Часть I. Основные пространства и операторы линейной гидродинамики.

Введение

0.1 О содержании спецкурса.

Данный курс лекций предназначен для тех студентов - специализантов кафедры математического анализа, которые уже в основном знакомы с курсом функционального анализа, теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, а также спектральной теорией оператор-функций. В равной мере необходимо иметь подготовку по механике и, в частности, по механике сплошных сред. Спецкурс будет полезен также обучающимся по специальностям "Прикладная математика"и "Физика".

Весь курс разбит на три части. В первой части вводятся основные гильбертовы пространства и операторы линейной гидродинамики идеальной и вязкой жидкости. Эти понятия затем играют фундаментальную роль при качественном исследовании задач о малых колебаниях идеальной жидкости (часть II) и вязкой жидкости (часть III).

Содержание спецкурса основано на монографии [1] Н.Д.Копачевского, С.Г.Крейна и Нго Зуй Кана "Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи". - М.:Наука, 1989. - 416с. Некоторые пункты добавлены составителем при написании курса и являются новыми.

Основные результаты, получающиеся при исследовании рассмотренных здесь задач, сформулированы в виде лемм, теорем, физических выводов, а также упражнений для самостоятельной углублённой проработки материала.

0.2 Об уравнениях движения несжимаемой жидкости.

Будем считать, что некоторый сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ полностью заполнен однородной несжимаемой жидкостью плотности ρ. Если жидкость вязкая, то коэффициент кинематической вязкости $\nu > 0$, для идеальной (невязкой) жидкости $\nu = 0$.

Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, поле скоростей жидкости, а через $P = P(t,x)$ - поле давлений. Тогда закон Ньютона, примененный к единичному объёму жидкости, приводит к известным уравнениям Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} := \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\rho^{-1}\nabla P + \nu\Delta\vec{u} + \vec{F}(t,x), \\ \mathrm{div}\vec{u} := \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $\nabla := \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ - оператор градиента, а $\vec{F}(t,x)$ - поле внешних сил, действующих на единицу массы жидкости.

Если жидкость покоится, т.е. находится в равновесии, а внешнее поле $\vec{F} = \vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$ имеет гравитационную природу с ускорением $g > 0$ (ось Ox_3 направлена против единичного вектора e_3), то выполнено соотношение

$$-\rho^{-1}\nabla P_0 - g\vec{e}_3 = \vec{0},$$

что дает формулу для статического давления

$$P = P_0(x_3) = -\rho g x_3 + p_a, \tag{0.2}$$

где p_a - давление, отвечающее высоте $x_3 = 0$.

Далее в курсе будут рассматриваться лишь малые (линейные) движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Тогда поле скорости $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ и отклонение $p(t,x) = P(t,x) - P_0(x_3)$ давления $P(t,x)$ от равновесного давления $P_0(x_3)$, т.е. динамическое давление, следует считать бесконечно малыми функциями одного (первого) порядка малости. Полагая еще

$$\vec{F}(t,x) = \vec{F}_0(x) + \vec{f}(t,x),\ \vec{F}_0(x) = -g\vec{e}_3,$$

и считая $\vec{f}(t,x)$ также малым заданным полем массовых сил, а затем линеаризуя первое уравнение (0.1), придём к линеаризованным уравнениям Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\vec{u} + \vec{f}(t,x), \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{0.3}$$

Для идеальной жидкости, когда $\nu = 0$, получаем так называемые линеаризованные уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho^{-1}\nabla p + \vec{f}(t,x), \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{0.4}$$

0.3 О граничных и начальных условиях.

На твердой границе S области Ω, заполненной вязкой жидкостью, следует принимать во внимание краевое условия прилипания: частицы жидкости, расположенные на этой границе, находятся, как и твердое тело, в состоянии покоя:

$$\vec{u}(t,x) = 0 \quad (\text{на } S). \tag{0.5}$$

Для идеальной жидкости ее частицы в отсутствие трения могут свободно скользить вдоль S; отсюда приходим к условию

$$u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \tag{0.6}$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к S.

Если жидкость имеет свободную поверхность, причём Γ - её равновесная свободная поверхность, то на Γ выполняются так называемые кинематическое и динамические условия. Вывод этих условий для случая идеальной и вязкой жидкостей будет дан далее в соответствующих параграфах.

К граничным условиям на твердой стенке S и равновесной поверхности Γ следует добавить также начальные условия. В качестве таковых нужно задать поле скорости в начальный момент времени

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^{\,0}(x) \quad (\text{в } \Omega), \tag{0.7}$$

а также, если в жидкости имеется свободная поверхность, отклонение свободной поверхности от Γ (также при $t = 0$).

Таким образом, полная постановка начально-краевой задачи о малых движениях жидкости в сосуде состоит в решении уравнений (0.3) либо (0.4) при краевых условиях (0.5) либо (0.6), кинематических и динамических условиях на Γ (если $\Gamma \neq \emptyset$), начального условия (0.7) и аналогичного условия на равновесной свободной поверхности Γ.

0.4 Общая идея операторного подхода.

Далее при качественном исследовании сформулированных выше задач будут применяться методы функционального анализа, в частности, методы теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, теории операторных пучков, а также теории линейных дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Основная идея состоит в том, что линейной начально-краевой задаче гидродинамики сопоставляется линейное дифференциально-операторное уравнение, ей соответствующее. Далее подробно изучаются свойства операторных коэффициентов этого уравнения и на их основе - свойства решений полученного уравнения и затем свойства решений исходной начально-краевой задачи.

Возникающее при этом дифференциально-операторные уравнения имеют гиперболический тип (для задач о движении идеальной жидкости) и параболический тип (для вязкой жидкости). Эти классы уравнений в настоящее время достаточно хорошо изучены как в случае гильбертова, так и банахова пространства.

1 Основные пространства гидродинамики идеальной жидкости

1.1 Поля с конечной кинетической энергией

Пусть ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ заполнена движущейся жидкостью. В каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ определен вектор скорости $\vec{u} = \sum\limits_{k=1}^{3} u_k \vec{e}_k$, и, таким образом, в Ω возникает поле скоростей $\vec{u} = \vec{u}(x)$. Естественно предположить, что соответствующая масса жидкости имеет конечную кмнетическую энергию T. Если жидкость однородна и имеет постоянную плотность ρ, то

$$2T := \rho \int\limits_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega < \infty.$$

Таким образом, все поля, которым отвечает конечная кинетическая энергия, образуют гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой

$$||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega} |\vec{u}(x)|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}},$$

которая отвечает скалярному произведению (вещественный случай)

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} \vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x) d\Omega, \tag{1.1}$$

где $\cdot$ означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$.

1.2 Потенциальные поля

Среди всех векторных полей особую роль играют потенциальные векторные поля, т.е. поля вида $\vec{v} := \nabla p$. Конечность кинетической энергии такого поля озчачает, что

$$||\vec{v}||^2_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega < \infty. \tag{1.2}$$

Отсюда и из конечности интеграла

$$\int\limits_{\Omega} |p|^2 d\Omega < \infty$$

следует, что $p(x) \in H^1(\Omega) := W_2^1(\Omega)$.

Совокупность потенциальных полей в силу (1.2) замкнута в $\vec{L}_2(\Omega)$ и, следовательно, образует подпространство этого пространства, которое далее будем обозначать через $\vec{G}(\Omega)$.

Полезно еще рассмотреть совокупность $\vec{G}_0(\Omega)$ всех потенциальных полей из $\vec{L}_2(\Omega)$ с потенциалами из

$$H_0^1(\Omega) := \{p(x) \in H^1(\Omega) : \, p = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\}. \tag{1.3}$$

Так как норма $H^1(\Omega)$ на подпространстве $H_0^1(\Omega)$ эквивалентна норме Дирихле (1.2), то $\vec{G}_0(\Omega)$ образует подпространство пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ и пространства $\vec{G}(\Omega)$.

1.3 Дивергенция поля с конечной кинетической энергией

Поскольку слои идеальной (невязкой) жидкости могут свободно скользить друг по другу, то естественно предполагать, что поле скорости $\vec{u}$ не обладает какой-то гладкостью. Однако условие несжимаемости жидкости пишут в виде $\mathrm{div}\vec{u} = 0$, что предполагает дифференцируемость компонент поля. В действительности условие несжимаемости носит интегральный характер и не требует гладкости поля.

Дадим определение дивергенции любого поля из $\vec{L}_2(\Omega)$. Пусть $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$. Рассмотрим на пространстве $H_0^1(\Omega)$ функционал

$$\Phi(p) := -\int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u} \, d\Omega, \; p \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Справедливо неравенство

$$|\Phi(p)| = |\int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u} \, d\Omega| \leq ||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)} \cdot ||\nabla p||_{\vec{L}_2(\Omega)} = ||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)} \cdot ||p||_{H_0^1(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Это означает, что $\Phi(p)$ является линейным ограниченным функционалом на подпространстве $H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, является элементом пространства $(H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega)$. Обозначим обобщенную функцию, порождающую этот функционал с помощью скалярного произведения в пространстве (скалярных функций) $L_2(\Omega)$ через $\mathrm{div}\vec{u}$. Тогда

$$\Phi(p) = \int\limits_{\Omega} p \, \mathrm{div}\vec{u} \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u} \, d\Omega \; (p \in H_0^1(\Omega), \, \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)). \tag{1.6}$$

При таком определении $\mathrm{div}\vec{u} \in H^{-1}(\Omega)$ для любого поля $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$. Следовательно, оператор div отображает пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ в пространство $H^{-1}(\Omega)$, причём в силу неравенства (1.5)

$$||\mathrm{div}\vec{u}||_{H^{-1}(\Omega)} \leq ||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)}. \tag{1.7}$$

1.4 Пространство соленоидальных полей

Поле $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ называется соленоидальным, если $\mathrm{div}\vec{u} = 0$. Из неравенства (1.7) следует, что совокупность всех соленоидальных полей образует подпространство

$\vec{J}(\Omega)$ подпространства $\vec{L}_2(\Omega)$. В силу тождества (1.6) подпространство $\vec{J}(\Omega)$ состоит из всех полей $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$, для которых

$$\int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u}\, d\Omega = 0 \ (\forall p \in H_0^1(\Omega)). \tag{1.8}$$

Иначе говоря, $\vec{J}(\Omega)$ является ортогональным дополнением к подпространству $\vec{G}_0(\Omega)$ и, следовательно, справедливо ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega). \tag{1.9}$$

1.5 Оператор Лапласа на пространстве $H^1(\Omega)$.

Назовём оператором Лапласа Δ оператор, определённый формулой

$$\Delta p := \mathrm{div}(\nabla p) \ (p \in H^1(\Omega)). \tag{1.10}$$

По определению он действует из пространства $H^1(\Omega)$ в пространство $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^*$. Кроме того

$$||\Delta p||_{H^{-1}(\Omega)} = ||\mathrm{div}\nabla p||_{H^{-1}(\Omega)} \le ||\nabla p||_{\vec{L}_2(\Omega)} \le ||p||_{H^1(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Замечание. Можно доказать, что при $p \in H_0^1(\Omega)$ в (1.11) имеет место знак равенства, т.е. оператор div отображает изометрически пространство $\vec{G}_0(\Omega)$ на все пространство $H^{-1}(\Omega)$.

1.6 Нормальная составляющая поля на границе

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω липшицева, например, эта граница кусочно гладкая с ненулевыми внутренними и внешними углами. Пусть поле $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ таково, что

$$\mathrm{div}\vec{u} \in L_2(\Omega). \tag{1.12}$$

Рассмотрим на пространстве $H^1(\Omega)$ функционал

$$F(p) := \int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{u}\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} p\, \mathrm{div}\vec{u}\, d\Omega \ (p \in H^1(\Omega)). \tag{1.13}$$

Оценим

$$\begin{aligned} |F(p)| \le ||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)} \cdot ||\nabla p||_{\vec{L}_2(\Omega)} + ||\mathrm{div}\vec{u}||_{L_2(\Omega)} \cdot ||p||_{L_2(\Omega)} \le \\ \le (||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)} + ||\mathrm{div}\vec{u}||_{L_2(\Omega)})||p||_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Отсюда следует, что $F(p)$ является линейным ограниченным функционалом на пространстве $H^1(\Omega)$. Если $p \in H_0^1(\Omega)$, то в силу (1.6) будет $F(p) = 0$. Таким образом,

F является линейным ограниченным функционалом на ортогональном дополнении к подпространству $H_0^1(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$.

Упражнение 1.1. Пусть $\tilde{H}^1(\Omega)$ - пространство функций с квадратом нормы

$$||p||^2_{\tilde{H}^1(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega + \left(\int\limits_{\partial\Omega} p\, dS \right)^2, \tag{1.15}$$

эквивалентной стандартной норме пространства $H^1(\Omega)$.

Доказать, что ортогональным дополнением к $H_0^1(\Omega)$ в $\tilde{H}^1(\Omega)$ будет множество

$$H_h^1(\Omega) := \{\varphi \in \tilde{H}^1(\Omega) :\, \Delta\varphi = 0\, (\text{в } \Omega)\}, \tag{1.16}$$

т.е.

$$\tilde{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega). \tag{1.17}$$

В дальнейшем, говоря о пространстве потенциальных полей $\vec{G}(\Omega)$, будем считать при $\vec{v} = \nabla q \in \vec{G}(\Omega)$, что потенциал $q(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int\limits_{\partial\Omega} q\, dS = 0, \tag{1.18}$$

и тогда квадрат нормы (1.15) для таких потенциалов совпадает с интегралом Дирихле. $\square$

Упражнение 1.2. Доказать, что между гармоническими функциями $\varphi(x)$ (решениями уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в Ω) и их следами на границе $\partial\Omega$

$$\gamma\varphi := \varphi(x)|_{\partial\Omega} \tag{1.19}$$

имеется взаимно однозначное соответствие. $\square$

Лемма 1.1. Если область Ω имеет липшицеву границу $\partial\Omega$, то совокупность следов $\gamma\varphi$ гармонических функций $\varphi(x)$ из пространства $H_h^1(\Omega)$ образует пространство $H^{1/2}(\partial\Omega)$, плотное и компактно вложенное в $L_2(\partial\Omega)$. Обратно, любой функции $\gamma\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ отвечает единственный элемент $\varphi \in H_h^1(\Omega)$.

Доказательство леммы 1.1 здесь не приводится. $\square$

Из леммы 1.1 следует, что оператор следа $\gamma : H_h^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ является ограниченным оператором, и он имеет обратный ограниченный оператор γ^{-1} : $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H_h^1(\Omega)$. Если норму в $H^{1/2}(\partial\Omega)$ выбрать в виде

$$||\gamma\varphi||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega = ||\varphi||^2_{H_h^1(\Omega)}, \tag{1.20}$$

то указанный оператор будет изометрическим.

Возвращаясь к функционалу $F(p)$, заключаем, что это линейный ограниченный функционал на $H_h^1(\Omega)$ или, что равносильно (лемма 1.1), на $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Поэтому $F(p)$

можно представить через скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega)$ элемента γp и отвечающего функционалу $F(p)$ элемента из $H^{-1/2}(\partial\Omega) := \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$, который обозначим символом u_n. Тогда из (1.13) получаем формулу

$$F(p) = \int_\Omega \nabla p \cdot \vec{u}\, d\Omega + \int_\Omega p\, \mathrm{div}\vec{u}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\gamma p) u_n\, dS. \tag{1.21}$$

Элемент $u_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ будем называть нормальной составляющей поля $\vec{u}$ на границе $\partial\Omega$. Из (1.14) вытекает неравенство

$$||u_n||_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \le ||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)} + ||\mathrm{div}\vec{u}||_{L_2(\Omega)} \tag{1.22}$$

Полагая в (1.21) $p(x) \equiv 1$, получаем формулу Остроградского

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{u}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_n dS \quad (\mathrm{div}\vec{u} \in L_2(\Omega),\ u_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)). \tag{1.23}$$

Для соленоидального поля имеем из (1.22), (1.23)

$$||u_n||_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \le ||\vec{u}||_{\vec{L}_2(\Omega)}, \quad \int_{\partial\Omega} u_n dS = 0. \tag{1.24}$$

1.7 Формула Грина для оператора Лапласа. Гармонические поля.

Предположим, что $q \in H^1(\Omega)$, $\Delta q \in L_2(\Omega)$. Применим формулу (1.21), положив $\vec{u} = \nabla q$. Тогда

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q d\Omega + \int_\Omega p \Delta q d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\gamma p)(\nabla q)_n dS \quad (p \in H^1(\Omega)). \tag{1.25}$$

Обозначим

$$(\nabla q)_n =: \frac{\partial q}{\partial n}.$$

Тогда получаем (первую) формулу Грина для оператора Лапласа

$$-\int_\Omega (\Delta q) p\, d\Omega = \int_\Omega \nabla q \cdot \nabla p\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} (\gamma p) dS. \tag{1.26}$$

При этом $\frac{\partial q}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ и

$$||\frac{\partial q}{\partial n}||_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \le ||\nabla q||_{\vec{L}_2(\Omega)} + ||\Delta q||_{L_2(\Omega)} \le ||q||_{H^1(\Omega)} + ||\Delta q||_{L_2(\Omega)}. \tag{1.27}$$

Рассмотрим теперь поле $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$, которое одновременно является соленоидальным и потенциальным, т.е. поле, для которого $\mathrm{div}\vec{u} = 0$ и $\vec{u} = \nabla q \quad (q \in H^1(\Omega))$.

Из этого следует, что $\mathrm{div}\nabla q = \Delta q = 0$. Такие поля естественно назвать гармоническими. Совокупность всех гармонических полей образует подпространство $\vec{G}_h(\Omega)$ в пространстве соленоидальных полей:

$$\vec{G}_h(\Omega) = \vec{J}(\Omega) \bigcap \vec{G}(\Omega). \tag{1.28}$$

Из формулы Грина (1.26) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla p \, d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n}(\gamma p) dS \quad (\forall p \in H^1(\Omega)). \tag{1.29}$$

1.8 Разложение Вейля

Пусть $\vec{u}$ - любое соленоидальное поле. Для такого поля, согласно предыдущему, определена u_n, причём, в силу (1.23)

$$\int\limits_{\partial\Omega} u_n dS = 0.$$

По функции u_n найдем гармоническую функцию $q \in H^1_{h,\partial\Omega}(\Omega)$ с нулевым средним по $\partial\Omega$, для которой

$$\Delta q = 0 \, (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial q}{\partial n} = u_n \, (\text{на } \partial\Omega), \quad \int\limits_{\partial\Omega} q dS = 0. \tag{1.30}$$

Упражнение 1.3. Доказать, что для любой соленоидальной $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ задача (1.30) имеет единственное решение q из пространства

$$H^1_{h,\partial\Omega}(\Omega) := \{q \in H^1_h(\Omega) : \int\limits_{\partial\Omega} q dS = 0.\} \quad \Box \tag{1.31}$$

Введем обозначение $\vec{v} := \vec{u} - \nabla q$. Тогда

$$\mathrm{div}\vec{v} = \mathrm{div}\vec{u} - \Delta q = -\Delta q = 0 \, (\text{в } \Omega),$$

$$v_n = u_n - \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \, (\text{на } \partial\Omega).$$

Проверим, что поля $\vec{v}$ и ∇q ортогональны. Действительно, в силу (1.21)

$$\int\limits_{\Omega} \vec{v} \cdot \nabla q d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} v_n(\gamma q) dS = 0.$$

Таким образом, доказана

Лемма 1.2. Пространство $\vec{J}(\Omega) \subset \vec{L}_2(\Omega)$ соленоидальных полей разлагается в ортогональную сумму пространства потенциальных гармонических полей $\vec{G}_h(\Omega)$ и подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$ соленоидальных полей с нормальной составляющей на границе, равной нулю:

$$\vec{J}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega). \tag{1.32}$$

Следствием формул (1.9) и (1.32) является

Лемма 1.3. Пространство функций $\vec{L}_2(\Omega)$ допускает ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega), \tag{1.33}$$

называемое разложением Г.Вейля.

Напомним, что разложение Вейля (1.33) справедливо для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$.

Если граница области Ω, заполненной жидкостью, является твёрдой стенкой ($\partial\Omega = S$), то при движении идеальной несжимаемой жидкости в таком сосуде на границе S для поля скоростей $\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega)$ должно выполняться условие непротекания $u_n = 0\,$(на S), причём поле $\vec{u}$ должно быть соленоидальным. Отсюда получаем следующий результат.

Лемма 1.4. Поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости, движущейся в замкнутом сосуде Ω, отвечающие конечной кинетической энергии, составляют пространство

$$\vec{J}_0(\Omega) = \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\vec{u} = 0\,(\text{в } \Omega),\, u_n = 0\,(\text{на } S = \partial\Omega)\}.$$

Лемма 1.5. Ортогональная сумма пространств $\vec{G}_h(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega)$ содержит все потенциальные поля.

Доказательство. Пусть $\vec{u} = \nabla p \in \vec{L}_2(\Omega)$; тогда, согласно разложению (1.33), имеем

$$\nabla p = \vec{v} + \nabla p_1 + \nabla p_2,\ \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega),\ \nabla p_1 \in \vec{G}_h(\Omega),\ \nabla p_2 \in \vec{G}_0(\Omega). \tag{1.34}$$

Так как $\operatorname{div}\vec{v} = 0\,$(в Ω) и $v_n = 0\,$(на $\partial\Omega$), то в силу (1.21) поле $\vec{v}$ ортогонально всем потенциальным полям. Умножая (1.34) скалярно на $\vec{v}$, получим

$$||\vec{v}||^2_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega |\vec{v}|^2 d\Omega = 0,$$

т.е. $\vec{v} = \vec{0}$, и тогда

$$\nabla p = \nabla p_1 + \nabla p_2,\ \nabla p_1 \in \vec{G}_h(\Omega),\ \nabla p_2 \in \vec{G}_0(\Omega).$$

$\square$

1.9 Пространство полей скоростей идеальной жидкости в открытом сосуде.

Если идеальная жидкость находится в открытом сосуде, то в состоянии покоя жидкости граница области, заполненной жидкостью, состоит из двух частей: твердой стенки S и свободной поверхности $\Gamma = \partial\Omega \setminus \bar{S}$. На твердой стенке S снова выполняется условие непротекания $u_n = 0$, но на свободной поверхности такого условия не требуется. Поэтому пространство полей скоростей движения жидкости в открытом сосуде шире, чем $\vec{J}_0(\Omega)$. Расширение множества $\vec{J}_0(\Omega)$ можно произвести за счёт добавления к нему тех потенциальных гармонических полей, для которых нормальная составляющая поля, т.е. нормальная производная потенциала, равна нулю на твёрдой стенке S.

Рассмотрим вспомогательное пространство $\tilde{H}^1_\Gamma(\Omega)$ с нормой

$$||\varphi||^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega + \left(\int\limits_\Gamma \varphi d\Gamma\right)^2.$$

Если в отличие от предыдущего потенциал поля φ нормировать условием

$$\int\limits_\Gamma \varphi d\Gamma = 0, \tag{1.35}$$

то для поля $\vec{u} = \nabla\varphi$ выполнено соотношение

$$||\vec{u}||^2_{\vec{L}_2(\Omega)} = ||\varphi||^2_{H^1_\Gamma(\Omega)}; \tag{1.36}$$

далее такое подпространство пространства $\tilde{H}^1_\Gamma(\Omega)$ с условием (1.35) назовём $H^1_\Gamma(\Omega)$.

Лемма 1.6. Имеет место ортогональное разложение

$$\vec{G}_h(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{1.37}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega) := \{\vec{v} = \nabla\psi \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \Delta\psi = 0\,(\text{в } \Omega),\ \psi = 0\,(\text{на } \Gamma)\},$$
$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \{\vec{w} = \nabla\varphi \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \Delta\varphi = 0\,(\text{в } \Omega),\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,(\text{на } S)\}.$$

Доказательство основано на применении формулы Грина (1.26).

