, для элементов из $\overrightarrow{H}^1_{\text{э}, \overrightarrow{R}}(\Omega)$ выполнено граничное условие $\vec{u} = \vec{0}$ на части S границы $\partial\Omega$ и $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ в Ω, то возникает подпространство $\overrightarrow{J}^1_{0,S}(\Omega)$ (см. конец п. 1.2.2), которое является основным в задаче о малых движениях вязкой несжимаемой жидкости в неподвижном сосуде. Тогда для элементов этого подпространства справедлива обобщенная формула Грина вида

$$\begin{gathered}\langle\vec{\eta},(-\mu\triangle\vec{u}+\nabla p)\rangle_{\overrightarrow{L_2}(\Omega)}=\mu E(\vec{\eta},\vec{u})-\\ -\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_\Gamma\eta_j,\sum_{k=1}^{3}(\mu\tau_{jk}(\vec{u})-p\,\delta_{jk})n_k\rangle_{L_2(\partial\Omega\setminus S)},\end{gathered}\tag{1.245}$$

$$\vec{\eta},\vec{u}\in\overrightarrow{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega),\quad \nabla p\in\overrightarrow{L_2}(\Omega).\tag{1.246}$$

Упражнение 1.6.3. Докажите утверждения, сформулированные в последнем абзаце. □

Глава 2

Абстрактные краевые задачи

Наличие абстрактной формулы Грина (1.139) главы 1 для произвольной тройки гильбертовых пространств E, F, G и оператора следа γ, удовлетворяющих условиям 1^0 и 2^0 п. 1.3.2, позволяет изучать абстрактные краевые задачи, аналогичные классическим задачам Дирихле, Неймана либо Ньютона для уравнения Лапласа либо Пуассона, для общих эллиптических уравнений и систем, а также при граничных условиях других видов (см. гл. 3). Кроме того, этот общий подход применим также для соответствующих краевых задач в линейных проблемах гидродинамики, теории упругости и в других задачах математической физики.

2.1 Вспомогательные краевые задачи С.Г. Крейна

Рассматриваемые здесь проблемы являются обобщением на абстрактный случай вспомогательных линейных краевых задач и их операторов, которые широко использовались С.Г. Крейном и его учениками при изучении малых движений и нормальных колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде. Такой подход оказался плодотворным при исследовании многих линейных проблем математической физики, что и побуждает изучить его в общей ситуации.

2.1.1 Первая вспомогательная задача С.Г. Крейна

Будем считать, что для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ справедлива абстрактная формула Грина

$$\begin{aligned} &\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \\ &Lu \in F^*, \quad \partial u \in (G_+)^*. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассмотрим сначала абстрактную краевую задачу для уравнения Пуассона с однородным краевым условием Неймана:

$$Lv = f, \quad \partial v = 0. \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует, что для решения v задачи (2.2) выполнено тождество

$$\langle \eta, f\rangle_E = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.3}$$

служащее определением слабого решения этой задачи.

Лемма 2.1.1. *Задача* (2.2) *имеет единственное решение $v \in F$ тогда и только тогда, когда*

$$f \in F^*. \tag{2.4}$$

Это решение выражается формулой

$$v = A^{-1} f, \tag{2.5}$$

где $A : F \to F^*$ — порождающий оператор гильбертовой пары $(F; E)$. Если $f \in E \subset F^*$, то формулой (2.5) *дается обобщенное решение задачи* (2.2)*; при этом $v \in \mathcal{D}(A) = E^1 \subset F = \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right) \subset E$.*

Доказательство. При любом $\eta \in F$ левая часть (2.3) представляет собой линейный ограниченный функционал $l_f(\eta)$ в пространстве F тогда и только тогда, когда $f \in F^*$, т.е. выполнено условие (2.4). В этом случае по лемме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве для любого $f \in F^*$ найдется единственный элемент $v \in F$ такой, что $l_f(\eta) = (\eta, v)_F$, т.е. выполнено тождество (2.3).

Докажем теперь остальные утверждения леммы. Напомним, что согласно рассмотрениям пп. 1.2.1, 1.2.3, 1.2.4 имеют место формулы

$$(\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = \langle \eta, Au\rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.6}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(F; E)$. Поэтому из (2.3) имеем

$$\langle \eta, f\rangle_E = (\eta, v)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}v)_E = \langle \eta, Av\rangle_E, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.7}$$

откуда следует, что

$$\langle \eta, f - Av \rangle_E = 0, \quad \forall \eta \in F.$$

Так как здесь η пробегает все F, то $(f - Av)$ — нулевой функционал из F^*, и тогда

$$Av = f, \tag{2.8}$$

откуда следует формула (2.5).

Далее, если $f \in E \subset F^*$, то формула (2.3) принимает вид

$$(\eta, f)_E = (\eta, v)_F \tag{2.9}$$

и потому, согласно рассмотрениям п. 1.2.4, в этом случае задача (2.8) имеет единственное обобщенное решение $v = A^{-1} f \in \mathcal{D}(A) = E^1 \subset E^{1/2} = F = \mathcal{D}\left(A^{1/2}\right) \subset E$. □

Следствие 2.1.1. *Абстрактная краевая задача* (2.2) *равносильна задаче* (2.8) *при* $f \in F^*$. *Отсюда следует, что оператор* A *гильбертовой пары* $(F; E)$ *имеет область определения* $\mathcal{D}(A)$, *которая в терминах абстрактного дифференциального выражения* Lu *и абстрактной производной по внешней нормали* ∂u *может быть выражена следующим образом:*

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in F : Lu \in E, \quad \partial u = 0.\} \tag{2.10}$$

При этом, очевидно, $\mathcal{R}(A)$=E. □

2.1.2 Вторая вспомогательная задача С.Г. Крейна

Рассмотрим теперь задачу для однородного уравнения (абстрактный аналог уравнения Лапласа) и неоднородного условия Неймана:

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi. \tag{2.11}$$

Из формулы Грина (2.1) получаем, что для решений задачи (2.11) выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F; \tag{2.12}$$

это тождество и служит определением слабого решения.

Лемма 2.1.2. *Задача* (2.11) *имеет единственное слабое решение* $w \in M \subset F$ *тогда и только тогда, когда*

$$\psi \in (G_+)^*. \tag{2.13}$$

Это решение дается формулой

$$w = T_M \psi, \tag{2.14}$$

где

$$T_M = (\partial_M)^{-1} : (G_+)^* \to M \tag{2.15}$$

— оператор, сопряженный к $\gamma_M := \gamma|_M : M \to G_+$.

Доказательство. Напомним сначала, что оператор T_M появился в п. 1.3.2 в процессе построений, связанных с выводом абстрактной формулы Грина. Заметим еще, что согласно формуле (1.118) главы 1 имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min_{\gamma u = \varphi} \|u\|_F \leqslant \|u\|_F \quad \text{при } \gamma u = \varphi, \quad \forall u \in F. \tag{2.16}$$

Поэтому при любом $\eta \in F$ правая часть в (2.12) является линейным ограниченным функционалом $l_\psi(\eta)$ в пространстве F тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.13). В самом деле,

$$|\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G| \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \|\psi\|_{(G_+)^*} \cdot \|\eta\|_F,$$

и потому $l_\psi(\eta) := \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$ — линейный ограниченный функционал в F. Обратно, если $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$ — линейный ограниченный функционал относительно $\eta \in F$, то совокупность элементов $\{\gamma\eta\} = \{\gamma_M \eta_M\}$ пробегает все G_+, когда η пробегает все F. Поэтому элемент ψ, представляющий функционал $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$, должен принадлежать $(G_+)^*$.

Итак, поскольку $\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G$ — линейный ограниченный функционал в пространстве F, то по лемме Ф. Рисса существует единственный элемент $w \in F$ такой, что справедливо тождество (2.12).

Положим в этом тождестве $\eta \in N$. Тогда $\gamma\eta = 0$ и $(\eta, w)_F = 0$, $\forall \eta \in N$. Отсюда в силу ортогонального разложения $F = N \oplus M$ получаем, что $w \in M$.

Положим теперь в (2.12) $\eta \in M$. Тогда будем иметь тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad w \in M. \tag{2.17}$$

Отсюда и из определения оператора T_M (см. п. 1.3.2, формулу (1.121)) получаем, что $T_M = (\gamma_M)^*$ и справедливы формулы (2.14), (2.15). $\square$

2.1.3 Неоднородная задача Неймана для уравнения Пуассона

Используя результаты рассмотрения двух вспомогательных задач С.Г. Крейна, т.е. задач (2.2) и (2.11), теперь легко выяснить вопрос о разрешимости абстрактной неоднородной задачи для уравнения Пуассона при неоднородном краевом условии Неймана:

$$Lu = f, \quad \partial u = \psi. \tag{2.18}$$

Для решений этой задачи из формулы Грина (2.1) следует тождество

$$(\eta, f)_E + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.19}$$

Оно и служит определением слабого решения задачи (2.18).

Теорема 2.1.1. *Задача* (2.18) *имеет единственное слабое решение* $u \in F$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$f \in F^*, \quad \psi \in (G_+)^*. \tag{2.20}$$

Это решение дается формулой

$$u = A^{-1}f + T_M\psi. \tag{2.21}$$

Обратно, любой элемент $u \in F$ *допускает единственное представление его в виде*

$$u = A^{-1}(Lu) + T_M(\partial u) =: v + w, \tag{2.22}$$

где v *и* w *— слабые решения задач* (2.2) *и* (2.11) *соответственно.*

Доказательство. Пусть $v \in F$ — слабое решение задачи (2.2) при $f \in F^*$, а $w \in M \subset F$ — слабое решение задачи (2.11) при $\psi \in (G_+)^*$. Напомним, что требования (2.20) относительно $f = Lu$ и $\psi = \partial u$ — это необходимые и достаточные условия существования и единственности слабых решений этих задач.

Введем элемент $\widetilde{u} := v + w$ и докажем, что он совпадает со слабым решением задачи (2.18). Из определений (2.3) и (2.12) слабых решений задач (2.2) и (2.11) следует, что

$$\langle \eta, f \rangle_E + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G = (\eta, v + w)_F = (\eta, \widetilde{u})_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.23}$$

Отсюда и из (2.19) имеем

$$(\eta, u - \widetilde{u})_F = 0, \quad \forall \eta \in F,$$

откуда получаем, что $u = \widetilde{u}$.

Значит,

$$u = v + w = A^{-1}f + T_M\psi,$$

т.е. справедлива формула (2.21). Далее, для любого $u \in F$, согласно теореме 1.3.1, имеем

$$Lu =: f \in F^*, \quad \partial u =: \psi \in (G_+)^*,$$

причем эти элементы находятся по $u \in F$ однозначно. Отсюда и из (2.21) следует представление (2.22). □

Замечание 2.1.1. Как следует из общих рассмотрений п. 1.3.2, любой элемент $u \in F$ допускает представление

$$u = u_N + u_M, \quad u_N = P_N u \in N, \quad u_M = P_M u \in M, \quad N \oplus M = F.$$

С другой стороны, имеет место также однозначное представление любого $u \in F$ в форме (2.22). Поэтому между элементами u_N и u_M, с одной стороны, и элементами v и w, с другой, имеет место взаимно однозначное соответствие. □

Действительно, согласно проведенным построениям имеем

$$\partial_M w = \partial w = \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \partial_M = (T_M)^{-1}.$$

Поэтому

$$w = T_M(\partial_M w) = T_M(\partial_M u_M + \partial_N u_N) = u_M + T_M(\partial_N u_N). \tag{2.24}$$

Тогда

$$v = u - w = (u_M + u_N) - (u_M + T_M(\partial_N u_N)) = u_N - T_M(\partial_N u_N). \tag{2.25}$$

Таким образом, элементы v и w находятся однозначно по элементам u_M и u_N по формулам (2.24), (2.25).

Формулы для обратного соответствия также легко вывести. В самом деле, так как $u_N \in N$, $T_M(\partial_N u_N) \in M$, то из (2.25) имеем

$$u_N = P_N v, \quad u_M = P_M(v + w), \tag{2.26}$$

где P_N и P_M — ортопроекторы на N и M соответственно.

2.1.4 Другие примеры абстрактных краевых задач

На основе подобного рода общих построений можно аналогичным образом рассмотреть другие примеры абстрактных краевых задач, обобщающих известные задачи математической физики, например, для оператора Лапласа или любого равномерно эллиптического оператора, а также для соответствующих операторов линейной теории упругости, гидродинамики и др.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \quad \partial u = \varphi. \tag{2.27}$$

Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$N \hookrightarrow E, \tag{2.28}$$

которое обычно имеет место в задачах математической физики.

Например, для гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ имеем $N = H_0^1(\Omega$ (см. п. 1.4.3), это подпространство плотно в $L_2(\Omega)$ и имеет место неравенство Фридрихса (см. часть I):

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad c > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.29}$$

Из предположения (2.28) следует, что $(N; E)$ — гильбертова пара пространств. Обозначим через A_0 оператор этой гильбертовой пары. Тогда можно считать, как это следует из предыдущих рассмотрений (см. п. 1.2.1), что $\mathcal{D}(A_0) = N$, $\mathcal{R}(A_0) = N^*$ и

$$(u, v)_F = (A_0^{1/2}u, A_0^{1/2}v)_E = \langle u, A_0 v\rangle_E, \quad \forall u, v \in N. \tag{2.30}$$

Лемма 2.1.3. *При любых*

$$f \in N^*, \quad \varphi \in G_+ \tag{2.31}$$

задача (2.27) *имеет единственное решение $u \in F$, представимое в виде суммы двух взаимно ортогональных элементов:*

$$u = v + w = A_0^{-1}f + (\gamma_M)^{-1}\varphi, \quad v \in N, w \in M, \tag{2.32}$$

где $A_0 : N \to N^*$ — оператор гильбертовой пары $(N; E)$, а γ_M — сужение оператора следа γ на подпространство $M = F \ominus N$. Если, в частности, $f \in F^*$, то формула (2.32) *для решений задачи* (2.27) *сохраняется.*

Доказательство. Будем разыскивать решение задачи (2.27) в виде суммы $u = v + w$, где $v \in N$, а $w \in M$. Тогда для $w \in M$ возникает задача

$$Lw = 0, \quad \gamma_M w = \gamma w = \gamma u = \varphi. \tag{2.33}$$

Так как между элементами подпространства M и пространства G_+, согласно построениям п. 1.3.2, имеет место изоморфизм и даже изометрия (см. формулу (1.115) из п. 1.3.2):

$$\|w\|_F = \|\gamma_M w\|_{G_+}, \quad \forall w \in M, \tag{2.34}$$

то оператор $\gamma_M : M \to G_+$ имеет ограниченный обратный оператор $(\gamma_M)^{-1} : G_+ \to M$, который является и изометрическим. Поэтому задача (2.33) имеет единственное решение $w = (\gamma_M)^{-1}\varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in G_+$.

Из этих свойств элемента w следует, что для элемента $u \in N$ должны выполняться соотношения

$$Lv = L(u - w) = f, \quad \gamma v = \gamma(u - w) = \gamma u - \varphi = 0, \tag{2.35}$$

т.е. возникает уравнение Пуассона при однородном условии Дирихле.

Назовем слабым решением задачи (2.35) такой элемент $v \in N$, для которого выполнено тождество

$$\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, v)_F, \quad \forall \eta \in N. \tag{2.36}$$

Заметим, что для решений задачи (2.35) это тождество следует из абстрактной формулы Грина (2.1).

Левая часть в (2.36) является линейным ограниченным функционалом в подпространстве N тогда и только тогда, когда $f \in N^*$. Поэтому по лемме Ф. Рисса при $f \in N^*$ найдется единственный элемент $v \in N$ такой, что выполнено тождество (2.36). Отсюда с учетом формул (2.30) получаем (как при доказательстве леммы 2.1.1)

$$\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, v)_F = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}v)_F = \langle \eta, A_0 v \rangle_E, \quad \forall \eta \in N. \tag{2.37}$$

Значит,

$$\langle \eta, f - A_0 v \rangle_E = 0 \Rightarrow A_0 v = f \Rightarrow v = A_0^{-1} f, \tag{2.38}$$

где A_0 — оператор гильбертовой пары пространств $(N; E)$.

Итак, элементы w и v находятся однозначно по элементам $\varphi \in G_+$ и $f \in N^*$ соответственно. Поэтому элемент $u = v + w$ также однозначно определен, и решение u задачи (2.6) имеет вид (2.32).

Заметим теперь, что выражение $\langle \eta, f\rangle_E$ является линейным ограниченным функционалом на подпространстве N и в том случае, когда $f \in F^*$. В самом деле,

$$|\langle \eta, f\rangle_E| \leqslant \|\eta\|_F \cdot \|f\|_{F^*} = \|f\|_{F^*} \cdot \|\eta\|_N, \quad \forall \eta \in N.$$

Поэтому и при $f \in F^*$ существует единственное слабое решение v задачи (2.35), что снова приводит к формуле $v = A_0^{-1} f$. Этим завершено доказательство леммы. □

Переходя к рассмотрению других абстрактных краевых задач, введем оператор $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ и будем считать, что это линейный ограниченный оператор, обладающий следующим свойством неотрицательности:

$$\langle \varphi, \alpha\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{2.39}$$

Рассмотрим с помощью этого оператора абстрактные краевые задачи с краевым условием третьего рода. Условия такого вида будем называть *условиями Ньютона* (по аналогии с классическими задачами теплопроводности). В абстрактной форме условие Ньютона имеет вид

$$\partial u + \alpha\gamma u = \psi, \tag{2.40}$$

где α — введенный выше неотрицательный оператор. Если $\alpha = 0$, то (2.40) переходит в условие Неймана.

Итак, изучим краевую задачу Ньютона для уравнения Пуассона:

$$Lu = f, \quad \partial u + \alpha\gamma u = \psi, \tag{2.41}$$

где $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ — оператор со свойством (2.39). Из абстрактной формулы Грина (2.1) получаем, что для решений задачи (2.41) выполнено тождество

$$(\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u\rangle_G = \langle \eta, f\rangle_E + \langle \gamma\eta, \psi\rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.42}$$

Это соотношение принимают в качестве определения слабого решения задачи (2.41).

Для изучения задачи (2.41) можно применить два подхода. Один из них основан на применении операторов, уже использованных при рассмотрении предыдущих задач (2.2), (2.11) и (2.27), а второй основан на введении нового скалярного произведения в пространстве F.

Идя по второму пути и опираясь на левую часть (2.42), введем для элементов из F новое скалярное произведение

$$(\eta, u)_{\widetilde{F}} := (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.43}$$

а также соответствующую норму.