Пусть $\vec{w} = \nabla\varphi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, $\vec{v} = \nabla\psi \in \vec{G}_h(\Omega)$ и $\vec{v} \perp \vec{w}$. Тогда по формуле (1.26) имеем

$$0 = -\int\limits_\Omega (\Delta\varphi)\psi d\Omega - \int\limits_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \psi dS = \int\limits_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\psi d\Gamma.$$

Здесь правая часть представляет собой линейный ограниченный функционал относительно $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ $\left(\int\limits_\Gamma \psi d\Gamma = 0\right)$. Выбирая в качестве φ последовательность

$\varphi = \varphi_k$ такую, что $\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \to \psi$ (в $L_2(\Gamma)$), приходим к выводу, что $\psi = 0$ (на Γ), т.е. $\vec{v} = \nabla\psi \in \vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega)$. $\square$

Из (1.33) и (1.37) получаем следующий итоговый результат.

Лемма 1.7. Имеет место ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega) \ \square \tag{1.38}$$

В качестве пространства полей скоростей идеальной жидкости в открытом сосуде следует выбрать подпространство

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega); \tag{1.39}$$

тогда

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1.40}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \vec{G}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega), \tag{1.41}$$

или

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{J}_0(\Omega). \ \square \tag{1.42}$$

В дальнейшем ортогональные разложения (1.38)-(1.42) будут играть ключевую роль при исследовании малых движений идеальной жидкости в открытом сосуде.

2 Пространства и операторы гидродинамики вязкой жидкости

Здесь вводятся в рассмотрение основные гильбертовы пространства векторных полей, связанные с движением вязкой несжимаемой жидкости как в замкнутом, так и в открытом сосуде. Норма в этих пространствах вводится с помощью квадратичной формы, представляющей собой скорость диссипации энергии в жидкости. Рассматривается векторный оператор Лапласа, для которого выводится формула Грина. Исследуются тождество и неравенства Корна, играющие большую роль в дальнейшем.

2.1 Силы внутреннего трения. Диссипация энергии.

При движении вязкой жидкости силы трения между слоями движущейся жидкости пропорциональны градиентам скоростей, поэтому естественно предположить, что поле скоростей движения вязкой жидкости обладает дифференцируемыми составляющими. В связи с этим для такого поля $\vec{u} = \sum_{k=1}^{3} u_k \vec{e}_k$ будем считать, что его компоненты $u_i(x) \in H^1(\Omega)$ $(i = 1, 2, 3)$. Пространство всех таких полей обозначим через $\vec{H}^1(\Omega)$, а норму введём по формуде

$$||\vec{u}||^2_{\vec{H}^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{3} ||u_k||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Заметим, что эквивалентные нормы в $H^1(\Omega)$ порождают эквивалентные нормы в $\vec{H}^1(\Omega)$.

При движении однородной вязкой жидкости тензор напряжений, возникающих от действия вязких сил, имеет компоненты

$$\mu\tau_{ij}(\vec{u}) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\ (i, j = 1, 2, 3), \tag{2.2}$$

где $\mu > 0$ - коэффициент динамической вязкости. Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии, скорость которой в объеме Ω вычисляется по формуле

$$\mu E(\vec{u}, \vec{u}) := \frac{1}{2}\mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega. \tag{2.3}$$

Очевидно, что имеют место неравенства

$$E(\vec{u}, \vec{u}) \leq 2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega \leq 2||\vec{u}||^2_{\vec{H}^1(\Omega)}. \tag{2.4}$$

Квадратичной форме $E(\vec{u}, \vec{u})$ отвечает билинейная форма

$$E(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) d\Omega, \tag{2.5}$$

определяемая для любой пары $\vec{u}$ и $\vec{v}$ из $\vec{H}^1(\Omega)$. Величина $\mu E(\vec{u}, \vec{v})$ имеет физический смысл работы, выполняемой за единицу времени вязкими силами, возникающими при наличии поля скоростей $\vec{u}$, на возможном перемещении, определяемом полем скоростей $\vec{v}$. Это видно из представления

$$\mu E(\vec{u}, \vec{v}) = \mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega. \tag{2.6}$$

2.2 Оператор дивергенции. Соленоидальные поля.

Оператор div на пространстве $\vec{H}^1(\Omega) \subset \vec{L}_2(\Omega)$ вычисляется по обычной формуле

$$\mathrm{div}\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{2.7}$$

Упражнение 2.1. Доказать формулу (2.7), опираясь на определение дивергенции (1.6) и соотношение

$$-\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_k} u_i d\Omega = \int_\Omega p \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega \ (p \in H_0^1(\Omega),\ u_i \in H^1(\Omega)). \tag{2.8}$$

Упражнение 2.2. Доказать формулу (2.8).

Упражнение 2.3. Доказать, что оператор div ограниченно действует из пространства $\vec{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и

$$||\mathrm{div}\vec{u}||_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{3}||\vec{u}||_{\vec{H}^1(\Omega)}. \ \square \tag{2.9}$$

В силу (2.9) совокупность соленоидальных полей из $\vec{H}^1(\Omega)$ образует замкнутое подпространство пространства $\vec{H}^1(\Omega)$; далее это подпространство будет обозначаться через $\vec{J}^1(\Omega)$.

Лемма 2.1. Оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$ отображает пространство $\vec{J}^1(\Omega)$ в пространство $\vec{J}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in \vec{J}^1(\Omega)$. Рассмотрим поле $\partial\vec{u}/\partial x_i$, которое принадлежит $\vec{L}_2(\Omega)$. Выберем финитную в Ω функцию $q(x)$ и вычислим

$$\int_\Omega q\, \mathrm{div} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} d\Omega = -\int_\Omega \nabla q \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} d\Omega = \int_\Omega \nabla \frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot \vec{u} d\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial q}{\partial x_i} \mathrm{div}\vec{u} d\Omega = 0. \tag{2.10}$$

Здесь использовано дважды определение div, интегрирование по частям и то, что $\frac{\partial q}{\partial x_i}$ также финитна. Итак

$$\int_\Omega q\, \mathrm{div} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} d\Omega = 0. \tag{2.11}$$

Так как финитные функции плотны в $H_0^1(\Omega)$ и $\mathrm{div}\partial\vec{u}/\partial x_i \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$, то из последнего равенства следует, что

$$\mathrm{div} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} = 0, \tag{2.12}$$

т.е. $\partial\vec{u}/\partial x_i \in \vec{J}(\Omega)$. $\square$

Определим для любого поля $\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega)$ векторное поле $\mathrm{rot}\,\vec{u} := \nabla \times \vec{u}$ с компонентами

$$(\mathrm{rot}\,\vec{u})_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3},\ (\mathrm{rot}\,\vec{u})_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1},\ (\mathrm{rot}\,\vec{u})_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \tag{2.13}$$

Лемма 2.2. Поле $\mathrm{rot}\,\vec{u}\,(\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega))$ является соленоидальным:

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} \in \vec{J}(\Omega). \tag{2.14}$$

Доказательство. Действительно, при финитной $q(x)$ имеем

$$\int_\Omega q\, \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{u}) d\Omega = -\int_\Omega \nabla q \cdot \mathrm{rot}\,\vec{u} d\Omega = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\nabla q \cdot \vec{u} d\Omega = 0, \tag{2.15}$$

и так как финитные функции плотны в $H_0^1(\Omega)$, то

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{u}) = 0\,(\text{в } H^{-1}(\Omega)). \ \square \tag{2.16}$$

2.3 Векторный оператор Лапласа. Формула Грина.

Компоненты u_i векторного поля $\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega)$ имеют частные производные из $L_2(\Omega)$, поэтому к полю ∇u_i можно применить оператор div, и тогда $\mathrm{div}\nabla u_i = \Delta u_i$. Поле с компонентами Δu_i обозначим далее через $\Delta\vec{u}$. Оператор Δ, определенный на $\vec{H}^1(\Omega)$, называется векторным оператором Лапласа.

Лемма 2.3. Имеет место тождество

$$\Delta u_i = \mathrm{div}\vec{\tau}_i - \mathrm{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i},$$

$$\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i(\vec{u}) := \sum_{k=1}^{3} \tau_{ik}(\vec{u})\vec{e}_k, \tag{2.17}$$

справедливое для любого поля $\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega)$. Все члены тождества (2.17) являются элементами пространства $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$.

Доказательство. Если $q \in H_0^1(\Omega)$, то

$$\int_\Omega (\mathrm{div}\vec{\tau}_i) q d\Omega = -\int_\Omega \vec{\tau}_i \cdot \nabla q d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \frac{\partial q}{\partial x_k} d\Omega = -\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla q d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} \cdot \nabla q d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \mathrm{div}(\nabla u_i) q d\Omega + \int_\Omega \mathrm{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} q d\Omega. \tag{2.18}$$

Отсюда в силу произвольности $q \in H_0^1(\Omega)$ следует утверждение леммы. □

Следствие. Если $\mathrm{div}\vec{u} = 0$, $\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega)$, то в силу (2.12) из (2.17) получаем

$$\Delta u_i = \mathrm{div}\vec{\tau}_i \, (\vec{u} \in \vec{J}^1(\Omega),\ i = 1, 2, 3) \ \square \tag{2.19}$$

Лемма 2.4. Пусть поле $\vec{u} \in \vec{H}^2(\Omega) \bigcap \vec{J}(\Omega)$, $\vec{v} \in \vec{H}^1(\Omega)$. Тогда имеет место формула Грина для векторного оператора Лапласа:

$$E(\vec{u}, \vec{v}) = -\int_\Omega \Delta\vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{3} (\vec{\tau}_i(\vec{u}))_n v_i dS. \tag{2.20}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $\mathrm{div}\vec{\tau}_i(\vec{u}) \in L_2(\Omega)$, и можно воспользоваться формулой (1.21) для поля $\vec{\tau}_i(\vec{u})$, а также тождеством (2.19); имеем для каждого $i = 1, 2, 3$:

$$\int_\Omega \vec{\tau}_i(\vec{u}) \cdot \nabla v_i d\Omega = -\int_\Omega \mathrm{div}\vec{\tau}_i(u) v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\tau_i)_n v_i dS =$$
$$= -\int_\Omega (\Delta u_i) v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\tau_i)_n v_i dS.$$

Суммируя по i, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}d\Omega=-\int\limits_{\Omega}(\Delta\vec{u})\cdot\vec{v}d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}(\vec{\tau}_i(\vec{u}))_n v_i dS,$$

т.е. к формуле (2.20). □

2.4 Движение вязкой жидкости в замкнутом сосуде. Тождество и неравенство Корна.

Если вязкая жидкость целиком заполняет неподвижный сосуд Ω, то на стенках $\partial\Omega =: S$ выполняется условие прилипания: $\vec{u}=\vec{0}$ (на S).

Рассмотрим для $\vec{u}\in\vec{H}^1(\Omega)$ тождества

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\ (i,j=1,2,3),\tag{2.21}$$

и введём обозначения

$$r_{ij}(\vec{u}):=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.\tag{2.22}$$

Суммируя (2.21) по j, получаем

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}|\tau_{ij}|^2-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}|r_{ij}|^2=\nabla u_i\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}.\tag{2.23}$$

Лемма 2.5. Если для поля $\vec{u}\in\vec{H}^1(\Omega)$ выполнены условия

$$\mathrm{div}\vec{u}=0\ (\text{в }\Omega),\ \vec{u}=\vec{0}\ (\text{на }S=\partial\Omega),\tag{2.24}$$

то имеет место следующее тождество Корна

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\left|\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega&=\tfrac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}|\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega+\tfrac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}|r_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega=\\&=\tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}|\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega=E(\vec{u},\vec{u}).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Доказательство. Проинтегрируем (2.23) по области Ω, имеем

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}|\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega-\tfrac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}|r_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega&=\int\limits_{\Omega}\nabla u_i\cdot\tfrac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}d\Omega=\\&=-\int\limits_{\Omega}u_i\mathrm{div}\tfrac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}d\Omega=0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Здесь при выводе было использовано граничное условие (2.24), а также свойство $\mathrm{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}=0$, следующее из условия соленоидальности (2.24) (см. (2.12)).

Из (2.26) получаем, что

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}|\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega=\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}|r_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega.\tag{2.27}$$

Отсюда и из тождества

$$\frac{1}{4}|\tau_{ij}(\vec{u})|^2 + \frac{1}{4}|r_{ij}(\vec{u})|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2 \tag{2.28}$$

следует соотношение

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left|\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega = \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left|\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega + \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left|\tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega = \\ = \tfrac{1}{4}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega + \tfrac{1}{4}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |r_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega = \\ = \tfrac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega = E(\vec{u},\vec{u}). \ \square\end{gathered}$$

Лемма 2.6. Если взамен условий (2.24) выполнено лишь условие прилипания $\vec{u} = \vec{0}$ (на $S = \partial\Omega$), то для элементов $\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega)$ имеет место неравенство Корна

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega \le E(\vec{u},\vec{u}). \tag{2.29}$$

Доказательство. Предположим, что поле $\vec{u}$ финитное. Тогда при любом $i = 1, 2, 3$

$$\int\limits_\Omega \nabla u_i \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} d\Omega = -\int\limits_\Omega \nabla \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot \vec{u} d\Omega = \int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \mathrm{div}\vec{u} d\Omega. \tag{2.30}$$

(Здесь сначала было проведено интегрирование по частям, а затем использовано определение дивергенции поля.) Суммируя по i и пользуясь тождеством (2.23) получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \cdot \tfrac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} d\Omega = \int\limits_\Omega |\mathrm{div}\vec{u}|^2 d\Omega = \\ = \tfrac{1}{4}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega - \tfrac{1}{4}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |r_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega \ge 0,\end{gathered} \tag{2.31}$$

откуда следует, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega \ge \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 |r_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega. \tag{2.32}$$

Повторяя вывод формулы (2.25), приходим, с учетом (2.32), к неравенству (2.29). $\square$

Замечание. Если в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$ ввести норму в одной из эквивалентных форм

$$||\vec{u}||^2_{\vec{H}^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\Omega + \left(\int\limits_{\partial\Omega} \vec{u} dS\right)^2,$$

то неравенство Корна (с учетом условия прилипания на $\partial\Omega$) можно записать в виде

$$||\vec{u}||^2_{\vec{H}^1(\Omega)} \le E(\vec{u},\vec{u}). \tag{2.33}$$

Объединяя это неравенство с неравенством (2.4), получаем

$$||\vec{u}||^2_{\vec{H}^1(\Omega)} \leq E(\vec{u},\vec{u}) \leq 2||\vec{u}||^2_{\vec{H}^1(\Omega)}. \tag{2.34}$$

В силу плотности в $\vec{H}^1_0(\Omega)$ совокупности финитных полей предельным переходом показывается, что (2.34) справедливо для любого поля $\vec{u} \in \vec{H}^1_0(\Omega)$. □

Неравенства (2.34) говорят о том, что величину $E(\vec{u},\vec{u})$ можно принять за квадрат нормы, эквивалентной основной норме пространства $\vec{H}^1_0(\Omega)$. В дальнейшем замыкание множества финитных соленоидальных полей в пространстве $\vec{H}^1_0(\Omega) \subset \vec{H}^1(\Omega)$ будем обозначать через $\vec{J}^{\,1}_0(\Omega)$.

Лемма 2.7. Подпространство $\vec{J}^{\,1}_0(\Omega)$ плотно в подпространстве $\vec{J}_0(\Omega)$, введённом в §1 (см.лемму 1.2).

Доказательство этого факта следует из того, что совокупность финитных соленоидальных полей плотна как в $\vec{J}^{\,1}_0(\Omega)$, так и в $\vec{J}_0(\Omega)$. □

Из изложенного следует, что для случая замкнутого сосуда пространство $\vec{J}^{\,1}_0(\Omega)$ представляет собой всю совокупность векторных полей скоростей вязкой несжимаемой жидкости с конечной скоростью диссипации энергии.

2.5 Пространства полей скоростей вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде.

Предположим, что Ω – липшицева область, расположенная в нижнем полупространстве $x_3 < 0$. Граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из части Γ плоскости $x_3 = 0$ и поверхности S. Область Ω заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, причём S - твёрдая стенка сосуда Ω, а Γ - её свободная поверхность в состоянии покоя жидкости. Будем считать также, что Γ тоже имеет липшицеву границу $\partial\Gamma$.

Рассмотрим линейное множество $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$ полей из $\vec{J}^{\,1}(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности S, и замыкание этого множества в $\vec{L}_2(\Omega)$ обозначим через $\tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega)$. Финитные в Ω соленоидальные поля принадлежат $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$, и так как множество таких финитных полей плотно в $\vec{J}_0(\Omega)$, то

$$\vec{J}_0(\Omega) \subset \tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega) \subset \vec{J}(\Omega). \tag{2.35}$$

Покажем, что $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$ содержит достаточно богатое множество полей специального вида. Пусть $\varphi(x_1,x_2)$ - произвольная финитная в Γ функция и Γ_0 - открытое множество, содержащее носитель функции φ и содержащееся вместе с замыканием внутри Γ. Обозначим через $C_h = \Gamma_0 \times [-h, 0]$ цилиндр, лежащий при достаточно малом h в области Ω. Если $\psi(x_3)$ - такая гладкая на $[-h,0]$ функция, что $\psi(-h) = 0$, то поле $\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^{3} v_k\vec{e}_k$, определённое при $x_3 < 0$, равное нулю вне C_h и задаваемое в

C_h формулами

$$v_1 = \psi(x_3)\varphi(x_1, x_2),\; v_2 = 0,\; v_3 = -\Psi(x_3)\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \tag{2.36}$$

где $\Psi(x_3)$ - первообразная для $\psi(x_3)$, обращающаяся в нуль при $x_3 = -h$, будет принадлежать $\vec{J}^1(\Omega)$ и обращаться в нуль в окрестности S, т.е. $\vec{v} \in \vec{J}_{00,S}(\Omega)$.

Учитывая вложения (2.35), опишем ортогональное дополнение к подпространству $\tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega)$ в пространстве $\vec{J}(\Omega)$. Если потенциал p гармонического поля из $\vec{J}(\Omega)$ обращается в нуль на Γ, то для любого поля $\vec{v}$ из $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega}\vec{v}\cdot\nabla p d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega}v_n(\gamma p)dS = \int\limits_{\Gamma}v_3(\gamma p)d\Gamma = 0,$$

т.е. поле $\vec{v}$ ортогонально $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$, а значит и $\tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega)$. Обратно, в силу разложения Вейля и включений (2.35) элемент, ортогональный $\tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}(\Omega)$, представляет гармоническое потенциальное поле ∇p. Учтём теперь тот факт, что поле ∇p ортогонально к полям специального вида (2.36). Тогда

$$0 = \int\limits_{\Omega}\vec{v}\cdot\nabla p d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega}v_n(\gamma p)dS = \int\limits_{\Gamma}v_3(\gamma p)d\Gamma = -\Psi(0)\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\gamma p)d\Gamma. \tag{2.37}$$

Если $\psi(x_3)$ выбрать так, чтобы

$$\Psi(0) = \int\limits_{-h}^{0}\psi(x_3)dx_3 \neq 0,$$

то из (2.37) будет следовать, что

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\gamma p)d\Gamma = 0$$

для любой финитной в Γ функции $\varphi(x_1, x_2)$. Из этого вытекает, что $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$ на Γ. Аналогично устанавливается, что $\partial p/\partial x_2 = 0$ на Γ, и тогда $p(x_1, x_2) \equiv \mathrm{const}$ на Γ. С учетом условия $\int\limits_{\Gamma} p d\Gamma = 0$ получаем, что $p \equiv 0\,$(на Γ).

Таким образом, ортогональное дополнение к $\tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}(\Omega)$ состоит из гармонических потенциальных полей, потенциал которых равен нулю на Γ, т.е. это дополнение есть $\vec{G}_{0,\Gamma,h}(\Omega)$.

Следствием этих рассуждений является

Лемма 2.8. Введенное выше пространство $\tilde{\vec{J}}_{0,S}(\Omega) = \overline{\vec{J}_{00,S}(\Omega)}$ совпадает с пространством $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ полей скоростей идеальной жидкости в открытом сосуде. $\square$

Обозначим замыкание совокупности $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$ в норме пространства $\vec{J}^1(\Omega)$ через $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$.

Лемма 2.9. Пространство $\vec{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)$ плотно в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Доказательство следует из того, что $\vec{J}_{00,S}(\Omega)$ плотно как в $\vec{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)$, так и в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. □

Пространство $\vec{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)$ играет основную роль при исследовании движений вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде: его элементы исчерпывают всю совокупность векторных соленоидальных полей, удовлетворяющих условию прилипания на твердой стенке сосуда и имеющих конечную скорость диссипации энергии.

Замечание. В п.2.4 было получено неравенство Корна (2.29), из которого следовало, что для пространства $\vec{J}^{\,1}_{0}(\Omega)$ норма Дирихле эквивалентна норме $(E(\vec{u},\vec{u}))^{\frac{1}{2}}$. Неравенство Корна имеет далеко идущие обобщения, из которых, в частности, следует, что для задачи о колебаниях вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде оно также справедливо:

$$E(\vec{u},\vec{u}) \geq c \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 d\Omega \quad (c > 0,\ \vec{u} \in \vec{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)). \tag{2.38}$$

Часть 2. Малые движения и собственные колебания идеальной жидкости в сосуде.

В этой части курса рассматриваются линейные начально-краевые задачи гидродинамики идеальной жидкости, полностью либо частично заполняющей неподвижный либо вращающийся относительно неподвижной оси сосуд. Каждая задача приводится в классической постановке, затем с помощью методов ортогонального проектирования на подпространство, введённое в §1, она приводится к дифференциально-операторному уравнению в соответственно подобранном гильбертовом пространстве. Исследуется задача Коши для этого уравнения, а также задача о собственных колебаниях, позволяющая найти частоты и моды колебаний изучаемых гидродинамических систем. Приводятся вариационные формулировки задач о собственных колебаниях, а также асимптотические формулы для собственных частот в тех или иных ситуациях.

3 Колебания капиллярной жидкости в неподвижном сосуде.

В условиях невесомости или близких к ним при изучении проблемы колебаний жидкости, частично заполняющей сосуд, следует учитывать капиллярные (поверхностные) силы, действующие на границах раздела "жидкость-газ", "жидкость-твердое тело", "газ-твердое тело". Эти силы на больших расстояниях от поверхности Земли, т.е. в околоземном космическом пространстве, могут оказаться одного порядка с гравитационными и центробежными, а их учет позволяет обнаружить качественно новые эффекты, обусловленные явлением капиллярности.

3.1 О состоянии равновесия.

Будем считать, что неподвижный жесткий сосуд частично заполнен идеальной капиллярной жидкостью плотности ρ и находится в поле внешних сил $\vec{F} = \vec{F}(t,x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Как хорошо известно, в капиллярах, т.е. в достаточно тонких трубочках, уже в обычных условиях при действии силы тяжести свободная равновесная поверхность жидкости не является горизонтальной, т.е. расположенной перпендикулярно направлению ускорения силы тяжести, а достаточно искривлена. Это искривление поверхности вызвано действием капиллярных (поверхностных) сил. Аналогичное явление наблюдается и в обычном контейнере с жидким топливом в условиях пониженной гравитации или при полной невесомости.

Обозначим через Ω область, занятую жидкостью при равновесии, через S - твёрдую стенку сосуда, а через Γ - равновесную свободную поверхность жидкости. Считаем, что область Ω имеет липшицеву границу $\partial\Omega$.

При равновесии жидкость покоится, а возникающее в ней давление $P_0(x_3)$ компенсируется полем $\vec{F}_0$ потенциальных внешних сил (см. п.0.2): $\vec{F} = \vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$,

$$P_0(x_3) = -\rho g x_3 + C, \; C = const. \tag{3.1}$$

Далее, на границе Γ раздела "жидкость-газ"выполняется условие Лапласа для перепада давлений:

$$P_0(x_3) - p_a = -\sigma(k_1 + k_2) \, (\text{на } \Gamma), \tag{3.2}$$

где p_a - внешнее постоянное давление, $\sigma \geq 0$ - коэффициент поверхностного натяжения на границе "жидкость-газ", $k_i = k_i(x)$, $x \in \Gamma$ - главные кривизны поверхности Γ; они считаются положительными, если выпуклость Γ направлена внутрь Ω.

Условие (3.2) означает, что разность давлений при переходе через равновесную поверхность Γ равна не нулю, а капиллярному скачку давлений, появляющемуся вследствие действия поверхностных сил.

Известно также, что в состоянии покоя двугранный угол δ между поверхностями Γ и S не может быть произвольным, а определяется свойствами трёх контактирующих сред. Именно, если $\sigma_1 \geq 0$ - коэффициент поверхностного натяжения на границе "газ-твёрдое тело", а σ_0 - соответствующий коэффициент на границе "жидкость-твёрдое тело", то на контуре $\partial\Gamma$ в состоянии равновесия должно выполняться условие Дюпре-Юнга

$$\sigma \cos \sigma = \sigma_1 - \sigma_0, \tag{3.3}$$

откуда следует, что угол контакта σ (его называют также краевым углом, углом смачивания) должен быть постоянным.

Условие (3.1) - (3.3) вместе с дополнительным условием

$$\int_\Omega d\Omega = \mathrm{mes}\,\Omega =: V, \tag{3.4}$$

задающим величину объема V, занятого жидкостью, определяют нелинейную краевую задачу о нахождении равновесной поверхности Γ и вместе с ней области Ω. Исследование этой задачи не входит в круг вопросов, рассматриваемом в данном курсе лекций. Её решение для некоторых типичных случаев можно найти в первой части книги [2], в её последующих изданиях [3] и [4], а также в [5].

3.2 Постановка задачи о малых колебаниях.

Итак, считаем, что равновесное состояние капиллярной жидкости в сосуде определено, т.е. известны поверхность Γ, область Ω, а также равновесное давление $P_0(x_3)$. Рассмотрим линейную задачу о малых движениях жидкости под действием внешнего силового поля

$$\vec{F}(t,x) = \vec{F}_0 + \vec{f}(t,x),\ \vec{F}_0 = -g\vec{e}_3, \tag{3.5}$$

а также начальных условий.

Линеаризация уравнений движения Эйлера, как показано в п.0.2, приводит к уравнениям

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f}(t,x),\ \mathrm{div}\vec{u} = 0\,(\text{в } \Omega) \tag{3.6}$$

для поля скорости $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ и динамического давления $p(t,x)$. На твёрдой стенке S должно выполняться условие непротекания:

$$u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0\,(\text{на } S). \tag{3.7}$$

Для вывода кинематического и динамического граничных условий на равновесной поверхности Γ, а также для получения краевого условия на контуре $\partial\Gamma$, характерного для капиллярной жидкости, введём в окрестности Γ криволинейную систему координат $\tilde{O}\xi^1\xi^2\xi^3$ таким образом, чтобы поверхность Γ имела уравнение $\xi^3 = 0$, а координатные ξ^3-линии были при $\xi^3 = 0$ (т.е. на Γ) направлены по нормали $\vec{n}$ к Γ и имели соответствующие коэффициенты Ламе $l^3 = l^3(x) \equiv 1\,(x \in \Gamma)$. Тогда движущаяся свободная поверхность жидкости $\tilde{\Gamma}(t)$ может быть описана функцией

$$\xi^3 = \zeta(t,\hat{\xi}), \qquad \hat{\xi} := (\xi^1,\xi^2) \in \Gamma, \tag{3.8}$$

совпадающей, с точностью до малых более высокого, чем первый, порядка, с отклонением вдоль нормали $\vec{n}$ движущейся поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$ от равновесной поверхности Γ.

Получим из (3.8) кинематическое условие, о котором уже упоминалось выше. Физически оно состоит в том, что частица жидкости, движущаяся по закону

$$\xi^i = \xi^i(t), \qquad i = 1, 2, 3,$$

и находящаяся на свободной поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$ в некоторый момент времени, остаётся на этой поверхности во всё время движения. Это в силу (3.8) означает, что

$$\xi^3 \equiv \zeta(t, \xi^1(t), \xi^2(t)),$$

и тогда

$$\frac{d\xi^3}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi^1} \cdot \frac{d\xi^1}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi^2} \cdot \frac{d\xi^2}{dt}.$$

Сохраняя здесь лишь бесконечно малые величины первого порядка малости и вспоминая, что $d\xi^3/dt = u_n$ (в силу выбора коэффициента Ламе l^3 на Γ), приходим к известному кинематическому условию

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_n \,(\text{на } \Gamma). \tag{3.9}$$

Динамическое условие на Γ, а также краевое условие на $\partial\Gamma$ можно в данной задаче вывести, опираясь на так называемый вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. Однако здесь будет приведён другой, более наглядный способ вывода динамического условия.

В процессе движения идеальной капиллярной жидкости на движущейся свободной поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$ выполняется условие, аналогичное условию (3.2): разность давлений в жидкости и газе равна капиллярному скачку давлений, обусловленному своим появлением действию поверхностных сил. Имеем

$$P(t, x) - p_a = -\sigma(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \,(\text{на } \tilde{\Gamma}(t)), \tag{3.10}$$

где $P(t, x)$ – полное давление в жидкости, p_a - внешнее постоянное давление, а $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ - главные кривизны поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$.

Для линеаризации условия (3.10) и его сноса на равновесную поверхность Γ воспользуемся известной из геометрии формулой для вариации удвоенной средней кривизны поверхности:

$$(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) - (k_1 + k_2) = (k_1^2 + k_2^2)\zeta + \Delta_\Gamma \zeta + O(\zeta^2), \tag{3.11}$$

где Δ_Γ - двумерный оператор Лапласа-Бельтрами, записанный в криволинейной системе координат $\tilde{O}\xi^1\xi^2$, заданной на Γ. Учтём теперь, что $P(t, x) = P_0(x_3) + p(t, x)$, где $P_0(x_3)$ - равновесное давление (3.1), удовлетворяющее условию равновесия (3.2) на Γ, а $p(t,x)$ - динамическое давление. Линеаризуем условие (3.10) с использованием (3.11) и (3.2). Это приводит к следующему динамическому условию:

$$p = \sigma L\zeta := \sigma[-\Delta_\Gamma + a(x)]\zeta,\ x \in \Gamma, \quad a(x) := -(k_1^2 + k_2^2) + g\rho\sigma^{-1}\cos(\widehat{\vec{n},x_3}). \tag{3.12}$$

Здесь считается, что давление p определено с точностью до аддитивной постоянной. Если считать дополнительно, что выполнено условие нормировки $\int\limits_\Gamma p\,d\Gamma = 0$, то следует в (3.12) сделать замену p на $p + C$, где $C = const$.

Приведём теперь без вывода краевое условие на контуре $\partial\Gamma$, которое должно быть выполнено для капиллярной жидкости. Из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, применённого к рассматриваемой гидромеханической системе, можно установить, что в процессе движений капиллярной жидкости в сосуде угол смачивания δ сохраняется. Линеаризация этого условия с учётом малости $\zeta(t,\hat{\xi})$ даёт соотношение

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0\,(\text{на } \partial\Gamma), \quad \chi := \frac{k_\Gamma\cos\delta - k_S}{\sin\delta}. \tag{3.13}$$

Здесь k_Γ и k_S - кривизны сечений поверхностей Γ и S плоскостью, перпендикулярной к $\partial\Gamma$, вычисленные на $\partial\Gamma$, а через $\partial/\partial\nu$ обозначена производная по нормали $\vec{\nu}$ к $\partial\Gamma$, совпадающая с касательной к следу Γ в указанной плоскости. (Вывод формулы (3.13) можно найти в [2, с.109].)

Отметим еще, что в процессе движения несжимаемой жидкости её объём V сохраняется. Следствием этого факта является линеаризованное условие сохранения объема

$$\int\limits_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0. \tag{3.14}$$

Сформулируем полную постановку начально-краевой задачи о малых движениях идеальной капиллярной жидкости в частично заполненном неподвижном сосуде. Она состоит в решении уравнений (3.6) с граничными условиями (3.7), (3.9), (3.12) - (3.14), а также начальными условиями

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x)\,(\text{в } \Omega),\ \zeta(0,\hat{\xi}) = \zeta^0(\hat{\xi})\,(\text{на } \Gamma). \tag{3.15}$$

Искомыми функциями здесь являются поле скоростей $\vec{u}(t,x)$, поле динамического давления $p(t,x)$ и функция $\zeta(t,\hat{\xi})$, описывающая отклонение свободной движущейся поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$ от равновесной поверхности Γ. Заданными (известными) считаются малое поле внешних сил $\vec{f}(t,x)$, а также функции $\vec{u}^0(x)$ и $\zeta^0(\hat{\xi})$, определяющие начальные условия.

3.3 Закон баланса полной энергии.

Для получения этого закона из уравнений (3.6) и условий (3.7), (3.9), (3.12) - (3.15) умножим (скалярно в $\mathbb{R}^3$) обе части первого уравнения (3.6) на $\rho\vec{u}$, проинтегрируем по Ω и учтём условия соленоидальности поля $\vec{u}$ в Ω и непротекания на S. Получим

$$\rho\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{u}d\Omega+\int\limits_{\Gamma}pu_n d\Gamma=\rho\int\limits_{\Omega}\vec{f}\cdot\vec{u}d\Omega. \tag{3.16}$$

Воспользуемся далее динамическим условием (3.12), кинематическим условием (3.9), а также первой формулой Грина для оператора Лапласа-Бельтрами. Она имеет тот же вид, как и для обычного оператора Лапласа:

$$-\int\limits_{\Gamma}(\Delta_{\Gamma}\varphi)\psi d\Gamma=\int\limits_{\Gamma}\nabla_{\Gamma}(\varphi,\psi)d\Gamma-\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\psi dS, \tag{3.17}$$

где $\nabla_{\Gamma}(\varphi,\varphi)$ - так называемый первый дифференциальный параметр Бельтрами, служащий естественным обощением квадрата градиента функции, заданной на поверхности Γ, $\nabla_{\Gamma}(\varphi,\psi)$ - соответствующее билинейное выражение. Используя еще краевое условие (3.13) на контуре $\partial\Gamma$, получим окончательно

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\rho\int\limits_{\Omega}|\vec{u}|^2d\Omega+\sigma||\zeta||_B^2\}=\rho\int\limits_{\Omega}\vec{f}\cdot\vec{u}d\Omega, \tag{3.18}$$

$$||\zeta||_B^2:=\int\limits_{\Gamma}[\nabla_{\Gamma}(\zeta,\zeta)+a|\zeta|^2]d\Gamma+\int\limits_{\partial\Gamma}\chi|\zeta|^2dS. \tag{3.19}$$

Здесь слева в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия малых движений данной гидросистемы, отвечающая полю скоростей $\vec{u}(t,x)$ и отклонению $\zeta(t,\hat{\xi})$ свободной поверхности, а справа в (3.18) - мощность малого поля внешних сил, действующих на систему.

Замечание. Если рассматривается движение не капиллярной, а тяжелой жидкости, то равновесная поверхность Γ горизонтальна и $\sigma=0$; в этом случае квадратичная форма $\sigma||\zeta||_B^2$ переходит с учетом формулы (3.12) для $a(x)$ в выражение $\rho g\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2d\Gamma$, совпадающее с (удвоенной) потенциальной энергией малых движений тяжелой жидкости.

3.4 Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве.

Опираясь на ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega)=\vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \tag{3.20}$$

гильбертова пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$, перейдём от рассматриваемой начально-краевой задачи о малых движениях идеальной капиллярной жидкости к дифференциально-операторному уравнению в некотором гильбертовом пространстве.

Будем считать при каждом t поля $\vec{u}(t,x)$, $\nabla p(t,x)$ и $\vec{f}(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$. Тогда, согласно (3.20) в силу соленоидальности поля $\vec{u}$ в Ω и условия непротекания на твердой стенке S это поле будет при каждом t элементом пространства

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{3.21}$$

и потому можно считать, что

$$\vec{u} = \vec{w} + \nabla\vec{\Phi},\ \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega),\ \nabla\vec{\Phi} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \tag{3.22}$$

Аналогично, в силу ортогонального разложения (3.20) и определения подпространств $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ получаем, что

$$\nabla p = \nabla\varkappa + \nabla\varphi,\ \nabla\varkappa \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega),\ \nabla\varphi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \tag{3.23}$$

Введём в рассмотрение ортопроекторы P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно. Подставляя разложения (3.22) и (3.23) в дифференциальное уравнение Эйлера (3.6) и проектируя обе части этого уравнения на подпространства (3.20), получим (с заменой $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ для функций со значениями в гильбертовом пространстве) совокупность соотношений

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{f}_0(t), \qquad \vec{f}_0(t) := P_0\vec{f}, \qquad \vec{w}(0) = P_0\vec{u}^0; \tag{3.24}$$

$$\frac{d\nabla\Phi}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi + \vec{f}_{h,S}(t), \quad \vec{f}_{h,S}(t) := P_{h,S}\vec{f}, \quad \nabla\Phi(0) = P_{h,S}\vec{u}^0; \tag{3.25}$$

$$\vec{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varkappa + \vec{f}_{0,\Gamma}(t),\ \vec{f}_{0,\Gamma}(t) := P_{0,\Gamma}\vec{f}. \tag{3.26}$$

Здесь в (3.24) и (3.25) уже учтены начальные условия (3.15), порождённые начальным полем скоростей $\vec{u}^0(x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Из рассмотрения задач (3.24) - (3.26) получаем следующие важные факты, являющиеся следствием проектирования на ортогональные подпространства.

Теорема 3.1. 1^0. При малых движениях идеальной жидкости в открытом сосуде поле скорости $\vec{w}(t,x)$ из вихревого подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$ выражается лишь через проекцию поля внешних сил на это подпространство и проекцию начального поля скорости:

$$\vec{w}(t,x) = P_0\vec{u}^0 + \int\limits_0^t P_0\vec{f}(\tau,x)d\tau. \tag{3.27}$$

2^0. Поле давлений $\nabla\varkappa$ из подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ определяется лишь проекцией внешнего поля $\vec{f}(t,x)$ на это подпространство:

$$\nabla\varkappa(t,x) = \rho P_{0,\Gamma}\vec{f}(t,x). \tag{3.28}$$

3^0. Потенциальные движения идеальной жидкости, связанные с отклонением свободной поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$, описываются функциями из подпространства $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$; они обусловлены действием на систему внешней силы $P_{h,S}\vec{f}(t,x)$, а также начальных функций $P_{h,S}\vec{u}^0$ (для поля скорости) и $\zeta^0(\hat{\xi})$ (для отклонения свободной поверхности).

Теорема 3.2. Полная постановка начально-краевой задачи о малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости в подпространстве потенциальных гармонических полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi + \vec{f}_{h,S}(t,x), \tag{3.29}$$

$$\Delta\Phi = 0\,(\text{в }\Omega),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\,(\text{на }S), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,(\text{на }\Gamma), \quad \int_\Gamma \Phi d\Gamma = 0,$$

$$\varphi = \sigma B\zeta\,(\text{на }\Gamma), \quad B\zeta := L\zeta - (\operatorname{mes}\Gamma)^{-1}\int_\Gamma L\zeta d\Gamma,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0\,(\text{на }\partial\Gamma), \ \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0,$$

$$\nabla\Phi(0,x) = P_{0,S}\vec{u}^0\,(\text{в }\Omega),\ \zeta(0,\hat{\xi}) = \zeta^0(\hat{\xi})\,(\text{на }\Gamma).$$

Доказательство. Первое уравнение (3.29) есть уравнение (3.25). Далее, свойства гармоничности поля $\nabla\Phi$ и выполнение условия Неймана на S имеют место для любого поля из $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$. Условие $\varphi = \sigma B\zeta\,(\text{на }\Gamma)$ появилось из динамического условия (3.12) с учетом последующего замечания, разложения (3.23) и того, что $\varkappa \equiv 0\,(\text{на }\Gamma)$ для элемента $\nabla\varkappa \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$. □

Как сейчас будет установлено, задача (3.29) приводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве $H := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ относительно функции $\zeta(t,\hat{\xi})$ отклонения свободной движущейся поверхности $\tilde{\Gamma}(t)$ от равновесной поверхности Γ. Коэффициентами соответствующего дифференциального уравнения будут операторы кинетической и потенциальной энергии гидросистемы.

Преобразуем задачу (3.29), исключив из рассмотрения давление $\varphi(t,x)$. Пусть $\vec{f}_{h,S}(t,x) = \nabla F_{h,S}(t,x)$, где $F_{h,S}(t,x)$ - потенциал гармонического поля. С учетом этого соотношения первое уравнение (3.29) можно проинтегрировать, и мы получим так называемый интеграл Коши-Лагранжа

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\varphi-\rho F_{h,S}=0\,(\text{в }\Omega); \tag{3.30}$$

произвольная функция времени здесь тождественно равна нулю вследствие того, что Φ, φ и $F_{h,S}$ - потенциалы полей из $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и для них выполнено условие нормировки, т.е. принадлежности к $H=L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$. Рассматривая (3.30) на Γ и исключая φ, приходим к задаче об определении функций $\Phi(t,x)$ и $\zeta(t,\hat{\xi})$:

$$\Delta\Phi=0\,(\text{в }\Omega),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0\,(\text{на }S),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,(\text{на }\Gamma), \tag{3.31}$$

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sigma B\zeta=\rho F_{h,S}\,(\text{на }\Gamma),\quad \int\limits_\Gamma\Phi d\Gamma=\int\limits_\Gamma\zeta d\Gamma=0,$$

$$B\zeta:=P_HL\zeta,\,\mathcal{D}(B):=\{\zeta\in H:\,L\zeta\in H,\,\frac{\partial\zeta}{\partial\nu}+\chi\zeta=0\,(\text{на }\partial\Gamma)\},$$

$$\Phi(0,x)=\Phi^0_{0,S}(x),\quad \nabla\Phi^0_{0,S}:=P_{0,S}\vec{u}^0,\quad \zeta(0,\hat{\xi})=\zeta^0(\hat{\xi}),$$

где P_H-ортопроектор на $H=L_{2,\Gamma}=L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$,

$$P_Hu:=u-(\operatorname{mes}\Gamma)^{-1}\int\limits_\Gamma ud\Gamma,\,\forall u\in L_2(\Gamma).$$

Оказывается, в задаче (3.31) можно исключить и потенциал скорости $\Phi(t,x)$, оставив лишь искомую функцию $\zeta(t,\hat{\xi})$, $\hat{\xi}\in\Gamma$. С этой целью рассмотрим аналогично упражнению 1.3 следующую вспомогательную краевую задачу: по функции $\psi\in H^{-1/2}(\Gamma):=(H^{1/2}\bigcap H)^*$ найти функцию Φ из подпространства $H^1_{h,S}(\Omega)$ гармонических функций из $H^1_\Gamma(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\Phi,\Psi)_{1,\Omega}:=\int\limits_\Omega\Phi\Psi d\Omega\qquad\left(\int\limits_\Gamma\Phi d\Gamma=\int\limits_\Gamma\Psi d\Gamma=0\right).$$

Эта задача в классических терминах имеет вид

$$\Delta\Phi=0\,(\text{в }\Omega),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0\,(S),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=\psi\,(\text{на }\Gamma),\quad \int\limits_\Gamma\Phi d\Gamma=0\quad(\int\limits_\Gamma\psi d\Gamma=0). \tag{3.32}$$

Лемма 3.1. При любой $\psi\in H^{-1/2}(\Gamma)$ задача (3.32) имеет единственное решение $\Phi=T\psi\in H^1_{h,S}(\Omega)$; оператор T ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1_{h,S}(\Omega)$, причём $||T||\leq 1$.

Доказательство опирается на лемму Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Пусть $\Psi \in H^1_{h,S}(\Omega)$ - произвольный элемент. Рассмотрим функционал

$$F(\Psi) := \int\limits_{\Gamma} \psi(\gamma\Psi) d\Gamma, \quad \forall \Psi \in H^1_{h,S}(\Omega), \tag{3.33}$$

где $\gamma : H^1_{h,S}(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ - оператор следа. Как уже упоминалось ранее, оператор γ изометричен, если

$$||\gamma\Psi||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} := \int\limits_{\Omega} |\nabla\Psi|^2 d\Omega = ||\Psi||^2_{H^1_{h,S}(\Omega)}. \tag{3.34}$$

Имеем

$$|F(\Psi)| \le ||\psi||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \cdot ||\gamma\Psi||_{H^{1/2}(\Gamma)} = ||\psi||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \cdot ||\Psi||_{H^1_{h,S}(\Omega)}. \tag{3.35}$$

Отсюда следует, что $F(\Psi)$ - ограниченный в $H^1_{h,S}(\Omega)$ линейный функционал, и по лемме Рисса существует единственный элемент $\Phi = T\psi \in H^1_{h,S}(\Omega)$ такой, что

$$F(\Psi) = (\Phi, \Psi)_{1,\Omega} = (\psi, \gamma\Psi)_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma} \psi(\gamma\Psi) d\Gamma. \tag{3.36}$$

Из (3.35) и (3.36) следует при $\Psi = \Phi = T\psi$, что

$$||\Phi||^2_{1,\Omega} = ||T\psi||^2_{1,\Omega} \le ||\psi||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \cdot ||T\psi||_{1,\Omega},$$

откуда получаем, что $||T|| \le 1$. $\square$

Введем теперь в рассмотрение оператор $A := \gamma T : H \to H$. Так как по лемме 3.1 оператор T ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma)$ (а потому и из плотного в нем множества $H := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$) в $H^1_{h,S}(\Omega) \subset H^1_h(\Omega)$, а оператор γ по лемме 1.1 ограниченно действует в $H^{1/2}(\partial\Omega)$, то A - ограниченный оператор из H в $H^{1/2}(\Gamma) \bigcap H$. Поскольку $H^{1/2}(\Gamma) \bigcap H$ компактно вложено в H, то $A : H \to H$ - компактный оператор. Дальнейшие свойства оператора A устанавливает

Лемма 3.2. Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, является компактным положительным самосопряженным оператором, который в рассматриваемой задаче естественно назвать оператором кинетической энергии гидросистемы: его квадратичная форма

$$\frac{\rho}{2} \int\limits_{\Gamma} (A\psi)\psi d\Gamma = \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla\Phi|^2 d\Omega, \qquad \psi = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\Gamma}, \tag{3.37}$$

совпадает с кинетической энергией потенциальных движений жидкости, когда $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$.

Доказательство. Из леммы 3.1 и тождества (3.36) получаем, что

$$(T\psi, \Psi)_{1,\Omega} = (\psi, \gamma\Psi)_{\Gamma}, \quad \forall \psi \in H, \quad \forall \Psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{3.38}$$

откуда следует,что T и γ взаимно сопряжены. Но тогда $A = \gamma T = T^*T$ - неотрицательный самосопряженный оператор. Покажем, что оператор A положителен в H. В самом деле, согласно уравнениям (3.32) из (3.38) при $\Psi = \Phi$ имеем

$$(\psi, A\psi)_\Gamma = \int\limits_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\gamma\Phi) d\Gamma = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\gamma\Phi) dS = \int\limits_\Omega |\nabla\Phi|^2 d\Omega. \tag{3.39}$$

Если $(\psi, A\psi) = 0$, то отсюда следует, что $\nabla\Phi = 0$, а потому и $\psi = \nabla\Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ на Γ.