Лемма 2.1.4. *Норма, порожденная скалярным произведением* (2.43), *эквивалентна норме пространства* F.

Доказательство. В силу условия (2.39) имеем

$$\|\eta\|^2_{\widetilde{F}} = \|\eta\|^2_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma\eta \rangle_G \geqslant \|\eta\|^2_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.44}$$

С другой стороны, в силу ограниченности оператора $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ справедливо неравенство

$$\|\eta\|^2_{\widetilde{F}} \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\alpha\gamma\eta\|_{(G_+)^*} \leqslant \|\eta\|^2_F + \|\alpha\| \cdot \|\gamma\eta\|^2_{G_+}, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.45}$$

Однако согласно (2.16) имеем

$$\|\gamma\eta\|_{G_+} \leqslant \|\eta\|_F, \quad \forall \eta \in F, \tag{2.46}$$

и потому из (2.45) получаем

$$\|\eta\|^2_{\widetilde{F}} \leqslant (1 + \|\alpha\|)\|\eta\|^2_F, \tag{2.47}$$

что вместе с неравенством (2.44) завершает доказательство леммы. □

Перейдем к вопросу о разрешимости задачи (2.41).

Лемма 2.1.5. *Пусть в задаче* (2.41) *выполнены условия* (2.20), *т.е.*

$$f \in F^*, \quad \psi \in (G_+)^*. \tag{2.48}$$

Тогда эта задача имеет единственное слабое решение $u \in F = \widetilde{F}$.

Доказательство. Рассмотрим правую часть (2.42):

$$l(\eta) := \langle \eta, f \rangle_E + \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F = \widetilde{F}. \tag{2.49}$$

При условиях (2.48) $l(\eta)$ является линейным ограниченным функционалом на $\widetilde{F}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} &|l(\eta)| \leqslant \|\eta\|_F \cdot \|f\|_{F^*} + \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \\ &\leqslant (\|f\|_{F^*} + \|\psi\|_{(G_+)^*})\|\eta\|_F \leqslant (\|f\|_{F^*} + \|\psi\|_{(G_+)^*})\|\eta\|_{\widetilde{F}}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

где при выводе были использованы неравенства (2.16) и (2.44).

Поэтому по лемме Ф. Рисса, примененной к пространству $\widetilde{F}$ со скалярным произведением (2.43), получаем, что найдется единственный элемент $u \in \widetilde{F} = F$, такой, что

$$l(\eta) = (\eta, u)_{\widetilde{F}} = (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u \rangle_G,$$

т.е. справедливо тождество (2.42). $\square$

Поставим теперь следующий вопрос. Выше в пространстве F было введено новое скалярное произведение, эквивалентное исходному, и возникло пространство $\widetilde{F}$, состоящее из тех же элементов, что и элементы F, однако с новой эквивалентной нормой. В то же время остальные пространства E и G, а также оператор γ остались прежними. Нетрудно проверить, что для новой тройки пространств E, $\widetilde{F}$, G и оператора γ снова выполнены условия 1° и 2° п. 1.3.2, и потому справедлива абстрактная формула Грина вида

$$\langle \eta, \widetilde{L}u \rangle_E = (\eta, u)_{\widetilde{F}} - \langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in \widetilde{F} = F. \tag{2.51}$$

Спрашивается, как изменились дифференциальное выражение $\widetilde{L}u$ и производная $\widetilde{\partial}u$ после перехода в F к новому скалярному произведению (2.43), а также как изменился оператор $\widetilde{A}$ гильбертовой пары $(\widetilde{F}; E)$ по сравнению с оператором A гильбертовой пары $(F; E)$ и другие сопутствующие операторы.

Рассмотрим эту проблему подробнее. Итак, для элементов из $F = \widetilde{F}$ имеем две формулы Грина; это формулы (2.1) и (2.51), а также связь скалярных произведений (2.43). Приравнивая в этих формулах выражение $(\eta, u)_F$, приходим к тождеству

$$(\eta, Lu)_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G = (\eta, \widetilde{L}u)_E + \langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u \rangle_G - \langle \gamma\eta, \alpha\gamma u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F,$$

т.е.

$$(\eta, \widetilde{L}u - Lu)_E + \langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u - \alpha\gamma u - \partial u \rangle_G = 0, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.52}$$

Положим здесь $\eta \in N$. Тогда $\gamma\eta = 0$, и так как согласно предположению (2.28) $N \hookrightarrow E$, то из (2.52) следует, что функционал $\widetilde{L}u - Lu$ является нулевым. Значит,

$$\widetilde{L}u = Lu \in F^*. \tag{2.53}$$

В этом случае соотношение (2.52) принимает вид

$$\langle \gamma\eta, \widetilde{\partial}u - \alpha\gamma u - \partial u \rangle_G = 0, \quad \forall \eta \in F. \tag{2.54}$$

Так как $\{\gamma\eta\}$ пробегает все G_+, когда η пробегает все F, то из (2.54) следует, что
$$\widetilde{\partial} u = \partial u + \alpha\gamma u, \quad \forall u \in F. \tag{2.55}$$

Отсюда получаем такой вывод: при переходе к эквивалентной норме (2.43) в пространстве F условие Ньютона в задаче (2.41) переходит в условие Неймана в пространстве $\widetilde{F}$, а дифференциальное выражение Lu не изменяется: $\widetilde{L}u = Lu$.

Далее, эти рассуждения показывают также, что оператор $\widetilde{A}$ гильбертовой пары $(\widetilde{F}; E)$ задается на области определения (см. (2.10))

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \{u \in F = \widetilde{F} : \widetilde{L}u = Lu \in E,\ \widetilde{\partial} u = \partial u + \alpha\gamma u = 0\} \tag{2.56}$$

по закону
$$\widetilde{A}u = \widetilde{L}u = Lu. \tag{2.57}$$

Учитывая эти обстоятельства и опираясь на теорему 2.1.1 и формулу (2.21), можно сразу сказать, что решение задачи (2.41) выражается формулой

$$u = \widetilde{v} + \widetilde{w} = \widetilde{A}^{-1} f + T_{\widetilde{M}}\psi, \tag{2.58}$$

где $\widetilde{v}$ — решение первой вспомогательной задачи

$$L\widetilde{v} = f \in F^*, \quad \widetilde{\partial}\widetilde{v} = \partial\widetilde{v} + \alpha\gamma\widetilde{v} = 0, \tag{2.59}$$

а $\widetilde{w}$ — решение второй вспомогательной задачи

$$L\widetilde{w} = 0, \quad \widetilde{\partial}\widetilde{w} = \partial\widetilde{w} + \alpha\gamma\widetilde{w} = \psi \in (G_+)^*. \tag{2.60}$$

При этом

$$\begin{aligned} &\widetilde{v} = \widetilde{A}^{-1} f,\ \widetilde{A} : \widetilde{F} \to (\widetilde{F})^* = F^*, \\ &\widetilde{w} = T_{\widetilde{M}}\psi,\ T_{\widetilde{M}} : (G_+)^* \to \widetilde{M} \subset \widetilde{F}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

где $\widetilde{M} \subset \widetilde{F}$ — подпространство гармонических элементов из $\widetilde{F}$, ортогональное к $N = \widetilde{N}$ в смысле нового скалярного произведения (2.43).

Учитывая тот факт, что при $\alpha = 0$ условие Ньютона переходит в условие Неймана (2.11), в дальнейшем условие такого вида будем называть *условием Ньютона-Неймана.*

Рассмотрим теперь второй подход к задаче (2.41), не связанный с введением нового скалярного произведения в пространстве F и опирающийся на операторы вспомогательных краевых задач (2.2) и (2.11), а также на оператор $C_M := \gamma_M T_M$ (см. п. 1.3.2).

Представим решение задачи (2.41) в виде суммы $u = v + w$, где

$$Lv = f, \quad \partial v = 0, \tag{2.62}$$

а элемент $w \in M$ является решением задачи

$$Lw = 0, \quad \partial w = \psi - \alpha\gamma(v + w). \tag{2.63}$$

Тогда, согласно лемме 2.1.1, $v = A^{-1}f$.

Заметим теперь, что элементы $\partial_M w$ и $\gamma_M w$ связаны соотношением $\partial_M w = C_M^{-1}\gamma_M w$, $C_M = \gamma_M T_M$. Учитывая эту связь, перепишем граничное условие (2.63) в виде

$$(C_M^{-1} + \alpha)(\gamma_M w) = \psi - \alpha\gamma A^{-1} f. \tag{2.64}$$

Здесь $C_M^{-1} + \alpha$ ограниченно действует из G_+ в $(G_+)^*$.

Лемма 2.1.6. *Оператор $C_M^{-1} + \alpha$ имеет ограниченный обратный оператор $(C_M^{-1} + \alpha)^{-1} : (G_+)^* \to G_+$ и*

$$\|(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\| \leqslant 1. \tag{2.65}$$

Доказательство. Так как оператор α обладает свойством неотрицательности (2.39), то

$$\langle \varphi, (C_M^{-1} + \alpha)\varphi \rangle_G \geqslant \langle \varphi, C_M^{-1}\varphi \rangle_G = \|C_M^{-1/2}\varphi\|_G^2 = \|\varphi\|_{G_+}^2, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{2.66}$$

Здесь равенства справа имеют место согласно установленной в п. 1.3.2 формуле (1.130):

$$(\varphi, \psi)_{G_+} = \langle \varphi, C_M^{-1}\psi \rangle_G, \quad \forall \varphi, \psi \in G_+. \tag{2.67}$$

Из (2.67) теперь получаем, что

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 \leqslant \|\varphi\|_{G_+} \cdot \|(C_M^{-1} + \alpha)\varphi\|_{(G_+)^*},$$

откуда после замены $\psi := (C_M^{-1} + \alpha)\varphi$ приходим к формуле

$$\|(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\psi\|_{G_+} \leqslant \|\psi\|_{(G_+)^*}.$$

Значит, оператор $(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}$ ограничен и выполнено свойство (2.65).□

Опираясь на эти факты, вместо (2.63) приходим к задаче

$$Lw = 0, \quad \gamma_M w = (C_M^{-1} + \alpha)^{-1}(\psi - \alpha\gamma A^{-1} f). \tag{2.68}$$

Так как оператор $\gamma_M : M \to G_+$ является изометрией и потому ему обратный существует и также является изометрией, то из (2.68) окончательно получаем

$$\begin{aligned} u = v + w = A^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}(\psi - \alpha\gamma A^{-1} f) = \\ = (I - (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\alpha\gamma)A^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\psi. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Отметим, что если здесь формально положить $\alpha = 0$, то решение (2.69) переходит в решение неоднородной задачи Неймана для уравнения Пуассона, выражаемое формулой (2.21). Этот факт следует из того, что при $\alpha = 0$ задача Ньютона (2.41) переходит в задачу Неймана (2.18).

Рассмотрим, наконец, еще один подход к решению задачи Ньютона (2.41), основанный на использовании оператора A_0 гильбертовой пары $(N; E)$. Будем разыскивать решение задачи (2.41) в виде

$$u = u_N + u_M, \quad u_N \in N, \quad u_M \in M, \quad F = N \oplus M. \tag{2.70}$$

Тогда для u_N и u_M возникают задачи (проверьте):

$$Lu_N = f, \quad \gamma u_N = \gamma_N u_N = 0; \tag{2.71}$$

$$Lu_M = 0, \quad \partial_M u_M + \alpha\gamma_M u_M = (C_M^{-1} + \alpha)\gamma_M u_M = \psi - \partial_N u_N. \tag{2.72}$$

Как следует из леммы 2.1.3, решение задачи (2.71) дается формулой $u_N = A_0^{-1} f$, где A_0 — оператор гильбертовой пары $(N; E)$. Далее, согласно проведенным выше рассуждениям, решение задачи (2.72) имеет вид

$$u_M = (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}(\psi - \partial_N(A^{-1} f)).$$

Отсюда окончательно получаем решение задачи (2.41) в виде

$$u = (I - (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\partial_N)A^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}(C_M^{-1} + \alpha)^{-1}\psi. \tag{2.73}$$

Покажем, что при $\alpha = 0$ это решение переходит в (2.21), т.е. в решение задачи Неймана. В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned} u = u_N + u_M = (I - (\gamma_M)^{-1}(\gamma_M)T_M\partial_N)u_N + T_M\psi = \\ = (u_N - T_M\partial_N u_N) + T_M\psi = v + w = A^{-1} f + T_M\psi. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Здесь при выводе были использованы связи (2.24) и (2.25), а также формулы для решений v и w вспомогательных задач С.Г. Крейна (см. пп. 2.1.1 и 2.1.2).

Таким образом, решение одной и той же задачи Ньютона (2.41) представимо в трех разных вариантах: в виде (2.58), (2.69) и (2.73). При этом в этих формулах фигурируют операторы различных вспомогательных краевых задач, связанных со слабыми решениями из пространства F либо из пространства $\widetilde{F}$ с эквивалентной нормой.

2.2 Краевые задачи для уравнения Лапласа или Пуассона и близкие к ним

В этом параграфе в качестве иллюстрации общих положений, рассмотренных в 2.1, будут приведены классические краевые задачи для уравнения Лапласа или Пуассона, а также близкие к ним по свойствам возникающих билинейных форм, формул Грина и другим характеристикам. Эти задачи рассматриваются в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Изложение этого круга вопросов дано в виде упражнений и примеров с некоторыми пояснениями.

2.2.1 Краевые задачи Дирихле

Начнем рассмотрение этих задач с наиболее простой из них.

Пример 2.2.1. Однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.75}$$

$\square$

Эту задачу можно считать частным случаем общей задачи (2.27) (см. также задачу (1.100) главы 1), если в качестве E выбрать пространство $L_2(\Omega)$, в качестве G — пространство $L_2(\Gamma)$, а в качестве F — пространство $H^1(\Omega)$ с эквивалентной нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \Big(\int\limits_\Gamma u \, d\Gamma\Big)^2. \tag{2.76}$$

(см. часть I, теорему 2.4.4). В качестве оператора следа γ выбираем обычный закон: $\gamma u = u|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$.

Упражнение 2.2.1. Доказать, опираясь на определение (2.76) нормы в $H^1(\Omega)$ и формулу Грина (1.197) главы 1, что, во-первых, имеет место ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \tag{2.77}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\}, \; H_h^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u = 0 \text{ в } \Omega\}, \tag{2.78}$$

а во-вторых, имеет место формула Грина

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \tag{2.79}$$

$$\Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{2.80}$$

□

Отметим, что в рассматриваемом случае $N = H_0^1(\Omega)$ плотно в $E = L_2(\Omega)$. Поэтому согласно лемме 2.1.3 задача (2.75) при любом $f \in N^* = (H_0^1(\Omega))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Omega)$) имеет единственное слабое решение $u \in H_0^1(\Omega)$ (в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$), которое выражается формулой $u = A_0^{-1} f$, где $A_0 : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$ — оператор гильбертовой пары $(H_0^1(\Omega); L_2(\Omega))$.

Пример 2.2.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.81}$$

□

Выбирая ту же, что и примере 2.2.1, тройку пространств и оператор следа γ, по теореме Гальярдо (см. п. 1.4.2) получаем, что $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma) =: G_+$ — ограниченный оператор. Поэтому согласно лемме 2.1.3 приходим к выводу, что задача (2.81) тогда и только тогда имеет единственное слабое решение $u \in H_h^1(\Omega)$, когда $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Это решение выражается формулой $u = (\gamma_M)^{-1}\varphi$, где γ_M — сужение оператора следа на подпространство $H_h^1(\Omega)$.

Упражнение 2.2.2. Доказать, что решение неоднородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, т.е. задачи

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \tag{2.82}$$

принадлежит пространству $H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in (H_0^1(\Omega))^*$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Это решение единственно и выражается формулой

$$u = A_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi. \tag{2.83}$$

□

Рассмотрим теперь другие близкие к (2.75), (2.81) и (2.82) проблемы. Это задачи соответственно вида

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.84}$$

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.85}$$

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.86}$$

Здесь полезно использовать тройку пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$ со стандартной нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega, \tag{2.87}$$

$G = L_2(\Gamma)$, обычный оператор следа $\gamma u = u|_\Gamma$, $\quad \forall u \in H^1(\Omega)$, а также первую формулу Грина для оператора Лапласа (см. (1.195), гл. 1):

$$\begin{gathered} \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \end{gathered} \tag{2.88}$$

Напомним (см. (1.172), гл. 1), что в этом случае имеет место ортогональное разложение

$$H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega),\ H^1_0(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ (\text{на } \Gamma)\}, \tag{2.89}$$

$$H^1_h(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega)\}. \tag{2.90}$$

Упражнение 2.2.3. Доказать, что решение каждой из задач (2.84) — (2.86) существует, единственно и принадлежит пространству $H^1(\Omega)$ с нормой (2.87) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$f \in (H^1_0(\Omega))^*, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{2.91}$$

Эти решения даются соответственно формулами

$$u = A_0^{-1} f, \quad u = (\gamma_M)^{-1}\varphi, \quad u = A_0^{-1} f + (\gamma_M)^{-1}\varphi, \tag{2.92}$$

где $A_0 : H^1_0(\Omega) \to (H^1_0(\Omega))^*$ — оператор гильбертовой пары $(H^1_0(\Omega); L_2(\Omega))$, а γ_M — сужение оператора следа γ на подпространство $M = H^1_h(\Omega)$, см. (2.90). □

2.2.2 Краевые задачи Неймана-Ньютона

Примеры таких краевых задач уже приводились в п. 1.2.5.

Рассмотрим сначала однородную задачу Неймана для уравнения типа Пуассона (см. (1.86), гл. 1):

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{2.93}$$

Это — частный случай абстрактной задачи (2.2), т.е. первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна, отвечающей, как и выше, формуле Грина (2.88) и соответствующим пространствам $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$ (с нормой (2.87)) и $G = L_2(\Gamma)$.

Упражнение 2.2.4. Доказать, опираясь на лемму 2.1.1, формулу Грина (2.88) и теорему 4.2.1, что задача (2.93) имеет слабое решение $u \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in (H^1(\Omega))^*$, и это решение дается формулой $u = A^{-1}f$, где $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*$ — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$. □

Рассмотрим теперь вместо (2.93) краевую задачу для однородного уравнения и неоднородного условия Неймана:

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.94}$$

Это — снова частный случай, на этот раз задачи (2.11), для того же набора пространств и оператора следа, т.е. задача (2.94) является второй вспомогательной задачей С.Г. Крейна для указанной совокупности пространств.

Упражнение 2.2.5. Опираясь на теорему Гальярдо, лемму 2.1.2 и формулу Грина (2.88), доказать, что задача (2.94) имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Gamma)$). Это решение выражается формулой $u = T_M\psi$, где $T_M : (H^{1/2}(\Gamma))^* \to M = H^1_h(\Omega)$ — ограниченный оператор, а подпространство $H^1_h(\Omega)$ определено в (2.90). □

Следствием упражнений 2.2.4 и 2.2.5, а также теоремы 2.1.1 является такое утверждение.

Теорема 2.2.1. *Неоднородная задача Неймана для уравнения типа Пуассона, т.е. задача вида*

$$u - \Delta u = f \quad (\textit{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\textit{на } \Gamma), \tag{2.95}$$

имеет единственное решение $u \in H^1(\Omega)$ *(в области* Ω *с липшицевой границей* $\Gamma = \partial\Omega$*) тогда и только тогда, когда*

$$f \in (H^1(\Omega))^*, \quad \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{2.96}$$

Это решение дается формулой

$$u = A^{-1} f + T_M \psi, \tag{2.97}$$

где A *и* T_M *— операторы из упражнений 2.2.4 и 2.2.5 соответственно.*
□

Рассмотрим еще задачи типа вспомогательных задач С.Г. Крейна, но с краевым условием Ньютона:

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega), \tag{2.98}$$

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{2.99}$$

$$u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \tag{2.100}$$

Здесь $\alpha = \alpha(x)$, $x \in \Gamma$, — неотрицательная функция, непрерывная на Γ. Каждая из задач (2.98) — (2.100) является частным случаем абстрактной задачи (2.41). Здесь следует привлечь тройку пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = \widetilde{H}^1(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + |u|^2\Big)\, d\Omega + \int\limits_\Gamma \alpha |u|^2\, d\Gamma, \tag{2.101}$$

пространство $G = L_2(\Gamma)$ и обычный оператор следа $\gamma u = u|_\Gamma$. Отметим при этом, что норма (2.101) эквивалентна стандартной норме (2.87) и $H^1(\Omega)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega)$ совпадают как множества функций.

Упражнение 2.2.6. Доказать, что имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} - \Big\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\gamma u\Big\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.102}$$

Доказать также, что каждая из задач (2.98) — (2.100) имеет единственное решение $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$f \in (\widetilde{H}^1(\Omega))^*, \quad \psi \in (H^{1/2}(\Gamma))^*, \tag{2.103}$$

и эти решения выражаются формулами

$$u = \widetilde{A}^{-1} f, \quad u = T_{\widetilde{M}} \psi, \quad u = \widetilde{A}^{-1} f + T_{\widetilde{M}} \psi, \tag{2.104}$$

соответственно, где $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\widetilde{H}^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а $T_{\widetilde{M}}$ — оператор, возникающий во второй вспомогательной задаче С.Г. Крейна, т.е. задаче (2.99).

Указание. Воспользоваться леммой 2.1.5, общими рассуждениями после нее, а также формулами (2.58) — (2.62). □

Рассмотрим, наконец, классическую неоднородную краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma = \partial\Omega). \tag{2.105}$$

Отметим прежде всего, что функции (функционалы) f и ψ в (2.105) не могут выбираться произвольным образом, если решение задачи принадлежит пространству $H^1(\Omega)$. В самом деле, из формулы (1.197) главы 1, т.е. формулы

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{2.106}$$

следует при $\eta = \eta(x) \equiv 1$, что для решения $u \in H^1(\Omega)$ задачи (2.105) должно выполняться условие ее разрешимости

$$\langle 1_\Omega, f \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle 1_\Gamma, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0, \tag{2.107}$$

где 1_Ω — функция, равная 1 в Ω, а 1_Γ — функция, равная 1 на $\Gamma = \partial\Omega$.

Отметим еще, что решение задачи (2.105) определяется с точностью до константы (докажите этот факт, опираясь на (2.106)). Поэтому его можно нормировать условием

$$\Big(1_\Gamma, \gamma u\Big)_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_{\Gamma} u \, d\Gamma = 0, \tag{2.108}$$

либо условием

$$\Big(1_\Omega, u\Big)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u \, d\Omega = 0, \tag{2.109}$$

либо каким-либо другим (линейным по u) условием.

Опираясь на общие построения параграфа 2.1, а также вышеприведенные предварительные факты, будем разыскивать решение задачи (2.105) при условии нормировки (2.108) либо (2.109) в виде

$$u = v + w + c_{v,w}, \tag{2.110}$$

где v и w — решения вспомогательных краевых задач

$$-\Delta v = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_{\Omega} v \, d\Omega = 0, \tag{2.111}$$

$$\Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_{\Gamma} w \, d\Gamma = 0, \tag{2.112}$$

а $c_{v,w}$ — линейный функционал, зависящий от v и (или) w.

В (2.111), (2.112) нормировки решений v и w выбраны таким образом, чтобы использовать операторы A и T_M подходящих гильбертовых пар пространств, естественно связанных с этими вспомогательными задачами (см. ниже).

Рассмотрим сначала задачу (2.111). Необходимое условие разрешимости этой задачи следует из (2.107) при $\psi = 0$:

$$\langle 1_\Omega, f \rangle_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{2.113}$$

Условие нормировки $\int\limits_{\Omega} v \, d\Omega = 0$ и условие (2.113) показывают, что при рассмотрении проблемы (2.111) естественно ее решения искать в пространстве $H^1(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega + \Big(\int\limits_{\Omega} u \, d\Gamma \Big)^2, \tag{2.114}$$

эквивалентной стандартной норме. Тогда

$$u \in H^1_\Omega := \{u \in H^1(\Omega) : \int\limits_{\Omega} u \, d\Omega = 0\}, \ \|u\|^2_{H^1_\Omega} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega. \tag{2.115}$$

Подпространство $H^1_\Omega \subset H^1(\Omega)$, очевидно, плотно и компактно вложено в подпространство

$$L_{2,\Omega} := \{u \in L_2(\Omega) : \int\limits_{\Omega} u \, d\Omega = 0\},$$

и потому $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$ — гильбертова пара пространств (см. п. 1.2.5, примеры 3°).

Эти рассуждения, а также лемма 2.1.1 и следствие 2.1.1 показывают, что кратко задачу (2.111) можно трактовать как первую вспомогательную задачу С.Г. Крейна для пары пространств $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$ и переписать в виде $Av = f$, где $A : H^1_\Omega \to (H^1_\Omega)^*$ — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Omega; L_{2,\Omega})$. Поэтому при $f \in (H^1_\Omega)^*$ задача (2.111) имеет единственное слабое решение $v = A^{-1}f \in H^1_\Omega$.

Перейдем теперь к задаче (2.112). Необходимое условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$\langle 1_\Gamma, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0. \tag{2.116}$$

Здесь вместо нормы (2.114) (ниже норма совпадает с нормой (2.114)) полезно воспользоваться другой нормой в $H^1(\Omega)$, именно, нормой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega + \Big(\int_\Gamma u \, d\Gamma \Big)^2, \tag{2.117}$$

также эквивалентной стандартной. Тогда, очевидно,

$$w \in H^1_\Gamma(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Gamma u \, d\Gamma = 0\}, \tag{2.118}$$

причем w принадлежит подпространству гармонических функций

$$H^1_{h,\Gamma}(\Omega) := \{u \in H^1_\Gamma(\Omega) : \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega)\}. \tag{2.119}$$

Отсюда следует, что задачу (2.112) естественно трактовать как вторую вспомогательную задачу С.Г. Крейна применительно к пространству $H^1_\Gamma(\Omega)$, подпространству $H^1_{h,\Gamma}(\Omega)$, а также оснащению

$$H^{1/2}_\Gamma := \Big(H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \Big) \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow (H^{1/2}_\Gamma)^*, L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}. \tag{2.120}$$

Поэтому по лемме 2.1.2 получаем, что при выполнении условия $\psi \in (H^{1/2}_\Gamma)^*$ задача (2.112) имеет единственное слабое решение

$$w = T_M \psi, \quad T_M := (H^{1/2}_\Gamma)^* \to H^1_{h,\Gamma}(\Omega) \subset H^1_\Gamma(\Omega).$$

Итогом рассмотрения проблемы (2.105) является следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть в задаче* (2.105) *выполнены условия*

$$f \in (H^1_\Omega)^*, \quad \psi \in (H^{1/2}_\Gamma)^*. \tag{2.121}$$

Тогда при нормировке (2.108) *задача* (2.105) *имеет единственное слабое решение* $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$, *выражаемое формулой*

$$u = P_\Gamma A^{-1} f + T_M \psi, \tag{2.122}$$

где $P_\Gamma : H^1(\Omega) \to H^1_\Gamma(\Omega)$ *— проектор на подпространство* $H^1_\Gamma(\Omega)$ *(см.* (2.118)*) пространства* $H^1(\Omega)$ *с нормой* (2.117)*.*

Соответственно при нормировке (2.109)*, задача* (2.105) *имеет единственное слабое решение* $u \in H^1_\Omega$*, выражаемое формулой*

$$u = A^{-1} f + P_\Omega T_M \psi, \tag{2.123}$$

где $P_\Omega : L_2(\Omega) \to L_{2,\Omega}$ *— ортопроектор на подпространство* $L_{2,\Omega} \supset H^1_\Omega$.

Доказательство. Следуя представлению (2.110), будем рызыскивать решение задачи (2.105) в виде

$$u = v + w + c = A^{-1} f + T_M \psi + c, \quad c = \text{const}, \tag{2.124}$$

где $A : H^1_\Omega \to (H^1_\Omega)^*$, $T_M : (H^{1/2}_\Gamma)^* \to H^1_{h,\Gamma}(\Omega) \subset H^1_\Gamma(\Omega)$. Очевидно, функция такого вида является решением задачи (2.105). Найдем сначала решение, удовлетворяющее нормировке (2.108). Тогда должно быть

$$\int\limits_\Gamma u\, d\Gamma = \int\limits_\Gamma (A^{-1} f)\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma T_M \psi\, d\Gamma + c|\Gamma| = \int\limits_\Gamma (A^{-1} f)\, d\Gamma + 0 + c|\Gamma| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$c = -\frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_\Gamma (A^{-1} f)\, d\Gamma,$$

и тогда для решения $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$ приходим к формуле (2.122), где

$$P_\Gamma u := u - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_\Gamma u\, d\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.125}$$

Легко убедиться (проделайте это!), что $P_\Gamma = (P_\Gamma)^2$ и является ограниченным оператором в $H^1(\Omega)$ (с нормой (2.117)), т.е. P_Γ — проектор на $H^1_\Gamma(\Omega)$.

При нормировке (2.109) снова воспользуемся представлением (2.124) и найдем новую константу c. Имеем

$$\int\limits_\Omega A^{-1} f\, d\Omega + \int\limits_\Omega (T_M \psi)\, d\Omega + c|\Omega| = \int\limits_\Omega (T_M \psi)\, d\Omega + c|\Omega| = 0,$$

откуда следует, что

$$c = -\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega (T_M \psi)\, d\Omega.$$

Потому из (2.124) приходим к формуле (2.123), где

$$P_\Omega u := u - \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u\, d\Omega, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.126}$$

Легко убедиться (проделайте это!), что $P_\Omega : H^1(\Omega) \to H^1_\Omega$ — проектор из $H^1(\Omega)$ (с нормой (2.114)) на подпространство H^1_Ω (см. (2.115)), т.е. он ограничен и $(P_\Omega)^2 = P_\Omega$. Кроме того, так как $H^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то этот оператор по непрерывности расширяется на все $L_2(\Omega)$. Тогда оказывается, что он обладает также свойством (убедитесь в этом тоже!)

$$(P_\Omega)^* = P_\Omega,$$

откуда окончательно получаем, что $P_\Omega : L_2(\Omega) \to L_{2,\Omega}$ — ортопроектор. $\square$

2.2.3 Краевые задачи для равномерно эллиптического оператора

отсутствуют (только наметки)

Глава 3

Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач и ее приложения

3.1 Введение

До сих пор мы имели дело с абстрактной формулой Грина, а также с ее конкретными реализациями в случае, когда граничное условие в краевой задаче задается на всей границе области, а в абстрактном варианте — на всем пространстве G, на G_+ или на G_- соответственно. Однако многие проблемы математической физики приводят к краевым задачам, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω задано условие одного вида, например, условие Дирихле, а на другой — другого вида, например, условие Ньютона или Неймана.

Задачи такого вида называют *смешанными* краевыми задачами.

3.1.1 Примеры смешанных краевых задач

Рассмотрим некоторые примеры.

1°. *Стационарное уравнение распространения тепла в теле.*

Пусть в области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ рассматривается задача о распределении температуры под действием внутренних источников тепла и некоторого режима на границе $\Gamma = \partial\Omega$. Будем считать, что источники *стационарны*, т.е. не зависят от времени, а режим на границе также обеспечивает стационарное распределение температуры в теле. Предполагаем, что на одной части границы Γ поддерживается постоянная температура, а на другой теплопоток равен нулю. Тогда поле температур $u = u(x)$, $x \in \Omega$, будет являться решением следующей задачи

$$-\Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad u = \varphi \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \tag{3.1}$$

где $f = f(x)$ — мощность источников тепла, а $\varphi = \varphi(x)$, $x \in \Gamma_1$, — заданное поле температур на $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Очевидно, здесь

$$\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cup \partial\Gamma_{12}, \quad mes\,\Gamma_k > 0,\ k = 1, 2, \quad mes\,\partial\Gamma_{12} = 0,$$

т.е. эти две части Γ не пересекаются и примыкают друг к другу.

Задача (3.1) — это смешанная краевая задача для уравнения Пуассона; здесь на части Γ_1 границы Γ задано неоднородное условие Дирихле, а на другой части Γ_2 — однородное условие Неймана.

Рассмотрим другие примеры смешанных краевых задач.

2°. *Вспомогательные задачи С.Г. Крейна о движении вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде.*

Будем считать, что вязкая несжимаемая жидкость частично заполняет некоторый сосуд $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и в состоянии покоя ограничена твердой стенкой S сосуда Ω, а также свободной поверхностью Γ, расположенной перпендикулярно действию гравитационного поля $\vec{g}$, см. рис. 3.1.1.

Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Будем считать, что в процессе малых движений жидкости относительно равновесного состояния поле скорости $\vec{u}$ и отклонение поля давлений p от равновесного поля давлений являются бесконечно малыми функциями первого порядка малости.

Тогда в процессе изучения проблемы малых движений несжимаемой вязкой жидкости в открытом неподвижном сосуде возникает следующая первая вспомогательная задача С.Г. Крейна (см., например, [кр.кн.], с. 278):

$$-\mu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f},\ \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{3}(\mu\tau_{k3}(\vec{u}) - p\,\delta_{k3})\vec{e}_k = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{kj}(\vec{u}) := \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \tag{3.3}$$

Рис. 3.1.1. Сосуд, частично заполненный жидкостью.

Здесь $\vec{f} = \vec{f}(x)$ — заданная функция, характеризующая плотность внешних сил, действующих на частицы жидкости, $\mu > 0$ — динамическая вязкость жидкости.

Задача (3.2) — (3.3) является векторной смешанной краевой задачей. На твердой стенке S задано однородное векторное условие Дирихле. Что касается условия (3.3) — то это однородное векторное условие Неймана для вязкой несжимаемой жидкости. Оно состоит в том, что на свободной поверхности Γ вектор напряжения, приложенный к горизонтальной элементарной площадке, равен нулю.

Вторая вспомогательная задача С.Г. Крейна о движении жидкости в открытом сосуде формулируется следующим образом (см. [кр.кн.], с. 279):

$$-\mu\Delta\vec{w} + \nabla q = \vec{0},\ \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^{3}(\mu\tau_{k3}(\vec{w}) - q\delta_{k3})\vec{e}_k = \vec{\psi} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.5}$$

Здесь $\vec{\psi} = \vec{\psi}(x)$, $x \in \Gamma$, — векторное поле напряжений, заданное на Γ, а $\vec{w}(x)$ и $q(x)$ — искомые поля скоростей и давлений.

Задача (3.4) — (3.5) также является смешанной краевой задачей. Здесь на твердой стенке S по-прежнему задано однородное векторное условие Дирихле (в гидродинамике его называют условием прилипания), на свободной поверхности Γ — неоднородное векторное условие Неймана, а первое уравнение (3.3) — это векторный аналог (для вязкой несжимаемой жидкости) классического скалярного уравнения Лапласа, когда внешние силы отсутствуют.

3°. *Краевые задачи линейной теории упругости.*

Пусть теперь тело $\Omega \in \mathbb{R}^3$ является упругой средой, а его граница $\Gamma = \partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся частей:

$$\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cup \partial\Gamma_{12}, \quad mes\, \Gamma_k > 0,\ k = 1,2, \quad mes\, \partial\Gamma_{12} = 0.$$

Будем считать, что $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega$, — векторное поле, характеризующее малые отклонения частиц упругого тела от их равновесных положений.

Тогда в процессе изучения статических и динамических задач теории упругости возникают следующие вспомогательные краевые задачи.

Первая вспомогательная краевая задача:

$$L\vec{u} := -[\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, \vec{u}] = \vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{3} (\mu\tau_{kj}(\vec{u}) + \lambda\, \mathrm{div}\, \vec{u}\, \delta_{kj})\vec{e}_j = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad k = 1,2,3. \tag{3.7}$$

Это — смешанная линейная задача теории упругости для неоднородного уравнения и однородных краевых условий. Здесь заданная функция $\vec{f}(x)$ характеризует объемную плотность внешних сил (внешнюю нагрузку), действующих на упругое тело, $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ — физические положительные константы, а левая часть условия (3.7) — векторное поле напряжений на Γ_2.

Приведем еще два примера смешанных линейных краевых задач теории упругости, когда внешние силы отсутствуют, а на Γ_1 либо Γ_2 задано поле перемещений либо поле напряжений.