Наконец, формула (3.37) следует из (3.39).$\square$

Учитывая введенный оператор кинетической энергии A и кинематическое условие на Γ, задачу (3.31) теперь можно переписать в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$:

$$\rho A \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \sigma B\zeta = \rho F_{h,S}(t), \tag{3.40}$$
$$\zeta(0) = \zeta^0, \quad \zeta'(0) = \zeta^1 := \nabla\Phi^0_{0,S} \cdot \vec{n} = (P_{0,S}\vec{u}^0) \cdot \vec{n}.$$

Здесь A – оператор кинетической энергии системы, B – оператор потенциальной энергии, свойства которого будут изучены ниже, $F_{h,S}(t)$ - потенциальная составляющая поля внешних сил, а начальные условия порождены начальными условиями (3.15). Отметим также, что искомая функция $\zeta(t, \hat{\xi})$ трактуется как функция $\zeta(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве H.

3.5 Свойства оператора потенциальной энергии.

Оператор B, введенный в (3.31), – это неограниченный оператор, действующий в $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$.

Упражнение 3.1. Для прямоугольной плоской равновесной поверхности $\Gamma = (0, a) \times (0, b)$ при $\chi = 0$ найти собственные значения и собственные функции оператора B; убедиться, что задача

$$Bu = \lambda u, \ u \in \mathcal{D}(B) \subset H,$$

в этом случае имеет решения

$$\lambda = \lambda_{km}(B) = \rho g \sigma^{-1} + \pi^2 (\frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}), \ k, m \geq 0, \ k + m \neq 0, \tag{3.41}$$

$$u = u_{km}(B) = \cos\frac{\pi k x_1}{a} \cos\frac{\pi m x_2}{b}. \ \square$$

Лемма 3.3. Оператор B, определенный на множестве

$$\mathcal{D}(B) := \{u \in C^2(\Gamma) \bigcap H : \ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \chi u = 0 \, (\text{на } \partial\Gamma)\}, \tag{3.42}$$

является симметричным и ограниченным снизу оператором.

Доказательство. Пусть ζ_1 и ζ_2 принадлежат $\mathcal{D}(B)$. Тогда, согласно определению $B\zeta$ и формуле Грина (3.17) для оператора Лапласа-Бельтрами, имеем

$$\begin{gathered}
(B\zeta_1,\zeta_2)=\int\limits_{\Gamma}(B\zeta_1)\zeta_2 d\Gamma=\int\limits_{\Gamma}(P_H L\zeta_1)\zeta_2 d\Gamma=\\
=\int\limits_{\Gamma}(L\zeta_1)\zeta_2 d\Gamma=\int\limits_{\Gamma}[-\Delta_\Gamma\zeta_1+a(x)\zeta_1]\zeta_2 d\Gamma=\\
=\int\limits_{\Gamma}[\nabla_\Gamma(\zeta_1,\zeta_2)+a(x)\zeta_1\zeta_2]d\Gamma-\int\limits_{\partial\Gamma}\tfrac{\partial\zeta_1}{\partial\nu}\zeta_2 dS=\\
=\int\limits_{\Gamma}[\nabla_\Gamma(\zeta_1,\zeta_2)+a(x)\zeta_1\zeta_2]d\Gamma+\int\limits_{\partial\Gamma}\chi\zeta_1\zeta_2 dS,\\
a(x)=-(k_1^2+k_2^2)+\rho g\sigma^{-1}\cos(\widehat{\vec{n},x_3}).
\end{gathered}\tag{3.43}$$

Отсюда непосредственно получаем, что оператор B симметричен на $\mathcal{D}(B)$. Покажем теперь, что оператор B ограничен снизу. Полагая в (3.42) $\zeta_2=\zeta_1=\zeta\in\mathcal{D}(B)$,, имеем

$$(B\zeta,\zeta)=:(\zeta,\zeta)_B=\int\limits_{\Gamma}[\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)+a(x)|\zeta|^2]d\Gamma+\int\limits_{\partial\Gamma}\chi|\zeta|^2 dS.\tag{3.44}$$

Если $\chi(S)\ge 0$, то в силу соотношения $\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)\ge 0$

$$(B\zeta,\zeta)\ge\int\limits_{\Gamma}a(x)|\zeta|^2 d\Gamma\equiv\left(\min_{x\in\overline{\Gamma}}a(x)\right)||\zeta||_H^2,\tag{3.45}$$

т.е. свойство ограниченности снизу имеет место. При этом предполагается, что $a(x)$ - непрерывная на Γ функция.

Если же условие $\chi(s)\ge 0$ не выполнено, то для доказательства свойства ограниченности снизу оператора B подберём на Γ произвольную достаточно гладкую функцию $\psi(\hat{\xi})$, для которой $\partial\psi/\partial\nu\ge-\chi(s)$ на $\partial\Gamma$; это можно сделать, если контур $\partial\Gamma$ не имеет угловых точек раствора 0^0 или 360^0, в которых $\chi(s)<0$. Тогда, пользуясь формулой Грина для оператора Лапласа-Бельтрами, получим при любой $\zeta(\hat{\xi})\in\mathcal{D}(B)$ и любого $\varepsilon>0$, что

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{\partial\Omega}\chi|\zeta|^2 dS\le\int\limits_{\partial\Gamma}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|\zeta|^2 dS=\int\limits_{\Gamma}\nabla_\Gamma(\psi,\zeta^2)d\Gamma+\int\limits_{\Gamma}(\Delta_\Gamma\psi)|\zeta|^2 d\Gamma\le\\
\le 2\int\limits_{\Gamma}\zeta\nabla_\Gamma(\psi,\zeta)d\Gamma+c_1\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2 d\Gamma\le c_2\int\limits_{\Gamma}|\zeta|(\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta))^{1/2}d\Gamma+c_1||\zeta||_H^2\le\\
\le\varepsilon\int\limits_{\Gamma}\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma+(c_1+\frac{c_2^2}{4\varepsilon})||\zeta||_H^2,
\end{gathered}\tag{3.46}$$

где c_1 и c_2 - положительные постоянные, определяемые функцией $\psi(\hat{\xi})$. Из (3.46) и (3.42) при $0<\varepsilon<1$ следует свойство ограниченности снизу оператора B. □

Следствие. В силу леммы 3.3 оператор B допускает самосопряженное расширение по Фридрихсу с сохранением нижней грани

$$c_B := \inf(B\zeta,\zeta)_H/(\zeta,\zeta)_H \in \mathbb{R}, \tag{3.47}$$

т.е. для всех $\zeta \in \mathcal{D}(B)$ выполнено условие

$$(B\zeta,\zeta)_H \geq c_B||\zeta||_H^2. \quad \square \tag{3.48}$$

Будем далее считать, что такое расширение уже проведено, и расширенный оператор снова обозначим через B.

Так как квадратичная форма $(B\zeta,\zeta)_H$ с точностью до множителя $\sigma/2$ совпадает с потенциальной энергией малых колебаний рассматриваемой гидродинамической системы, то оператор B, как было указано выше, назван оператором потенциальной энергии системы.

Определение. Будем говорить, что состояние равновесия капиллярной жидкости в сосуде статически устойчиво по линейному приближению, если оператор потенциальной энергии B положительно определен:

$$(B\zeta,\zeta)_H \geq c_B||\zeta||_H^2, \ (c_B > 0, \, \zeta \in \mathcal{D}(B)). \, \square \tag{3.49}$$

Если выполнено условие (3.49), то можно ввести энергетическое пространство $H_B \subset H = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ со скалярным произведением

$$\begin{gathered}(\zeta_1,\zeta_2)_B := (B^{1/2}\zeta_1, B^{1/2}\zeta_2)_H = \\ = \int_\Gamma [\nabla_\Gamma(\zeta_1,\zeta_2) + a(x)\zeta_1\zeta_2]d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \chi\zeta_1\zeta_2 dS, \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0.\end{gathered} \tag{3.50}$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $H^1(\Gamma)$ с квадратом нормы в одной из эквивалентных форм:

$$||\zeta||_{H^1(\Gamma)}^2 := \int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma + \left(\int_\Gamma \zeta d\Gamma\right)^2. \tag{3.51}$$

Рассмотрим далее подпространство $H^1(\Gamma)\bigcap H =: H_\Gamma^1$ элементов из $H^1(\Gamma)$, для которых выполнено условие

$$(\zeta,1)_H = \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{3.52}$$

Лемма 3.4. Если выполнено условие (3.49) статической устойчивости по линейному приближению, то нормы в подпространствах H_B и H_Γ^1 эквивалентны:

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{||\zeta||_B^2}{||\zeta||_{H^1(\Gamma)}^2} \leq \alpha_2 < \infty. \tag{3.53}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой С.Л.Соболева о компактности (и потому ограниченности) вложения пространства $H^1(\Gamma) = W_2^1(\Omega)$ в пространство $L_2(\Gamma)$. Для элементов из $H_\Gamma^1 = H^1(\Gamma)\bigcap H$ это дает в силу (3.51) неравенство

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma \geq \beta_1 ||\zeta||_H^2 \quad (\beta_1 > 0). \tag{3.54}$$

Аналогичная теорема для $L_2(\partial\Gamma)$ и $H^1(\Gamma)$ приводит к соотношению

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma \geq \beta_2 \int_{\partial\Gamma} |\zeta|^2 dS \quad (\beta_2 > 0). \tag{3.55}$$

С учетом неравенств (3.54) и (3.55) имеем

$$\begin{gathered} ||\zeta||_B^2 = \int_\Gamma [\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta) + a|\zeta|^2]d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \chi|\zeta|^2 dS \leq \\ \leq \int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma + c_1||\zeta||_H^2 + c_2\int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma \leq \\ \leq \int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma + \tfrac{c_1}{\beta_1}\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma + \tfrac{c_2}{\beta_2}\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma =: \\ =: \alpha_2 \int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma, \\ \alpha_2 := 1 + \tfrac{c_1}{\beta_1} + \tfrac{c_2}{\beta_2} > 0. \end{gathered} \tag{3.56}$$

Для доказательства второго неравенства (3.53) воспользуемся неравенствами (3.49) и (3.46); имеем

$$\begin{gathered} ||\zeta||_B^2 = \int_\Gamma [\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta) + a|\zeta|^2]d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \chi|\zeta|^2 dS \geq \\ \geq (1-\varepsilon)\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma - c_4(\varepsilon)\int_\Gamma |\zeta|^2 d\Gamma \geq \\ \geq (1-\varepsilon)\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma - \tfrac{c_4(\varepsilon)}{c_B}||\zeta||_B^2, \end{gathered}$$

откуда

$$\frac{||\zeta||_B^2}{\int_\Gamma \nabla_\Gamma(\zeta,\zeta)d\Gamma} \geq \left(1 + \frac{c_4(\varepsilon)}{c_B}\right)^{-1}(1-\varepsilon) =: \alpha_1(\varepsilon). \tag{3.57}$$

При $0 < \varepsilon < 1$ получаем, что $\alpha_1(\varepsilon) > 0$, и соотношения (3.53) доказаны. □

Лемма 3.5. Если выполнено условие (3.49) статической устойчивости по линейному приближению, то оператор B имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^\infty$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений $\lambda_k(B)$ с предельной точкой $+\infty$. Система собственных элементов $\{\zeta_k(B)\}_{k=1}^\infty$ оператора B образует ортогональный базис как в H, так и в H_B :

$$(\zeta_k,\zeta_j)_B = \lambda_k(B)\delta_{kj}, \quad (\zeta_k,\zeta_j)_H = \delta_{kj}. \tag{3.58}$$

Доказательство. В силу эквивалентности норм в H_B и H_Γ^1, а также компактности вложения H_Γ^1 в H, любое множество элементов, ограниченное в H_B, компактно в H. Поэтому оператор B имеет дискретный спектр с перечисленными выше свойствами. $\square$

Замечание. Если оператор B лишь ограничен снизу, то любой оператор вида $B_c := B - c_B I + cI$, $c > 0$, положительно определен и для него выполнены утверждения леммы 3.5. Отсюда следует, что для оператора $B = B_c + c_B I - cI$ сохраняются свойства дискретности спектра и базисности собственных элементов, за исключением свойства положительности собственных значений. Теперь $\lambda_k(B)$ обладают свойствами

$$\lambda_k(B) \geq c_B, \ \lambda_k(B) \to +\infty \quad (k \to \infty). \tag{3.59}$$

3.6 Собственные колебания.

Изучив свойства операторов кинетической и потенциальной энергии данной гидродинамической системы, вернемся к задаче Коши (3.40) и рассмотрим сначала такие решения однородной задачи, которые зависят от t по закону

$$\zeta(t, \hat{\xi}) = \exp(i\omega t)\zeta(\hat{\xi}), \quad \hat{\xi} = (\xi^1, \xi^2) \in \Gamma. \tag{3.60}$$

Здесь ω - частота, а $\zeta(\hat{\xi})$ - амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости. Для амплитудных функций $\zeta(\hat{\xi})$ получаем задачу на собственные значения

$$B\zeta = \lambda A\zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B) \subset H, \quad \lambda := \omega^2 \rho \sigma^{-1}. \tag{3.61}$$

Сейчас будут изучены свойства решений задачи (3.61) как в статически устойчивом ($B \gg 0$), так и в статически неустойчивом ($\lambda_{\min}(B) = c_B < 0$) случаях.

Теорема 3.3. Если состояние равновесия гидродинамической системы статически устойчиво по линейному приближению ($\lambda_{\min}(B) > 0$), то задача (3.61) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных положительных собственных значений λ_k с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Собственные элементы $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\zeta_k = \zeta_k(\hat{\xi})$, образуют ортогональные базисы как в H_B, так и на множестве H_A элементов H_A со скалярным произведением

$$(\zeta_1, \zeta_2)_A := (A\zeta_1, \zeta_2)_H, \quad \forall \zeta_1, \zeta_2 \in H. \tag{3.62}$$

При этом выполнены свойства ортогональности

$$(\zeta_k, \zeta_j)_B = \lambda_k \delta_{kj}, \quad (\zeta_k, \zeta_j)_A = \delta_{kj}. \tag{3.63}$$

Доказательство. Если оператор B положительно определен, то существует положительный обратный оператор B^{-1}, который в силу леммы 3.4 и теоремы вложения является компактным. Осуществим в (3.61) замену

$$B^{1/2}\zeta = v \tag{3.64}$$

и применим к обеим частям полученного уравнения (ограниченный) оператор $B^{-1/2}$; будем иметь задачу на характеристические числа

$$v = \lambda C v, \quad C := B^{-1/2} A B^{-1/2}, \tag{3.65}$$

для компактного положительного самосопряженного оператора C, действующего в пространстве $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ бесконечной размерности.

Отсюда и из теоремы Гильберта-Шмидта получаем, что задача (3.65) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных характеристических чисел оператора C с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$:

$$\lambda = \lambda_k(C),\, 0 < \lambda_1(C) \leq \lambda_2(C) \leq \cdots \leq \lambda_k(C) \leq \cdots,\, \lambda_k(C) \to +\infty\, (k \to \infty). \tag{3.66}$$

Собственные элементы задачи (3.65) образуют ортогональный базис как в H, так и в H_C, и выполнены условия ортогональности

$$(v_k, v_j)_H = \lambda_k \delta_{kj},\, (Cv_k, v_j)_H = \delta_{kj}. \tag{3.67}$$

Отсюда и следуют формулы (3.63) и все утверждения леммы. □

Теорема 3.4. Собственные значения задачи (3.61) можно найти, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения

$$\begin{gathered} F_1(\zeta) := ||\zeta||_B^2 / ||\zeta||_A^2 = \\ = \left\{ \int_{\Gamma} [\nabla_\Gamma(\zeta, \zeta) + a|\zeta|^2] d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \chi |\zeta|^2 dS \right\} / \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega \end{gathered} \tag{3.68}$$

на решениях вспомогательной задачи Неймана из п.3.4:

$$\Delta\varphi = 0\, (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\, (\text{на } S), \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \zeta\, (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0 \quad \left(\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0 \right).$$

Доказательство. В самом деле, для задачи (3.65) собственные значения λ_k суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$||v||_H^2 / (Cv, v)_H,$$

которое после обратной замены (3.64) переходит в отношение

$$||\zeta||_B^2 / ||\zeta||_A^2,$$

причём

$$||\zeta||_A^2 = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\Omega$$

и выполнены уравнения (3.69) – согласно определению оператора кинетической энергии A. □

Теорема 3.5. При $\lambda_{\min}(B) > 0$ собственные значения задачи (3.61) можно найти также, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения

$$F_2(\varphi) := \frac{(\varphi,\varphi)_{A^{-1}}}{(\varphi,\varphi)_{B^{-1}}} = \frac{\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega}{\int\limits_\Gamma (B^{-1}\varphi)\varphi d\Gamma} \tag{3.70}$$

на функциях $\varphi(x)$, у которых

$$\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega < \infty, \quad \int\limits_\Gamma \varphi d\Gamma = 0. \tag{3.71}$$

При этом решения $\varphi = \varphi_k(x)$ удовлетворяют всем уравнениям и краевым условиям (3.69).

Доказательство. Осуществим в уравнении

$$B\zeta = \lambda A\zeta, \quad A\zeta := \varphi|_\Gamma,$$

замену, перейдя к новому искомому элементу $\varphi = \varphi|_\Gamma \in H$. Тогда

$$B\zeta = \lambda\varphi, \quad \zeta = \lambda B^{-1}\varphi, \quad \zeta = A^{-1}\varphi,$$

и потому возникает спектральная задача

$$A^{-1}\varphi = \lambda B^{-1}\varphi, \tag{3.72}$$

где

$$\varphi \in \mathcal{D}(A^{-1}) \subset H, \quad A^{-1} \gg 0,\ B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые уже были применены для уравнения $B\zeta = \lambda A\zeta$, устанавливается, что собственные значения λ суть последовательные минимумы вариационного отношения

$$(\varphi,\varphi)_{A^{-1}}/(\varphi,\varphi)_{B^{-1}},$$

т.е. отношения (3.70), так как

$$(\varphi,\varphi)_{A^{-1}} = (A^{-1}\varphi,\varphi)_H = \int\limits_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\varphi d\Gamma = \cdots = \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega,$$

$$(\varphi,\varphi)_{B^{-1}} = \int\limits_\Gamma (B^{-1}\varphi)\varphi d\Gamma.$$

Покажем теперь, что для решений задачи о последовательных минимумах функционала $F_2(\varphi)$ из (3.70) при условиях (3.71) выполнены уравнения и граничные условия (3.69), т.е. эти соотношения являются естественными вариационными условиями в этом случае.

В самом деле, задача (3.70), (3.71) равносильна задаче на условный экстремум функционала

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega, \quad \int_\Gamma \varphi d\Gamma = 0,$$

при условии

$$\int_\Gamma (B^{-1}\varphi)\varphi d\Gamma = const.$$

Вводя множитель Лагранжа λ, приходим к задаче на безусловный экстремум для функционала

$$F_3(\varphi) := \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega - \lambda\int_\Gamma (B^{-1}\varphi)\varphi d\Gamma, \quad \int_\Gamma \varphi d\Gamma = 0. \tag{3.73}$$

Необходимое условие экстремума $\delta F_3(\varphi) = 0$ дает

$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\delta\varphi d\Omega - \lambda\int_\Gamma (B^{-1}\varphi)\delta\varphi d\Gamma = 0 \tag{3.74}$$

(здесь при выводе было использовано свойство самосопряженности оператора B). Пользуясь формулой Грина для оператора Лапласа, получаем

$$-\int_\Omega \Delta\varphi\delta\varphi d\Omega + \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\delta\varphi dS + \int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \lambda B^{-1}\varphi\right)\delta\varphi d\Gamma = 0, \tag{3.75}$$

отсюда, в силу произвольности $(\delta\varphi)|_\Omega$, $(\delta\varphi)|_S$ и $(\delta\varphi)|_\Gamma$ получаем, что

$$\Delta\varphi = 0\,(\text{в }\Omega), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,(\text{на }S), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \lambda B^{-1}\varphi = 0\,(\text{на }\Gamma), \tag{3.76}$$

т.е. решения вариационной задачи (3.74) удовлетворяют уравнению Лапласа в Ω, граничному условию Неймана на S, а также необходимому уравнению на Γ. $\square$

Замечание. Можно доказать (Т.А.Суслина), что собственные значения λ_k задачи (3.61) имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k = \left(\frac{\mathrm{mes}_2\,\Gamma}{4\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} k^{\frac{3}{2}}[1 + o(1)] \quad (k\to\infty).\ \square \tag{3.77}$$

3.7 Об условиях неустойчивости системы.

Предположим, что оператор потенциальной энергии B не является положительно определенным и

$$\lambda_{\min}(B) = c_B < 0. \tag{3.78}$$

В силу предыдущего будем считать, что B имеет ровно $\varkappa$ (с учетом кратностей) отрицательных собственных значений, а также нулевые собственные значения кратности $\varkappa_0$.

Теорема 3.6. Если выполнены сформулированные выше предположения, то задача (3.61) имеет равна $\varkappa$ отрицательных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\varkappa}$, а также нулевые собственные значения кратности $\varkappa_0$. Остальные собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=\varkappa+\varkappa_0+1}^{\infty}$ положительны и образуют дискретный спектр с предельной точкой $+\infty$.

Доказательство. 1^0. Пусть оператор B имеет $\varkappa_0$-кратное нулевое собственное значение, которому отвечает подпространство H_0, натянутое на собственные элементы $\{u_k(B_0)\}_{k=\varkappa+1}^{\varkappa+\varkappa_0}$. Тогда, очевидно, задача (3.61) имеет эти же элементы в качестве собственных:

$$\zeta_k = u_k(B_0), \quad k = \varkappa+1, \ldots, \varkappa+\varkappa_0.$$

В ортогональном дополнении $\tilde{H} := H \ominus H_0$ оператор B имеет обратный оператор B^{-1}, который является знакопеременным компактным оператором.

Представим задачу (3.61) в ортогональном разложении $H = H_0 \oplus \tilde{H}$ в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(A_{11}v + A_{12}w), \quad \zeta = (v; w)^t, \\ \tilde{B}w &= \lambda(A_{21}v + A_{22}w), \quad v \in H_0,\ w \in \tilde{H}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Здесь $\tilde{B} := B|_{\tilde{H}}$ - сужение оператора B на подпространство $\tilde{H}$.

При $\lambda \neq 0$ исключим из (3.79) элемент v, воспользовавшись тем фактом, что оператор A_{11}, действующий в H_0, является $\varkappa_0$-мерной положительной матрицей и потому имеет положительный обратный оператор $A_{11}^{-1} > 0$. Тогда $v = -A_{11}^{-1}A_{12}w$, и

$$\tilde{B}w = \lambda(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})w =: \lambda\tilde{A}w. \tag{3.80}$$

2^0. Покажем, что здесь оператор $\tilde{A}$ обладает свойством положительности, если оператор A положителен. В самом деле,

$$\begin{aligned} (A\zeta, \zeta)_H &= (A_{11}v + A_{12}w, v) + (A_{21}v + A_{22}w, v) = \\ &= (A_{11}v, v) + 2\mathrm{Re}(v, A_{12}w) + (A_{22}w, w) > 0\,(\zeta \neq 0). \end{aligned}$$

Выделим в полученной сумме полный квадрат:

$$(A_{11}^{1/2}v + A_{11}^{-1/2}A_{12}w, A_{11}^{1/2}v + A_{11}^{-1/2}A_{12}w) + (A_{22}w, w) - (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}w, w) > 0.$$

Пусть w - произвольный элемент из $\tilde{H}$. Положим $v = -A_{11}^{-1}A_{12}w$. Тогда первое слагаемое обращается в нуль, и получается неравенство

$$(\tilde{A}w, w) = ((A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})w, w) > 0\,(w \neq 0).$$

3^0. Таким образом, если $\varkappa_0 \neq 0$, то от уравнения (3.61) в пространстве H можно перейти к аналогичному уравнению (3.80) в пространстве $\tilde{H}$, где теперь оператор $\tilde{B} = B|_{\tilde{H}}$ не имеет нулевых собственных значений.