Вторая вспомогательная краевая задача:

$$-[\mu\Delta\vec{v} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, \vec{v}] = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{\varphi} \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.8}$$

$$\sum_{j=1}^{3} (\mu\tau_{kj}(\vec{v}) + \lambda\, \mathrm{div}\, \vec{v}\, \delta_{kj})\vec{e}_j = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad k = 1,2,3. \tag{3.9}$$

Третья вспомогательная краевая задача:

$$-[\mu\Delta\vec{w} + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, \vec{w}] = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.10}$$

$$\sum_{j=1}^{3} (\mu\tau_{kj}(\vec{w}) + \lambda\, \mathrm{div}\, \vec{w}\, \delta_{kj})\vec{e}_j = \vec{\psi}_k \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad k = 1,2,3. \tag{3.11}$$

В задаче (3.8), (3.9) $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(x)$, $x \in \Gamma_1$, — заданное поле перемещений, а в задаче (3.10), (3.11) $\vec{\psi} = \vec{\psi}(x) = \sum\limits_{k=1}^{3} \psi_k(x)\vec{e}_k$, $x \in \Gamma_2$, — заданное поле напряжений.

Описанные в данном пункте примеры будут изучаться в этом курсе лекций на основе общего операторного подхода, который излагается ниже.

3.1.2 Классическая формула Грина для смешанных краевых задач в случае оператора Лапласа

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть, далее, $\eta(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда, для таких функций, как уже упоминалось, имеет место первая формула Грина для оператора Лапласа

$$\int\limits_{\Omega} \eta(-\Delta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma. \tag{3.12}$$

Пусть теперь граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω разбита на непересекающиеся части положительной поверхностной меры:

$$\Gamma = \Big(\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{k=1}^{q} \partial\Gamma_k\Big),\ mes\,\Gamma_k > 0,\ mes\,\partial\Gamma_k = 0,\ k = \overline{1,q}. \tag{3.13}$$

Тогда интеграл по поверхности Γ в (3.12) можно разбить на сумму интегралов:

$$\int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma = \sum_{k=1}^{q} \int\limits_{\Gamma_k} \eta_k \frac{\partial u}{\partial n_k}\, d\Gamma_k, \tag{3.14}$$

$$\eta_k := \eta|_{\Gamma_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_k} := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k},\ k = \overline{1,q}. \tag{3.15}$$

Здесь η_k — след функции $\eta(x)$, $x \in \Omega$, на части Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$, а $\partial u/\partial n_k$ — соответствующий оператор производной по внешней нормали к этой части $\Gamma_k \subset \Gamma$.

При изучении смешанных краевых задач, как это было видно на рассмотренных выше в п. 3.1.2 примерах, на разных частях Γ_k границы Γ могут задаваться различные граничные условия. Поэтому рассматриваемая абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, а также ее конкретные реализации на примерах тех или иных смешанных краевых задач, также должны иметь форму, приспособленную к тому, чтобы абстрактное краевое условие содержало сумму функционалов, отвечающих ортогональному разбиению пространства G на подпространства G_k, $k=\overline{1,q}$.

3.1.3 Ожидаемый вид формулы Грина для смешанных краевых задач

Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ выполнены условия 1° и 2° п. 1.3.2, обеспечивающие по теореме 1.3.1 существование абстрактной формулы Грина:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.16}$$

Здесь $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ — аналог классического выражения (3.14), $\gamma\eta$ — аналог следа $\eta|_\Gamma$, а ∂u — аналог производной по нормали на всей границе $\Gamma = \partial\Omega$. Сравнивая с правой частью (3.14), приходим к выводу, что для смешанных краевых задач желательно выражение $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ в (3.16) заменить — при определенных дополнительных условиях — на выражение

$$\sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{G_k},$$

где γ_k — абстрактный аналог следа элемента η на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог для производной по внешней нормали. Тогда абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач должна приобрести вид

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in \widetilde{F} \subset F, \tag{3.17}$$

где $\widetilde{F}$ — то множество элементов из F, для которых эта формула имеет место, а G_k, $k=\overline{1,q}$, — подпространства пространства G со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \\ &\exists (G_+)_k,\ (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^* =: (G_-)_k, \quad k=\overline{1,q}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

При этом, очевидно, должно быть

$$\gamma_k \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u \in (G_+)_k^*, \quad k=\overline{1,q}, \quad \eta, u \in \widetilde{F}. \tag{3.19}$$

Ниже эта программа будет реализована в общем виде и на классических примерах.

3.2 Вывод абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач

Снова, как и в п. 3.1.3, считаем, что выполнены условия, обеспечивающие существование абстрактной формулы Грина (3.17). Тогда

$$\gamma u \in (G_+), \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad G_+ \hookrightarrow G \hookrightarrow (G_+)^* = G_-. \tag{3.20}$$

3.2.1 Первый вид абстрактной формулы Грина

Пусть p_1 — непрерывный проектор, действующий в пространстве G_+, а $p_2 := I_+ - p_1$ — дополнительный проектор, который также непрерывен.
Введем подпространства в G_+:

$$\widetilde{(G_+)}_k := p_k G_+, \quad p_k : G_+ \to \widetilde{(G_+)}_k,\ k = 1, 2, \tag{3.21}$$

отвечающие этим проекторам. Введем также операторы

$$\widetilde{\gamma}_k := p_k \gamma, \quad \widetilde{\partial}_k := p_k^* \partial, \quad p_k^* : \widetilde{(G_+)}_k^{\,*} \to (G_+)^*. \tag{3.22}$$

Отметим, что так как p_k — непрерывен, то и p_k^* непрерывен, кроме того, из свойства $p_k^2 = p_k$ следует свойство $(p_k^*)^2 = p_k^*$.

Теорема 3.2.1. *В сформулированных выше предположениях имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{2} \langle \widetilde{\gamma}_k \eta, \widetilde{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.23}$$

Доказательство. Оно достаточно простое. Так как $p_1 + p_2 := I_+$, то

$$\gamma \eta = (p_1 + p_2)\gamma \eta = (\widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_2)\eta, \quad \forall \eta \in F. \tag{3.24}$$

Поэтому соответствующее слагаемое из правой части (3.16) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G &= \langle(\widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_2)\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2}\langle\widetilde{\gamma}_k\eta, \partial u\rangle_G = \\ &= \sum_{k=1}^{2}\langle p_k\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2}\langle p_k^2\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \\ &= \sum_{k=1}^{2}\langle p_k\gamma\eta, p_k^*\partial u\rangle_G =: \sum_{k=1}^{2}\langle\widetilde{\gamma}_k\eta, \widetilde{\partial}_k u\rangle_G, \quad \forall\eta, u \in F.\end{aligned} \tag{3.25}$$

□

Замечание 3.2.1. Из этих преобразований видно, что если имеется q взаимно дополнительных непрерывных проекторов $p_k : G_+ \to \widetilde{(G_+)}_k$, т.е. обладающих свойствами

$$p_k p_j = p_k\delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, q}, \quad \sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \tag{3.26}$$

то аналогично (3.25) приходим к формуле

$$\langle\eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q}\langle\widetilde{\gamma}_k\eta, \widetilde{\partial}_k u\rangle_G, \quad \forall\eta, u \in F, \tag{3.27}$$

где $\widetilde{\gamma}_k$ и $\widetilde{\partial}_k$ определены формулами (3.22). □

3.2.2 Поясняющий пример

Для конкретизации общего подхода, представленного в п. 3.2.1, рассмотрим следующий пример.

Пусть липшицева граница Γ области Ω состоит из двух непересекающихся частей Γ_1 и Γ_2, причем

$$\mathrm{d}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \inf_{x\in\Gamma_1,\, y\in\Gamma_2}|x - y| > 0. \tag{3.28}$$

Тогда если $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \tag{3.29}$$

причем

$$
\begin{aligned}
&\infty > \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|\varphi_2\|^2_{L_2(\Gamma_2)}+\\
&+\Big(\int\limits_{\Gamma_{1x}} + \int\limits_{\Gamma_{2x}}\Big)\Big(\int\limits_{\Gamma_{1y}} + \int\limits_{\Gamma_{2y}}\Big)\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_x d\Gamma_y =\\
&= \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|\varphi_2\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_1(x)-\varphi_1(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{1y}+\\
&+\int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{2y}} \frac{|\varphi_1(x)-\varphi_2(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{2y}+\\
&+\int\limits_{\Gamma_{2x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_2(x)-\varphi_1(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{2x}d\Gamma_{1y}+\\
&+\int\limits_{\Gamma_{2x}}\int\limits_{\Gamma_{2y}} \frac{|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{2x}d\Gamma_{2y} \geqslant\\
&\geqslant \Big[\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_1(x)-\varphi_1(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{1y}\Big]+\\
&+\Big[\|\varphi_2\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \int\limits_{\Gamma_{2x}}\int\limits_{\Gamma_{2y}} \frac{|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{2x}d\Gamma_{2y} +\Big] =\\
&= \|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\varphi_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Введем оператор p_1, действующий для любого φ из (3.29) по закону

$$
p_1\varphi := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.31}
$$

Нетрудно видеть, что этот оператор обладает свойством $p_1^2 = p_1$, т.е. является проектором. Совокупность элементов вида (3.31) обозначим через $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) \subset H^{1/2}(\Gamma)$; тогда

$$
\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) := p_1 H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.32}
$$

Лемма 3.2.1. *Оператор*

$$
p_1 : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)
$$

является ограниченным проектором, действующим в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Вычислим согласно формуле (3.30) квадрат нормы элемента $p_1\varphi$ в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Полагая в (3.30) $\varphi_2 = 0$, получим

$$\begin{gathered}\|p_1\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_1(x)-\varphi_1(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{1y} + \\ + \int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{2y}} \frac{|\varphi_1(x)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{2y} + \int\limits_{\Gamma_{2x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_1(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{2x}d\Gamma_{1y}.\end{gathered} \tag{3.33}$$

Так как согласно (3.28)

$$|x-y| \geqslant \mathrm{d}, \text{ если } x\in\Gamma_{1x},\ y\in\Gamma_{2y} \text{ либо } x\in\Gamma_{2x},\ y\in\Gamma_{1y}, \tag{3.34}$$

то из (3.33) имеем

$$\begin{gathered}\|p_1\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_1(x)-\varphi_1(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{1y} + \\ + \frac{|\Gamma_2|}{d^{m+1}}\int\limits_{\Gamma_{1x}} |\varphi_1(x)|^2\,d\Gamma_{1x} + \frac{|\Gamma_2|}{d^{m+1}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} |\varphi_1(y)|^2\,d\Gamma_{1y} = \\ = (1+2|\Gamma_2|d^{-m-1})\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \int\limits_{\Gamma_{1x}}\int\limits_{\Gamma_{1y}} \frac{|\varphi_1(x)|^2}{|x-y|^{m+1}}\,d\Gamma_{1x}d\Gamma_{1y} \leqslant \\ \leqslant (1+2|\Gamma_2|d^{-m-1})\|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall\varphi\in H^{1/2}(\Gamma).\end{gathered} \tag{3.35}$$

Здесь последнее неравенство следует из выражения (3.30) для квадрата нормы элемента φ в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$.

Из (3.35) следует, что оператор $p_1 : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ ограничен и его норма

$$\|p_1\| \leqslant (1+2|\Gamma_2|d^{-m-1})^{1/2}. \tag{3.36}$$

Свойство $p_1^2 = p_1$ уже отмечалось выше, так что p_1 — ограниченный проектор. $\square$

Замечание 3.2.2. Оператор $p_2 := I_+ - p_1$, где I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$, также является ограниченным проектором и действует по закону

$$p_2\varphi := \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.37}$$

Отметим еще, что пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ допускает прямое разложение

$$\begin{aligned} &H^{1/2}(\Gamma) = \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)(\dot{+})\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_2), \\ &\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k) := p_k H^{1/2}(\Gamma),\ k = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Так как разложение (3.38) не является ортогональным, то норма $\|p_k\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ может быть больше $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $k = 1, 2$; этот факт подтверждается и оценкой (3.36), правая часть которой больше единицы и может стать достаточно большой при достаточно малых $d = d(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$. □

Таким образом, на приведенном примере видно, что общий подход, описанный в п. 3.2.1, является совершенно естественным для смешанных краевых задач.

3.2.3 Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач

Форма (3.27) абстрактной формулы Грина не совсем естественна, так как в классическом случае, а также в разобранном выше примере выражение

$$\langle \widetilde{\gamma}_k \eta, \widetilde{\partial}_k u \rangle_G = \int\limits_\Gamma \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \quad \eta = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \quad \text{при } k = 1.$$

Но тогда интеграл справа лучше написать в виде

$$\int\limits_{\Gamma_1} \Big(\eta|_{\Gamma_1}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{\Gamma_1}\, d\Gamma_1,$$

а затем расширить его до выражения $\langle \gamma_1 \eta, \partial_1 u\rangle_{L_2(\Gamma_1)}$, которое является функционалом относительно $\eta \in H^1(\Omega)$ (или какого-либо множества из $H^1(\Omega)$). Такие построения сейчас и будут проделаны.

Во многих задачах математической физики введенные выше в п. 3.2.1 проекторы p_k можно представить в виде

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1, q}, \tag{3.39}$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ — абстрактный *оператор сужения* на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \to \widetilde{(G_+)}_k$ — *оператор продолжения нулем* из $(G_+)_k$ на $\widetilde{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, предполагается, что

$$\rho_k \omega_k = I_k \quad (\text{в } (G_+)_k), \quad k = \overline{1, q}, \tag{3.40}$$

т.е. ω_k является правым обратным для ρ_k, а также тот факт, что ρ_k и ω_k — ограниченные операторы.

Из (3.39), (3.40) и сделанных предположений, очевидно, следует, что $p_k^2 = p_k$ и этот оператор ограничен, т.е. p_k является ограниченным проектором.

Поясним эти дополнительные построения на примере, разобранном в п. 3.2.2.
Введем оператор ρ_k по закону

$$\rho_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \tag{3.41}$$

Тогда $\rho_1 \varphi = \varphi_1 = \varphi|_{\Gamma_1}$, $\rho_2 \varphi = \varphi_2 = \varphi|_{\Gamma_2}$.
Операторы ρ_k, $k = 1, 2$, — это операторы сужения функции, заданной на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, до функции $\varphi_k := \varphi|_{\Gamma_k}$, заданной на Γ_k, $k = 1, 2$.

Введем еще оператор ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_1 \varphi_1 = \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \qquad \omega_2 \varphi_2 := \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.42}$$

Из (3.41), (3.42) следует, что $\omega_k \rho_k = p_k$, $k = 1, 2$, и, кроме того, выполнено свойство (3.40).

Отметим, что из (3.33) следует неравенство

$$\|p_1 \varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\omega_1 \varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geqslant \|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)}, \quad \forall \varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1), \tag{3.43}$$

откуда приходим к выводу, что $\|\omega_1\| \geqslant 1$; аналогичными рассуждениями получаем из (3.35), что $\|\omega_1\| \leqslant (1 + 2|\Gamma_2| d^{-m-1})^{1/2}$. Такие же оценки с заменой $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$ справедливы и для оператора ω_2.

Возвращаясь к общим рассуждениям этого пункта, сформулируем в виде теоремы основной абстрактный результат.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены сформулированные выше условия* (3.39), (3.40) *и сделанные при этом предположения. Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{3.44}$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u, \tag{3.45}$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

Доказательство. Преобразуем слагаемое из суммы в правой части (3.27) с учетом (3.39), (3.40). Имеем

$$\langle \widetilde{\gamma}_k \eta, \widetilde{\partial}_k u \rangle_G = \langle p_k \gamma\eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \langle p_k^2 \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \\ = \langle p_k \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \langle \omega_k \rho_k \gamma\eta, \partial u \rangle_G.$$

Так как по предположению ω_k — непрерывный оператор, то полученное выражение является линейным ограниченным функционалом относительно элементов вида $\rho_k \gamma\eta \in (G_+)_k$:

$$|\langle \omega_k \rho_k \gamma\eta, \partial u \rangle_G| \leqslant \|\omega_k\| \cdot \|\partial u\|_{(G_+)^*} \cdot \|\rho_k \gamma\eta\|_{(G_+)_k}.$$

Поэтому этот функционал можно представить в скалярном произведении G_k, $G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k$, $(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*$, $k = \overline{1,q}$, в следующем виде

$$\langle \omega_k \rho_k \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \langle \rho_k \gamma\eta, \omega_k^* \partial u \rangle_{G_k} =: \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \ \forall \eta, u \in F. \tag{3.46}$$

Отсюда и следует формула (3.44) и обозначения (3.45). □

Замечание 3.2.3. Обозначения (3.45) оправданы тем, что в гладком случае (для функций η и u, а также для $\partial\Omega$) в соответствующей формуле Грина (см. (3.12) — (3.15)) возникают операторы следа $\gamma_k \eta = \eta|_{\Gamma_k}$ и $\partial_k u = (\partial u / \partial n)_{\Gamma_k}$, $k = \overline{1,q}$. □

3.3 Классический пример

Покажем, что общие построения, проведенные в параграфе 3.2 и приведшие к формуле Грина (3.44), дают возможность получить аналогичную формулу Грина для смешанных краевых задач в классическом случае тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, а также оператора следа $\gamma u := u|_\Gamma$, $u \in H^1(\Omega)$, в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

3.3.1 Предварительные построения

Переходя к выводу соответствующей формулы Грина, разобьем поверхность $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ на односвязные открытые части Γ_k, $k = \overline{1,q}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$ (для приложений достаточно, чтобы $\partial\Gamma_k$ были кусочно-гладкими с ненулевыми внутренними и внешними углами). Имеем

$$\Gamma = \Big(\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{k=1}^{q} \partial\Gamma_k\Big),\ mes\,\Gamma_k > 0,\ mes\,\partial\Gamma_k = 0,\ k = \overline{1,q}. \quad (3.47)$$

Введем в рассмотрение оператор ρ_k — оператор сужения с Γ на Γ_k:

$$\rho_k\varphi := \varphi|_{\Gamma_k}, \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (3.48)$$

Этот оператор сопоставляет каждой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ ее часть φ_k, заданную на $\Gamma_k \subset \Gamma$.

Лемма 3.3.1. *Оператор сужения $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$, $k = \overline{1,q}$, ограничен и его норма*

$$\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1. \quad (3.49)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует непосредственно из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. формулу (1.158) из параграфа 1.4), т.е.

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_x}\int\limits_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\, d\Gamma_x\, d\Gamma_y. \quad (3.50)$$

Действительно, так как для неотрицательной подинтегральной функции

$$\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma_k} + \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_k} \geqslant \int\limits_{\Gamma_k},$$

то

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \Gamma_k \subset \Gamma, \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (3.51)$$

Отсюда и следует утверждение леммы и свойство (3.49). □

Введем теперь подпространства

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_k\}, \quad k = \overline{1,q}. \quad (3.52)$$

Заметим, что

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k} = \ker\gamma_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = \ker((I-\rho_k)\cdot\gamma), \tag{3.53}$$

и так как по теореме Гальярдо $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ и по лемме 3.3.1 $(I - \rho_k) : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma\setminus\Gamma_k)$ — ограниченные операторы, то $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ — действительно подпространство $H^1(\Omega)$ при любом $k=\overline{1,q}$. Поскольку

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \supset H^1_0(\Omega) = \ker\gamma = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma)\}, \tag{3.54}$$

и $H^1_0(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ при любом $k = \overline{1,q}$.

При изучении смешанных задач математической физики для искомых функций $u(x)$ из $H^1(\Omega)$ естественно считать, что

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k=\overline{1,q}. \tag{3.55}$$

Совокупность таких наборов

$$\Big\{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1}, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_q}\Big\} \tag{3.56}$$

производных по нормали на частях Γ_k границы Γ, очевидно, — более широкое множество, чем совокупность производных по нормали $\Big\{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}\Big\}$, $u \in H^1(\Omega)$. В самом деле, такой набор (3.56) обобщенных функций конечного порядка, определенный на Γ, может не представлять собой обобщенную функцию $(\partial u/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, составленную из этого набора. Поэтому совокупность основных функций, заданных на Γ и отвечающих наборам (3.56), может быть у́же, чем $H^{1/2}(\Gamma)$. Отсюда следует, что для смешанных краевых задач при условиях (3.55) соответствующая формула Грина вида (3.44) — (3.45) будет справедлива не для любых элементов из $H^1(\Omega)$ (см. теорему 4.2.3), а для некоторого подмножества из этого пространства.

Скажем несколько слов о том, как определяется пространство функционалов $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$, где Γ_k — открытая область в Γ с $\partial\Gamma_k$ — также липшицевой. Напомним, что согласно построениям из главы 1 (см. параграф 1.4), имеет место оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))^*, \tag{3.57}$$

т.е. $H^{-1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ — взаимно сопряженные (дуальные) пространства по форме $L_2(\Gamma)$. Поэтому любой линейный ограниченный функционал $l_\psi(\varphi)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$ задается формулой

$$l_\psi(\varphi) = \langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)},\ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma),\ \psi \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*, \quad (3.58)$$

причем

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}| \leqslant \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (3.59)$$

Что касается пространства $H^{-1/2}(\Gamma_k)$, $\Gamma_k \subset \Gamma$, то оно определяется следующим образом (см. [Агранович, 2008], формула (5), и конец п. 4). Пусть элемент $\widehat{\psi} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и обладает свойством $\widehat{\psi}|_{\Gamma_k} = \psi$. Тогда в качестве $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ далее (см. также (3.55)) будем понимать пространство элементов с нормой

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)} := \inf_{\widehat{\psi}|_{\Gamma_k}=\psi} \|\widehat{\psi}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (3.60)$$

Введем еще одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ до элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$. Оказывается, при сформулированных выше условиях такое продолжение возможно, причем многими способами. Однако один из них является универсальным, и его построение приведено в работе В.С. Рычкова [...] в случае, когда продолжаются функции $u(x) \in H^{1/2}(\Omega)$ на все пространство $H^{1/2}(\mathbb{R}^m)$, где Ω — область с липшицевой границей $\partial\Omega = \Gamma$. Как указано в работе М.С. Аграновича [Агранович, 2008], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций $\varphi(x) \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ до функций $\widehat{\varphi}(x) \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\widehat{\varphi}(x)|_{\Gamma_k} = \varphi(x)$. Сформулируем итоговое утверждение в виде следующей леммы.

Лемма 3.3.2. (В.С. Рычков [ ], М.С. Агранович [ ]). *Пусть липшицева граница* $\Gamma = \partial\Omega$ *области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *разбита на части согласно соотношениям* (3.47)*, причем* $\partial\Gamma_k$ *также липшицевы. Тогда существует универсальный линейный оператор* $\mathcal{E}$ *продолжения функций из* $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ *с* Γ_k *на всю* Γ *функциями из* $H^{-1/2}(\Gamma)$*. При этом*

$$\|\mathcal{E}\psi\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant\ c\|\psi\|_{\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_k)},\ \forall\psi \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (3.61)$$

□

Замечание 3.3.1. Отметим, что оператор $\mathcal{E}$, введенный В.С. Рычковым в [ ] и использованный, в частности, М.С. Аграновичем в

[ ], обладает следующим универсальным свойством: он ограниченным образом действует из пространства С.Л. Соболева $H_p^s(\Omega)$ в пространство $H_p^s(\mathbb{R}^m)$, а также из $H_p^s(\Gamma_k)$ в $H_p^s(\Gamma)$ и не зависит от индексов s и p, $|s| \leqslant 1$, $1 < p < \infty$, этих пространств, расматриваемых как элементов соответствующих шкал пространств. $\square$

Опираясь на приведенные выше факты, рассмотрим полуторалинейную форму, т.е. линейную по первому аргументу и антилинейную по второму, следующего вида:

$$[\varphi, \psi]_\Gamma := \langle \varphi, \mathcal{E}\psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \forall \varphi \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma), \ \forall \psi \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.62}$$

Здесь $\mathcal{E}\psi \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (сопряжение по форме $L_2(\Gamma)$). Для формы (3.62) в силу (3.61) справедлива оценка

$$|\,[\varphi, \psi]_\Gamma\,| \leqslant \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot c\,\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}. \tag{3.63}$$

Пусть теперь $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$. Тогда $\gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ (по теореме Гальярдо) и $\gamma\eta = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_k$. Рассмотрим последовательность $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ элементов из $L_2(\Gamma_k)$, сходящуюся к элементу $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ по норме $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Такая последовательность существует, поскольку по построению $L_2(\Gamma_k)$ плотно в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Для выбранного выше φ в силу определения (3.62) и с учетом того, что $\mathcal{E}$: $H^{-1/2}(\Gamma_k) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ и $\mathcal{E}$: $L_2(\Gamma_k) \to L_2(\Gamma)$ — непрерывные ограниченные операторы (см. замечание 3.3.1 при $s = 0$), имеем:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathcal{E}\psi \rangle_{L_2(\Gamma)} &= \lim_{j\to\infty} \langle \varphi, \mathcal{E}\psi_j \rangle_{L_2(\Gamma)} = \lim_{j\to\infty} (\varphi, \mathcal{E}\psi_j)_{L_2(\Gamma)} = \\ &= \lim_{j\to\infty} (\rho_k\varphi, \psi_j)_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \rho_k\varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma_k)}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Здесь $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — оператор сужения на Γ_k из леммы 3.3.1, а справа стоит расширение скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$ на элементы $\rho_k\varphi = \rho_k\gamma\eta =: \gamma_k\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, и $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Иными словами, возникает функционал $\langle \rho_k\varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma_k)}$ по форме $L_2(\Gamma_k)$.

Отметим, что при выбранном $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, правая часть в (3.64) не зависит от вида продолжения элемента $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ до элемента $\widehat{\psi}=\mathcal{E}\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, так как значения $(\rho_k\varphi, \psi_j)_{L_2(\Gamma_k)}$ определяются лишь элементами ψ_j, заданными на Γ_k, а потому и предельное выражение $\langle \rho_k\varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma_k)}$ зависит лишь от ψ, а не от $\widehat{\psi}$.

3.3.2 Вспомогательная смешанная краевая задача

Рассмотрим, опираясь на построения п. 3.3.1, вспомогательную смешанную краевую задачу вида

$$u - \Delta u = 0 \ \text{(в } \Omega), \ u = 0 \ \text{(на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \ \text{(на } \Gamma_k). \qquad (3.65)$$

Определение 3.3.1. *Назовем обобщенным решением задачи* (3.65) *такую функцию* $u \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, *для которой при любой* $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ *выполнено тождество*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = (\gamma_k \eta, \psi_k)_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \gamma_k := \rho_k \gamma, \ \ \psi_k \in L_2(\Gamma_k). \qquad (3.66)$$

□

Определение 3.3.2. *Назовем слабым решением задачи* (3.65) *такую функцию* $u \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, *для которой при любой* $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ *выполнено тождество*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k \eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k) \supset L_2(\Gamma_k), \qquad (3.67)$$

где справа стоит значение функционала $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ *на элементе* $\gamma_k \eta = \rho \gamma_k \eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$. □

Нетрудно видеть, что классическое и обобщенное решения задачи (3.65) являются слабыми ее решениями в смысле определения 3.3.2.

Лемма 3.3.3. *При любой* $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ *существует единственное слабое решение задачи* (3.65), *причем*

$$u \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega) =: M_k(\Omega). \qquad (3.68)$$

Доказательство. Оно традиционно и основано на том, что при любом $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ правая часть в (3.67) является линейным ограниченным функционалом в $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$.

В самом деле, с учетом соотношений (3.64), (3.62) и (3.63), а также теоремы Гальярдо (см. неравенство (1.159) главы 1) имеем

$$\begin{aligned} &|\langle \gamma_k \eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}| = |\langle \rho_k \gamma \eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}| = |\langle \gamma \eta, \mathcal{E} \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma)}| \leqslant \\ &\quad \leqslant \|\gamma \eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \cdot c \cdot \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)} \leqslant (c\, c_1 \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}) \|\eta\|_{H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)}. \end{aligned} \qquad (3.69)$$

Поэтому существует единственный элемент $u =: T_k \psi_k \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, такой, что справедливо тождество (3.67).

Далее, если в этом тождестве положить $\eta \in H_0^1(\Omega) \subset H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, то имеем $\gamma\eta = 0$ и потому $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = 0$. Тогда, в силу ортогонального разложения пространства $H^1(\Omega)$ на подпространства $H_0^1(\Omega)$ и $H_h^1(\Omega)$, получаем, что $u \in H_h^1(\Omega)$. Отсюда и следует свойство (3.68). □

Из леммы 3.3.3 получаем, что оператор T_k, сопоставляющий элементу $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ решение $u = T_k\psi_k$ задачи (3.65), ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ в $M_k(\Omega)$. Полагая в (3.67) $\eta \in M_k(\Omega)$, будем иметь тождество

$$(\eta, T_k\psi_k)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k^0\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \forall\eta \in M_k(\Omega),\ \forall\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{3.70}$$

где введено обозначение

$$\gamma_k^0 := \gamma_k|_{M_k(\Omega)} = (\rho_k\gamma)|_{M_k(\Omega)}. \tag{3.71}$$

Очевидно, по построению элементы вида $\gamma_k^0 u$, $u \in M_k(\Omega)$, обладают следующими свойствами: во-первых, они принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_k)$ (по теореме Гальярдо и лемме 3.3.1), а во-вторых, продолженные нулем с Γ_k на всю Γ, они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$. Кроме того, очевидно, что между элементами u из $M_k(\Omega)$ и совокупностью элементов вида $\gamma_k^0 u$ имеется взаимно однозначное соответствие. В самом деле, если $u \in M_k(\Omega)$ и $\gamma_k^0 u = 0$, то $\gamma u = 0$ на $\partial\Omega$ и потому $u \equiv 0$; с другой стороны, если $u \equiv 0$, то $\gamma_k^0 u = 0$.

Обозначим через $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ совокупность элементов вида

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \{\gamma_k^0 u : u \in M_k(\Omega)\} \subset H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.72}$$

Лемма 3.3.4. *Множество $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$.*

Доказательство. Пусть найдется элемент $\varphi_0 \in L_2(\Gamma_k)$, ортогональный всем элементам из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е.

$$(\gamma_k^0\eta, \varphi_0)_{L_2(\Gamma_k)} = 0,\ \ \forall\eta \in M_k(\Omega). \tag{3.73}$$

Тогда это свойство, в силу определения $H_0^1(\Omega)$ и $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, имеет место и для любого $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, т.е.

$$(\gamma_k^0\eta, \varphi_0)_{L_2(\Gamma_k)} = (\gamma_k\eta, \varphi_0)_{L_2(\Gamma_k)} = 0,\ \ \forall\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega). \tag{3.74}$$

Поэтому из определения (3.66) обобщенного решения задачи (3.65) имеем

$$(\eta, T_k\varphi_0)_{H^1(\Omega)} = 0,\ \ \forall\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega). \tag{3.75}$$

Так как $T_k\varphi_0 \in M_k \subset H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, то отсюда следует, что $T_k\varphi_0 = 0$, а потому и $\varphi_0 = 0$. □

Введем в рассмотрение оператор

$$C_k := \gamma_k^0 T_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.76}$$

По построению между $\mathcal{D}(C_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ и областью его значений $\mathcal{R}(C_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Учитывая этот факт, а также то, что между $M_k(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ также имеет место изоморфизм, введем на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}, \ \ \eta, u \in M_k(\Omega), \ \ \gamma_k^0 \eta = \alpha, \ \ \gamma_k^0 u = \beta. \tag{3.77}$$

Тогда из (3.70) следует, что при $\eta = T_k \widetilde{\psi}_k$, $\widetilde{\psi}_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, выполнено тождество

$$(T_k \widetilde{\psi}_k, T_k \psi_k)_{H^1(\Omega)} = \langle C_k \widetilde{\psi}_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \widetilde{\psi}_k, \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.78}$$

С учетом определения (3.77) это соотношение можно переписать в виде

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \alpha, C_k^{-1} \beta \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \alpha, \beta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{3.79}$$

$$\begin{gathered} \eta = T_k \widetilde{\psi}_k, \ \ \gamma_k^0 \eta = \alpha, \ \ u = T_k \psi_k, \\ \gamma_k^0 T_k \psi_k = C_k \psi_k = \beta, \ \ \widetilde{\psi}_k, \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \end{gathered} \tag{3.80}$$

Лемма 3.3.5. *Оператор* $C_k^{-1} = (\gamma_k^0 T_k)^{-1}$ *с* $\mathcal{D}(C_k^{-1}) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ *и* $\mathcal{R}(C_k^{-1}) = \mathcal{D}(C_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ *является оператором гильбертовой пары* $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$.

Доказательство. Напомним, что $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$ (лемма 3.3.4) и по построению является полным пространством по норме, индуцированной скалярным произведением (3.77). Далее, так как $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \subset H^{1/2}(\Gamma_k)$, то в силу леммы 3.3.1, а также в силу теоремы Гальярдо и определения (3.77) имеем

$$\begin{gathered} \|\psi\|_{L_2(\Gamma_k)} \leqslant \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant \|\widehat{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|u\|_{M_k(\Omega)} = c_1 \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \\ \varphi = \gamma_k^0 u, \ \ u \in M_k(\Omega), \ \ \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \end{gathered} \tag{3.81}$$

где $\widehat{\varphi}$ — продолженная нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$ функция $\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, заданная после продолжения на всей Γ.

Значит, $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $L_2(\Gamma_k)$ образуют гильбертову пару пространств $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$. По определению (см. пп. 1.2.1 — 1.2.4), для оператора A этой гильбертовой пары должно выполняться тождество

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \langle \alpha, A\beta \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \alpha, \beta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.82}$$

Сравнивая это тождество с (3.79), приходим к выводу, что

$$A = C_k^{-1} : \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{-1/2}(\Gamma_k) \tag{3.83}$$

является оператором гильбертовой пары $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$. □

В качестве следствия из этой леммы приходим к такому выводу: тройка пространств

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \hookrightarrow L_2(\Gamma_k) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k) \tag{3.84}$$

образуют оснащение пространства $L_2(\Gamma_k)$.

Отметим еще одно важное обстоятельство: введенная формулой (3.77) норма в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ "сильнее" стандартной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_k)$.

Действительно, этот факт следует из (3.81):

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant c_1 \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.85}$$

3.3.3 Об операторе продолжения нулем, регулярных следах и формуле Грина для смешанных краевых задач для классического примера

Опираясь на проведенные построения, введем на элементах из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ оператор ω_k продолжения нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$, действующий по закону

$$\omega_k \varphi_k := \begin{cases} \varphi_k & \text{на } \Gamma_k, \\ 0 & \text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k, \end{cases} \qquad \forall \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.86}$$

Лемма 3.3.6. *Оператор продолжения нулем с Γ_k на Γ, рассматриваемый на $\mathcal{D}(\omega_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, является непрерывным оператором из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$; при этом*

$$\|\omega_k \varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|\varphi_k\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \quad \forall \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{3.87}$$

где c_1 — константа из неравенства (1.159) *п. 1.4.1 (теорема Гальярдо).*

Доказательство. Это утверждение уже установлено при доказательстве леммы 3.3.6. В самом деле, в силу определения (3.86) в неравенстве (3.81) имеем $\widehat{\varphi} = \omega_k \varphi_k$, откуда и следует (3.87). □

Замечание 3.3.2. Как известно (см., например, [Лионс, Мадженес], с. 78, а также [Волевич, Гинд.], с. 116 — 117), даже в случае гладкой Γ оператор продолжения нулем с некоторой части Γ_k (с гладкой $\partial\Gamma_k$) на всю Γ не является непрерывным из $H^{1/2}(\Gamma_k)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако в данной задаче на решениях вспомогательной задачи (3.65), т.е. на элементах $\gamma_k^0 u$, $u \in M_k(\Omega)$, этот оператор оказывается непрерывным. $\square$

Введем теперь следующие классы функций:

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^m M_k(\Omega)\}, \\ &M_k(\Omega) = H_h^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega), \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)\}, \quad k = \overline{1,q}. \tag{3.89}$$

Определение 3.3.3. *Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$* ***регулярным*** *по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на части Γ_k, $k = \overline{1,q}$ (см. (3.47)), если для любого $k = \overline{1,q}$ элемент $\gamma_k u = \rho_k \gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. он* ***продолжим нулем*** *на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.* $\square$

Согласно проведенным выше построениям и определениям (3.88), (3.89) элементы из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след: для любого $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} &u = u_0 + u_1 + \ldots + u_q, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_k \in M_k(\Omega), \quad k = \overline{1,q}, \\ &\gamma u_0 = 0,\ \gamma_k u_k = \gamma_k^0 u_k =: \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \gamma_k u_j = 0\ (k \neq j),\ j,k = \overline{1,q}. \end{aligned} \tag{3.90}$$

При этом элементы $\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь тройку пространств и оператор следа

$$E = L_2(\Omega), \quad F = \widetilde{H}^1(\Omega), \quad G = L_2(\Gamma), \quad \gamma u := u|_\Gamma, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{3.91}$$

Для них выполнены следующие свойства.