Поэтому, не ограничивая общности, с самого начала можно считать, что в (3.61) $\ker B = \{0\}$, т.е. нуль не входит в спектр оператора B.

4^o. В этом случае можно ввести в рассмотрение оператор $|B| = (B^2)^{1/2}$ и представить B в виде

$$B = J_\varkappa |B| = |B| J_\varkappa = |B|^{1/2} J_\varkappa |B|^{1/2}, \tag{3.81}$$

где $J_\varkappa = J_\varkappa^{-1} = J_\varkappa^*$, $J_\varkappa^2 = I$. При этом в базисе из собственных элементов $\{u_k(B)\}_{k=1}^\infty$ оператора B оператор $J_\varkappa$ является диагональной бесконечной матрицей, у которой на первых $\varkappa$ местах стоят числа -1, а на остальных - числа $+1$, т.е.

$$J_\varkappa = \mathrm{diag}(-I_\varkappa, \tilde{I}). \tag{3.82}$$

Осуществим в уравнении

$$B\zeta = |B|^{1/2} J_\varkappa |B|^{1/2} \zeta = \lambda A \zeta \tag{3.83}$$

замену

$$|B|^{1/2} \zeta = \eta \tag{3.84}$$

и применим слева оператор $|B|^{-1/2} J_\varkappa$, имеем

$$\eta = \lambda J_\varkappa |B|^{-1/2} A |B|^{-1/2} \eta =: \lambda J_\varkappa C \eta. \tag{3.85}$$

Здесь $C = |B|^{-1/2} A |B|^{-1/2}$ является самосопряженным компактным положительным оператором, а оператор $J_\varkappa C$ - оператором, самосопряженным в индефинитной метрике, т.е. в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ со скалярным произведением

$$[\eta_1, \eta_2] := (J_\varkappa \eta_1, \eta_2)_H. \tag{3.86}$$

Теория таких пространств и операторов, действующих в этих пространствах, достаточно хорошо развита.

Так как оператор C положителен, то, согласно выводам этой теории, задача (3.85) имеет ровно $\varkappa$ (с учётом кратностей) отрицательных собственных значений, а отвечающие этим значениям собственные элементы образуют подпространство в $\Pi_\varkappa$, инвариантное для $J_\varkappa C$. В $J_\varkappa$-ортогональном дополнении, которое также является инвариантным для $J_\varkappa C$, этот оператор обладает всеми свойствами компактного самосопряженного положительного оператора, и потому по теореме Гильберта-Шмидта спектр задачи (3.85) здесь дискретный и положительный, с предельной точкой $+\infty$.

Отсюда и следуют все утверждения доказываемой теоремы. □

Следствием теоремы 3.6 является такой важный факт.

Теорема 3.7 (о неустойчивости). Если состояние равновесия гидродинамической системы не является статически устойчивым по линейному приближению и $\lambda_{\min}(B) < 0$, т.е. потенциальная энергия системы в состоянии равновесия не имеет минимума, то минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = \rho\omega_{\min}^2/\sigma$ задачи (3.61) отрицательно. Ему отвечает неустойчивый режим собственных движений жидкости

$$\zeta(t) = \zeta_1 \exp(|\omega_{\min}|t), \tag{3.87}$$

экспоненциально возрастающий со временем.

Замечание. Утверждение типа теоремы 3.7 в механике систем с конечным числом степеней свободы, т.е. в теоретической механике, называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости. Таким образом, теоремы 3.3 ($\lambda_{\min}(B) > 0$) и 3.6 ($\lambda_{\min}(B) < 0$) суть прямая спектральная теорема Лагранжа и её обращение для случая гидромеханической системы с бесконечным числом степеней свободы, в частности, для капиллярной идеальной жидкости. □

3.8 Разрешимость начально-краевой задачи.

Вернемся к задаче Коши

$$\rho A \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \sigma B\zeta = \rho F_{h,S}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0,\ \zeta\,'(0) = \zeta^1, \tag{3.88}$$

для дифференциального операторного уравнения в пространстве H и будем считать для простоты. что оператор B положительно определен (устойчивый случай). Согласно теореме 3.6 решения $\zeta(t)$ этой задачи можно разложить в ряд Фурье по собственным элементам ζ_k спектральной задачи

$$B\zeta_k = \lambda A\zeta_k, \quad (B\zeta_k, \zeta_j) = \lambda_k\delta_{kj}, \quad (A\zeta_k, \zeta_j) = \delta_{kj}. \tag{3.89}$$

Тогда

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\zeta_k, \quad c_k(t) = (A\zeta(t), \zeta_k), \tag{3.90}$$

где функции $c_k(t)$ подлежат определению.

Разложим функцию $F_{h,S}(t)$ и элементы ζ^0 и ζ^1 в ряд Фурье:

$$F_{h,S}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)A\zeta_k,\ f_k(t) = (F_{h,S}(t), \zeta_k), \tag{3.91}$$

$$\zeta^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\zeta_k,\ \alpha_k = (A\zeta^0, \zeta_k), \quad \zeta^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\zeta_k,\ \beta_k = (A\zeta^1, \zeta_k).$$

Упражнение 3.2. Установить, что формальным решением задачи (3.88) является функция $\zeta(t)$ из (3.90) с коэффициентами

$$c_k(t) = \alpha_k \cos(\omega_k t) + \frac{\beta_k}{\omega_k} \sin(\omega_k t) + \int\limits_0^t \sin[\omega_k(t-s)]\omega_k^{-1} f_k(s)ds. \tag{3.92}$$

Доказательство. Подставляя ряд для $\zeta(t)$, а также для $F_{h,S}(t)$ в уравнение (3.88) и используя формулы (3.89), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A\zeta_k[\rho {c_k}''(t) + \lambda_k \sigma c_k(t) - \rho f_k(t)] \equiv 0, \quad \lambda_k = \frac{\rho\omega_k^2}{\sigma}.$$

В силу линейной независимости элементов $A\zeta_k$ (почему?) отсюда получаем, что должны выполняться уравнения

$${c_k}'' + \omega_k^2 c_k = f_k(t), \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{3.93}$$

Начальные условия для функций $c_k(t)$ в силу (3.91) имеют вид

$$c_k(0) = \alpha_k, \quad {c_k}'(0) = \beta_k, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{3.94}$$

Метод вариации произвольных постоянных, примененный к уравнению (3.93), дает общее решение, а начальные условия (3.94) приводят к функциям (3.92). $\square$

Теорема 3.8 (о существовании и единственности обобщенного решения с непрерывной полной энергией). Если выполнены условия

$$\zeta^0 \in H_B, \quad (A\zeta^1, \zeta^1) = \int\limits_\Omega |\nabla\Phi^0|^2 d\Omega < \infty, \quad \int\limits_\Omega |\nabla F_{h,S}(t)|^2 d\Omega \in C[0,T],$$

то задача Коши (3.88) имеет единственное обобщенное решение $\zeta(t)$, $0 \le t \le T$, которое выражается в виде ряда (3.90) с функциями $c_k(t)$ из (3.92). Для этого решения полная энергия системы является непрерывной функцией времени и для неё выполнен закон баланса

$$\frac{1}{2}\left\{\rho \int\limits_\Omega |\nabla\Phi|^2 d\Omega + \sigma||\zeta||_B^2\right\}(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\rho \int\limits_\Omega |\nabla\Phi^0|^2 d\Omega + \sigma||\zeta^0||_B^2\right\} + \rho \int\limits_0^t \left\{\int\limits_\Gamma F_{h,S}(\tau)\frac{d\zeta}{d\tau} d\Gamma\right\} d\tau, \tag{3.95}$$

где $\nabla\Phi$ - потенциальное поле, построенное по $\frac{d\zeta}{dt}$.

Доказательство основано на прямой проверке свойств рядов для потенциальной и кинетической энергии системы. Здесь оно будет проведено лишь для случая однородной задачи, когда $F_{h,S}(t) \equiv 0$ и взамен (3.95) имеет место закон сохранения полной энергии.

Вычислим потенциальную энергию в любой момент времени:

$$2\Pi = \sigma(B\zeta(t), \zeta(t)) = \sigma(B\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\zeta_k, \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)\zeta_j) =$$

$$= \sigma \sum_{k,j=1}^{\infty} c_k(t)c_j(t)(B\zeta_k, \zeta_j) = \sigma \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(t)|^2 \lambda_k =$$

$$= \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\alpha_k \cos\omega_k t + \frac{\beta_k}{\omega_k} \sin\omega_k t|^2 =$$

$$= \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [|\alpha_k|^2 \cos^2\omega_k t + \frac{|\beta_k|^2}{\omega_k^2} \sin^2\omega_k t + 2\alpha_k \frac{\beta_k}{\omega_k} \cos\omega_k t \sin\omega_k t]. \tag{3.96}$$

Так как $\zeta^0 \in H_B$, $(A\zeta^1, \zeta^1) < \infty$, то

$$(\zeta^0, \zeta^0)_B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^2 < \infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty, \ \lambda_k = \frac{\rho\omega_k^2}{\sigma},$$

и ряд (3.96) равномерно сходится и представляет собой непрерывную функцию переменной t.

Аналогичные вычисления кинетической энергии дают

$$\begin{gathered}
2K = \rho\left(A\tfrac{d\zeta}{dt}, \tfrac{d\zeta}{dt}\right) = \rho(A\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k{}'(t)\zeta_k, \sum_{j=1}^{\infty} c_j{}'(t)\zeta_j) = \\
= \rho \textstyle\sum_{k,j=1}^{\infty} c_k{}'(t)c_j{}'(t)(A\zeta_k, \zeta_j) = \rho \sum_{k=1}^{\infty} |c_k{}'(t)|^2 = \\
= \rho \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |-\alpha_k\omega_k \sin\omega_k t + \beta_k \cos\omega_k t|^2 = \\
= \rho \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} [|\alpha_k|^2\omega_k^2 \sin^2\omega_k t + |\beta_k|^2 \cos^2\omega_k t - 2\alpha_k\beta_k \sin\omega_k t \cos\omega_k t].
\end{gathered} \tag{3.97}$$

Этот ряд также равномерно сходится и представляет собой непрерывную функцию переменной t на всей оси.

Из (3.96) и (3.97) с учетом связи $\lambda_k = \frac{\rho\omega^2}{\sigma}$ получаем,что

$$(2\Pi + 2K)(t) = \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\alpha_k|^2 + \rho \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 = (2\Pi + 2K)(0),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Если данные задачи Коши (3.88), т.е. функции ζ^0, ζ^1 и $F_{h,S}(t)$ являются более гладкими, то эта задача может иметь и так называемое сильное решение, когда все члены уравнения (3.88) являются непрерывными функциями переменной t, такими, что для них квадратичная форма оператора A непрерывна по t. На этом вопросе мы здесь не будем останавливаться.

Теорема 3.9. Если в исходной начально-краевой задаче (из п.3.2) о малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости в неподвижном сосуде в начальный момент времени кинетическая и потенциальная энергии конечны, а поле внешних сил $\vec{f}(t,x)$ является непрерывной функцией t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, то указанная задача имеет обобщенное решение с непрерывной полной энергией и для него выполняется закон баланса полной энергии, следующий из (3.18):

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left\{\rho\int\limits_{\Omega}|\vec{u}|^2 d\Omega+\sigma||\zeta||_B^2\right\}(t)=\tfrac{1}{2}\left\{\rho\int\limits_{\Omega}|\vec{u}^0|^2 d\Omega+\sigma||\zeta^0||_B^2\right\}+ \\ +\rho\int\limits_0^t\left(\int\limits_{\Omega}\vec{f}\cdot\vec{u}\,d\Omega\right)(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Доказательство этого факта представляем возможность установить самостоятельно. □

3.9 Обзор задач, попадающих в данную операторную схему.

Задачи вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+Bu=f(t),\quad u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1, \tag{3.99}$$

с операторами кинетической энергии A и потенциальной энергии B являются типичными в проблеме малых колебаний гидродинамических систем, содержащих идеальную жидкость, точнее, так называемых консервативных систем. Ряд таких задач описан в уже упоминавшейся монографии Копачевского Н.Д., Крейна С.Г. и Нго Зуй Кана "Операторные методы в линейной гидродинамике". Здесь будут лишь перечислены эти задачи:

а)малые движения идеальной тяжелой жидкости в открытом неподвижном сосуде;

б)малые совместные движения сосуда и тяжелой идеальной жидкости;

в)колебания жидкости в контейнере с упругими днищами;

г)колебания системы из несмешивающихся жидкостей в неподвижном либо подвижном сосуде;

д)колебания идеальной стратифицированной жидкости в неподвижном сосуде;

е)колебания идеальной жидкости, находящейся в сосуде и ограниченной упругой мембраной;

ж)колебания системы "идеальная жидкость–газ"в ограниченной области;

з) имеется и другое достаточно большое количество близких задач, которые здесь не упомянуты.

Отметим в заключение этого параграфа, что общие свойства операторов A и B в этих задачах могут меняться. Так, например, положительный оператор A может быть компактным либо лишь ограниченным, а оператор B - ограниченным либо полуограниченным. Во многих спектральных задачах, порожденных задачей (3.99), спектр является дискретным, но имеются примеры (стратифицированная жидкость), когда он содержит непрерывную и дискретную компоненты.

4 Колебания вращающейся идеальной жидкости в замкнутом сосуде

В этом и следующем параграфах рассматриваются интересные как с физической, так и с математической точки зрения задачи о малых движениях и колебаниях идеальной жидкости в произвольном равномерно вращающемся целиком либо частично заполненном сосуде. Исследуются как эволюционные, так и спектральные задачи, причём основной упор делается на выяснение свойств частот и мод поверхностных волн.

4.1 Постановка задачи.

Будем считать, что жесткий сосуд Ω целиком заполнен идеальной несжимаемой жидкостью и равномерно вращается вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью $\vec{\omega_0} = \omega_0 \vec{e_3}$. Заметим, что если вращение происходит достаточно долго, то какими бы ни были малыми вязкие силы, имеющиеся в реальной жидкости, движение жидкости станет близким к равномерному вращению. Иными словами в состоянии относительного равновесия система "тело+жидкость"будет равномерно вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega_0}$. Если вдоль оси Ox_3 действует также гравитационное поле с ускорением $\vec{g} = -g_0 \vec{e_3}$, то равновесное давление $P_0 = P_0(x), x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, определяется по формуле

$$P_0(x) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + p_a \tag{4.1}$$

где p_a - давление в начале координат.

Рассмотрим, пренебрегая силами вязкости, малые движения идеальной жидкости, близкие к равномерному вращению. В системе координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанной с сосудом и вращающейся вместе с ним с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega_0} = \omega_0 \vec{e_3}$, уравнения Эйлера для определения относительной скорости $\vec{u}(t, x)$ и динамического движения $\vec{p}(t, x)$ принимают вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - 2\vec{u} \times \vec{\omega_0} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f}(t, x), \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{ в } \Omega), \tag{4.2}$$

где $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ -малое поле внешних сил, а член $2(\vec{u} \times \vec{\omega_0})$ учитывает действие силы Кориолиса на частицы жидкости.

При движении жидкости на твёрдой стенке сосуда $S = \partial\Omega$ должно быть выполнено условие непротекания, а в начальный момент $t = 0$ необходимо задать поле скоростей:

$$u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x) \quad (\text{ в } \ \Omega). \tag{4.3}$$

4.2 Существование решения начально-краевой задачи.

Из условий $\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{ в } \Omega), \quad u_n = 0 \quad (\text{на } S)$ следует, что поле $\vec{u}(t, x)$ можно считать функцией переменной t со значениями в подпространстве $\vec{J}_0(\Omega)$ пространства $\vec{L_2}(\Omega)$. ПустьP_0 – ортопроектор на $\vec{J}_0(\Omega)$; применяя его к обеим частям первого уравнения (4.2) (и заменяя, как обычно, $\partial/\partial t$ на d/dt), получаем уравнение

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = K\vec{u} + P_0\vec{f}(t), \quad K\vec{u} := 2\omega_0 P_0(\vec{u} \times \vec{e_3}). \tag{4.4}$$

Назовём оператор $K : \vec{J}_0(\Omega) \to \vec{J}_0(\Omega)$ кориолисовым оператором и рассмотрим его свойства.

Лемма 4.1. *Оператор K кососимметричен и ограничен в пространстве $\vec{J}_0(\Omega)$:*

$$K^* = -K, \qquad \|K\| \le 2\omega_0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для любых $\vec{u}$ и $\vec{v}$ из $\vec{J}_0(\Omega)$ имеем

$$(K\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L_2}(\Omega)} = 2\omega_0 \int_\Omega P_0(\vec{u} \times \vec{e_3}) \cdot \vec{v}\, d\Omega = 2\omega_0 \int_\Omega (\vec{u} \times \vec{e_3}) \cdot (P_0\vec{v})\, d\Omega =$$

$$= 2\omega_0 \int_\Omega (\vec{u} \times \vec{e_3}) \cdot \vec{v}\, d\Omega = ... = -2\omega_0 \int_\Omega \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{e_3})\, d\Omega =$$

$$= -2\omega_0 \int_\Omega \vec{u} \cdot P_0(\vec{v} \times \vec{e_3})\, d\Omega = -(\vec{u}, K\vec{v})_{\vec{L_2}(\Omega)},$$

откуда следует, что $K^* = -K$.

Далее

$$||K\vec{u}||^2_{\vec{L_2}(\Omega)} = 4\omega_0^2 \int\limits_\Omega |P_0(\vec{u} \times \vec{e_3})|^2 d\Omega \le 4\omega_0^2 \int\limits_\Omega |(\vec{u} \times \vec{e_3})|^2 d\Omega \le 4\omega_0^2 \|\vec{u}\|^2_{\vec{L_2}(\Omega)},$$

и потому $\|K\| \le 2\omega_0$. $\square$

Следствие 4.1. *Оператор K представи́м в виде*

$$K = iG, \quad G = G^*, \quad \|G\| \le 2\omega_0, \tag{4.6}$$

где $G = -iK$ можно назвать гироскопическим оператором $\square$

Теорема 4.1. *Решение дифференциального уравнения* (4.4) *с начальным условием* $\vec{u}(0) = \vec{u}^0$ *выражается формулой*

$$\vec{u}(t) = \exp(itG)\vec{u}^0 + \int\limits_0^t \exp(i(t-s)G)P_0\vec{f}(s)\,ds, \tag{4.7}$$

где

$$\exp(itG) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itG)^k}{k!} -$$

– группа унитарных операторов, порождённых самосопряжённым ограниченым оператором G.

Доказательство основано на непосредственной проверке. □

Возвращаясь к уравнению (4.2), применим к его обеим частям ортопроектор $P := I - P_0$ на подпространство потенциальных полей; имеем

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = 2\omega_0(I - P_0)(\vec{u} \times \vec{e_3}) + (I - P_0)\vec{f}(t). \tag{4.8}$$

Отсюда следует, что поле динамических давлений ∇p есть непрерывная функция t со значениями в $\vec{G}(\Omega)$, если $\vec{f}(t)$ непрерывна в $\vec{L}_2(\Omega)$, а $\vec{u^0} \in \vec{J}_0(\Omega)$.

Теорема 4.2. *Начально краевая задача (4.2)-(4.3) имеет при непрерывной* $\vec{f}(t) \in \vec{L}_2(\Omega)$ *и* $\vec{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega)$ *решение, для которого* $\vec{u}(t)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема в* $\vec{J}_0(\Omega)$, *а* $(\nabla p)(t)$ *- непрерывная в* $\vec{G}(\Omega)$ *функция.*

Для этого решения, как и при отсутствии гироскопических (кориолисовых) сил, когда $\omega_0 = 0$, *имеет место закон баланса кинетической энергии:*

$$\frac{1}{2}\rho \int\limits_{\Omega} |\vec{u}(t)|^2\,d\Omega = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{\Omega} |\vec{u^0}|^2\,d\Omega + \rho \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Omega} \vec{f}(s) \cdot \vec{u}(s)\,d\Omega \right) ds. \tag{4.9}$$

Доказательство. Первые свойства решений уже установлены, а формула (4.9) получается после скалярного в ($\vec{L}_2(\Omega)$) умножения обеих частей (4.4) на $\vec{u}(t)$ и с учётом того, что

$$(K\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega)} = 2\omega_0 \int\limits_{\Omega} (\vec{u} \times \vec{e_3}) \cdot \vec{u}\,d\Omega = 0.\square \tag{4.10}$$

4.3 Собственные колебания

Положим в (4.4) $\vec{f}(x) \equiv \vec{0}$ и будем считать, что

$$\vec{u}(t) = \exp(i\,\omega\,t)\vec{v}, \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega). \tag{4.11}$$

Для амплитудных функций $\vec{v} = \vec{v}(x)$ приходим с учётом (4.6) к спектральной задаче

$$G\vec{u} = \omega\vec{u} \tag{4.12}$$

на собственные значения для ограниченного самосопряжёного гироскоического оператора G.

Теорема 4.3. *Оператор G имеет спектр, совпадающий с отрезком $[-2\omega_0, 2\omega_0]$ и состоящий из точек предельного спектра:*

$$\sigma(G) = [-2\omega_0, 2\omega_0] = \sigma_{пред}(G). \tag{4.13}$$

Данному спектру во вращающейся идеальной жидкости отвечают внутренние волновые движения, обусловленные действием кориолисовых (гироскопических) сил.

Доказательство теоремы здесь не приводится. Его можно найти в п. 5.1.3. монографии "Операторные методы в линейной гидродинамике". Отметим лишь, что доказательство основано на построении для каждого ω, $0 < |\omega| < 2\omega_0$, последовательности векторных полей $\{\vec{u_j}\}_{j=1}^{\infty} \in \vec{J_0}(\Omega)$ (последовательности Вейля), такой что

$$\|G\vec{u_j} - \omega\vec{u_j}\|_{\vec{L_2}(\Omega)} \big/ \|\vec{u_j}\|_{\vec{L_2}(\Omega)} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

□

Замечание 4.1. *Если движение жидкости происходит в круговом цилиндрическом сосуде и в условиях полной невесомости, то можно установить, что совокупность собственных значений задачи(4.12), то есть её точечный спектр $\sigma_p(G)$, образует множество, плотное на отрезке $[-2\omega_0, 2\omega_0]$. Для других форм сосудов такая структура спектра может быть достаточно сложной, но общий факт* (4.13) *имеет место.* □

5 Вращение жидкости в частично заполненном сосуде.

В этом параграфе систематически применяется метод ортогонального проектирования как основной приём, позволяющий отделить ненужные детали и сформулировать задачу о движении идеальной вращающейся жидкости в виде дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, являющемся ортогональной суммой вихревого и соответственно выбранного потенциально-гармонического подпространств.

Отметим, что решения исследованной здесь задачи обладают свойствами решений как задачи параграфа 3, так и задачи параграфа 4, то есть эти свойства как бы объединяются.

5.1 О состоянии относительного равновесия

Как и в параграфе 4, считаем, что идеальная однородная несжимаемая жидкость в невозмущенном состоянии равномерно вращается вместе с сосудом с угловой скоростью $\vec{\omega_0} = \omega_0 \vec{e_3}$, однако теперь она лишь частично заполняет сосуд, занимая некоторую область Ω, ограниченную твёрдой стенкой S и равновесной поверхностью Γ. Система кординат $Ox_1x_2x_3$ жёстко связана с сосудом, а внешнее стационарное поле действует вдоль оси $Ox_3 : \vec{F_0} = -g\vec{e_3}$.

В состоянии относительного равновесия давление $P_0(x)$ в жидкости, как и в параграфе 4, распределено по закону

$$P_0(x) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + c \quad (\text{в } \Omega). \tag{5.1}$$

Если гравитационные силы достаточно велики, то есть жидкость можно считать тяжёлой, то на равновесной поверхности Γ выполняется условие $(P_0(x_3))_\Gamma - p_a = 0$, где p_a – внешнее постоянное давление. Отсюда получаем, что поверхность Γ является параболоидом вращения, уравнение которого имеет вид

$$x_3 = \frac{1}{2g}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{c - p_a}{\rho g}. \tag{5.2}$$

Постоянная c в (5.2) находится из условия равенства объёма области Ω, занятой жидкостью при твёрдотельном вращении, заданному значению V:

$$\int\limits_\Omega d\Omega = \mathrm{mes}_3\Omega = V. \tag{5.3}$$

В слабом гравитацонном поле при медленном вращении системы жидкость следует считать капиллярной, то есть учитывать поверхностные силы. Тогда форма свободной равновесной поверхности Γ определяется из условия Лапласа

$$P_0(x) - p_a = -\sigma(k_1 + k_2) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{5.4}$$

что с учётом формулы (5.1) приводит к соотноношению

$$-\sigma(k_1 + k_2) = -\rho g x_3 + \frac{1}{2}\rho\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + c - p_a, \tag{5.5}$$

которое представляет собой нелинейное уравнение в частных производных относительно функции $x_3 = f(x_1, x_2)$, задающей уравнение свободной поверхности Γ. На границе $\partial\Gamma$ поверхности Γ , как и в случае невращающейся жидкости (см. параграф 3), должно выполняться условие Дюпре-Юнга для угла смачивания δ:

$$\sigma \cos \delta = \sigma_1 - \sigma_0. \tag{5.6}$$

Условия (5.3), (5.5), (5.6) позволяют, в принципе, определить по заданному объёму V жидкости, характеристикам трёх сред на линии контакта $\partial\Gamma$ поверхностей Γ и S, интенсивности гравитационного поля g и угловой скорости вращения ω_0 конфигурацию области Ω, занятой жидкостью, и, в частности, найти уравнение равновесной поверхности Γ. Решение этой сложной нелинейной задачи здесь не рассматривается, в осесимметричном случае данный вопрос подробно обсуждается в монографии [2] (см. также [3], [4]).

5.2 Постановка задачи о малых колебаниях

Итак, будем считать, что задача об определении равновесной конфигурации жидкости, отвечающей равномерному вращению с угловой скоростью ω_0, решена, и рассмотрим движения жидкости в сосуде, близкие к твёрдотельному вращению. Как и ранее, представим давление $P(t,x)$ в жидкости в виде $P(t,x) = P_0(x) + p(t,x)$, где $p(t,x)$ – динамическое давление. Вместо малого поля относительной скорости $\vec{u}(t,x)$, описывающего движение жидкости в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанной с равномерно вращающимся сосудом, здесь удобно ввести поле смещений $\vec{w}(t,x)$ частиц жидкости. Это поле, очевидно, связано с полем скоростей соотношением

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(t,x) = \vec{u}(t,x). \tag{5.7}$$

С учётом этой связи линеаризованные уравнения Эйлера для идеальной вращающейся жидкости в системе координат $Ox_1x_2x_3$ принимают вид

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}(t,x) - 2\omega_0 \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \times \vec{e_3} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f}(t,x), \quad \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,); \tag{5.8}$$

здесь поле смещений, как и поле скоростей, является соленоидальным, так как таковым является начальное поле $\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x)$.

Граничное условие на твердой стенке S для идеальной жидкости есть условие непротекания:

$$w_n := \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{ на } S\,), \tag{5.9}$$

то есть смещение частиц вдоль (внешней) нормали $\vec{n}$ к S равно нулю.

Динамическое граничное условие на движущейся свободной поверхности $\widetilde{\Gamma}(t)$ есть снова, как и в параграфе 3, условие Лапласа для перепада давлений:

$$P - p_a = -\sigma(\tilde{k_1} + \tilde{k_2}) \quad (\text{ на } \widetilde{\Gamma}(t)\,).$$

Его линеаризация, подобная проведенной в параграфе 3, приводит к условию

$$
\begin{gathered}
p+c(t)=\sigma L\zeta := \sigma[-\triangle_\Gamma \zeta + a(x;\omega_0,\sigma)\zeta], \quad \zeta := w_n \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma p\,d\Gamma = 0, \\
a(x;\omega_0,\sigma) := -(k_1^2+k_2^2) + \rho g \sigma^{-1}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_3}) - \rho\omega_0^2\sigma^{-1} r \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_r}),
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ – радиус в цилиндрической системе координат, а $\vec{e_r}$ – орт оси Or.

Линеаризация условия Дюпре-Юнга, как уже упоминалось в параграфе 3 , даёт краевое условие

$$
\frac{\partial\zeta}{\partial e} + \chi\zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma). \tag{5.11}
$$

Вместе с начальными условиями

$$
\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}^0(x), \tag{5.12}
$$

уравнения и граничные условия (5.8) – (5.11) определяют начально-краевую задачу о малых движениях жидкости в сосуде, близких к равномерному вращению.

В силу условия соленоидальности $\operatorname{div}\vec{w}=0 \quad (\text{в } \Omega)$ и условия непротекания $w_n = 0 \quad (\text{на } S)$ на равновесной поверхности Γ выполнено условие сохранения объёма

$$
\int\limits_\Gamma w_n\,d\Gamma = \int\limits_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0. \tag{5.13}
$$

Отсюда следует, что смещение $w_n = \zeta$ (по нормали $\vec{n}$ к Γ) свободной поверхности жидкости $\widetilde{\Gamma}(t)$ в процессе колебаний, рассматриваемое при фиксированном t как элемент пространства $\vec{L_2}(\Gamma)$, принадлежит подпространству $H := L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$. Так как давление $p(t,x)$ в исходной постановке определяется с точностью до произвольной функции времени и уже нормировано условием $\int\limits_\Gamma p\,d\Gamma = 0$, то функция $c(t)$ из (5.10) определяется однозначно, и тогда динамическое граничное условие на Γ принимает вид

$$
p = \sigma B_{\omega_0}\zeta, \quad \zeta = w_n \quad (\text{на } \Gamma), \quad B_{\omega_0} = P_H L P_H, \tag{5.14}
$$

где оператор B_{ω_0} определяется дифференциальным выражением L, ортопроектором P_H на $H = L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$, а также краевым условием (5.11).

Замечание 5.1. *Общие свойства оператора B_{ω_0} – те же, что и оператора потенциальной энергии B задачи параграфа 3: это неограниченный и притом ограниченный снизу самосопряжённый (после расширения по Фридрихсу) оператор с дискретным спектром.*

Замечание 5.2. *Далее в изучаемой задаче будем рассматривать лишь статически устойчивые по первому приближению состояния равновесия: $\lambda_{min}(B_{\omega_0}) > 0$.*

Замечание 5.3. *Для классического решения начально-краевой задачи* (5.8) – (5.14) *выполнен закон баланса полной энергии в той же форме, как и для невращающейся жидкости (см. параграф 3), с заменой* $\vec{u}(t,x)$ *на* $\dfrac{\partial \vec{w}}{\partial t}$, *а* H_B *на* $H_{B_{\omega_0}}$. *Этот факт имеет место, так как в силу равенства* $\vec{u} \times \vec{e_3} \cdot \vec{u} = 0$ *работа кориолисовых сил в системе равна нулю.*

5.3 Метод ортогонального проектирования.

Переходя от классической постановки рассматриваемой здесь задачи к её операторной формулировке, будем считать $\vec{w}$ и $\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$. Тогда в силу условия соленоидальности $\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad ($ в $\Omega)$ и условия непроникновения $w_n = 0 \quad ($ на $S)$, а также потенциальности поля ∇p, получим согласно ортогональному разложению

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega),$$

что $\vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, а $\nabla p \in \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$. Поэтому будем разыскивать эти поля в виде

$$\begin{aligned} &\vec{w} = \vec{v} + \nabla\Phi, \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \\ &\nabla p = \nabla\varphi + \nabla\kappa, \quad \nabla\varphi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)\nabla\kappa \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Введём далее ортопроекторы P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно. Подставляя (5.15) в уравнение Эйлера (5.8) и действуя указанным ортопроектором на обе части полученного уравнения, будем иметь:

$$\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} - 2\omega_0 \frac{d}{dt}\Big(P_0(\vec{v} \times \vec{e_3}) + P_0(\nabla\Phi \times \vec{e_3}) \Big) = \vec{f_0} := P_0\vec{f}, \tag{5.16}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\nabla\Phi - 2\omega_0 \frac{d}{dt}\Big(P_{h,S}(\vec{v} \times \vec{e_3}) + P_{h,S}(\nabla\Phi \times \vec{e_3}) \Big) + \rho^{-1}\nabla\varphi = \nabla F := P_{h,S}\vec{f}, \tag{5.17}$$

$$-2\omega_0 \frac{d}{dt}\Big(P_{0,\Gamma}(\vec{v} \times \vec{e_3}) + P_{0,\Gamma}(\nabla\Phi \times \vec{e_3}) \Big) + \rho^{-1}\nabla\kappa = \nabla Q := P_{0,\Gamma}\vec{f}. \tag{5.18}$$

Замечание 5.4. *Соотношение* (5.18) *показывает, что при найденных из* (5.16), (5.17) *полях* $\vec{v}$ *и* $\nabla\Phi$ *поле* $\nabla\kappa$ *вычисляется непосредственно. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением лишь системы уравнений* (5.16), (5.17). *Именно здесь проявляется преимущество метода ортогонального проектирования на подпространства гильбертова пространства* $\vec{L}_2(\Omega)$.

Для удобства дальнейших преобразований введём обозначения:

$$P_{h,S}(\vec{v} \times \vec{e_3}) := \nabla\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad P_{h,S}(\nabla\Phi \times \vec{e_3}) := \nabla\Psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \tag{5.19}$$

Так как в (5.17) каждое слагаемое является градиентом некоторого скалярного поля (из пространства $H^1_{h,S}(\Omega)$), то из этого уравнения следует соотношение для потенциалов полей (интеграл Коши-Лагранжа для вращающейся жидкости)

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} - 2\omega_0 \frac{d}{dt}(\psi + \Psi) + \rho^{-1}\varphi = F \quad (\text{в } \Omega). \tag{5.20}$$

Заметим теперь, что для $\nabla\kappa \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ выполнено условие $\kappa = 0$ (на Γ), а для $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega)$ – условие $v_n = 0$ (на Γ). Потому кинематическое и динамическое условия (5.14) с учетом представлений (5.15) дают

$$\varphi = \sigma B_{\omega_0} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{5.21}$$

Рассмотрим соотношение (5.20) на Γ и учтём (5.21); получим преобразованное динамическое условие

$$\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} - 2\omega_0 \rho\frac{d}{dt}(\psi + \Psi) + \sigma B_{\omega_0} \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \rho F \quad (\text{на } \Gamma). \tag{5.22}$$

Уравнения (5.16) и (5.22) содержат в качестве искомых функций поле $\vec{v}$ из вихревого подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$ и потенциал $(\Phi)_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \cap H$, $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. При этом потенциалы ψ и Ψ находятся по указанным искомым функциям согласно формулам (5.19). Поэтому (5.16) и (5.22) можно рассматривать как систему эволюционных уравнений для $\vec{v}$ и $(\Phi)_\Gamma$, которая далее будет преобразовываться к более симметричной форме.

Как показали рассмотрения параграфа 3, след $(\Phi)_\Gamma$ гармонической функции $\Phi(x) \in H^1_{h,S}(\Omega)$ есть результат действия положительного оператора A, примененного к $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma$, то есть $A\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma\right) := (\Phi)_\Gamma$. При этом для $\Phi(x) \in H^1_{h,S}(\Omega)$ будет $(\Phi)_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \cap H$, а

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma) = \Big(H^{1/2}(\Gamma)\Big)^*.$$

Далее, если считать, что

$$\| (\Phi)_\Gamma \|^2_{H^{1/2}_\Gamma} = \int\limits_\Omega |\nabla\Phi|^2 \, d\Omega = \left\| A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma \right\|^2_{H^{1/2}_\Gamma} = \left\| \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma \right\|_{(H^{1/2}_\Gamma)^*}, \tag{5.23}$$

то оператор A отображает изометрически пространство $H^{-1/2}_\Gamma$ на $H^{1/2}_\Gamma$. Тогда, как следует из теории обобщенных функций конечного порядка (см., например, монографию Ю. М. Березанского "Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов". – Киев: "Наукова Думка", 1965. – 800 с.), оператор A изометрически отображает пространство $H^{-1/2}_\Gamma$ на $H^{1/2}_\Gamma$, а оператор $A^{1/2}$ отображает изометрически $H_\Gamma^{-1/2}$ на $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, а также H на $H_\Gamma^{1/2}$. (Напомним, что оператор $A: \ H \to H$ является компактным положительным оператором, см. параграф 3.)

Учитывая сказанное, осуществим в (5.22) замену

$$\eta := A^{1/2} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_\Gamma \right) = A^{-1/2} \left(\Phi \right)_\Gamma . \tag{5.24}$$

Тогда можно считать, что

$$\nabla \Phi = V\eta, \quad \nabla \Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad \eta \in H. \tag{5.25}$$

Лемма 5.1. *Оператор* $V \ : \ H \to \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, *введённый формулой* (5.25), *является унитарным оператором.*

Доказательство основано на соотношениях (5.23) и определении (5.24). Действительно , если $\eta \in H$ – произвольный элемент, то

$$(\eta, \eta)_H = \left(A_\Gamma^{-1/2} (\Phi)_\Gamma, A^{1/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_\Gamma \right)_H = \int\limits_\Gamma \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \dots = \int\limits_\Omega |\nabla \Phi|^2 \, d\Omega =$$

$$= (\nabla \Phi, \nabla \Phi)_{\vec{L_2}(\Omega)} = (V\eta, V\eta)_{\vec{L_2}(\Omega)},$$

откуда следует изометричность V. Так как V определён на всем H, а область его значений есть всё $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$, то V – унитарный оператор.

□

После замены (5.24) и применения слева в (5.22) оператор $A^{-1/2}$ (это действие оправдано апостериори) взамен (5.22) приходим к уравнению

$$\rho \frac{d^2 \eta}{dt^2} - 2\omega_0 \rho \frac{d}{dt} \left(A^{-1/2} (\psi)_\Gamma + A^{-1/2} (\Psi)_\Gamma \right) + \sigma B_0 \eta = \rho A^{-1/2} F, \tag{5.26}$$

где $B_0 := A^{-1/2} B_{\omega_0} A^{-1/2}$.

Запишем (после умножения на ρ) уравнение (5.16) и уравнение (5.26) в виде одного векторно-матричного уравнения в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} := \vec{J}_0(\Omega) \oplus H$ и введём обозначения

$$\begin{aligned} &P_0(\vec{v} \times \vec{e_3}) =: iG_{11}\vec{v}, \quad P_0(V\eta \times \vec{e_3}) =: iG_{12}\eta, \\ &A^{-1/2}(\psi)_\Gamma =: iG_{21}\vec{v}, \quad A^{-1/2}(\Psi)_\Gamma =: iG_{22}\eta, \end{aligned} \tag{5.27}$$

где V – унитарный оператор (5.25). Тогда в векторно-матричной форме упомянутое уравнение приобретает вид

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \end{pmatrix} - 2i\omega_0 \rho \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho P_0 \vec{f} \\ \rho A^{-1/2} (F)_\Gamma \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Теорема 5.1. *Если* $\vec{w}(t,x)$, $p(t,x)$ *– классическое решение начально-краевой задачи* (5.8) – (5.14)*, то после проведённых замен* (5.15), (5.19), (5.24), (5.27) *функции* $\vec{v}$, $\nabla\Phi$, η *удовлетворяют соотношению* (5.18)*, а также задаче Коши*

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2} - 2i\omega_0\rho G\frac{dy}{dt} + \sigma By = f(t), \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, \tag{5.29}$$

$$\begin{gathered} y = (\vec{v};\eta)^t \in \widetilde{H}, \quad G = (G_{i,j})_{i,j=1}^2, \quad B = \operatorname{diag}(0;B_0), \\ f(t) = (\rho P_0\vec{f};\rho A^{-1/2}(F)_\Gamma)^t, \end{gathered} \tag{5.30}$$

$$\begin{gathered} y^0 = (\vec{v}^0;\eta^0)^t, \quad \vec{v}^0 = P_0\vec{w}_0, \quad \eta^0 = A^{1/2}(\gamma_n\vec{w}^0), \quad \nabla F = P_{h,S}\vec{f}, \\ y^1 = (\vec{v}^1;\eta^1)^t, \quad \vec{v}^1 = P_0\vec{u}_0, \quad \eta^1 = A^{1/2}(\gamma_n\vec{u}^0). \end{gathered}$$

□

5.4 Свойства операторов задачи.

Исследуем свойства операторов G и B в задаче (5.29); эти операторы, как ясно из предыдущего, естественно назвать гироскопическим оператором и оператором потенциальной энергии соответственно.

Заметим сначала, что согласно определению (5.27)

$$2i\omega_0G_{11}\vec{v} = 2\omega_0P_0(\vec{v}\times\vec{e_3}) = K\vec{v}, \tag{5.31}$$

где $K : \vec{J}_0(\Omega) \to \vec{J}_0(\Omega)$ – кориолисов оператор, свойства которого уже изучены в лемме 4.1: $\sigma(K) = [-2i\omega_0, 2i\omega_0]$, $K^* = -K$. Отсюда следует, что

$$G_{11} = G_{11}^*, \quad \sigma(G_{11}) = [-1,1]. \tag{5.32}$$

Лемма 5.2. *Операторная матрица* G *из* (5.30) *и* (5.27) *представляет собой самосопряженный ограниченный оператор с нормой, равной единице.*

Доказательство. Пусть $y_1 = (\vec{v_1};\eta_1)^t$, $y_2 = (\vec{v_2};\eta_2)^t$ – произвольные элементы из $\widetilde{H} = \vec{J}_0(\Omega)\oplus H$. Тогда

$$(Gy_1,y_2)_{\widetilde{H}} = (G_{11}\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + (G_{12}\eta_1,\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + (G_{21}\vec{v}_1,\eta_2)_{L_2(\Gamma)}+$$

$$+(G_{22}\eta_1,\eta_2)_{L_2(\Gamma)} = -i\Big((P_0(\vec{v}_1\times\vec{e}_3),\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + (P_0(V\eta_1\times\vec{e}_3),\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} +$$

$$+(A^{-1/2}(\psi_1)_\Gamma,\eta_2)_{L_2(\Gamma)} + \big(A^{-1/2}(\Psi_1)_\Gamma,\eta_2\big)_{L_2(\Gamma)}\Big) =$$

$$= -i\Bigg((P_0((v_1+\nabla\Phi_1)\times\vec{e}_3),\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + \Bigg((\psi_1+\Psi_1)_\Gamma, \frac{\partial\Phi_2}{\partial n})_\Gamma \Bigg)_{L_2(\Gamma)} \Bigg) =$$

$$= -i\Bigg(((\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\times\vec{e}_3,\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} + (P_{h,S}((\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\times\vec{e}_3),\nabla\Phi_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} \Bigg) =$$

$$= -i\Bigg(((\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\times\vec{e}_3, v_2+\nabla\Phi_2)_{\vec{L}_2(\Omega)} \Bigg) = -i\int_\Omega (\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\times\vec{e}_3\cdot\overline{(\vec{v}_2+\nabla\Phi_2)}\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega (\vec{v}_1+\nabla\Phi_1)\cdot\overline{(-i(\vec{v}_2+\nabla\Phi_2)\times\vec{e}_3)}\,d\Omega = \cdots = (y_1, Gy_2)_{\widetilde{H}}, \tag{5.33}$$

откуда следует, что $G^* = G$. Положим теперь в (5.33) $y_1 = y_2 = y$ и воспользуемся элементарным неравенством $|(\vec{a}\times\vec{e}_3)\cdot\vec{a}| \le |\vec{a}|^2$; получим

$$|(Gy,y)_{\widetilde{H}}| = \left| \int_\Omega (\vec{v}+\nabla\Phi)\times\vec{e}_3\cdot\overline{(\vec{v}+\nabla\Phi)}\,d\Omega \right| \le \int_\Omega |\vec{v}+\nabla\Phi|^2\,d\Omega =$$

$$= \int_\Omega |\vec{v}|^2\,d\Omega + \int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\Omega = \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L_2(\Gamma)} =: \|y\|^2_{\widetilde{H}}. \tag{5.34}$$

По пути было использовано свойство ортогональности $\vec{v}$ и $\nabla\Phi$ в $\vec{L}_2(\Omega)$, а также свойство изометричности оператора V (лемма 5.1). Из (5.34) получаем, что $\|G\| \le 1$, что вместе с (5.32) дает завершение доказательства леммы. □

Замечание 5.5. *Можно проверить, опираясь на свойство* (5.33), *что при вещественных y_1 и y_2 из $\widetilde{H}$ выполнено свойство*

$$(Ay,y)_{\widetilde{H}} = 0 \quad (\, y = y_1 + iy_2, \quad y_2 = \beta y_1, \quad \beta\in\mathbb{R}\,),$$

которое является следствием равенства $(\vec{a}\times\vec{e}_3)\cdot\vec{a} = 0$ при вещественном $\vec{a}$.

Рассмотрим теперь свойства оператора B из (5.29), (5.30).

Лемма 5.3. *Если выполнено условие статической устойчивости по линейному приближению, то есть оператор B_{ω_0} из* (5.14) *положительно определен, то оператор $B = diag(0; B_0)$, $B_0 = A^{-1/2}B_{\omega_0}A^{-1/2}$, является неотрицательным неограниченным оператором. При этом оператор B_0 имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k = \lambda_k(B_0)$, и систему собственных элементов $\{u_k(B_0)\}_{k=1}^\infty$:*

$$(u_k, u_j)_H = \delta_{kj}, \quad (B_0 u_k, u_j)_H = \lambda_k\delta_{kj}. \tag{5.35}$$

Собственные значения $\lambda_k(B_0)$ могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения

$$\|\zeta\|^2_{B_{\omega_0}} \Big/ \|\zeta\|^2_A = \|B^{1/2}_{\omega_0}\zeta\|^2_H \Big/ \int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\Omega, \quad \int_\Gamma \zeta\,d\Gamma = 0, \tag{5.36}$$

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\,\textit{в}\ \Omega\,), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\,\textit{на}\ S\,), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \zeta \quad (\,\textit{на}\ \Gamma\,), \quad \int_\Gamma \Phi\,d\Gamma = 0. \tag{5.37}$$

При этом для капиллярной жидкости

$$\|B_{\omega_0}^{1/2}\zeta\|_H^2 = \int_\Gamma \left[\nabla_\Gamma(\zeta,\zeta) + a(x;\omega_0,\sigma)|\zeta|^2\right] d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \chi|\zeta|^2\, d\Gamma \tag{5.38}$$

с функцией $a(x;\omega_0,\sigma)$ *из* (5.10), *а для тяжелой жидкости*

$$\|B_{\omega_0}^{1/2}\zeta\|_H^2 = \int_\Gamma a(x;0)|\zeta|^2\, d\Gamma, \tag{5.39}$$

$$a(x;\omega_0,0) = \rho g \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_3}) - \rho\omega_0^2 r \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_r}).$$

Асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_0)$ *оператора* B_0 *при* $k \to \infty$ *имеет вид:*

$$\lambda_k(B_0) = c_0^{-1/2} k^{1/2}\left[1 + o(1)\right], \quad c_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma |a(x;\omega_0,0)|^{-2}\, d\Gamma, \tag{5.40}$$

для тяжелой жидкости;

$$\lambda_k(B_0) = c_\sigma^{-3/2} k^{3/2}\left[1 + o(1)\right], \quad c_\sigma = \frac{1}{4\pi}\mathrm{mes}_2\,\Gamma > 0 \quad (\,\sigma > 0\,), \tag{5.41}$$

для капиллярной жидкости.