1°. $\widetilde{H}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ ($\widetilde{H}^1(\Omega) \supset H_0^1(\Omega)$) и

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)} = c\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

2°. Оператор $\gamma : \widetilde{H}^1(\Omega) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ ограничен, $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$ и (по теореме С.Л. Соболева о следах)

$$\|\gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \widetilde{c}\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

3°. Для каждого $k=\overline{1,q}$ оператор $p_k=\omega_k\rho_k$ в силу лемм 3.3.1 и 3.3.6 является ограниченным проектором в пространстве $G_+=\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, $p_k^2=p_k$, и $\rho_k\omega_k$ по построению является единичным оператором в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$.

Поэтому по теореме 3.2.2 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.3.1. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\widetilde{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma=\partial\Omega$, и оператора следа $\gamma:\widetilde{H}^1(\Omega)\to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta:=\eta|_\Gamma$, $\eta\in\widetilde{H}^1(\Omega)$, в области $\Omega\in\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$\langle\eta,u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}-\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\eta,u\in\widetilde{H}^1(\Omega),\tag{3.92}$$

$$\begin{gathered}\Gamma=\Big(\bigcup_{k=1}^{q}\Gamma_k\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=1}^{q}\partial\Gamma_k\Big),\ mes\,(\Gamma_k\cap\Gamma_j)=0\,(k\neq j),\ \Delta u\in(H^1(\Omega))^*,\\ \gamma_k\eta:=\eta|_{\Gamma_k}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u:=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ \ k=\overline{1,q}.\end{gathered}\tag{3.93}$$

□

Замечание 3.3.3. Формулу Грина (3.92) можно получить и непосредственно, опираясь на построения, изложенные в [кр.кн.], с. 46 — 47, а также в [Кр.,Копа., Донц], и соотношения (3.88) — (3.90).

□

Глава 4

Спектральные проблемы и абстрактная формула Грина

В этой главе рассматриваются спектральные задачи, возникающие в различных приложениях. Их исследование можно проводить на основе изучения спектральных проблем в гильбертовом пространстве как для операторов, естественно связанных с той или иной задачей, так и соответствующих операторных пучков. При этом существенную роль играют преобразования исходной задачи к равносильной форме, и эти преобразования основаны на использовании абстрактной формулы Грина, а также аналогичной формулы для смешанных краевых задач.

4.1 Классические спектральные задачи математической физики

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Рассмотрим типичные классические спектральные задачи математической физики, возникающие в приложениях.

4.1.1 Задачи Дирихле, Неймана, Ньютона, Зарембы

Все эти задачи сформулируем в форме, позволяющей использование тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой, $L_2(\Gamma)$, а также обычного оператора следа γ.

Напомним (см. п. 1.4.5), что в этом случае имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned}&\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \left\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\right\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega),\\ &u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} \in (H^{1/2}(\Gamma))^*.\end{aligned} \tag{4.1}$$

1°. *Задача Дирихле*:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma := \partial\Omega). \tag{4.2}$$

Здесь $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Упражнение 4.1.1. Опираясь на формулу (4.1), убедиться, что собственные значения λ задачи (4.2) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в $H_0^1(\Omega)$. □

2°. *Задача Неймана*:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.3}$$

Здесь искомое решение $u = u(x)$, $x \in \Omega$, является элементом $H^1(\Omega)$.

Упражнение 4.1.2. Доказать, что собственные значения λ задачи (4.3) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $H^1(\Omega)$, так и в $L_2(\Omega)$.

Доказать, опираясь на максиминимальные принципы для собственных значений $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ задач (4.2) и (4.3) соответственно, что имеют место неравенства

$$\lambda_k^0 \geqslant \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.4}$$

□

3°. *Задача Ньютона*:

Пусть $\sigma = \sigma(x) \geqslant 0,\ x \in \Gamma,$ — непрерывная функция, заданная на Γ. Под спектральной задачей Ньютона понимают следующую проблему:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.5}$$

Очевидно, что при $\sigma = \sigma(x) \equiv 0$ задача Ньютона переходит в задачу Неймана.

Упражнение 4.1.3. Доказать, что собственные значения λ задачи (4.5) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в пространстве $H^1_\sigma(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} := \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega + \int\limits_\Gamma \sigma |u|^2 d\Gamma, \tag{4.6}$$

эквивалентной стандартной норме $H^1(\Omega)$. Доказать, что для собственных значений λ_k и $\lambda_{k,\sigma}$ задач (4.3) и (4.5) имеют место неравенства

$$\lambda_{k,\sigma} \geqslant \lambda_k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{4.7}$$

□

3°. *Задача Зарембы*:

Так иногда называют спектральную задачу для уравнения

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \tag{4.8}$$

когда на одной части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma$ задано однородное условие Дирихле, а на другой части Γ_2 — условие Ньютона-Неймана, причем $\partial\Gamma_1$ и $\partial\Gamma_2$ также липшицевы:

$$u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2 := \Gamma \backslash \Gamma_1). \tag{4.9}$$

Упражнение 4.1.4. Доказать, что собственные значения λ задачи (4.8) — (4.9) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в подпространстве $H^1_{0,\Gamma_1,\sigma}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1,\sigma}} := \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma |u|^2 d\Gamma_2, \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.10}$$

эквивалентной стандартной норме $H^1(\Omega)$. Доказать, что для собственных значений $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k^{0,\Gamma_1,0}\}_{k=1}^{\infty}$ задач (4.2) и (4.8) — (4.9) при $\sigma = 0$, имеют место неравенства

$$\lambda_k^0 \geqslant \lambda_k^{0,\Gamma_1,0}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.11}$$

□

4.1.2 Спектральные задачи Стеклова

Так называют класс задач, когда спектральный параметр λ входит не в уравнение, а в граничное условие.

1°. *Задача Стеклова со спектральным параметром на всей границе.*

Это задача вида

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma := \partial\Omega). \tag{4.12}$$

Упражнение 4.1.5. Доказать, что собственные значения λ этой задачи положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Gamma)$, так и в пространстве $H_\sigma^1(\Omega)$ с квадратом нормы (4.6). □

2°. *Задача Стеклова со спектральным параметром на части границы.*

Пусть граница $\Gamma := \partial\Omega$ области Ω разбита на три непересекающиеся части Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с их липшицевыми границами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$, $\partial\Gamma_3$. Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{4.14}$$

Здесь спектральный параметр λ входит лишь в граничное условие на Γ_1, а $\sigma(x)$ по-прежнему неотрицательная функция, заданная на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Отметим, что в постановке задачи возможны варианты, когда $|\Gamma_2| = 0$ или $|\Gamma_3| = 0$.

Упражнение 4.1.6. Доказать, что собственные значения λ задачи (4.13) — (4.14) положительны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Gamma_1)$, так и в подпространстве $H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}} := \int\limits_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \sigma |u|^2 dS, \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{4.15}$$

Указание. Воспользоваться здесь, как и в упражнении 4.1.4, вместо (4.1) формулой Грина для смешанных краевых задач:

$$\begin{gathered} \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{2} \left\langle \gamma_k \eta, \frac{\partial u}{\partial n_k} \right\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \\ \eta, u \in \widetilde{H}^1_{0,\Gamma_3}(\Omega) \subset H^1_{0,\Gamma_3}(\Omega), \\ \gamma_k \eta := \eta|_{\Gamma_k}, \ \ k = 1, 2, \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \end{gathered} \tag{4.16}$$

□

4.1.3 Спектральные задачи Стефана

Задачами Стефана называют задачи математической физики, которые возникают при изучении процесса таяния льда либо процесса тигельной плавки металла. Соответствующие спектральные проблемы содержат спектральный параметр в уравнении и краевом условии.

1°. *Задача Стефана со спектральным параметром на всей границе.* Это задача вида

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma := \partial\Omega). \tag{4.17}$$

Упражнение 4.1.7. Проверить, что собственные значения λ задачи (4.17) положительны и находятся по решению $u = u(x)$ по формуле

$$\lambda = \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} / (\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}), \quad \gamma u := u|_\Gamma. \tag{4.18}$$

Убедиться, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в пространстве $H^1_\sigma(\Omega)$ с нормой (4.6), так и в пространстве L_2, в котором квадрат нормы равен знаменателю в (4.18). □

2°. *Задача Стефана со спектральным параметром на части границы.*

Она от задачи (4.13) — (4.14) отличается лишь тем, что спектральный параметр присутствует и в уравнении:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = \lambda u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{4.20}$$

Упражнение 4.1.8. Доказать, что собственные значения λ задачи (4.19) — (4.20) положительны и находятся по решению $u = u(x)$ по формуле

$$\begin{aligned} &\lambda = \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}} / (\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}), \\ &u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Убедиться, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в пространстве $H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}$ с квадратом нормы (4.15), так и в пространстве L_2 с квадратом нормы в виде знаменателя из (4.21). □

4.1.4 Спектральные задачи Аграновича

Так будем называть спектральные несамосопряженные задачи, возникающие в теории дифракции и детально изученные М.С. Аграновичем (см. [ ]). Эти задачи содержат два комплексных параметра, один из которых фиксирован и считается заданным, а другой — спектральным.

Для тройки пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, обычного оператора следа γ имеем следующие задачи:

1°. *Задача Аграновича с фиксированным параметром на всей границе.*

Пусть $\mu \in \mathbb{C}$ — фиксированный параметр, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, а область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma := \partial\Omega$. Тогда внутренняя спектральная задача дифракции формулируется следующим образом:

$$u - \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = \mu u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.22}$$

Отметим, что если роли параметров меняются местами, т.е. μ является спектральным, а λ — фиксированным, то соответствующую проблему (4.22) в общем эллиптическом случае (а не для оператора $u - \Delta u$, как в уравнении (4.22)) исследовала В.И. Горбачук [ ].

Упражнение 4.1.9. Проверить, что собственные значения λ задачи (4.22) находятся по ее решению $u = u(x)$ по формуле

$$\lambda = (\mu\|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)} - \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)})/\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{4.23}$$

откуда следует, что знаки $\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Im}\mu$ совпадают, в частности,

$$\mu \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

2°. *Задача Аграновича с фиксированным параметром на части границы.*

Эта задача по аналогии с (4.19) — (4.20) имеет следующую формулировку:

$$u - \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \mu u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{4.25}$$

Упражнение 4.1.10. Проверить, что собственные значения λ задачи (4.24) — (4.25) находятся по ее решению $u = u(x)$ по формуле

$$\lambda = (\mu\|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)} - \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}})/\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}, \tag{4.26}$$

а норма в $H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}$ определена формулой (4.15). Отсюда также следует, что знаки $\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Im}\mu$ совпадают. $\square$

4.1.5 Спектральная задача С. Крейна

Такие задачи появляются при изучении проблемы малых нормальных колебаний вязкой тяжелой жидкости в частично заполненном сосуде. Они подробно изучались С.Г. Крейном, его учениками и соавторами. Здесь приведем лишь "скалярный" вариант этой задачи применительно к тройке пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ.

1°. *Задача С. Крейна со спектральным параметром в граничном условии на всей границе.*

В этой задаче спектральный параметр λ присутствует как в уравнении, так и в граничном условии:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\Big) = u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.27}$$

Упражнение 4.1.11. Доказать, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.27), а ненулевые собственные значения λ по решению $u = u(x)$ находятся из уравнения

$$\lambda\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} + \lambda^{-1}\|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)} = 0, \quad \gamma u := u|_\Gamma, \tag{4.28}$$

где норма в $H^1_\sigma(\Omega)$ определена формулой (4.6). Проверить, что

$$Re\lambda = \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)}/(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + |\lambda|^{-2}\|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)}) > 0, \tag{4.29}$$

причем все собственные значения задачи (4.27) расположены в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. □

2°. *Задача С. Крейна со спектральным параметром на части границы.*

Будем считать, как и в задачах (4.13) — (4.14), (4.19) — (4.20), что граница $\Gamma := \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на три части Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с их липшицевыми границами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$. Тогда по аналогии с этими задачами формулируемая задача С. Крейна выглядит следующим образом:

$$u - \Delta u = \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\Big) = u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{4.31}$$

Здесь спектральный параметр λ входит в уравнение и лишь в первое краевое условие, т.е. на Γ_1.

Упражнение 4.1.12. Доказать, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.30) — (4.31), а для ненулевых собственных значений справедливо соотношение

$$Re\lambda = \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}}/(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + |\lambda|^{-2}\|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}, \tag{4.32}$$

откуда следует, что все собственные значения λ расположены в правой полуплоскости. Убедиться также, что они расположены симметрично относительно вещественной оси. □

4.1.6 Спектральная задача Чуешова

Такая задача появляется при исследовании движений динамических систем с поверхностной диссипацией энергии. Соответствующие нелинейные проблемы по данному направлению исследовали И.Д. Чуешов и его соавторы [ ]. Здесь будут сформулированы линеаризованные спектральные проблемы в случае тех же пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ.

1°. *Задача Чуешова с динамическим условием на всей границе.*

Если на границе $\Gamma := \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ происходит диссипация энергии динамической системы, то в линеаризованной начально-краевой задаче в граничном условии на Γ появляется слагаемое вида $\alpha\,\partial u(t,x)/\partial t$, где $\alpha > 0$ — параметр, характеризующий интенсивность поверхностной диссипации энергии. В соответствующей спектральной проблеме, когда решения $u(t,x)$ разыскиваются в виде

$$u(t,x) = u(x)\exp(-\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

для нахождения амплитудных функций $u = u(x)$ возникает следующая задача

$$u - \Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \alpha\lambda u \quad (\text{на } \Gamma). \tag{4.33}$$

Таким образом, здесь спектральный параметр λ входит в уравнении во второй степени, а в граничном условии — в первой.

Упражнение 4.1.13. Убедиться, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.33), а ненулевые собственные значения находятся по решениям $u = u(x)$ из квадратного уравнения

$$\lambda^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \lambda\alpha\|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|u\|^2_{H^1_\sigma(\Omega)} = 0, \;\; \alpha > 0, \gamma u := u|_\Gamma. \tag{4.34}$$

Проверить, что все собственные значения λ находятся в правой комплексной полуплоскости и расположены симметрично относительно вещественной оси. □

2°. *Задача Чуешова с динамическим условием на части границы.*

Снова разбивая границу $\Gamma := \partial\Omega$ на три части, как это уже было сделано в проблемах (4.30) — (4.31) и других, приходим к следующей спектральной задаче:

$$u - \Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \alpha\lambda u \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3). \tag{4.36}$$

Упражнение 4.1.14. Проверить, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.35) — (4.36), а ненулевые собственные значения λ находятся по решению $u = u(x)$ из квадратного уравнения

$$\lambda^2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \lambda\alpha\|\gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_3,\sigma}(\Omega)} = 0, \ \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1}. \tag{4.37}$$

Снова убедиться, как и в предыдущем упражнении, что все собственные значения λ расположены симметрично относительно вещественной оси и находятся в правой полуплоскости. $\square$

Подводя итоги рассмотрения приведенных спектральных задач, отметим, что здесь представлены как классические задачи, рассматриваемые в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, так и некоторые новые несамосопряженные задачи (Аграновича, С. Крейна, Чуешова). При этом все они сформулированы для скалярных искомых функций и применительно к стандартной тройке пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа.

4.2 Абстрактные спектральные задачи

В этом параграфе кратко изучаются абстрактные спектральные задачи, обобщающие классические и неклассические задачи математической физики, приведенные в параграфе 4.1. Основой для исследования задач такого вида является абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Каждая из изучаемых задач приводится к рассмотрению спектральной проблемы для самосопряженного оператора либо операторного пучка, действующего в гильбертовом пространстве.

4.2.1 Задача Дирихле

Будем считать, что для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия существования абстрактной формулы Грина (1.139):

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{4.38}$$

$$L \in \mathcal{L}(F, F^*), \quad \gamma \in \mathcal{L}(F, G_+), \quad \partial \in \mathcal{L}(F, (G_+)^*). \tag{4.39}$$

Абстрактная спектральная задача Дирихле по аналогии с (4.2) формулируется следующим образом:

$$Lu = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(L) = F \subset E, \quad \gamma u = 0\,. \tag{4.40}$$

Сразу сформулируем основной результат о свойствах решений задачи (4.40).

Теорема 4.2.1. *Пусть подпространство* $N := \ker\gamma \subset F$ *компактно вложено в* E. *Тогда задача* (4.40) *равносильна операторному уравнению*

$$A_0 u = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A_0) \subset N, \tag{4.41}$$

где A_0 — *оператор гильбертовой пары* $(N; E)$ *и потому он положительно определен, самосопряжен и имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных положительных собственных значений* $\lambda_k(A_0)$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$. *Система* $\{u_k(A_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *его собственных элементов образует ортогональный базис в пространствах* E *и* $N = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \subset F$:

$$(u_k(A_0), u_l(A_0))_E = \delta_{kl}, \tag{4.42}$$

$$(A_0 u_k(A_0), u_l(A_0))_E = (u_k(A_0), u_l(A_0))_F = \lambda_k(A_0)\delta_{kl}. \tag{4.43}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ и $\gamma u = 0$, то $u \in N$. Воспользуемся теперь тождеством (1.85), которое определяет оператор A гильбертовой пары $(F; E)$:

$$\langle \eta, Au\rangle_E = (A^{1/2}\eta,\, A^{1/2}u)_E = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{4.44}$$

Так как N плотно в E и для любого $u \in N \subset F$ имеем

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in N,$$

то $(N; E)$ — гильбертова пара пространств. Далее, из (4.38) имеем

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F, \quad \forall \eta, u \in N. \tag{4.45}$$

Сравнивая (4.45) и (4.38), приходим к выводу, что оператор L с областью определения $\mathcal{D}(L) = N$ является оператором гильбертовой пары пространств $(N; E)$. Обозначая этот оператор через A_0, получаем, что задача (4.40) равносильна задаче (4.41).

Так как по условию N компактно вложено в E, то по основной теореме о спектре (см. часть 1) приходим к выводу, что задача (4.41), а вместе с ней и задача (4.40) имеют дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы. □

Следствием этой теоремы является такое утверждение.