Доказательство. Заметим, что при $B_{\omega_0} >> 0$ оператор B_{ω_0} имеет ограниченный обратный оператор $B_{\omega_0}^{-1}$, и потому оператор $B_0 = A^{-1/2} B_{\omega_0} A^{-1/2}$ имеет обратный оператор $B_0^{-1} = A^{1/2} B_{\omega_0}^{-1} A^{1/2}$, который в силу компактности и положительности оператора $A^{1/2}$ является компактным положительным оператором: $0 < B_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Отсюда следуют общие свойства оператора B_0 и формулы (5.35) – (5.39). Асимптотические формулы (5.40), (5.41) установлены Т.А. Суслиной. $\square$

Замечание 5.6. *Как следует из леммы 5.3, общие свойства оператора* B_0 *не зависят от того, является вращающаяся жидкость капиллярной либо тяжелой; отличие состоит лишь в асимптотических формулах* (5.40), (5.41). *Поэтому в дальнейшем будем изучать задачу Коши* (5.29), (5.30) *в этих обеих случаях одновременно.*

Замечание 5.7. *Из леммы 5.3 следует, что*

$$\ker B = \{\, y = (\vec{v}; 0)^t \;:\; \forall \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega)\,\}.$$

5.5 Исследование начально-краевой задачи

Прежде чем исследовать задачу (5.29). (5.30), изучим свойства решений задачи Коши в гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ для уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} - iG\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u = (u_1; u_2)^t, \tag{5.42}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1. \tag{5.43}$$

При этом предполагаем, что

$$G = (G_{ij})_{i,j=1}^2 = G^* \in \mathfrak{L}(H), \quad B = \mathrm{diag}(0; B_0), \quad B_0 >> 0. \tag{5.44}$$

Определение 5.1. *Будем говорить, что* $u(t)$ *– сильное решение уравнения* (5.42) *на отрезке* $[0, T]$, *если при всех* $t \in [0, T]$ *функция* $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ *и* $Bu(t) \in C([0, T]; H)$, $\dfrac{du}{dt}$ *и* $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ *также являются элементами* $C([0, T]; H)$ *и выполнено уравнение* (5.42).

Для приведения задачи (5.42) – (5.44) к задаче Коши изученного вида и получения условий разрешимости проблемы (5.42) – (5.44) осуществим замену

$$iB_0^{1/2}u_2 = \frac{du_3}{dt}, \quad u_3(0) = 0. \tag{5.45}$$

Если это соотношение можно продифференцировать по t, то

$$\frac{d^2u_3}{dt^2} = iB_0^{1/2}\frac{du_2}{dt}, \quad u_3^{'}(0) = iB_0^{1/2}u_2(0). \tag{5.46}$$

С учетом (5.45), (5.46) задачу (5.42) – (5.44) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & B_0^{1/2} \\ 0 & B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.47}$$

или в виде

$$\frac{d^2\widetilde{u}}{dt^2} - i\widetilde{G}\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \widetilde{f}(t), \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}^0, \quad \widetilde{u}^{'}(0) = \widetilde{u}^1, \tag{5.48}$$

$$\widetilde{u} := (u_1; u_2; u_3)^t \in H_1 \oplus H_2 \oplus H_2 =: \widetilde{H}, \quad \widetilde{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); 0)^t,$$

$$\widetilde{u}^0 = (u_1^0; u_2^0; 0)^t, \quad \widetilde{u}^1 = (u_1^1; u_2^1; iB_0^{1/2}u_2^0)^t,$$

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & B_0^{1/2} \\ 0 & B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{G}^*. \tag{5.49}$$

Лемма 5.4. *Оператор* $\widetilde{G}$, *действующий в гильбертовом пространстве* $\widetilde{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_2$, *является самосопряженным неограниченным (если неограничен оператор* B_0*) оператором, заданным на области определения*

$$\mathcal{D}(\widetilde{G}) = H_1 \oplus \mathcal{D}(B_0^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(B_0^{1/2}), \tag{5.50}$$

плотном в $\widetilde{H}$.

Доказательство этой леммы очевидно и предоставляется читателю.

□

Форма уравнения (5.48) позволяет представить ее решение через группу унитарных операторов
$$U(t) := \exp(it\widetilde{G}), \quad -\infty < t < \infty, \tag{5.51}$$
построенную по (неограниченному) самосопряженному оператору $\widetilde{G}$.

Воспользуемся далее следующим фактом, доказанным в теории линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

Теорема 5.2. *Если в задачи Коши*
$$\frac{dy}{dt} - iGy = f(t), \quad y(0) = y^0, \quad G = G^*, \tag{5.52}$$
выполнены условия
$$f(t) \in C^1\left([0,T]; H\right), \quad y^0 \in \mathcal{D}(G), \tag{5.53}$$
то эта задача имеет сильное решение $y(t)$ *вида*
$$y(t) = \exp\left(itG\right) y^0 + \int\limits_0^t \exp\left[iG(t-s)\right] f(s)\, ds, \tag{5.54}$$
где $\exp\left(itG\right)$ *– группа унитарных операторов, порожденных оператором* G*. При выполнении условий*
$$f(t) \in C\left([0,T]; H\right), \quad y^0 \in H, \tag{5.55}$$
формула (5.54) *дает обобщенное решение задачи* (5.52), *которое является функцией из* $C\left([0,T]; H\right)$.

□

Теорема 5.3. *Если в задаче Коши* (5.42) *–* (5.44) *выполнены условия*
$$f(t) \in C^1\left([0,T]; H\right), \quad u(t) \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{u_1^1 \in H_1, \quad u_2^1 \in \mathcal{D}(B_0^{1/2}) \subset H_2\right\},$$
$$u^0 \in \mathcal{D}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{u_1^0 \in H_1, \quad u_2^0 \in \mathcal{D}(B_0) \subset H_2\right\}, \tag{5.56}$$
то эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Пусть выполнены условия (5.56). Тогда, переходя от (5.42) – (5.44) к задаче (5.48), (5.49), имеем
$$\widetilde{f}(t) \in C^1\left([0,T]; \widetilde{H}\right), \quad \widetilde{u}^1 \in \mathcal{D}(\widetilde{G}).$$

Поэтому согласно теореме 5.2 задача (5.48), (5.49) имеет единственное решение

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \exp\left(it\widetilde{G}\right)\widetilde{u}^1 + \int\limits_0^t \exp\left(i\widetilde{G}(t-s)\right)\widetilde{f}(s)\,ds, \tag{5.57}$$

то есть такую функцию $\widetilde{u}(t)$, для которой выполнены соотношения (5.47), причем $u_2'(t) \in \mathcal{D}(B_0^{1/2})$, $u_3'(t) \in \mathcal{D}(B_0^{1/2})$ и функции $B_0^{1/2}u_2'(t)$, $B_0^{1/2}u_3'(t)$ непрерывны в H_2, $u_1'(t)$ непрерывна в H_1, а $\widetilde{u}''(t)$ непрерывна в $\widetilde{H}$.

Интегрируя в пределах от 0 до t последнее соотношение (5.47) и пользуясь свойством замкнутости оператора $B_0^{1/2}$, приходим к соотношениям (5.45), где $iB_0^{1/2}u_2 = u_3'(t) \in \mathcal{D}(B_0^{1/2})$. Поэтому можно осуществить в (5.47) обратный переход к системе уравнений (5.42), где каждое слагаемое будет непрерывной по t функцией. Теорема доказана. □

Замечание 5.8. *По ходу доказательства теоремы 5.3 установлено, что в задаче* (5.42) – (5.44) $u'(t) \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, *если выполнены условия* (5.56).

Замечание 5.9. *Для сильных решений задачи* (5.42) – (5.44) *выполнен закон баланса полной энергии в виде*

$$\left\|\frac{d\widetilde{u}}{dt}\right\|^2_{\widetilde{H}} = \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2_H + \left\|B^{1/2}u\right\|^2_H = \left\|u^1\right\|^2_H + \left\|B_0^{1/2}u^0\right\|^2_H + 2Re\int\limits_0^t \left(f(s), \frac{du}{ds}\right)_H ds. \tag{5.58}$$

Замечание 5.10. *Если взамен* (5.56) *выполнены условия*

$$f(t) \in C\left([0,T];H\right), \quad u^0 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad u^1 \in H, \tag{5.59}$$

то задача (5.42) – (5.44) *имеет обобщенное решение, выражаемое формулой* (5.57). *Для этого решения также выполнен закон баланса полной энергии* (5.58).

Вернемся к задаче (5.29), (5.30) и рассмотрим вопрос о ее разрешимрсти на основе теоремы 5.3.

Теорема 5.4. *Если в задаче* (5.29), (5.30) *выполнены условия*

$$f(t) \in C^1\left([0,T];\widetilde{H}\right), \quad y^0 \in \mathcal{D}(B), \quad y^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \tag{5.60}$$

то она имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$.

Следствием этой теоремы является утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (5.8) – (5.14).

Теорема 5.5. *Если в задаче* (5.8) – (5.14) *выполнены условия*

$$\begin{gathered} \vec{f}(t,x) \in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega)\right), \quad \vec{w}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \gamma_n\vec{w}^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B_{\omega_0}), \\ \vec{u}^0(x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \gamma_n\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(B_{\omega_0}^{1/2}), \end{gathered} \tag{5.61}$$

то она имеет единственное решение $\vec{w}(t,x)$, *для которого выполнены уравнение* (5.8) *(в смысле* $\vec{L}_2(\Omega)$ *при любом* $t \in [0,T]$*), граничное условие* (5.9), *а также динамическое условие* (5.14)*(в смысле* $H_\Gamma^{1/2}$*) и краевое условие* (5.11) *(в смысле* $H^{1/2}(\partial\gamma)$*).*

Доказательство этой теоремы здесь не приводится. Отметим только, что оно проводится по отношению к задаче Коши (5.29), (5.30) по тому же самому плану, что и соответствующее доказательство для задачи (5.42) – (5.44) (см. переход к уравнению (5.47), теоремы 5.2 и 5.3). Однако здесь в отличие от (5.45) следует сделать замену

$$i\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\,B_{\omega_0}^{1/2}A^{-1/2}\eta = \frac{d\xi}{dt}, \quad \xi(0) = 0. \tag{5.62}$$

Анализ показывает, что после обратных переходов уравнения и граничные условия исходной задачи (5.8) – (5.14) выполняются в пространствах, упомянутых в формулировке теоремы. При этом предполагается, что $\partial\Gamma$ – гладкий контур.

$\square$

Замечание 5.11. *Условие* $\gamma_n\vec{w}^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B_{\omega_0})$ *при* $\sigma > 0$ *заведомо выполнено, если* $\gamma_n\vec{w}^0 \in \mathcal{D}(B_{\omega_0}^{3/2})$. *Тогда* $B_{\omega_0}(\gamma_n\vec{w}^0) \in \mathcal{D}(B_{\omega_0}^{1/2}) = H_\Gamma^1 \subset H_\Gamma^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Замечание 5.12. *В условиях теоремы 5.5 в задаче* (5.8) – (5.14) *выполнен закон баланса полной энергии:*

$$\frac{1}{2}\left\{\rho\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}\right|^2 d\Omega + \sigma\|\gamma_n\vec{w}\|_{B_{\omega_0}}^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\rho\int\limits_\Omega |\vec{u}^0|^2\,d\Omega + \sigma\|\gamma_n\vec{w}^0\|_{B_{\omega_0}}^2\right\} + \\ + \rho\,\mathrm{Re}\int\limits_0^t\left(\int\limits_\Omega \vec{f}(t,x)\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}\,d\Omega\right)dt. \tag{5.63}$$

Предельным переходом можно установить, что соотношение (5.63) *справедливо и при*

$$\begin{gathered}\vec{f}(t,x) \in C\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega)\right), \quad \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \\ \vec{w}^0(x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \gamma_n\vec{w}^0 \in \mathcal{D}(B_{\omega_0}^{1/2}),\end{gathered} \tag{5.64}$$

когда задача (5.8) – (5.14) *может не иметь сильного, но имеет обобщенное решение, выражаемое формулой вида* (5.57).

6 Задача о собственных колебаниях идеальной жидкости, равномерно вращающейся в частично заполненном сосуде

В этом параграфе рассмотрена спектральная задача, отвечающая задаче параграфа 5. При этом применяются методы теории линейных операторов и оператор-функций, действующих в гильбертовом пространстве. Итогом исследования является доказательство существования поверхностных и внутренних волн во вращающейся идеальной жидкости и описание их свойств.

6.1 Основной операторный пучок

Вернемся к абстрактной эволюционной задаче Коши из п.5.5

$$\frac{d^2u}{dt^2} - iG\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \tag{6.1}$$

$$u = u(t) = (u_1(t); u_2(t))^t \in H = H_1 \oplus H_2, \quad B = \operatorname{diag}(0, B_0),\ B_0 \gg 0,$$

$$G = (G_{i,j})_{i,j=1}^2 = G^* \in \mathcal{L}(H),$$

и рассмотрим решения однородного уравнения (6.1), зависящие от t по закону

$$u(t) = u\exp(i\omega t), \qquad u \in H. \tag{6.2}$$

Такие решения называют собственными колебаниями с амплитудой $u \in H$ и частотой $\omega \in \mathbb{C}$.

Далее будем предполагать, что

$$\|G\| = 1, \quad \sigma(G_{11}) = \sigma_{\text{пред}}(G_{11}) = [-1, 1], \quad B_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{6.3}$$

Подстановка (6.2) в (6.1) (при $f(t) \equiv 0$) приводит к задаче на собственные значения

$$L(\omega)u := (B + \omega G - \omega^2 I)u = 0, \quad u \in H = H_1 \oplus H_2. \tag{6.4}$$

Изучим свойства возникающего операторного пучка $L(\omega)$, квадратичного относительно спектрального параметра ω.

Свойство 1^0. Спектр задачи (6.4) является вещественным.

Доказательство. В самом деле, при $\omega \neq 0$ в (6.4) можно сделать замену, которая аналогична замене (5.46):

$$B_0^{1/2}u_2 =: \omega u_3, \quad u_3 \in H_2. \tag{6.5}$$

Тогда задача (6.4), (6.5) оказывается равносильной спектральной задаче

$$\tilde{G}\tilde{u} = \omega\tilde{u}, \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & B_0^{1/2} \\ 0 & B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = (u_1; u_2; u_3)^t, \tag{6.6}$$

в гильбертовом пространстве $\tilde{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_2$. Здесь оператор $\tilde{G}$ – тот же оператор (5.49), который встретился в эволюционной проблеме (5.48); его свойства описаны в лемме 5.4.

Так как $\tilde{G}$ – самосопряженный оператор, то его спектр вещественный, и потому спектр $L(\omega)$ также вещественный.

Свойство 2^0. Собственные элементы задачи 6.4, отвечающие ненулевым собственным значениям, не имеют присоединенных.

Доказательство этого факта немедленно следует из того, что решения задачи (6.6), а потому и задачи (6.4) не имеет присоединенных элементов при $\omega \neq 0$, поскольку $\tilde{G}$ – самосопряженный оператор.

Свойство 3^0. Собственное подпространство $\ker L(0)$ пучка $L(\omega)$, отвечающее собственному значению $\omega = 0$, бесконечномерно и состоит из собственных элементов вида $u^0 = (u_1^0; 0)^t$ при любом $u_1^0 \in H_1$. Если выполнено условие $\ker G_{11} \neq \{0\}$, то собственные элементы вида $(u_1^0; 0)^t$, $u_1^0 \in \ker G_{11}$, имеют первые присоединенные элементы и не имеют вторых присоединенных. При этом для первого присоединенного элемента $u^1 = (u_1^1; u_2^1)^t$ имеем

$$u_2^1 = -B_0^{-1} G_{21} u_1^0, \qquad \forall u_1^1 \in H_1. \tag{6.7}$$

Доказательство. Для первого присоединенного элемента $u^1 = (u_1^1; u_2^1)^t$ к собственному элементу $u^0 = (u_1^0; 0)^t$ должны выполняться равенства

$$L(0)u^0 = Bu^0 = 0, \quad L(0)u^1 + L'(0)u^0 = 0, \tag{6.8}$$

откуда получаем.

$$G_{11}u_1^0 = 0, \quad B_0 u_2^1 + G_{21} u_1^0 = 0, \quad \forall u_1^1 \in H_1, \tag{6.9}$$

т. е. формулы (6.7).

Покажем теперь, что решения задачи (6.4) не имеют вторых присоединенных элементов . Действительно, для второго присоединенного элемента $u^2 = (u_2^1; u_2^2)^t$ наряду с (6.8) должно выполняться уравнение

$$L(0)u^2 + L'(0)u^1 + \frac{1}{2}L''(0)u^0 = 0,$$

которое приводит к соотношениям.

$$G_{11}u_1^1 + G_{21}u_2^1 - u_1^0 = 0, \quad B_0 u_2^2 + G_{21}u_1^1 + G_{22}u_2^1 = 0. \tag{6.10}$$

Из первого равенства (6.10) после скалярного умножения на u_1^0 имеем в силу (6.9)

$$(G_{11}u_1^1, u_1^0) + (G_{21}u_2^1, u_1^0) - ||u_1^0||^2 = (u_1^1, G_{11}u_1^0) + (u_2^1, G_{21}u_1^0) - ||u_1^0||^2 =$$

$$= -\left((u_2^1, B_0 u_2^1) + ||u_1^0||^2\right) = -\left(||B_0^{1/2}u_2^1|| + ||u_1^0||^2\right) = 0,$$

откуда следует, что $u_1^0 = 0$, в противоречие с предположением о том, что $u^0 = (u_1^0; 0)^t$ – собственный элемент.

6.2 О характере спектра операторного пучка

Запишем уравнение (6.6) в векторно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & B_0^{1/2} \\ 0 & B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

и попробуем понять, какой характер спектра можно ожидать в этой задаче.

Свойство 4^0. Если выполнено условие

$$G_{12} = G_{21}^* = 0, \tag{6.12}$$

то спектр задачи (6.11) состоит из предельного спектра в виде отрезка $I_0 := [-1, 1]$ и дискретной части, состоящей из конечнократных собственнх значений с предельными точками $\omega = \pm\infty$.

Доказательство. При выполнении условия (6.12) задача (6.11) распадается на две отдельные задачи

$$G_{11}u_1 = \omega u_1, \qquad \begin{pmatrix} G_{22} & B_0^{1/2} \\ B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

которые легко исследуются.

В самом деле, вторая задача (6.13) есть задача на собственные значения для неограниченного самосопряженного оператора, имеющего компактный (в силу предположения (6.3)) обратный оператор

$$D = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{-1/2} \\ B_0^{-1/2} & -B_0^{-1/2}G_{22}B_0^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

действующий в $H_2^2 = H_2 \oplus H_2$. Отсюда следует, что вторая задача (6.13) равносильна задаче

$$D\varphi = \omega^{-1}\varphi, \qquad \varphi = (u_2; u_3)^t \in H_2^2, \tag{6.15}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{-1/2} \\ B_0^{-1/2} & -B_0^{-1/2}G_{22}B_0^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B_0^{-1/2}G_{22} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_0^{-1/2} \\ B_0^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как D самосопряжен и компактен, то по теореме Гильберта-Шмидта получаем, что задача (6.15) имеет дискретный спектр с предельной точкой в нуле (и систему собственных элементов, образующую ортогональный базис в H_2^2). Кроме того, как следует из разложения (6.15) оператора D на множители и из теоремы М.В.Келдыша, задача (6.15) имеет счетное множество положительных и счетное множество отрицательных собственных значений. Таким образом, вторая задача (6.13) имеет дискретный спектр $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ с предельными точками $\omega = \pm\infty$.

Что касается первой задачи (6.13), то в силу предположения (6.3) спектр этой задачи состоит из отрезка $I_0 = [-1, 1]$.

6.3 Операторный пучок с аналитическим возмущением

Покажем, что ситуация, описанная в свойстве 4^0, сохраняется в задаче (6.11) и без дополнительного условия (6.12).

Переходя к изучению дискретной части спектра задачи $L(\omega)u = 0$, рассмотрим на $\mathbb{R}$ область $\omega \in \mathbb{R}\backslash I_0,\ I_0 = [-1, 1]$, и осуществим в уравнении $L(\omega)u = 0$, записанном в векторно-матричном виде

$$\omega(G_{11}u_1 + G_{12}u_2) - \omega^2 u_1 = 0, \tag{6.16}$$

$$B_0 u_2 + \omega(G_{21}u_1 + G_{22}u_2) - \omega^2 u_2 = 0,$$

замену спектрального параметра:

$$\lambda = 1/\omega \quad (\omega \neq 0). \tag{6.17}$$

Это приводит к уравнениям

$$(I - \lambda G_{11})u_1 = \lambda G_{12}u_2, \quad u_2 = \lambda(G_{21}u_1 + G_{22}u_2) + \lambda^2 B_0 u_2. \tag{6.18}$$

Так как при $\omega \in \mathbb{R}\backslash I_0$ будет $|\lambda| < 1$, а в силу (6.3) будет $\|G_{11}\| = 1$, то оператор-функция $(I - \lambda G_{11})$ обратима и обратная оператор-функция, голоморфная относительно λ при $|\lambda| < 1$, выражается рядом Неймана

$$\tilde{R}(\lambda) := (I - \lambda G_{11})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k G_{11}^k. \tag{6.19}$$

Поэтому из первого уравнения (6.18) имеем

$$u_1 = \lambda \tilde{R}(\lambda) G_{12} u_2. \tag{6.20}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (6.18), получим

$$u_2 = \lambda G_{22}u_2 + \lambda^2 B_0 u_2 + \lambda^2 G_{21}\tilde{R}(\lambda)G_{12}u_2 \quad (|\lambda| < 1). \tag{6.21}$$

Уравнение (6.21) содержит неограниченный (в силу компактности B_0^{-1}) оператор $B_0 \gg 0$ и голоморфную оператор-функцию $\lambda^2 G_{21}\tilde{R}(\lambda)G_{12}$, которая является самосопряжённой. Перейдём в (6.21) к новому искомому элементу с тем, чтобы освободиться от неограниченного операторного коэффициента B_0 и получить операторный пучок с ограниченными коэффициентами, близкий к пучку $D - \lambda I$ с оператором D из (6.14). С этой целью осуществим в (6.21) замену

$$u_3 = \lambda B_0^{1/2} u_2 \tag{6.22}$$

и применим к обеим частям (6.21) ограниченный оператор $B_0^{-1/2} > 0$.

Из (6.21), (6.22) придём к системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & B_0^{-1/2} \\ B_0^{-1/2} & -B_0^{-1/2} G_{22} B_0^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B_0^{-1/2} G_{21}\tilde{R}(\lambda) G_{12} B_0^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{6.23}$$

где слева стоит самосопряженный компактный оператор D из (6.14), свойства которого были установлены выше (см. доказательство свойства 4^0).

Замечание 6.1. *При выполнении условий* $G_{12} = G_{21}^* = 0$ *задача* (6.23) *переходит в невозмущенную задачу* (6.15) $(\lambda = \omega^{-1})$.

Обозначая операторную матрицу справа в (6.23) через

$$\Phi(\lambda) := \mathrm{diag}(0; B_0^{-1/2} G_{21}\tilde{R}(\lambda) G_{12} B_0^{-1/2}), \quad \tilde{R}(\lambda) = (I - \lambda G_{11})^{-1}, \tag{6.24}$$

запишем (6.23) в виде уравнения

$$D\varphi = \lambda\varphi + \lambda\Phi(\lambda)\varphi, \qquad \varphi = (u_2; u_3)^t \in H_2^2. \tag{6.25}$$

Этому уравнению отвечает пучок операторов

$$A(\lambda) := \lambda I - D + \lambda\Phi(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1). \tag{6.26}$$

Лемма 6.1. *В области* $\omega \in \mathbb{R} \setminus I_0$, $I_0 = [-1; 1]$, *задача* $L(\omega)u = 0$ *равносильна спектральной задаче* (6.26) *для самосопряженного пучка операторов* $A(\lambda)$, *аналитического при* $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Приведение задачи $L(\omega)u = 0$ к задаче (6.26) уже проведено выше. Покажем,что $A(\lambda)$ является самосопряженной аналитической при $|\lambda| < 1$ оператор-функцией.

В самом деле, свойство аналитичности $A(\lambda)$ следует из её определения (6.26),(6.24) и того факта,что $\tilde{R}(\lambda) = (I - \lambda G_{11})^{-1}$ аналитична при $|\lambda| < 1$. Далее, свойство самосопряженности $A(\lambda)$, т.е. соотношение

$$\left(A(\bar{\lambda})\right)^* = A(\lambda),$$

следует из того, что оператор D самосопряжен, а оператор-функция $\Phi(\lambda)$ обладает свойством

$$\left(\Phi(\bar{\lambda})\right)^* = \Phi(\lambda),$$

так как $G_{11}^* = G_{11},\ G_{12}^* = G_{21}$, а $B_0^{-1/2}$ – самосопряженный оператор.

Замечание 6.2. *При $|\lambda| < 1$ функция $\Phi(\lambda)$ принимает компактные значения, так как оператор-функция $G_{21}\tilde{R}(\lambda)G_{12}$ принимает значения из $\mathcal{L}(H_2^2)$, а $B_0^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$.*

Дальнейшее исследование свойств решений задачи $L(\omega)u = 0$ при $|\omega| > 1$ основано на изучении свойств операторного пучка $A(\lambda)$ при $|\lambda| < 1$.

6.4 Факторизация операторного пучка.

Получим условия, достаточные для факторизации пучка $A(\lambda)$. Предварительно оценим норму оператора D.

Лемма 6.2. *Оператор D из (6.15) обладает свойством*

$$\|D\| \le \|B_0^{-1/2}\| \Big((4 + \|B_0^{-1/2}\|^2)^{1/2} + \|B_0^{-1/2}\| \Big)/2. \tag{6.27}$$

Доказательство. Для любого $\varphi = (u_2; u_3)^t \in H_2^2$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|(D\varphi, \varphi)_{H_2}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & B_0^{-1/2} \\ B_0^{-1/2} & -B_0^{-1/2} G_{22} B_0^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= |(B_0^{-1/2}u_3, u_2) + (B_0^{-1/2}u_2, u_3) - (G_{22}B_0^{-1/2}u_3, B_0^{-1/2}u_3)| \leqslant$$

$$\leqslant 2||B_0^{-1/2}|| \cdot ||u_3|| \cdot ||u_2|| + ||B_0^{-1/2}||^2 \cdot ||u_3||^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|B_0^{-1/2}\| \left(\varepsilon^{-1}\|u_2\|^2 + (\varepsilon + \|B_0^{-1/2}\|)\|u_3\|^2 \right). \tag{6.28}$$

При выводе этого неравенства использованы неравенства $\|G_{22}\| \le 1$ и $2ab \le \varepsilon^{-1}a^2 + \varepsilon b^2 \quad (\forall \varepsilon > 0)$. Выберем $\varepsilon > 0$ из условия

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon + \|B_0^{-1/2}\|,$$

тогда

$$\varepsilon = \left[(4 + \|B_0^{-1/2}\|^2)^{1/2} - \|B_0^{-1/2}\| \right]/2,$$

и из (6.28) получаем

$$|(D\varphi,\varphi)_{H_2^2}| \le \frac{1}{2}\|B_0^{-1/2}\|\Big((\|B_0^{-1/2}\|^2+4)^{1/2}+\|B_0^{-1/2}\|\Big)\|\varphi\|^2_{H_2^2},$$

откуда следует оценка (6.27). □

Воспользуемся далее следующими достаточными условиями факторизации операторного пучка $A(\lambda)$.

Теорема 6.1. *Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ является самосопряженной и голоморфной в некоторой окрестности U отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$, симметричной относительно вещественной оси. Если выполнены условия*

$$A(a)\ll 0, \qquad A(b)\gg 0, \qquad A'(\lambda)\gg 0 \qquad (a\le\lambda\le b), \tag{6.29}$$

то оператор-функция $A(\lambda)$ допускает факторизацию

$$A(\lambda)=A_+(\lambda)(\lambda I-Z), \tag{6.30}$$

где оператор-функция $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в окрестности U, $Z\in$, $\sigma(Z)\subset(a,b)$, причём Z имеет положительно определённый симметризатор и, следовательно, подобен самосопряженному оператору.

Доказательство этой теоремы здесь не приводится.

Теорема 6.2. *Если выполнено условие*

$$\lambda_{min}(B_0)=:\lambda_1(B_0)>2, \tag{6.31}$$

то $\|D\|<1$ и найдётся такое $q\in(\|D\|,1)$, что на отрезке $[-q,q]$ пучок $A(\lambda)$ допускает факторизацию вида (6.30)*, где $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в любом круге $|\lambda|\le r\in(q,1)$.*

Доказательство. 1) Проверим сначала, что при $a=-q$, $b=q$, $0<q<1$, выполнено третье условие (6.29) для оператор-функции $A(\lambda)$. В самом деле, так как

$$[\lambda(I-\lambda G_{11})^{-1}]'_\lambda=(I-\lambda G_{11})^{-1}+\lambda G_{11}(I-\lambda G_{11})^{-2}=(I-\lambda G_{11})^{-2}\gg 0 \tag{6.32}$$

при $\lambda\in[-q,q]$, то из определения $\Phi(\lambda)$ (см. (6.24)) получаем, что

$$(\lambda\Phi(\lambda))'_\lambda=\operatorname{diag}\Big(0;B_0^{-1/2}G_{21}(I-\lambda G_{11})^{-2}G_{12}B_0^{-1/2}\Big)\ge 0. \tag{6.33}$$

Поэтому

$$A'(\lambda)=I+(\lambda\Phi(\lambda))'_\lambda\ge I\gg 0.$$

2) При $\lambda = q > 0$ имеем оценку

$$A(q) = qI - D + q\Phi(q) \geq (q - \|D\|)I, \tag{6.34}$$

где было использовано свойство $\Phi(q) \geq 0$, так как $(I - qG_{11})^{-1} \gg 0$ при $0 < q < 1$ в силу свойства $\|G_{11}\| = 1$. Отсюда получаем, что если $\|D\| < q < 1$, то второе условие (6.29) при $b = q$ выполнено.

3) Аналогично можно убедиться, что те же требования достаточны для выполнения первого условия (6.29) при $a = -q$.

4) Таким образом, в силу оценки (6.27) для $\|D\|$ и проведённых рассуждений получаем, что при

$$\|B_0^{-1/2}\|\Big((4 + \|B_0^{-1/2}\|)^{1/2} + \|B_0^{-1/2}\|\Big) < 2 \tag{6.35}$$

имеет место неравенство $\|D\| < 1$; и тогда при любом $q \in (\|D\|, 1)$, имеет место факторизация $A(\lambda)$.

Можно проверить, что неравенство (6.35) равносильно неравенству $\|B_0^{-1/2}\|^2 = \|B_0^{-1}\| = 1/\lambda_{min}(B_0) < 1/2$, то есть неравенству (6.31). Отметим ещё, что $A(\lambda)$ голоморфны в области $U := \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| < 1\}$, поскольку в этой области голоморфна $\tilde{R}(\lambda) := (I - \lambda G_{11})^{-1}$.

Естественным следствием теоремы 6.2 является следующее ниже утверждение о существовании дискретного спектра задачи (6.25).

Теорема 6.3. *Если выполнено условие* (6.31)*, то задача*

$$A(\lambda)\varphi = 0, \qquad \varphi = (u_2; u_3)^t \in H_2^2,$$

имеет в интервале $(-q, q)$, $q \in (\|D\|, 1)$*, дискретный спектр, состоящий из конечнократных положительных и отрицательных собственных значений* $\{\lambda_k^\pm\}^\infty$ *с предельной точкой* $\lambda = 0$*. Этим собственным значениям отвечает система собственных элементов* $\{\varphi_k^\pm\}_{k=1}^\infty = \{(u_{2k}^\pm; u_{3k}^\pm)^t\}_{k=1}^\infty$*, образующая базис Рисса в* H_2^2*.*

Доказательство. Так как выполнено условие (6.31), то по теореме 6.2 операторный пучок $A(\lambda)$ допускает факторизацию на интервале $[-q, q]$ для любого $q \in (\|D\|, 1)$, то есть имеет место тождество

$$\lambda I - D + \lambda\Phi(\lambda) \equiv A_+(\lambda)(\lambda I - Z), \qquad \sigma(Z) \subset (-q, q). \tag{6.36}$$

Полагая в этом соотношении $\lambda = 0$, имеем

$$-D = A_+(0)(-Z),$$

и так как $A_+(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| \leq q$, то оператор $A_+(0)$ имеет ограниченный обратный оператор $A_+^{-1}(0)$. Тогда

$$Z = A_+^{-1}(0) D \in \mathfrak{S}_\infty \tag{6.37}$$

Далее, согласно теореме 6.1 фактор Z имеет положительно определённый симметризатор F, то есть такой ограниченный оператор $F \gg 0$, для которого

$$(ZF)^* = ZF = K_1 = K_1^* \in \mathfrak{S}_\infty \tag{6.38}$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим при $\lambda \in [-q, q]$ взамен задачи $A(\lambda)\varphi = 0$ задачу

$$Z\varphi = \lambda\varphi \tag{6.39}$$

Как следует из (6.38), задачу (6.39) можно переписать в виде

$$K_1 F^{-1}\varphi = \lambda\varphi. \tag{6.40}$$

Осуществим здесь замену

$$F^{-1/2}\varphi = \xi \tag{6.41}$$

и перейдём от (6.40) к равносильному уравнению

$$K\xi := F^{-1/2} K_1 F^{-1/2}\xi = \lambda\xi. \tag{6.42}$$

Так как по предыдущему K_1 – компактный самосопряженный оператор, то оператор K обладает этими же свойствами.

Отсюда по теореме Гильберта-Шмидта получаем,что задача (6.42), а потому и задача $A(\lambda)\varphi = 0$ имеет при $\lambda \in (-q, q)$ дискретный спектр с предельной точкой $\lambda = 0$. Далее, отвечающая этому спектру система собственных элементов задачи (6.42) образует ортогональный базис в H_2^2. Поэтому система собственных элементов (присоединенных нет) задачи $A(\lambda)\varphi = 0$ в силу замены (6.41) образует базис Рисса в H_2^2.

Покажем, наконец, что спектр задачи (6.42) может быть разбит на две ветви положительных и отрицательных собственных значений $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$. Убедимся прежде всего, что оператор $A_+(0)$ имеет структуру

$$A_+(0) = I + T_1, \qquad T_1 \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{6.43}$$

В самом деле, приравнивая в факторизационной формуле (6.36) коэффициенты при первой степени λ, имеем

$$I + \Phi(0) = A_+(0) + A_+'(0)(-Z), \quad \Phi(0) = \mathrm{diag}(0; B_0^{-1/2} G_{21} G_{12} B_0^{-1/2}).$$

Поэтому

$$A_+(0) = I + \Phi(0) + A'_+(0)A+^{-1}(0)D =: I + T_1, T_1 \in \mathfrak{S}_\infty. \tag{6.44}$$

Отсюда и из (6.37) имеем

$$Z = (I+T)D, \qquad T = (I+T_1)^{-1} - I \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{6.45}$$

то есть оператор Z является слабым возмущением самосопряженного компактного оператора D, имеющего,согласно свойству 4^0 из п.2, две ветви положительных и отрицательных собственных значений. Снова (как и в свойстве 4^0 п.2), опираясь на теорему М.В.Келдыша, приходим к выводу, что задача на собственные значения $Z\varphi = \lambda\varphi$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$. Теорема доказана.

Из теоремы 6.3 можно сделать такой важный вывод.

Теорема 6.4. *Если выполнено условие $\lambda_{min}(B_0) > 2$, то задача на собственные значения $L(\omega)u = 0,\ u = (u_1; u_2)^t \in H_1 \oplus H_2$ имеет в области $\omega \in \mathbb{R}\backslash I_0,\ I_0 = [-1, 1]$, дискретный спектр собственных значений $\omega_{k\ k=1}^{\pm\infty}$, $\omega_k^\pm = 1 \setminus \lambda_k^\pm$, с предельными точками $\omega = \pm\infty$. При этом набор собственных элементов*

$$\varphi_k^\pm = \left(u - 2k^\pm; (\omega_k^\pm)^{-1} B_0^{1/2} u_{2k}^\pm\right)^t \in H_2^2, \tag{6.46}$$

отвечающих собственным значениям $\omega_{k\ k=1}^{\pm\infty}$, образует базис Рисса в пространстве H_2^2.

Замечание 6.3. *Если система элементов* (6.46) *образует базис Рисса в H_2^2, то говорят, что система собственных элементов $\{u_{2k}^\pm\}_{k=1}^\infty$ задачи*

$$u_2 = \lambda G_{22}u_2 + \lambda^2 B_0 u_2 + \lambda^2 G_{21}(I - \lambda G_{11})^{-1} G_{12} u_2 \qquad (\|\lambda\| = \|\omega\|^{-1} < 1), \tag{6.47}$$

образует двукратный базис Рисса в H_2^2. Таким образом, теорема 6.4 утверждает, что этот факт двукратной базисности для собственных элементов уравнения (6.47) *имеет место.*

6.5 Дефектная базисность системы собственных элементов.

До сих пор предполагалось,что выполнено условие $\lambda_{min}(B_0) > 2$, приводящее к неравенству $\|D\| < 1$ и возможности факторизации пучка $A(\lambda)$. Если это условие не выполнено,то такой факторизации может не быть.В этом случае взамен свойства базисности Рисса можно говорить о базисности Рисса с точностью до конечного дефекта, или дефектной базисности системы собственных элементов.Здесь следует применить следующий общий факт.

Теорема 6.5. *Если для операторного пучка $A(\lambda)$,являющегося голоморфной в нуле самосопряженной оператор-функцией, выполнены условия*

$$A(0) \in \mathfrak{S}_\infty, \quad A'(0) \gg 0, \tag{6.48}$$

то для некоторого $\varepsilon > 0$ собственные элементы $A(\lambda)$,отвечающим собственным значениям из промежутка $(-\varepsilon, \varepsilon)$,образуют дефектный базис Рисса в гильбертовом пространстве.

Доказательство этой теоремы здесь не приводиться.

Теорема 6.6. *Система собственных элементов операторного пучка*

$$A(\lambda) := \lambda I - D + \lambda\Phi(\lambda) \qquad (\|\lambda\| < 1),$$

отвечающих собственным значениям из любого промежутка $-\varepsilon \le \lambda \le \varepsilon$, образует базис Рисса с конечным дефектом в пространстве H_2.

Доказательство основано на проверке условий (6.48). Имеем с учетом формулы (6.33)

$$A'(0) = I + (\lambda\Phi(\lambda))'_\lambda|_{\lambda=0} = I + \mathrm{diag}(0; B_0^{-1/2} G_{21} G_{12} B_0^{-1/2}) \ge I \gg 0, \tag{6.49}$$

$$A(0) = -D \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Так как $A(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция при $|\lambda| < 1$, то в качестве ε можно взять любое число $0 < \varepsilon < 1$.

Теорема 6.7. *Собственные элементы задачи $L(\omega)u = 0$,отвечающие собственным значениям $\omega_k^\pm = 1/\lambda_k^\pm$, расположенным при $|\omega| > 1/\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, при нормировке $\|u_k^\pm\| = 1$ обладают свойством*

$$\|u_{1k}^\pm\|_{H_1} \to 0, \qquad \|u_{2k}^\pm - (\omega_k^\pm)^{-2} B_0 u_{2k}^\pm\|_{H_2} \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{6.50}$$

Доказательство следует из равенств $L(\omega_k^\pm)u_k^\pm = 0$, то есть соотношений

$$u_{1k}^\pm = (\omega_k^\pm)^{-1}(G_{11}u_{1k}^\pm + G_{12}u_{2k}^\pm), \tag{6.51}$$

$$u_{2k}^\pm - (\omega_k^\pm)^{-2} B_0 u_{2k}^\pm = (\omega_k^\pm)^{-1}(G - 21 u_{1k}^\pm + G_{22}u_{2k}^\pm),$$

с учетом того, что $\omega_k^\pm = 1/\lambda_k^\pm \to \pm\infty (k \to \infty)$, $\|G_{ij}\| \le 1 (i, j = 1, 2)$.

Замечание 6.4. *Можно доказать, основываясь на рассмотрении спектральной задачи (6.6), что точки$\omega = \pm 1$ не являются точками накопления собственных значений $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.*

Замечание 6.5. *Можно доказать,используя вариационные принципы для ветвей собственных значений операторных пучков,что в задаче $L(\omega)u = 0$ для собственных значений $\omega_k^\pm$ справедливы двусторонние оценки*

$$\Big(1 + 4\lambda_k(B_0)\Big)^{1/2} - 1 \le 2|\omega_k^\pm| \le \Big(1 + 4\lambda_k(B_0)\Big)^{1/2} + 1, \quad k \in \mathbb{N} \tag{6.52}$$

6.6 О существенном спектре задачи.

О существенном спектре задачи.До сих пор спектр задачи$L(\omega)u = 0$ изучался вне промежутка $[-1, 1] =: I_0$.Рассмотрим теперь случай,когда спектральный параметр $\omega \in I_0 = [-1, 1]$.

Теорема 6.8. *В предположении*

$$\sigma(G_{11}) = \sigma(G_{11}) = [-1, 1] = I_0 \tag{6.53}$$

весь отрезок I_0 принадлежит существенному (предельному) спектру задачи $L(\omega)u = 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение $L(\omega)u = 0$ в виде системы:

$$G_{11}u_1 + G_{12}u_2 = \omega u_1, \Psi(\omega)u_2 = -\omega G_{21}u_1, \tag{6.54}$$

$$\Psi(\omega) := B_0 + \omega G_{22} - \omega^2 I. \qquad (|\omega| \leq 1)$$

Будем сначала считать, что выполнено условие $\lambda_{min}(B_0) > 2$. Тогда при всех $\omega \in [-1, 1] = I_0$ оператор $\Psi(\omega) \gg 0$,так как

$$\Big(\Psi(\omega)u_2, u_2\Big) \geq (B_0u_2, u_2) - |\omega| \|u_2\|^2 - |\omega|^2 \|u_2\|^2 \geq \tag{6.55}$$

$$\geq [\lambda_{min}(B_0) - 2] \|u_2\|^2.$$

Поэтому при любом $\omega \in I_0$ оператор $\Psi(\omega)$ обратим и имеет компактный обратный оператор

$$\Big(\Psi(\omega)\Big)^{-1} = B_0^{-1/2}\Big(I + \omega B_0^{-1/2} G_{22} B_0^{-1/2} - \omega^2 B_0^{-1})^{-1} B_0 {-} 1/2. \tag{6.56}$$

Находя из второго уравнения (6.54) элемент u_2 и подставляя его в первое, получим уравнение для u_1:

$$M(\omega)u_1 := \big[G_{11} - \omega G_{12}[\Psi(\omega)]^{-1} G_{21}\big]\, u_1 = \omega u_1. \tag{6.57}$$

Здесь $G_{11} = G_{11}^* \in \mathcal{L}(H_1)$ и $\sigma(G_{11}) = \sigma_{\text{пред}}(G_{11}) = I_0$, а слагаемое $V(\omega) := -\omega G_{12}\Big[\Psi(\omega)\Big]^{-1} G_{21}$ есть аналитическое самосопряженное возмущение, принимающее при $\omega \in I_0$ компактные значения.

Докажем теперь, что предельный (существенный) спектр задачи (6.57) совпадает с $I_0 = [-1, 1]$. Зафиксируем произвольные $\omega \in I_0$ и рассмотрим оператор $M(\omega_1)$, равный сумме ограниченного оператора G_{11} и компактного самосопряженного оператора $V(\omega_1)$. Согласно известной теореме Вейля предельный спектр $\sigma\Big(M(\omega_1)\Big)$ оператора $M(\omega_1)$ совпадает с предельным спектром $\sigma(G_{11}) = [-1, 1] = I = 0$.

По определению предельного спектра для любого $\omega_2 \in I_0$ найдётся последовательность Вейля $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H_1$, $\|v_k\|_{H_1} = 1$, зависящая от ω_1 и ω_2 и такая, что

$$M(\omega_1)v_k - \omega_2 v_k \to \quad (k \to \infty).$$

Выбирая $\omega_2 = \omega_1$ и соответствующую последовательность Вейля $\{v_k\}_(k = 1)^{\infty}$, приходим к выводу, что для неё

$$\lim_{k\to\infty}[M(\omega_1)v_k - \omega_1 v_k] = 0.$$

Это равенство означает,что произвольно выбранная точка $\omega_1 \in I_0$ принадлежит предельному (существенному) спектру задачи (6.57).

Снимем теперь ограничение $\lambda_{min}(B_0) > 2$ на оператор $\Psi(\omega)$. Так как спектральная задача $\Psi(\omega)u_2 = 0$ после замены $B_0^{1/2} = \omega u_3$ переходит в задачу

$$\begin{pmatrix} G_{22} & B_0^{1/2} \\ B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D\varphi = \omega^{-1}\varphi,\ \varphi = (u_2; u_3)^t \in H_2^2, \tag{6.58}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{1/2} \\ B_0^{1/2} & -B_0^{-1/2}G_{22}B_0^{-1/2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty,$$

то операторный пучок $\Psi(\omega)$ имеет дискретный спектр, расположенный на $\mathbb{R}$ и имеющий предельные точки $\pm\infty$.

Поэтому на отрезке $I_0 = [-1, 1]$ может быть не более конечного числа точек,в которых оператор $\Psi(\omega)$ не имеет обратного. В остальных точках, не являющихся собственными значениями $\Psi(\omega)$, оператор $\Psi(\omega)$ имеет обратный оператор вида (6.56), и в этих точках можно повторить проведенное выше доказательство принадлежности этих точек предельному спектру задачи (6.57). Так как предельный спектр — замкнутое множество,то доказываемое утверждение справедливо для всех точек $\omega \in I_0 = [-1, 1]$.

Подводя итоги общим рассмотрением спектра абстрактной задачи $L(\omega)u = 0$, отметим,что он состоит из предельного спектра $I_0 = [-1, 1]$,вне которого находятся точки дискретного спектра с предельными точками $\pm\infty$.

Содержание

Список литературы

[1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.*– Москва: Наука, 1989. – 416 с.

[2] Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Гидромеханика невесомости.* - М.: Наука, 1976. - 504 с.