Теорема 4.2.2. *Задача Дирихле* (4.2) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из собственных значений* $\lambda_k^0 := \lambda_k(A_0)$ *оператора* A_0, $0 < \lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k^0 \leqslant \ldots, \quad \lambda_k^0 \to +\infty\,(k \to \infty)$, *и систему собственных функций* $\{u_k^0(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *образующих ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$ *и* $H_0^1(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} u_k^0(x)u_l^0(x)d\Omega = \delta_{kl}\,, \quad \int\limits_{\Omega}(\nabla u_k^0 \cdot \nabla u_l^0 + u_k^0 u_l^0)d\Omega = \lambda_k^0\delta_{kl}\,, \qquad k, l = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{4.46}$$

Доказательство. В самом деле в этой задаче $\ker\gamma = H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, причем $H_0^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Поэтому по теореме 4.2.1 при $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $N = H_0^1(\Omega)$, $\gamma u := u|_{\Gamma}$, $G = L_2(\Gamma)$ получаем сформулированные выше выводы. □

4.2.2 Задача Неймана

Абстрактная задача Неймана по аналогии с (4.3) формулируется следующим образом:

$$Lu = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(L) = F \subset E, \quad \partial u = 0. \tag{4.47}$$

Здесь тоже можно сразу сформулировать основной результат о свойствах решений спектральной задачи.

Теорема 4.2.3. *Задача* (4.47) *равносильна уравнению*

$$Au = \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L) = F :\ \partial u = 0\}, \tag{4.48}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(F; E)$. Если F компактно вложено в E, то оператор A самосопряжен, положительно определен и имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k := \lambda_k(A) > 0$, *причем* $\lambda_k \to +\infty\,(k \to \infty)$. *Для собственных элементов* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающих собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *справедливы утверждения о базисности этих элементов в* $L_2(\Omega)$ *и* $H^1(\Omega)$, *а также формулы ортогональности* (4.42), (4.43) *с заменой A_0 на A.*

Для собственных значений $\lambda_k^0 := \lambda_k(A_0)$ *задачи* (4.41) *и собственных значений* $\lambda_k := \lambda_k(A)$ *задачи* (4.47) *справедливы неравенства*

$$\lambda_k(A_0) \geqslant \lambda_k(A), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{4.49}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ и $\partial u = 0$, то по формуле Грина (4.38) имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F, \quad \eta \in F, \quad u \in \mathcal{D}(L), \quad \partial u = 0. \tag{4.50}$$

Поэтому для решений задачи (4.47) получаем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = \langle \eta, \lambda u \rangle_E = (\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta,\, A^{1/2}u)_F = \langle \eta, Au \rangle_E,\ \forall \eta \in F. \tag{4.51}$$

Отсюда следует, что

$$Lu = Au = \lambda u, \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L) = F :\ \partial u = 0\}, \tag{4.52}$$

т.е. оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ является оператором краевой задачи Неймана (4.47). Можно проверить, снова используя формулу Грина (4.38), что решения уравнения $Au = \lambda u$ являются также решениями задачи (4.47).

Если F компактно вложено в E, то оператор A^{-1} компактен, поэтому задача (4.48) имеет дискретный спектр, и справедливы утверждения данной теоремы о базисности и ортогональности собственных элементов.

Неравенства (4.49) следуют из максиминимальных принципов для собственных значений задач (4.41) и (4.48) и того факта, что N является подпространством F. $\square$

В качестве следствия из теоремы 4.2.3 получаем такой результат.

Теорема 4.2.4. *Задача Неймана* (4.3) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$*, состоящий из собственных значений* λ_k*,* $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty\, (k \to \infty)$*, и систему собственных функций* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$*, образующих ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$ *и* $H^1(\Omega)$*:*

$$\int\limits_\Omega u_k(x) u_l(x) d\Omega = \delta_{kl}\,, \quad \int\limits_\Omega (\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l) d\Omega = \lambda_k \delta_{kl}\,, \qquad k, l = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{4.53}$$

Для собственных значений λ_k^0 *и* λ_k *задач* (4.2) *и* (4.3) *соответственно имеют место неравенства*

$$\lambda_k^0 \geqslant \lambda_k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{4.54}$$

Доказательство. Оно такое же, как в теореме 4.2.2. Здесь $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, причем $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Неравенства (4.54) следуют из того, что $H_0^1(\Omega)$ — бесконечномерное подпространство $H^1(\Omega)$. $\square$

4.2.3 Задача Ньютона

Пусть $\sigma \in \mathcal{L}(G_+, (G_+)^*)$ — оператор, обладающий следующим свойством неотрицательности:

$$\langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G \geqslant c\|\varphi\|_G^2, \quad c > 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \tag{4.55}$$

Под абстрактной спектральной задачей Ньютона понимают следующую проблему:

$$Lu = \lambda u, \quad (u \in \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(\partial) = F), \quad \partial u + \sigma\gamma u = 0. \tag{4.56}$$

При исследовании этой задачи можно применить те же приемы, что и выше, в теоремах 4.2.1 и 4.2.3, с учетом усложнений, связанных с наличием оператора σ в граничном условии (4.56).

Теорема 4.2.5. *Задача* (4.56) *равносильна уравнению*

$$\lambda A^{-1}u = u + K_\sigma u, \quad u \in F, \quad K_\sigma := P_M\gamma_M^*\sigma\gamma_M P_M, \tag{4.57}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(F; E)$, $P_M : F \to M$ — ортопроектор на M, $F = N \oplus M$, а $K_\sigma : F \to F$ — ограниченный неотрицательный оператор. Если F компактно вложено в E, то задачи (4.56) *и* (4.57) *имеют дискретный спектр $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_\sigma) \to +\infty \, (k \to \infty)$,*

$$\begin{aligned} &A_\sigma := (I + K_\sigma)^{1/2} A (I + K_\sigma)^{1/2}, \\ &\mathcal{D}(A_\sigma) = \mathcal{R}(A_\sigma^{-1}) = \mathcal{R}((I + K_\sigma)^{-1/2} A^{-1} (I + K_\sigma)^{-1/2}) \subset F. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ этих задач, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, образуют ортогональный базис в E и в пространстве F_σ с квадратом нормы

$$\|u\|_{F_\sigma}^2 := \|u\|_F^2 + \langle \gamma u, \sigma\gamma u \rangle_G, \tag{4.59}$$

эквивалентной норме пространства F. При этом выполнены свойства ортогональности

$$(u_k, u_l)_E = \delta_{kl}, \quad (u_k, u_l)_F + \langle \gamma u_k, \sigma\gamma u_l \rangle_G = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}. \tag{4.60}$$

Для собственных значений $\lambda_k(A)$ задачи (4.48) *и собственных значений $\lambda_k(A_\sigma)$ задачи* (4.57) *выполнены неравенства*

$$\lambda_k(A_\sigma) \geqslant \lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.61}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ — решение задачи (4.56), то по формуле Грина (4.38) имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = \langle \eta, \lambda u \rangle_E = (\eta, \lambda u)_E = (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \sigma\gamma u \rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{4.62}$$

Отсюда при $\eta = u$ с учетом свойства (4.55) получаем, что собственные значения λ задачи (4.56) положительны.

Напомним (см. часть 1, ...), что ненулевой элемент $u \in F$ называют обобщенным собственным элементом задачи (4.56), отвечающим собственному значению λ, если выполнено тождество (4.62) при любом $\eta \in F$.

Рассмотрим при $\eta, u \in F$ билинейную (полуторалинейную) форму $\langle \gamma\eta, \sigma\gamma u \rangle_G$. Так как $\sigma \in \mathcal{L}(G_+, G_-)$, $\gamma \in \mathcal{L}(F, G_+)$, то эта форма имеет по теореме Лакса-Мильграма представление

$$\langle \gamma\eta, \sigma\gamma u \rangle_G = (\eta, K_\sigma u)_F, \quad K_\sigma \in \mathcal{L}(F). \tag{4.63}$$

Пусть $P_M : F \to M$ — ортопроектор на $M \subset F$. Тогда для любого $u \in F$ имеем $\gamma u = \gamma_M P_M u$, так как $\gamma w = 0$ для $w \in N = F \ominus M$. Вспоминая еще соотношения $T_M = (\partial_M)^{-1} = \gamma_M^*$ (см. п.1.3.2) и используя тождество (1.121), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} &\langle \gamma\eta, \sigma\gamma u \rangle_G = \langle \gamma_M P_M \eta, \sigma\gamma_M P_M u \rangle_G = \\ &= (P_M \eta, \gamma_M^* \sigma \gamma_M P_M u)_F = (\eta, P_M \gamma_M^* \sigma \gamma_M P_M u)_F, \ \forall \eta, u \in F. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Отсюда и из (4.63) следует, что K_σ имеет представление (4.57) и является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в F.

Учитывая еще соотношение

$$(\eta, u)_E = (A^{1/2}\eta,\, A^{-1/2}u)_E = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}(A^{-1}u))_E = (\eta, A^{-1}u)_F, \tag{4.65}$$

из тождества (4.62) получаем

$$(\eta, (\lambda A^{-1}u - u - K_\sigma u))_F = 0, \quad \forall \eta \in F, \tag{4.66}$$

откуда следует, в силу произвольности $\eta \in F$, что решения задачи (4.56) удовлетворяют уравнению (4.57). Однако все проведенные преобразования можно обратить, использовать формулу Грина (4.38) и от (4.57) вернуться к задаче (4.56). Поэтому эти две задачи равносильны.

Докажем теперь, что задача (4.57) имеет дискретный спектр и выполнены остальные утверждения данной теоремы. Так как $K_\sigma \geqslant 0$ и ограничен, то $I + K_\sigma \geqslant I \gg 0$ и потому имеет ограниченный обратный оператор, который является положительно определенным. Учитывая этот факт, осуществим в (4.57) замену

$$(I + K_\sigma)^{1/2} u = v \in F \tag{4.67}$$

и применим слева оператор $(I + K_\sigma)^{-1/2}$. Это дает уравнение

$$\lambda A_\sigma^{-1} v = v, \ A_\sigma^{-1} := (I + K_\sigma)^{-1/2} A^{-1} (I + K_\sigma)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(F), \tag{4.68}$$

равносильное спектральной задаче

$$A_\sigma v = \lambda v, \quad v \in \mathcal{D}(A_\sigma) = \mathcal{R}(A_\sigma^{-1}). \tag{4.69}$$

Так как A_σ^{-1} — компактный положительный оператор (проверьте это!) в пространстве F, то задачи (4.68) и (4.69) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, $v_k := v_k(A_\sigma)$, этих задач образуют ортогональный базис в пространстве F и по форме оператора A_σ^{-1}; их можно выбрать удовлетворяющими следующим свойствам ортогональности:

$$(A_\sigma^{-1} v_k, v_l)_F = \delta_{kl}, \ (v_k, v_l)_F = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}, \ k, l = 1, 2, \ldots . \tag{4.70}$$

Отсюда, с использованием обратной замены (4.67) и формулы (4.63), приходим к формулам (4.60).

Отметим в заключение доказательства, что неравенства (4.61) следуют из максиминимальных принципов для собственных значений спектральных задач (4.48) и (4.69), а также из неравенства

$$\|u\|_{F_\sigma}^2 \geqslant \|u\|_F^2, \quad \forall u \in F = F_\sigma, \tag{4.71}$$

следующего из (4.59) и свойства (4.55). □

Упражнение 4.2.1. Проверить, что решения задачи (4.57) являются также решениями задачи (4.56). □

Из теоремы 4.2.5 получаем следствие о свойствах решений спектральной задачи (4.5).

Теорема 4.2.6. *Задача Ньютона* (4.5) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k(A_\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1(A_\sigma) \leqslant \lambda_2(A_\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A_\sigma) \leqslant \ldots$, $\lambda_k(A_\sigma) \to +\infty\,(k \to \infty)$, *и систему собственных функций* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *образующих ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$ *и по форме* $H^1_\sigma(\Omega)$ *:*

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega u_k(x)u_l(x)d\Omega = \delta_{kl}\,,\\ \int\limits_\Omega (\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l)d\Omega + \int\limits_\Gamma \sigma u_k u_l d\Gamma = \lambda_k(A_\sigma)\delta_{kl}\,.\end{gathered} \tag{4.72}$$

Для собственных значений λ_k *и* $\lambda_k(A_\sigma)$ *задач Неймана и Ньютона соответственно (см.* (4.3), (4.5)*) имеют место неравенства*

$$\lambda_k \leqslant \lambda_k(A_\sigma), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{4.73}$$

□

Упражнение 4.2.2. Выведите соотношения (4.72), обоснуйте неравенства (4.73). □

4.2.4 Задача Стеклова

Абстрактным обобщением задачи (4.12) является следующая спектральная проблема:

$$Lw = 0, \quad \partial w + \sigma\gamma w = \lambda\sigma_0\gamma w, \tag{4.74}$$

где операторы $\sigma \in \mathcal{L}(G_+,\, (G_+)^*)$ и $\sigma_0 \in \mathcal{L}(G)$ обладают следующими свойствами:

$$\langle\varphi,\, \sigma\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad (\varphi,\, \sigma_0\varphi)_G \geqslant c_0^2\,\|\varphi\|_G^2, \quad \forall\varphi \in G_+, \quad c_0 \neq 0. \tag{4.75}$$

Здесь спектральный параметр λ входит лишь в краевое условие.

Теорема 4.2.7. *Пусть* G_+ *компактно вложено в* G *и выполнены сформулированные выше условия. Тогда задача* (4.74) – (4.75) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, *и систему собственных элементов* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, *ортогональных по формам* $(\gamma w,\, \sigma_0\gamma w)_G$ *и* $\|w\|_F^2 + \langle\gamma w,\, \sigma\gamma w\rangle_G$ *и образующих базис в подпространстве* $M \subset F$, $M = F \ominus N$, $N = \ker\gamma$. *Эти элементы можно выбрать удовлетворяющими следующим условиям ортонормированности:*

$$(\gamma w_k,\, \sigma_0\gamma w_l)_G = \delta_{kl}, \quad (w_k, w_l)_F + \langle\gamma w_k,\, \sigma\gamma w_l\rangle_G = \lambda_k\delta_{kl}\,. \tag{4.76}$$

Доказательство. Заметим сначала, что из условия $Lw = 0$ следует, что $w \in M = F \ominus N$, $N := \ker \gamma$. Тогда

$$\begin{gathered}\gamma w = \gamma_M w =: \varphi \in G_+, \quad \partial w = \partial_M w = (\gamma_M T_M)^{-1} \gamma_M w = \\ = (\gamma_M \gamma_M^*)^{-1} \gamma_M w = (\gamma_M^*)^{-1}, \quad w = \gamma_M^{-1} \varphi, \quad \|w\|_F = \|\varphi\|_{G_+}.\end{gathered} \tag{4.77}$$

Поэтому граничное условие в (4.74) в этих терминах можно переписать в виде

$$B\varphi := ((\gamma_M^*)^{-1} \gamma_M^{-1} + \sigma)\varphi = \lambda \sigma_0 \varphi, \quad \varphi \in G_+ \subset G. \tag{4.78}$$

Здесь оператор $\sigma_0 : G \to G$ ограничен, положительно определен и самосопряжен в пространстве G. Покажем, что оператор B, стоящий слева в (4.78), является положительно определенным неограниченным самосопряженным оператором, действующим в G и заданным на тех же элементах $\varphi \in G_+ \subset G$, для которых $B\varphi \in G$.

С этой целью вычислим квадратичный функционал

$$\begin{gathered}(\varphi, B\varphi)_G = \langle \varphi, B\varphi \rangle_G = \langle \varphi, (\gamma_M^*)^{-1} \gamma_M^{-1} \varphi \rangle_G + \langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G = \\ = \|\gamma_M^{-1} \varphi\|_F^2 + \langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G = \|w\|_F^2 + \langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G = \\ = \|\varphi\|_{G_+}^2 + \langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B).\end{gathered} \tag{4.79}$$

Отсюда и из свойств оператора σ следует, что

$$\begin{gathered}\|\varphi\|_{G_+}^2 \leqslant (\varphi, B\varphi)_G = \|B^{1/2}\varphi\|_G^2 = \|\varphi\|_B^2 \leqslant (1 + \|\sigma\|)\|\varphi\|_{G_+}^2, \\ \varphi \in \mathcal{D}(B),\end{gathered} \tag{4.80}$$

так как

$$\langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G \leqslant \|\varphi\|_{G_+} \cdot \|\sigma\varphi\|_{(G_+)^*} \leqslant \|\varphi\|_{G_+} \cdot (\|\sigma\| \cdot \|\varphi\|_{G_+}) = \|\sigma\| \cdot \|\varphi\|_{G_+}^2. \tag{4.81}$$

Поэтому после замыкания, т.е. после перехода от множества $\mathcal{D}(B)$ до всего G_+, приходим к выводу, что имеют место двусторонние оценки

$$\|\varphi\|_{G_+}^2 \leqslant \|\varphi\|_B^2 \leqslant (1 + \|\sigma\|)\|\varphi\|_{G_+}^2, \quad \forall \varphi \in H_B = \mathcal{D}(B^{1/2}), \tag{4.82}$$

где H_B — энергетическое пространство оператора B.

Заметим теперь, что энергетическое пространство H_{σ_0} с нормой

$$\|\varphi\|_{\sigma_0}^2 := (\varphi, \sigma_0\varphi)_G = \|\sigma_0{}^{1/2}\varphi\|_G^2\,, \tag{4.83}$$

в силу эквивалентности норм (4.83) и пространства G, совпадает с G, а собственные значения λ задачи (4.78) совпадают с собственными значениями вариационного отношения

$$\frac{\|\varphi\|_B^2}{\|\varphi\|_{\sigma_0}^2} = \frac{\|\varphi\|_{G_+}^2 + \langle \varphi, \sigma\varphi \rangle_G}{(\varphi, \sigma_0\varphi)_G}, \quad \varphi \in G_+ . \tag{4.84}$$

Так как по условию теоремы G_+ компактно вложено в G, то в силу установленных выше фактов H_B компактно вложено в H_{σ_0}. Поэтому по основной теореме о спектре (см. часть 1) задача (4.78), а вместе с ней и исходная задача (4.74) имеют дискретный положительный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений λ_k с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

При этом собственным значениям λ_k задачи (4.78) отвечает система собственных элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G_+$, образующих ортогональный базис по формам операторов B и σ_0:

$$(\varphi_k, \sigma_0\varphi_l)_G = \delta_{kl}, \quad (B\varphi_k, \varphi_l)_G = \lambda_k\delta_{kl} . \tag{4.85}$$

Так как между элементами G_+ и M имеется изометрический изоморфизм (см. последнюю формулу в (4.77)), то элементы

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad w_k = \gamma_M^{-1}\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots , \tag{4.86}$$

образуют базис в M, ортогональный по формам

$$(\gamma w, \sigma_0\gamma w)_G, \quad \|w\|_F^2 + \langle \gamma w, \sigma\gamma w \rangle_G .$$

Отсюда и из (4.85) следует, что выполнены формулы ортогональности (4.76). □

Следствием теоремы 4.2.7 является такое утверждение.

Теорема 4.2.8. *Задача Стеклова* (4.12) *имеет дискретный положительный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$*, а собственные элементы* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$*, отвечающие собственным значениям* λ_k*, образуют базис в подпространстве* $H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ *(гармонических функций из* $H^1(\Omega)$*), и для элементов* $u_k(x)$ *этого базиса выполнены следующие формулы ортогональности*

$$\int\limits_{\Gamma} u_k u_l d\Gamma = \delta_{kl} , \int\limits_{\Omega} (\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l) d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \sigma u_k u_l d\Gamma = \lambda_k\delta_{kl} . \tag{4.87}$$

□

Упражнение 4.2.3. Доказать теорему 4.2.8. □

4.2.5 Задача Стефана

Сформулируем абстрактную постановку этой задачи, обобщающую задачу (4.17). Она имеет следующий вид:

$$Lu = \lambda u, \quad \partial u + \sigma\gamma u = \lambda\sigma_0 u. \tag{4.88}$$

Будем считать, что здесь выполнены условия

$$\sigma \in \mathcal{L}(G_+, (G_+)^*), \quad \langle\varphi, \sigma\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad \varphi \in G_+, \tag{4.89}$$

$$\sigma_0 \in \mathfrak{S}_\infty(G_+, (G_+)^*), \quad \langle\varphi, \sigma_0\varphi\rangle_G \geqslant 0, \quad \varphi \in G_+. \tag{4.90}$$

Отметим, что при $\sigma_0 = 0$ получаем задачу Ньютона (4.56), а при $\sigma_0 = \sigma = 0$ — задачу Неймана (4.57).

Теорема 4.2.9. *Задача* (4.88) — (4.90) *равносильна уравнению*

$$\lambda(A^{-1} + K_{\sigma_0})u = (I + K_\sigma)u, \quad u \in F, \tag{4.91}$$

$$K_{\sigma_0} := P_M\gamma_M^*\sigma_0\gamma_M P_M \geqslant 0, \quad K_\sigma := P_M\gamma_M^*\sigma\gamma_M P_M \geqslant 0. \tag{4.92}$$

Если F компактно вложено в E, то задачи (4.88) — (4.90) *и* (4.91) — (4.92) *имеют дискретный спектр $\{\lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma}) \to +\infty\,(k \to \infty)$,*

$$A_{\sigma_0,\,\sigma} := (I + K_\sigma)^{1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})^{-1}(I + K_\sigma)^{1/2}, \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A_{\sigma_0,\,\sigma}) = \mathcal{R}(A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}) = \\ &= \mathcal{R}((I + K_\sigma)^{-1/2}(A^{-1} + K_{\sigma_0})(I + K_\sigma)^{-1/2})\,. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ этих задач образуют ортогональный базис по формам

$$\|u\|_E^2 + \langle\gamma u, \sigma_0\gamma u\rangle_G, \quad \|u\|_F^2 + \langle\gamma u, \sigma\gamma u\rangle_G\,;$$

для этих собственных элементов выполнены следующие формулы ортогональности:

$$\begin{aligned} &(u_k, u_l)_E + \langle\gamma u_k, \sigma_0\gamma u_l\rangle_G = \delta_{kl}, \\ &(u_k, u_l)_F + \langle\gamma u_k, \sigma\gamma u_l\rangle_G = \lambda_k(A_{\sigma_0,\,\sigma})\delta_{kl}\,. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Доказательство. Оно повторяет с некоторыми усложнениями схему доказательства теоремы 4.2.5.

Если $u \in \mathcal{D}(L) = F$ — решение задачи (4.88), то для этого решения по формуле Грина (4.38) приходим к тождеству

$$(\eta, \lambda u)_E + \langle \gamma\eta, \lambda\sigma_0\gamma u\rangle_G = (\eta, u)_F + \langle \gamma\eta, \sigma\gamma u\rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{4.96}$$

Если это тождество выполнено для некоторого λ и ненулевого $u \in F$, то такой элемент u будем называть слабым решением задачи (4.88) — (4.90).

Из (4.96) при $\eta = u$ следует, что

$$\lambda = (\|u\|_F^2 + \langle \gamma u, \sigma\gamma u\rangle_G)/(\|u\|_E^2 + \langle \gamma u, \sigma_0\gamma u\rangle_G) > 0\,. \tag{4.97}$$

Проверим, что тождество (4.96) равносильно операторному уравнению (4.91), где K_{σ_0} и K_σ определены формулами (4.92). Доказательство этих формул — такое же, как соотношений (4.63), (4.64). Тогда вместо (4.96) получаем тождество

$$(\eta, \lambda A^{-1}u)_F + (\eta, \lambda K_{\sigma_0}u)_F = (\eta, u)_F + (\eta, K_\sigma u)_F, \quad \forall \eta \in F, \tag{4.98}$$

откуда и следует (4.91).

Отметим свойства операторов K_{σ_0} и K_σ, следующие из (4.89), (4.90) и представлений (4.92). Оба этих оператора неотрицательны, причем K_{σ_0} компактен, а K_σ — ограничен в F.

Осуществим теперь в (4.91) замену

$$(I + K_\sigma)^{1/2}u = v \in F, \tag{4.99}$$

а затем подействуем слева в (4.91) оператором $(I + K_\sigma)^{-1/2} \in \mathcal{L}(F)$. Тогда возникает спектральная задача

$$\lambda A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}v := \lambda(I+K_\sigma)^{-1/2}(A^{-1}+K_{\sigma_0})(I+K_\sigma)^{-1/2}v = v, \quad v \in F, \tag{4.100}$$

где $A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}$ — компактный положительный оператор в F. В самом деле, свойство компактности этого оператора следует из того, что оператор $(I + K_\sigma)^{-1/2}$ ограничен, K_{σ_0} — неотрицателен и компактен, а потому $A^{-1} + K_{\sigma_0}$ — компактный положительный оператор в F.

Задача (4.100) равносильна уравнению

$$A_{\sigma_0,\,\sigma}v = \lambda v, \quad v \in \mathcal{D}(A_{\sigma_0,\,\sigma}) \subset F, \tag{4.101}$$

где $A_{\sigma_0,\,\sigma}$ определен формулами (4.93), (4.94). Из свойства положительности и компактности $A^{-1}_{\sigma_0,\,\sigma}$ следует, что задачи

(4.100) и (4.101) имеют дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma})\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma}) \to +\infty\,(k \to \infty)$, а система собственных элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в F и по форме $(A_{\sigma_0,\sigma}^{-1}v, v)_F$. Если для элементов $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбрать условия ортонормировки в виде

$$(A_{\sigma_0,\sigma}^{-1}v_k, v_l)_F = \delta_{kl}, \quad (v_k, v_l)_F = \lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma})\delta_{kl}\,, \tag{4.102}$$

то после обратной замены (4.99) для собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задач (4.91), (4.88) приходим к формулам (4.95), если учесть соотношения

$$(\eta, K_{\sigma_0}u)_F = \langle \gamma\eta, \sigma_0\gamma u\rangle_G, \quad (\eta, K_{\sigma}u)_F = \langle \gamma\eta, \sigma\gamma u\rangle_G. \tag{4.103}$$

□

Упражнение 4.2.4. Доказать, что для собственных значений задачи (4.101) с операторными коэффициентами σ_0, σ, удовлетворяющими общим свойствам (4.89), (4.90), справедливы неравенства

$$\lambda_k(A_{0,\sigma}) \geqslant \lambda_k(A_{\sigma_0,\sigma}) \geqslant \lambda_k(A_{\sigma_0,0}), \quad k = 1, 2 \ldots . \tag{4.104}$$

□

Упражнение 4.2.5. Доказать, что спектральная задача Стефана (4.17) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, а система собственных элементов $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset H^1(\Omega)$ образует ортогональный базис по формам

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \langle \gamma u,\, \sigma\gamma u\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma u\|^2_{L_2(\Gamma)},\ \Gamma := \partial\Omega\,, \tag{4.105}$$

и выполнены следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} u_k u_l d\Omega + \int\limits_{\Gamma} u_k u_l d\Gamma = \delta_{kl}\,, \\ &\int\limits_{\Omega} (\nabla u_k \cdot \nabla u_l + u_k u_l) d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \sigma u_k u_l d\Gamma = \lambda_k \delta_{kl}\,. \end{aligned} \tag{4.106}$$

□

4.2.6 Задача Аграновича

Абстрактным обобщением задачи (4.22), возникшей в теории дифракции, является следующая проблема:

$$Lu + \lambda u = 0, \quad \partial u + \sigma\gamma u = \mu\sigma_0\gamma u, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \tag{4.107}$$

Относительно операторов σ и σ_0 по-прежнему предполагаем, что для них выполнены условия (4.89) — (4.90).

Нетрудно видеть, что задача (4.107) получается из задачи Стефана (4.88), если в первом уравнении (4.88) параметр λ заменить на $-\lambda$, а во втором уравнении заменить λ на μ. Поэтому можно сразу сформулировать утверждение, непосредственно следующее из теоремы 4.2.9.

Теорема 4.2.10. *Задача* (4.107) *равносильна спектральной проблеме*

$$L_\mu(\lambda)u := (I + K_\sigma + \lambda A^{-1} - \mu K_{\sigma_0})u = 0, \quad u \in E, \tag{4.108}$$

рассматриваемой в пространстве F, а также проблеме

$$\widetilde{L}_\mu(\lambda)v := (I + \widetilde{K}_\sigma + \lambda A^{-1} - \mu\widetilde{K}_{\sigma_0})v = 0, \quad v = A^{1/2}u \in E, \tag{4.109}$$

$$\widetilde{K}_\sigma := A^{1/2}K_\sigma A^{-1/2}, \quad \widetilde{K}_{\sigma_0} := A^{1/2}K_{\sigma_0}A^{-1/2}, \tag{4.110}$$

рассматриваемой в пространстве E.

Доказательство. Уравнение (4.108) получается из (4.91) после указанных выше замен параметров (λ на $-\lambda$ и λ на μ). Далее, так как любой элемент u из F можно представить в форме $u = A^{-1/2}v$, $v \in E$, то после указанной замены и применения слева оператора $A^{1/2}$ приходим к уравнению (4.109) с коэффициентами $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$, выражаемыми формулами (4.110), что следует из (4.92). $\square$

Замечание 4.2.1. В уравнении (4.108) оператор A^{-1} действует в F, и в шкале пространств E^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, построенной по оператору A, он переводит $F = E^{1/2}$ в $\mathcal{D}(A) = E^{3/2} \subset E^{1/2} = F$. Как оператор, действующий в $F = E^{1/2}$, он является компактным положительным оператором.

Соответственно в уравнении (4.109) под A^{-1} понимается расширение этого оператора на пространство $E = E^0$. При этом A^{-1} переводит E^0 в $E^1 = \mathcal{D}(A) \subset E$; как оператор, действующий в E, A^{-1} снова является компактным положительным оператором. $\square$

Замечание 4.2.2. Форма уравнений (4.108), (4.109) удобна тем, что здесь параметры λ и μ в определенном смысле равноправны: любой из них можно считать спектральным, а другой — фиксированным. Подробное исследование несамосопряженных задач дифракции в форме (4.108), (4.109) проведено в работах []. □

Упражнение 4.2.6. Провести в задаче дифракции (4.22) преобразования по общей схеме теорем 4.2.9, 4.2.10 и получить итоговые уравнения вида (4.108), (4.109) применительно к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и оператора следа γ, $\gamma u := u|_\Gamma$. Выяснить свойства операторных коэффициентов этих уравнений. □

Замечание 4.2.3. Можно доказать, что операторные коэффициенты $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ уравнения (4.109) обладают следующими свойствами как операторы, действующие в E: $\widetilde{K}_\sigma$ является неотрицательным ограниченным оператором, а $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ — неотрицательным компактным оператором. □

4.2.7 Задача С. Крейна

Обобщением скалярной модельной задачи (4.27) С. Крейна является следующая несамосопряженная спектральная проблема:

$$Lu = \lambda u, \quad \lambda(\partial u + \sigma\gamma u) = \sigma_0\gamma u. \tag{4.111}$$

Видно, что эта задача отличается от абстрактной задачи Стефана (4.88) лишь тем, что во втором уравнении (4.111) спектральный параметр λ стоит множителем не справа, а слева.

Относительно коэффициентов σ и σ_0 по-прежнему предположим, что выполнены условия (4.89), (4.90), за исключением того, что оператор σ_0 является не неотрицательным, а положительным:

$$\sigma_0 \in \mathfrak{S}_\infty(G_+, (G_+)^*), \quad \langle\varphi, \sigma_0\varphi\rangle_G > 0, \quad 0 \neq \varphi \in G_+. \tag{4.112}$$

Теорема 4.2.11. *Задача* (4.111), (4.112) *равносильна проблеме*

$$L(\lambda)u := (I + K_\sigma - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}K_{\sigma_0})u = 0, \quad u \in F, \tag{4.113}$$

рассматриваемой в пространстве F, а также проблеме

$$\widetilde{L}(\lambda)v := (I + \widetilde{K}_\sigma - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}\widetilde{K}_{\sigma_0})v = 0, \quad v = A^{1/2}u \in E, \tag{4.114}$$

рассматриваемой в пространстве E. *При этом операторы* K_σ, K_{σ_0}, $\widetilde{K}_\sigma$ *и* $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ *определяются формулами* (4.110), (4.92), *причем*

$$K_\sigma \geqslant 0, \quad \widetilde{K}_\sigma \geqslant 0, \quad K_{\sigma_0} > 0, \quad \widetilde{K}_{\sigma_0} > 0. \tag{4.115}$$

□

Замечание 4.2.4. Задачи (4.113) и (4.114) являются несамосопряженными. Их исследованию посвящено достаточно много работ. Операторный пучок $\widetilde{L}(\lambda)$ называют пучком С. Крейна. Оказывается, что при сформулированных выше условиях задача (4.114) имеет дискретный спектр с двумя предельными точками: $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$. Все собственные значения задачи, кроме, быть может, конечного их числа, расположены на положительной полуоси, а собственные элементы обладают свойством базисности Рисса, а при некоторых дополнительных условиях — и свойством p-базисности. Подробный анализ свойств решений задачи вида (4.114) при $\widetilde{K}_{\sigma_0} \geqslant 0$, $\widetilde{K}_{\sigma_0} \neq 0$, можно найти в [], гл. 7, а также в []. □

Упражнение 4.2.7. Провести в задаче С. Крейна (4.27) преобразования, которые приводят к пучку вида (4.113), а также (4.114). Убедиться, что возникающие операторные коэффициенты этих пучков обладают свойствами (4.115). □

4.2.8 Задача Чуешова

Обобщая на абстрактный случай задачу (4.33), возникшую при исследовании динамических систем с поверхностной диссипацией энергии, приходим к следующей проблеме:

$$Lu + \lambda^2 u = 0, \quad \partial u + \sigma\gamma u = \alpha\lambda\gamma u, \quad \alpha > 0. \tag{4.116}$$

Здесь снова видно, что эта задача отличается от задача Стефана лишь тем, что в первом уравнении задачи Стефана параметр λ следует заменить на $-\lambda^2$, а во втором уравнении — параметр λ на $\alpha\lambda$, $\alpha > 0$. Поэтому общие преобразования, проделанные выше для задач Стефана, Аграновича и С. Крейна, можно осуществить и в задаче (4.116).

Теорема 4.2.12. *Задача* (4.116) *равносильна проблеме*

$$L_\alpha(\lambda)u := (I + K_\sigma - \lambda\alpha K_{\sigma_0} + \lambda^2 A^{-1})u = 0, \quad u \in F, \tag{4.117}$$

рассматриваемой в пространстве F, а также проблеме

$$\widetilde{L}_\alpha(\lambda)v := (I + \widetilde{K}_\sigma - \lambda\alpha\widetilde{K}_{\sigma_0} + \lambda^2 A^{-1})v = 0,\ v = A^{1/2}u \in E, \qquad (4.118)$$

рассматриваемой в пространстве E. Здесь операторы K_σ и $\widetilde{K}_\sigma$ неотрицательны, а K_{σ_0} и $\widetilde{K}_{\sigma_0}$ при предположении (4.112) *— положительны и компактны.* □

Замечание 4.2.5. Спектральные задачи (4.117) и (4.118) для квадратичных по λ операторных пучков $L_\alpha(\lambda)$ и $\widetilde{L}_\alpha(\lambda)$ появились сравнительно недавно. Общие свойства спектра исследованы на некоторых примерах, допускающих разделение переменных в задачах математической физики. На этих примерах установлено, что спектр этих задач дискретен (при $\alpha = 0$ он находится на мнимой оси, а собственные значения $\lambda_k^{\pm}(0) = \pm i\lambda_k^{1/2}(A)$, $k = 1, 2, \ldots$). При возрастании α от нуля он отходит от мнимой оси и при некотором $\alpha = \alpha_* > 0$ целиком переходит в бесконечно удаленную точку. При изменении α от $\alpha = \alpha_*$ до $+\infty$ спектр возвращается на мнимую ось, однако не к решениям задачи Неймана-Ньютона, отвечающим значению $\alpha = 0$ (см. (4.116)), а к решениям задачи Дирихле

$$Lu + \lambda^2 u = 0, \quad \gamma u = 0. \qquad (4.119)$$

В общей ситуации установлено (при некоторых дополнительных предположениях), что спектр задач (4.117), (4.118) дискретен, расположен в правой полуплоскости и имеет предельную точку $\lambda = \infty$ (см. []). Задачи (4.117), (4.118) требуют, по-видимому, дополнительного подробного исследования. □

Упражнение 4.2.8. В прямоугольнике $\Omega = (0, \pi) \times (0, 1)$ исследуйте методом разделения переменных задачу Чуешова типа (4.35) — (4.36):

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } (\partial\Omega \backslash \Gamma), \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + u - \alpha\lambda u = 0 \quad \text{на } \Gamma := \{(x, y) :\ 0 < x < \pi,\ y = 1\}. \end{aligned} \qquad (4.120)$$

Покажите, что общие свойства спектра, о которых говорилось выше в замечании 4.2.5, имеют место для задачи (4.120). Убедитесь, что критическое значение $\alpha_* > 0$ параметра α, при котором спектр уходит в бесконечно удаленную точку, равно 1, а при $\alpha > 1$ и при $\alpha \to +\infty$ спектр из бесконечно удаленной точки возвращается к мнимой оси. □